# 定積分の定義と連続関数の積分可能性に関する一考察

# 定積分の定義と連続関数の積分可能性に関する一考察

岐阜大学工学部応用物理コース/岐阜大学教職課程支援センター
宇佐美広介

キーワード： 数学，微分積分学，定積分，連続関数

## 1 はじめに

定積分の概念は数学の応用の面からは非常に重要な概念である。これはまず高等学校で導入されるが，精確な定義は大学初年次の微分積分関係の授業において与えられる。その定義の仕方には主に以下の２つの論法がある。

(A) 上積分と下積分とを導入し，両者が一致する場合にその値を定積分と定義する
(B) 後述の定義３のようにリーマン和の極限として定義する

数学独特の論理展開になじんでいる者には定義(A)は明快なものであろう。(筆者も一応，同意はする。）しかし，応用科学に携わる者にとっては定義（B）の方がはるかになじみやすいと思われる。実際，物理学・工学等のテキストでは定義（B）に基づいて理論が構築されている。(拙著[１，第３章]を参照。）また，高等学校のテキスト（数学Ⅱ，数学Ⅲ）においても定義（B）に基づいた話題が提供されている。

もちろん，２つの定義は同値であり，理論的にはどちらの定義を用いても問題はない。しかし，多くの微分積分のテキストでは定義（A）が採用されている；例えば古典的名著[２，第３章]はそうである。その理由はとにかく論理展開のしやすさだと思われる。実際，重要な後述の定理１（連続関数の積分可能性）は定義（A）に基づけば証明は比較的平易であるが，定義（B）の下ではやや手間がかかる。

実はこのような状況に筆者は以前から違和感を抱いていた。筆者の見解としては前述のように“数学のヘビーユーザー”である理工系学生にとっては定義（B）を採用する方が分かり易いと思われるからである。しかし，それでは「連続関数の積分可能性」の証明が面倒になってしまう・・・定義(B)の下でのこの事実の分かり易い証明はないものだろうか・・・？と折に触れて思索を巡らせていた。

幸いなことに，定義（B）の下での「連続関数の積分可能性」の比較的分かり易い証明を得ることができた。本稿ではこれを紹介したいと思う。

なお，本稿の内容はすでに学内・学外のいくつかのセミナー・勉強会・講演会において報告済みであり，参加者からは多くの好意的なコメントをいただいている。

## 2 諸定義，及び主結果

主結果，およびその証明のために定積分に関する定義をいくつか与えよう。

**定義1** 有界閉区間 $[a,b]$ 内に左から順に $n$ 個の点 $x_0(=a)$, $x_1$, $x_2, .., x_{n-1}$, $x_n(=b)$ を任意に取り，区間 $[a,b]$ を $n$ 個の小閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ に分割することを区間 $[a,b]$の分割とよぶ。分割には例えば$\Delta$と名をつけ，

$$\text{分割}\,\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

のように表す。また，$|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\dots,n\}$ を分割 $\Delta$ の幅とよぶ。

**定義2** $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義される有界な関数とする。(1)で与えられる分割$\Delta$に対して $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ を取り，$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とおこう。これを分割$\Delta$ に付随する（ひとつの）代表系と呼ぶことにする。このとき，

$$S(f,\Delta,p) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1})$$

を区間 $[a,b]$ 上の分割$\Delta$，代表系 $p$ による関数 $f(x)$ のリーマン（Riemann）和とよぶ。

次が前節で言及した定義（B）による定積分の精確な定義である。

**定義3** $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義される有界な関数とする。次のような実数 $I$ が存在するとき，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で（リーマン）積分可能とよばれる：

