

小学校高学年からの複合量の認識を高めるためのデータ活用 — 体積に関するフェルミ推定を扱った問題解決に向けて —

Utilizing data to improve understanding of compound quantity for from 5th to 8th graders

– For problem solving dealing with Fermi task about solid density –

稲葉 芳成*
Yoshinari INABA

河崎 哲嗣**
Tetsushi KAWASAKI

山本 春輝***
Haruki YAMAMOTO

要旨：重さと体積の複合量である「密度」は、「混み具合」や「こまやかさの度合い」を表す。しかし、この度合いに関連した概念とする「人口密度」が小学校で扱われるのみで、身の回りの様々な物質の密度は中学校理科で扱われる現状にある。ものの浮き沈みなど身近な現象について、媒質に加え物質そのものの密度の認識理解が必要となる。密度の認識をさらに高めれば、体積と重さを推測する活動にも結びつく。小・中学生を対象に、密度の量感を高める活動によって、問題解決を目指した教育実験である。子どもの密度への理解が十分でないことを示唆する調査結果や数学的モデリングの問題解決に結びつく教材の可能性について検討する。

語句：密度、複合量、数学的モデリング、問題解決

1 はじめに

日常の身の回りで起こる様々な出来事についての科学的な理解が容易でない事例は少なくない。そのひとつは「速さ」や「密度」のような複合量について加法性が成り立たない場面があげられる。密度は、重さ^(注1)と体積の2量で定まる物質に対する固有な量とは別に、物質の状態によって変化する量でもある。固体・液体・気体によって密度も変化するために、正しく認識できない状況も生み出す。例えば熱気球が浮く原因は、加熱によって気体の分子運動が活発となって体積が大きくなることから説明されるが、突然「温めた空気は上昇し冷やすと下降する現象」だけで判断してしまうことも考えられる。

「空気が温められる」→「膨張して体積が増える」→「密度が小さくなる、または外の空気に対する比重が小さくなる」→「浮力が生じる」という思考過程に辿り着くためには、密度が単なる重さと体積の割合ではなく、同じ物質でも温度により体積が変化する性質を理解しなければならない。

岩田(2014)によると、日常的に使用される日本語の、「重い」「軽い」といった表現や、その名詞形である「重さ」には、「質量」「圧力」「密度」「重心のかかり方」などが包含されているとした。さらに「鉄は重くて、発泡スチロールは軽い。重い物は、大きくするとどんどん重くなるけど、軽い物は大きくしてもほとんど重くならない。」といった物質固有の量概念の形成を「素朴密度概念」と名付け、中学1年生理科において「密度」を学習した際に「科学的な密度概念」の形成に至るものとしている。ここで

科学的な密度概念とは、単位体積あたりの質量として定義される量であることを理解するだけではなく、同温同圧下で物質に固有なものであり、純物質の種類の判断に利用可能であるという表象までが形成された状態を意味する。単に、密度を形式的に計算できるだけでは、科学的密度概念が形成されたとはい判断しない。

としている。

それに対して算数・数学教育においては、量 (quantity) と質 (quality) を区別している (国立教育政

*立命館宇治中学校・高等学校 **岐阜大学 ***岐阜大学大学院教育学研究科

策研究所&日本学術会議，2008)。つまり単位面積あたりの人数という「混み具合」を表す量として人口密度は扱われ、単位体積あたりの重さを表す密度は、物質の状態によって体積が変化するために中学校理科において扱われている。同じ用語の密度を含んでも、教科内容での指導上の配慮が必要である。

しかし、速さのような距離と時間の（連続量）／（連続量）を扱う学習活動では、離散量を具象で示して「混み具合」を実感できる人口密度とは異なり、子ども達に速さの量感を得させるために有効な実験や活動が必要となる（村橋ら，2018）。水の密度を基準とした比重の考えで統一すれば、物質の密度が連続量の複合量であっても、速さを扱う活動よりも簡易であり、上手く身近な具象を準備すれば複合量の認識を高められる可能性がある。

したがって密度の認識や量感を高めるための教育実験を行うことによって、次のような物質に固有な密度に関するフェルミ推定を扱う問題解決の実践を行った。

一つは、重さと体積の複合量であることを用いて、密度の異なる 2 種の物質を混ぜ合わせた比を求める問題である。混合物の体積と重さのそれぞれの関係式による 2 元連立 1 次方程式の問題は、自然数比となる混合物とすれば、重さまたは体積のいずれかだけで 2 元 1 次の不定方程式を扱うことになる。