任意の$\varepsilon > 0$ に対して正数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を上手く選べば次が成立する。
『分割$\Delta$ の幅が$|\Delta| < \delta$ ならば，付随する代表系 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ が何であっても，

$$|S(f,\Delta,p) - I| < \varepsilon \text{』} \tag{2}$$

上の定義において，この実数 $I$ を $f(x)$ の $[a,b]$ 上での定積分といい，

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

と表す。また，(2)のことを簡明に以下のように書き表すことにする：

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta,p) = I$$

本稿の主結果は次の定理の定義３に基づいた証明を与えることである：

**定理1**　閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ はリーマン積分可能である。

## 3 準備

定理１の証明に必要な予備的考察をいくつか与えよう。

**定義4**　次のような関数 $z(x)$ を区間 $[a,b]$ 上の折れ線関数とよぶことにする：
・$z(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で連続；
・$z(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で区分的に１次関数

$z(x)$, $w(x)$ が折れ線関数ならば $z(x)+w(x)$, $|z(x)|$ も折れ線関数になることに注意してほしい。この事実は後ほど活用される。なお，折れ線関数は区分的一次関数(piecewise linear function) ともよばれる。

定義３から次の２つの補題は容易に証明できる（[1，第３章]，［２，第３章])。

**補題1**　関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で積分可能とする。このとき次が成り立つ。
(i)　$f(x)+g(x)$ も区間 $[a,b]$ 上で積分可能である。
(ⅱ) 区間 $[a,b]$ 上で $f(x)\le g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ である。

**補題2**　関数 $f(x)$ が区間 $[a,c]$ 上で積分可能；かつ区間 $[c,b]$ 上で積分可能ならば $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で積分可能である。

次の補題は本項の主定理の証明に重要な役割を果たす。

**補題3**　(i)　単項式の関数 $hx^m$ $\left(m=0,1,2,\dots;\ h\text{: 実数}\right)$ は任意の区間 $[a,b]$ 上で積分可能で

$$\int_a^b hx^m\,dx = \frac{h}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}) \tag{3}$$

（ⅱ）区間 $[a,b]$ 上の１次関数は$[a,b]$ 上で積分可能。

（ⅲ）区間 $[a,b]$ 上の折れ線関数は $[a,b]$ 上で積分可能。

本稿の主目的のためには補題３(ⅰ)は $m=0,1$ の場合のみ示せば十分である。しかし，一般の $m$で証明可能なのでこのかたちで主張を与えておく。

**補題３の証明**　(ⅰ) $h=1$として証明を行うので十分であろう。また，$0<a<b$ の場合の証明でよいだろう。当然だが定義３に則った証明を与える。(1)のような分割 $\Delta$と付随する任意の代表系 $p=(p_1,\ p_2,\dots,p_n)$ を取ろう。

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} p_i^m\,(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}) \tag{4}$$

を示そう。各 $i$ に対して

$$x_{i-1}^m\le\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}x_i^{m-l}x_{i-1}^l\ \le x_i^m$$

である。よって

$$p_i^m=\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}x_i^{m-l}x_{i-1}^l\ +e_i$$

で「誤差項」$e_i$ を定義すれば，$x_{i-1}^m\ \le p_i^m\ \le x_i^m$ よりその評価は

$$|e_i|\le x_i^m-x_{i-1}^m=(x_i-x_{i-1})\sum_{l=0}^{m}x_i^{m-l}x_{i-1}^l\ \le\ |\Delta|(m+1)b^m \tag{5}$$

である。したがって，リーマン和 $S(x^m,\Delta,p)$ については

$$S(x^m,\Delta,p)=\sum_{i=1}^{n} p_i^m\,(x_i-x_{i-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}x_i^{m-l}x_{i-1}^l+e_i\right](x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})(x_i^m+x_i^{m-1}x_{i-1}+\cdots+x_ix_{i-1}^{m-1}+x_{i-1}^m)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}e_i(x_i-x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} \left( x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1} \right) + \sum_{i=1}^{n} e_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}) + \sum_{i=1}^{n} e_i (x_i - x_{i-1}) \tag{6}$$

と計算できる。ここで（5）を用いて

$$\left| \sum_{i=1}^{n} e_i \, (x_i - x_{i-1}) \right| \le |\varDelta| (m+1) b^m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = |\varDelta| (m+1) b^m (b-a)$$