もう一つは、物質の密度の量感を高めることによって、身の回りにある「もの」の大凡の体積や重さを推定することである。数学的モデリングのための創造的な思考力を身に付けることにも結びつく。

2 研究の目的

研究の目的は、小学生や中学生の複合量の理解を促し、問題解決に活用する教材開発をすることである。そのために「速さ」だけでなく、「密度」を扱うことにした。永瀬（2002）による密度概念の教授・学習の困難さの上での研究の動向と課題を鑑み、密度の理解を先行させた上でいくつかの密度の量感を高める教育実験を行った。また複雑な計算をせずに視覚的なアプローチによる理解を目指して、カラー液晶のグラフ関数電卓を用いた。これはグラフ上にプロットされたデータの様子から「密度」の理解に結びつける工夫を行うものである。さらに密度を考える有用性を感じるための事例も扱った。この研究にあたっては、次のような研究仮説を立てた。

小学校算数科で人口密度の概念は学習済みであるが、実際の身の回りの物質について参加者の「密度」の概念については、おのおのの物質に固有な単位体積あたりの重さとして捉えられるという事実や、その量が体積と重さという 2 量で定まる複合量であるという理解が不十分であろう。一方で、密度についての正しい理解やその量感の認識を高めることで、身の回りの物体の重さを単なる大きさのみならず、素材や材質といったものと併せて総合的に考察することができるようになり、算数科領域における複合量の理解を促すことにも寄与するであろう。また密度を用いた問題解決の課題に取り組むことによって、算数・数学の有用性の認識が高まるであろう。

3 教育実験の内容とその様子

この教育実験は、日本学術振興会が所管する教育プログラムのひとつ「ひらめき☆ときめきサイエンス KAKENHI」の企画の中で実施された。実施日・場所は、2018 年 8 月 18 日、岐阜大学サテライトキャンパスで行った。密度を学んでいない小学校 5 年生 9 名、6 年生 6 名、既に学んでいる中学校 1 年生 11 名、中学校 2 年生 3 名、合計 30 名を対象とした。「親に勧められた」「案内の内容に興味を持ったから」という参加者が多く、算数・数学に対する意識は「好き」が 19 名、「どちらでもない」が 11 名、また「現実の問題を考えるとときに算数（数学）は役に立つか」に対して、ほとんどの回答が「たいへん役立つ」「少し役立つ」という肯定的回答であった。

教育実験ではグラフ関数電卓を用い、データから視覚的に処理しながらの理解を目指した。小学生には、操作するキーや画面の表記が英語である点などの不慣れさを補うために、2018 年 7 月に電卓使用講

習会を開催して、教育実験当日までの期間に電卓を貸し出した。また密度測定用体を準備して、温度・圧力に左右されないような固体を扱った。

事前にももの重さや密度についての調査を行い、以下のような結果を得た。

(1) 身の回りにある「重たいもの（ただし機械や車などの工作物でなく材料としてのものの名前）」を5つ自由に書かせた。その結果、表1のように「金、銀、銅、鉄」といった金属をあげる回答が1/3を超えて多く、次に「鉛、ガラス、アルミ」という物質があげられた。概ね金属が重たいという感覚を持つことが窺える。

表1 子どもが考える重たいもの

物質名	鉄	金	銀	銅	ガラス	アルミ	鉛	木	石	紙
人数 n=25	20	13	10	10	7	6	6	4	4	4

(2) 牛乳パックの大きさの「発泡スチロール、アルミ、鉄、ガラス、紙」の重さを予想させた。例えば「鉄」という物質だけでも1 kg程度から30 kgまで広い範囲の回答となり、個人毎の絶対的な量感覚の違いが広いことを意味する。次に大きさを統一した5種類の物質の重さの順位を考えさせ、25名中7名が、アルミとガラスの密度が近いことを考えて、「鉄 > アルミ > ガラス > 紙 > 発泡スチロール」または、「鉄 > ガラス > アルミ > 紙 > 発泡スチロール」の順の回答をした。最も重い材質を鉄とした回答は22名に対して、最も軽い材質を発泡スチロールとした回答は10名のみであった。

(3) 「どうして熱気球は空に浮くのでしょうか」という密度に関しての自由回答をさせた。気体が膨張すること、物質の変化による密度が変化することの2段階での見方を期待した。表2より「空気が温められる」という見たままの現象だけの回答、「温かい空気は上に行く」、さらに「空気が膨張する」「温められた空気の体積が増える」という知識を根拠にした回答、「温められた空気の密度が小さくなる」「周囲の空気よりも密度が小さくなる」という密度にまで及んだ回答が見られた。

表2 熱気球が浮く理由

回答分類	人数 n=27
空気が温められる	2
温かい空気は上に行く	9
空気が膨張する、空気の体積が増える	7
空気が軽くなる	6
密度が小さくなる	2
その他	1

(4) 図1のカバの親子の写真を示し、相似比と体積比を使って、大きさと重さの問題を考えさせた。

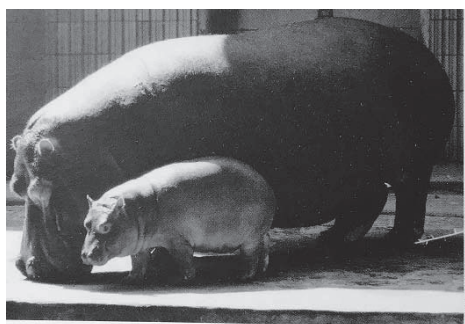


図1 カバの親子 (A Büchter, 2007)

体長 1.2m , 体重 140kg の子カバのデータを与えてから、母カバのおよその体重を求めるには、子カ

バの見かけで親カバの体長の $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ に見えるから、約 8 倍から 27 倍となる。こうした回答は、中学生でも 9 名（中学生の 60%）しかいなかった。多くは単純に 2 倍や 4 倍と考えたものや、理由さえも書けていない現状にあった。

3-1 密度の量感について（その 1）

算数・数学教育としての複合量の「密度」の認識を高めるためには、「速さ」に関する指導研究が参考になる。藤島（1990）は、速さの認識とその指導法について「子どもにあっては、速さは空間や時刻と関連する言葉としている場合が多い。だから、量的定義を子どもに理解させるためには、もっともっと順序立てた、子ども達にも納得できる説明の手段が必要であろう。」とし、「等しい時間で長い距離を走るものは速い」「等しい距離を短い時間で走るものは速い」「長い道程を短い時間で走るものは速い」「短い道程を長い時間で走るものは遅い」という関係を整理することが重要だと指摘している。

このことを「密度」に置き換えれば、「等しい重さで体積の小さいものは密度が大きい」「等しい体積で重さが大きいものは密度が大きい」「見かけの大きさが小さく重いものは密度が大きい」「見かけの大きさが大きく軽いものは密度が小さい」などの関係を整理することが重要となろう。そこで、水中の「ものの浮き沈み」を扱った。佐藤（1991）は、液体の密度認識を高める目的で「ものの浮き沈み」を取り扱う際に、「<目標 1> 密度が、物質の量の多少と無関係に、物質ごとに決まっていることがわかること。<目標 2> 密度の大小と浮き沈み現象とが対応づけられること。<目標 3> 水溶液の濃度と密度の大小とが対応づけられること。」としている。

つまり、ものの浮き沈みは「水との比重」によって定まるが「大きいもの＝重い」または「大きくなると重くなる」という大きさによる重さの状態や変化の理解に影響を受けることなく、

- ①「大きくても浮くものと沈むものがある」＝「体積によってのみでは浮き沈みは決まらない」
- ②「等しい体積でも重さの違いにより浮き沈みが異なる」、「等しい重さでも体積の違いにより浮き沈みが異なる」＝「重さと体積の 2 量の関係で浮き沈みが異なる」
- ③「同じ素材・物質であれば大きさを変えて重くしても浮き沈みの様子は変わらない」＝「浮き沈みを左右するものは物質によって固有である」

などの理解を通して、単位体積あたりの重さの「密度」についての認識理解を深めようとした。

また「同じ物質でも大きさが異なれば浮き沈みが変わる」ように考えている子どもがいるのではないかと考え、以下の演示問題を取り組ませた。

(1) 密度の数値が「赤色ボール > 砂 > 黄色ボール」となるような同じ大きさの赤色・黄色のボールを準備し、黄色ボールを砂中に埋め、赤色ボールを砂上に置く（図 2）。この状態から容器ごと振動させると、2 つのボールの状況が入れ替わる。その理由を問い、媒質（砂）と物質（ボール）の比重についての理解と思考力（創造性等）の弱さを示している（表 3）。理由を述べずに現象だけを回答したもの、赤色ボールと黄色のボールの重さの違いのみを回答したもの、砂とボールの重さの関係を回答したもの、その他に分類した。