なので(6)から(4)とわかり， $h = 1$ とした(3)を得る。

（ⅱ）（ⅰ）と補題１（ⅰ）から明らかであろう。

（ⅲ）折れ線関数は区分的に１次関数なので，（ⅱ）と補題２を用いればよい。（証明終）

次の補題も重要である。

**補題4**　区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は折れ線関数により $[a,b]$ 上で一様に近似できる；つまり折れ線関数の関数列 $\{z_n(x)\}$ で

$$\lim_{n \to \infty} \left( \max_{[a,b]} |f(x) - z_n(x)| \right) = 0 \tag{7}$$

となるものが存在する。

**証明**　連続関数の区間 $[a,b]$ 上での一様連続性（[2，定理 14]）を用いれば証明できるが，ここでは直観的な説明を与えよう。

$n = 1, 2, \ldots,$ とする。$xy$平面内に次のような帯状の集合 $A_n$ を考えよう：

$$A_n = \{ (x,y) \mid a \le x \le b, \text{かつ}\, f(x) - \frac{1}{n} \le y \le f(x) + \frac{1}{n} \}$$

$f(x)$の連続性により $A_n$ は一繋がりの「帯」になる。（$f(x)$ が不連続の場合には必ずしもそうならない。）この帯状集合 $A_n$ の左端の線分 $x = a, f(a) - 1/n \le y \le f(a) + 1/n$ 上の点と右端の線分 $x = b,\ f(b) - 1/n \le y \le f(b) + 1/n$ 上の点を両端点とし，かつ集合 $A_n$ 内に収まる折れ線関数 $z_n(x)$を描くことが可能である。（いわゆる角になる点の個数はもちろん有限個としておかねばならない。）当然，区間 $[a,b]$ 上で $|f(x) - z_n(x)| \le 1/n$ なのでこの関数列 $\{z_n(x)\}$ は(7)を満たしている。　（証明終）

## 4　主定理の証明

では定義（B）に基づいた定理１の証明を与えよう。

**定理1の証明**　関数列$\{z_n(x)\}$を（7）を満たす折れ線関数からなる関数列とする。まず

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b z_n(x)dx \equiv J \quad \text{が有限な実数として確定する} \tag{8}$$

ということを示す。そして(1)のように分割$\Delta$ と付随する代表系 $p=(p_1,\ p_2,\dots,p_n)$ を任意にとると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta,p)=J \tag{9}$$

となることを示そう。証明を３つのステップに分ける。

第１ステップ：　まず(8)を示そう。そのためには数列$\left\{\int_a^b z_n(x)dx\right\}$が Cauchy 列となることを示せばよい([1,　定理 1.3]，［2,　定理 8])。任意に$\varepsilon>0$ をとる。(7)により

$$n \geq N \quad \text{ならば}\ x\in[a,b]\ \text{に対して}\quad |f(x)-z_n(x)|<\varepsilon$$

となる自然数$N=N(\varepsilon)$が存在する。よって，$n,\ m\ \geq N$ ならば

$$|z_n(x)-z_m(x)| \leq |z_n(x)-f(x)|+|f(x)-z_m(x)| < 2\varepsilon$$

となる。ここで，関数 $|z_n(x)-z_m(x)|$ と定数関数$2\varepsilon$はともに折れ線関数になること；したがって補題３(ⅱ)により積分可能なことに注意せよ。よって，この関数に補題１(ⅱ)を用いれば $n,m\ \geq N$ のとき

$$\left|\int_a^b z_n(x)\,dx-\int_a^b z_m(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |z_n(x)-z_m(x)|\,dx$$
$$\leq \int_a^b 2\varepsilon\,dx = 2\varepsilon(b-a)$$

となるので数列$\left\{\int_a^b z_n(x)dx\right\}$が Cauchy 列になることがわかる。つまりある実数 $J$ に対して(8)が成立する。