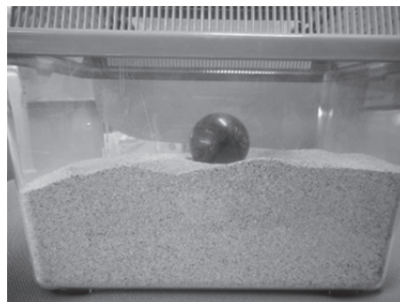


図 2 砂とボールの動きの演示実験

表 3 砂に入れたカラーボールの動きの説明

回答分類	人数 n=28
理由不明, 現象のみ	4
赤いボールのほうは重い, 黄色いボールは軽い	10
砂より黄色いボールは軽い, 赤いボールは重い	7
その他	7

(2) ものの浮き沈みに関して, ①発泡スチロール片, ②木片, ③きゅうり, ④にんじん, ⑤だいこん, ⑥鉄球, ⑦お茶ペットボトル, ⑧半分飲みかけのお茶ペットボトルを提示し, 浮くものと沈むものに分類させた。きゅうり, だいこん, にんじんの認識結果が分かれている (表 4)。

表 4 浮き沈みについての調査の回答状況

n=27(一部 未回答有)	発泡スチ ロール片	木片	きゅう り	にんじ ん	だいこ ん	鉄球	お茶ペ ットボ トル	半分飲み かけペ ットボ トル
浮く	27	26	14	8	5	0	1	24
沈む	0	0	13	19	22	27	25	2

さらにものの浮き沈みは大きさに関して不変であるが, 大きさを 2 倍にした場合, きゅうりで 5 名, にんじんで 3 名, だいこんで 4 名が沈むと回答した。

(3) 水中でのものの浮き沈みの違いについて, 小学校 5 年生の中に「中身がたくさんあるかどうか」と素朴な密度感覚を示すものや「水と物質の体積が同じとき, 重さが水より重いものは沈む」「大きさと重さの割合がある基準を満たすと沈む」「 1cm^3 あたりのすき間の違い」と本質的に正しい回答があった。

このように重さや密度に関する子どもの理解度の事前調査や身の回りのものを対象とした演示での間いによって, 重さや密度の量感や認識理解の個人差が大きく, 日常学習での知識が定着していない。

そこで密度については, 小学校社会科での人口密度を例に「混み具合」, 「こまやかさ (密さ)」, もの「すきまがないこと。ぎっしりと詰まっていること。また, そのさま」を示すだけにした (注 2)。さらに実際の物質と密度の値を知り, 数値的な量感を持たせるために, 鉄, 銅, アルミ, 木, プラスチック (樹脂), 真鍮の 6 種類の密度測定用体 (表 5) の重さと体積を測定させ「重さ÷体積」を計算させた。

表 5 準備した密度測定用体 (立方体・直方体・円柱に正確に整形されている)

材質 比重・密度 (g/cm ³)			形状	サイズ(m×m×m)	体積	形状	サイズ(m×m×m)	体積	形状	サイズ(m×m×m)	体積	形状	サイズ(m×m×m)	体積
			立方体	約 10×10×10	1000	立方体	約 30×30×30	27000	直方体	約 20×40×50	40000	円柱	約 Φ20×32	10048
銅 (比重 8.96)	重さ		C1		約 9 g							C4		約 90 g
	個数				46 個									7 個
鉄 (比重 7.87)	重さ		F1		約 7.9 g	F2		約 210g	F3		約 315g			
	個数				46 個			6 個			7 個			
アルミ (比重 2.68)	重さ		A1		約 2.7g	A2		約 72g	A3		約 107g	A4		約 27g
	個数				66 個			6 個			7 個			7 個
真鍮 (比重 8.45) 銅と亜鉛の合金 (MS) (亜鉛 20%以上)	重さ		M1		約 8.5g							M4		約 85 g
	個数				6 個									7 個
亜鉛 (比重 7.13~7.21)	重さ		Z1		約 7.2g									
	個数				6 個									
プラスチック	ポリアセタール (POM) (比重 1.42)	重さ				PO2		約 39g						
	個数							6 個						
	塩化ビニル(PVC) (比重 1.35~ 1.45)	重さ							PV3		約 56g			
	個数										7 個			
木材	ポリエチレン(PE) (比重 0.92)	重さ	PE1		約 0.9g				PE3		約 37g			
	個数				6 個						7 個			
	ラワン (比重 0.38~ 0.64)	重さ				W2		約 15g						
	個数							6 個						
	不明 (比重 仮0.5)	重さ	W1		約 0.5g				W3		約 20g			
	個数				6 個						7 個			

3-2 密度の量感について（その2）

次に鉄、アルミ、ビニル系樹脂、木片の密度測定用体を、外見から区別できないように封筒に入れた。以後、これらを覆面用体と称す。それらの重さと体積を測定して密度を計算して、用体のおよその物質を推測させた。最終判定はグループ毎に議論してまとめさせた。



図3 覆面用体にした物質名の判定に取り組む様子

① のもの 313g

$$316 - 3 = 313g$$

$$313 \div 40 = 7.825 \quad A. 鉄$$

② のもの 107g

$$110 - 3 = 107g$$

$$107 \div 40 = 2.675 \quad A. ガラス (アルミ)$$

③ のもの 39g

$$42 - 3 = 39g$$

$$39 \div 40 = 0.975 \quad A. フォーメックス (ビニル)$$

④ のもの 24g

$$27 - 3 = 24g$$

$$24 \div 40 = 0.6 \quad A. 木$$

図4 子ども達のワークシート

測定した重さから 3g を引いた理由は、封筒の重さである。また「アルミ」を「ガラス」に、「ビニル系樹脂」を「きゅうり」とした理由は、密度が等しい異なる物質があるからである（図4）。彼らは、事前に密度を算出した知識を使ったのである。このように具体的に密度を算出しておくことは、水での浮き沈みについて「金属 > ガラス > 樹脂 > 水 > 木材 > 発泡プラスチック」のようなおよその密度の量感育成や発見に結びつくものである。

3-3 密度を問題解決に役立てる教育実験（その1）

1円玉と10円玉の混合物の比（以後、混合比と称す）を、密度を用いて求めさせる教育実験を行った。密度の異なる2種類のものを複数用意してそれらを袋に混入する。また、それぞれの密度または重さと体積のデータを与えておく。

密度には加法性が成り立たないために、密度の異なる2つの物質による混合物の密度は、単なる2つの密度の和によっては求められない。しかし、密度は重さと体積の複合量であることから、密度の異なる2つの物質の混合比は、それぞれ単体の重さと体積が分かっているならば、重さと体積それぞれの関係式

が成立する 2 元 1 次連立方程式によって求めることができる。

小学校 5, 6 年生に対しては, 表を用いて地道に考えさせ, グラフ関数電卓を利用して視覚的に考察させることにした。はじめに, 以下のように重さに着目した条件を満たす場合について考えさせた。

1 cm³ の大きさで 2 g のもの A と, 2 cm³ の大きさで 3 g のもの B がたくさんあります。いくつかをそれぞれとって袋の中に混ぜたところ, 全体で 44 g あるとき A と B のそれぞれの個数はいくつになるだろう。

表を埋めて解となるものを見つけ, その規則性についても記述させたが, 表を埋めることに取り組めたが, 規則性まで書いているものは少なかった (図 5)。

▶ 考えかたその 1: 表で考えよう

A と B の個数を変えながら表の変化の様子を見ていこう。全体で 44g だから 8g の B の個数は 15 個より少ないですね。

A の個数	1		4		7		10	
B の個数	14	13	12	11	10	9	8	7
重さ	44		44		44		44	

A の個数	13		16		19		22	
B の個数	6	5	4	3	2	1	0	
重さ	44		44		44		44	

この表をうめながら, どんなときにうまくいくか考えてみよう。

B の個数が 3 の倍数のとき
A の個数が 3 の倍数 + 1 のとき

図 5 表を埋めて考えていくワークシートの様子

続いて, 体積についても以下のような条件を満たす場合について考えさせた。

同じ 1 cm³ の大きさで 2 g のもの A と, 2 cm³ の大きさで 3 g のもの B がたくさんあります。いくつかをそれぞれとって袋の中に混ぜたところ, 今度は体積が全体で 26 cm³ あるとき A と B のそれぞれの個数はいくつになるだろう。

これら 2 つの重さと体積の関係の問いから, 同時に満たす A と B の個数の組が 1 つに絞られる。この作業を, グラフ関数電卓を用いて確認させた。

最低 2 点を入力すればそれらを通る直線が引け, 2 本の直線の交点が, 2 つの問いを同時に満たす解となることを視覚的に確認させた (図 6)。2 元連立 1 次方程式の解が整数組になるために, グラフからの解が読み取りやすい。