第２ステップ：　(8)の極限値 $J$ が折れ線関数列の選び方に依らないことを示す必要がある。関数列$\{w_n(x)\}$を折れ線関数の関数列で

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{[a,b]}|f(x)-w_n(x)|\right)=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b w_n(x)\,dx=K：\text{ある実数}$$

となるものとしよう。つまり任意に $\varepsilon>0$ をとると，

$$n\ \geq N\quad \text{ならば}\ x\ \in[a,b]\ \text{に対して}\quad |f(x)-z_n(x)|<\varepsilon,\quad \text{かつ}\quad |f(x)-w_n(x)|<\varepsilon$$

となる自然数 $N=N(\varepsilon)$ の存在がわかる。よって，$n\ \geq N$ ならば

$$|z_n(x)-w_n(x)|\leq\ |z_n(x)-f(x)|+|f(x)-w_n(x)|<\ 2\varepsilon$$

となる。したがって $n\ \geq N$ ならば第１ステップと同様にして

$$\left|\int_a^b z_n(x)\,dx-\int_a^b w_n(x)\,dx\right|<\ \int_a^b|z_n(x)-w_n(x)|\,dx<2\varepsilon(b-a)$$

となる。$n\ \to\infty$ として $|J-K|\ \leq 2\varepsilon(b-a)$ を得る。$\varepsilon>0$ は任意なので $\varepsilon\to 0$ として $J=K$ がわかる。よって，(8) における極限値 $J$ の値は折れ線の関数列の選び方には依存しない。

第３ステップ：　任意に $\varepsilon>0$ をとる。第１ステップのように

$$n\ \geq N_1\quad \text{ならば}\ x\ \in[a,b]\ \text{に対して}\quad |f(x)-z_n(x)|<\varepsilon \tag{10}$$

となる自然数 $N_1=N_1(\varepsilon)$ がある。また，(8) によりある自然数 $N_2=N_2(\varepsilon)\geq N_1$ に対して

$$\left|\int_a^b z_{N_2}(x)\,dx-J\right|<\varepsilon \tag{11}$$

とできる。（10）により当然

$$x\ \in[a,b]\ \text{に対して}\quad \left|f(x)-z_{N_2}(x)\right|<\varepsilon$$

となっている。これよりリーマン和の定義（定義２）から

$$\left|S(f - z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|f(p_i) - z_{N_2}(p_i)\right|(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b-a) \tag{12}$$

とわかる。折れ線関数 $z_{N_2}(x)$ の積分可能性を定義３に従って書き下せば，次のような $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在するということになる:

『(1) のような分割 $\mathit{\Delta}$ が $|\mathit{\Delta}| < \delta$ ならば，代表系 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ が何であっても

$$\left|S(z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p) - \int_a^b z_{N_2}(x)\,dx\right| < \varepsilon \text{』} \tag{13}$$

よって，$|\mathit{\Delta}| < \delta$ ならば $p = (p_1,\ p_2, \dots, p_n)$ が何であっても(12)，(13)，(11) から

$$|S(f, \mathit{\Delta}, p) - J| = |S(f - z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p) + S(z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p) - J|$$

$$\le |S(f - z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p)| + \left|S(z_{N_2}, \mathit{\Delta}, p) - \int_a^b z_{N_2}(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b z_{N_2}(x)\,dx - J\right|$$

$$\le \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = (b-a+2)\varepsilon$$

となり(9)を得る。（証明終）

## 参考文献


[1]　宇佐美広介・澤田宙広・橋本隆司・宮島信也・室政和,『実例詳説　微分積分』, 培風館，２０１９年

[2]　高木貞治,『解析概論』, 改訂第３版，岩波書店，１９８３年

**Remarks on definitions of definite integral and integrability of continuous functions**

Applied Physics Course, Faculty of Engineering, Hiroyuki USAMI

**Abstract**: We discuss the definitions of definite integrals. To see the utility of the definition of definite integrals as limits of Riemann sums, we give a simple and elementary proof of integrability of continuous functions.

**Keywords** : mathematics, calculus, definite integral, continuous function