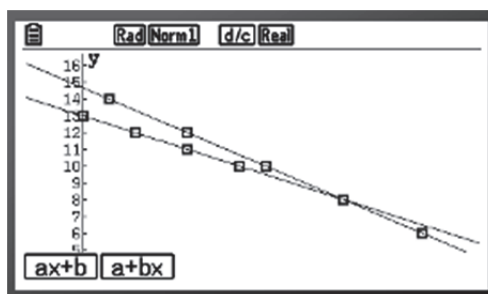


図 6 グラフ関数電卓の再現画面

そして, 最後に次の問いを与えた。

問題: 1 円玉と 10 円玉がいくつか入った袋があります。その重さは 120g です。また, その体積は約 21 cm³ です。このとき 1 円玉と 10 円玉の個数はおよそ何枚ずつでしょう。

1 円玉は重さが 1g で体積は約 0.37cm^3 です。10 円玉は重さが 4.5g で体積は約 0.50cm^3 です。

・小学生のみなさんは表を作って考えるかな？

・中学生のみなさんは文字式を用いて考えるかな？

1 円玉と 10 円玉では、重さや体積が整数値とは限らないために算出が難しい。表を用い（図 7）、連立方程式を用いて（図 8）解く子どものほとんどは中学生であったが、小学生でもつるかめ算的思考で独自に解こうとしていた。

	117	108	99	90	81	72	63	54	45								
1円玉	3	x	12	x	21	x	30	x	39	x	48	x	57	x	66	x	75
10円玉	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
重さ	120	x	120	x	120	x	120	x	120	x	120	x	120	x	120	x	120

図 7 重さの関係を表にしている様子（中学 1 年生）

$$\begin{cases} x + 4.5y = 120 & x = 120 - 4.5y \\ 0.37x + 0.5y = 21 \end{cases}$$

$$44.4 - 1.665y + 0.5y = 21$$

$$-1.165y = -23.4$$

$$1.165y = 23.4$$

$$y = 20.08587611$$

$$x = 120 - 4.5 \times 20.08587611 = 9.161356742$$

1円 ... 30枚、10円 ... 20枚

図 8 連立方程式で解を求めている様子（中学 2 年生）

3-4 密度を問題解決に役立てる教育実験（その 2）

「密度」の理解や量感を高めることは、身の回りのものの重さを求めることに役立つ。つかみ所のない数量・形をただで判断しようと周辺にあるものをヒントにする場合、大きさは計算しやすいが、重さはその物体の素材による密度に影響を受けるために算出は難しい。素材が明確であり密度の量感が身につけば、およその重さを判定することができる。このような活動は、フェルミ推定のような比較的短時間で数量や形を見積もるときに必要な。そこで神戸市にあるモニュメントの写真を提示し、その重さを推定させた（図 9）。



図 9 神戸市にある鉄人 28 号のモニュメント

（神戸市公式観光サイト FeelKOBÉ, <https://www.feel-kobe.jp/facilities/detail.php?code=0000000126>）

高さは周囲の街灯や歩行者の大きさから推測することができて、鉄でできているという情報が与えられている。このモニュメントの高さは約 15m であり、ほとんどの子ども達が 10m～25m の範囲の数値を算出していた。しかし重さを求めるために必要な体積の算出の際に、モニュメントの形をどんな立体の概形として表現するかが困難な様子であった。数名の中学生のみが自分なりの考えで体積を算出し、金属の密度を考えながら重さを推定した（図 10）。但し、中身が空洞でないものとして計算したために、大きな数値となって現実的でないことに気づかないでいる。

$$\begin{aligned}
 \text{だいたいの体積} &= 2 \times 2 \times \pi \times 13 = 52\pi (\text{m}^3) \\
 &= 52 \times 3.14 \\
 &= 163.28 (\text{m}^3) \approx 163 \text{m}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 163 \times 7900 \text{kg} = 1296700 \text{kg} \\
 \hline
 1296.7 \text{t}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 163 \\
 \times 79 \\
 \hline
 1427 \\
 1141 \\
 \hline
 12967
 \end{array}$$

図 10 高さ 13m の円柱と見なし計算した参加者の重さの推定値（中学 1 年生）

この問題では、数学的モデリングの問題として解を得るために 2 つの方法を想定した。

- I 鉄人を既知の立体として見立ててその体積を求め、鉄の密度から重さを推定するもの
- II 人体との相似から推定するもの

それぞれの方法においていくつかの過程を必要とした。I の方法では、

- ① 鉄人の体積を求める際に、高さをどのように推定するか
- ② 鉄人の身体をどのような立体と見立てて（モデル化して）体積を求めるか
- ③ 中身の入ったものとするか中身が空洞のものと想定するか、またその割合をどのくらいに見積もるか
- ④ 単位の換算に留意して重さを計算すること

II の方法では、事前調査での「親子カバの問い」がヒントになった。

- ⑤ 人体との相似比を考えるための高さをどのように推定するか
- ⑥ 密度の比をどのくらいに見積もるか
- ⑦ 中身の入ったものとするか中身が空洞のものと想定するか、またその割合をどのくらいに見積もるか

I 以外に II での回答はなかったが、中身を空洞と考えた一枚の鉄板として見立てた回答は見られた。

4 密度の認識を高める指導と問題解決に役立てる教育実験のまとめ

密度の認識を高めるための指導として、ものの重さを体積と共に捉えることの必要性について、ものの浮き沈みを柱に行った。また密度がそれぞれの物質に固有であることを利用して、覆面用体を使ったものあての活動も行った。事後調査では、密度に関しての認識が向上したかどうかを確認するために、事前調査の「どうして熱気球は空に浮くのでしょうか」を用いた。「密度」という言葉を用いて説明したものが 2 名から 6 名にわずかではあるが増加した。

さらに事前調査と同様に、1 リットルの牛乳パックの大きさの「油、砂糖、銅、ガラス、紙」の重さを予想させた。油や砂糖は事後調査だけに取り入れた独自の物質である。「油は水に浮く」、「砂糖は水に沈む」という日常生活の経験からおよその値を考えうるのではないかと考えた。その結果、油の重さは 17

名が **1 kg** 未満の数値で回答し、そのうち **9** 名の中学生在が **700~900g** と妥当な回答をした。また砂糖の重さについても、**1500g** という適正值を **4** 名の中学生しか回答できなかった。

同じ質問を京都の私立 **RU** 高校 **3** 年生 **27** 名に対して行い、油の重さについて **1 kg** 以下とした回答は **6** 名のみであった。**1 kg** と回答した生徒が **16** 名も存在した。**1 kg** と回答した理由が大凡の感覚であったとし、「油が水に浮くかどうかを考えれば、およその数値が推測できることに気づくべきであった」と気づいていた。ものの浮き沈みの実験等を通じて水の密度を含めたいくつかの代表的な物質の密度を知ることによって、物質の密度の値を知らなくても、既知の物質との比較から予測することができる。しかし、高校生達の姿からはそのような思考が容易でないことが窺えた。

さて、密度と重さと体積の関係が理解できているかを確認するために、「体積＝重さ÷密度」と回答したものが **48%** 程度であった (**n=27**)。小学生では正答率が未だ低く、密度に関する割合についての理解や計算に習熟すべき課題を残した。

密度を題材にしてグラフ関数電卓を用いて、**2** 元 **1** 次連立方程式を視覚的に考えることに取り組んだ。小学生については、密度を基にした「ものあて」の理解までは成果があった。しかし **2** つのものを混ぜた場合に、重さと体積のデータから表を用いて条件を満たす解を見つけ出す方法は小学校高学年からは有効であり、一部の中学生は、連立 **2** 元 **1** 次方程式で解を求めている。

また鉄人 **28** 号の重さを推定する問題では、学校で扱う算数・数学の教科書の例題や問いのように、解くためのすべての条件が与えられておらず、必要な要素が何であるかを考えて、目から得る情報だけで見積もることが難しい様子であった。

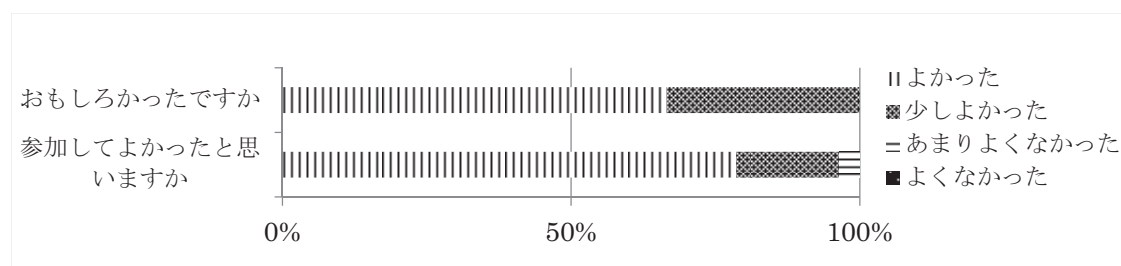
密度を利用した混合物の比率を求めるような問題「**1** 円玉と **10** 円玉がいくつか入った袋があります。その重さは **120g** です。また、その体積は約 **21 cm³** です。このとき **1** 円玉と **10** 円玉の個数はおよそ何枚ずつでしょう。」に対して重さと体積の数値を与えた。しかし、密度への学習が進んでいれば「**1** 円玉と **10** 円玉がいくつか入った袋があります。その中身の密度は **5.71g/cm³** です。このとき **1** 円玉と **10** 円玉の個数の比率はどれくらいでしょう。」というように、密度のみを与えることもできる。

フェルミ推定を使って概数・概形を求める問いでは、長さや距離の量感に基づいて「体積」が「見た目で判断がつく」のに対し、体積の量感だけでなく密度の量感を伴ってはじめて「重さ」が「見た目で判断がつく」と考えて良いだろう。このような意味で「密度」の量感を高めることは、数量や形やものごとの推定や数学的モデリングによる問題解決の場面を拓けることになるだろう。

5 全体のまとめと今後の課題

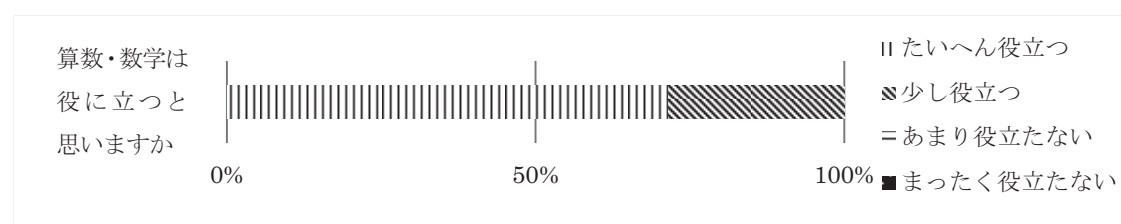
事前調査によって子どもの「密度」に関する理解は、仮説のとおりに不十分であった。それは課題探究型の学習内容は授業で扱いにくいということに加えて、普段から日常生活でものの重さについて「大きさとともに重さを知る（感じる）」ということに慣れていないのではないかという懸念を感じさせた。

「ひらめき☆ときめきサイエンス **KAKENHI**」の企画として実施されたこの教育実践は、事後の調査結果から、**グラフ 1** のように「参加して良かった」が **3/4** を超えている。特に、「おもしろかったですか」の問いへの自由記述回答では、「いろんな発想ができた」「頭を柔らかくして答えに辿りついたときとても気持ち良かった」「考えたことのない問題ができておもしろかった」「日常的なことを数学的に考えることが面白かった」「創造は普段の数学の授業ではない」「新しいことが知れた」などの反応があった。



グラフ 1 事後調査での企画に関する質問の回答 (n=28)

また算数・数学の有用性に対しては、**グラフ 2** のグラフのように「たいへん役立つ」と答えた参加者が 7 割を超える結果となった。



グラフ 11 事後調査での算数・数学の有用性の質問の回答 (n=28)

教育実験の成果としては、密度の量感を高めることや身の回りの物体の重さを単なる大きさのみならず、素材や材質といったものと併せて総合的に考察することができるようになること、そして密度の有用性の認識の高まりを目指したが、一部の変容を見たのみであり、その成果が十分に測れるデータを持つに至らなかった。密度の量感の高まりを評価するための質問の準備と取り組む時間の確保が課題となろう。

はじめに記述した通り、密度という複合量の認識について、ものが動く「速さ」の認識に関する先行研究が有用であった。子ども達の速さの認識について、横地（1965）は、

第 1 段階：運動の姿として見ているから、動きだけを見て判断している。

第 2 段階：ゴールに速く到達したかだけを見て判断している。または、速く出発したかだけを見て判断する。

第 3 段階：移動した距離（長さ）で比べるか、移動した時間で比べるかのどちらか一方で判断する。

第 4 段階：移動した長さと時間の両方を考えて、長さと時間の二つの量で判断する。

の 4 つに段階分けされることを明らかにしている。例えばこのような段階分けを「密度」でも行った上で、これらを測るための質問を工夫する必要がある。

熱気球についての質問が今回の工夫であったが、自由記述としたことによって、回答分析が煩雑となり整理ができなかった。「密度」という言葉を用いて説明できた参加者が 2 名から 6 名に増加したことは成果の一部として評価できても、量感の認識の変化を決定づけることまでは至らないだろう。また 1 リットルの大きさのパックに入れるさまざまな物質の重さを答えさせる質問では、密度の値を知らなくても、「水」に比べて「油」「砂糖」の重さがどの程度かというような相対的な重さの認識の有用性を感じた。主な物質の密度順位を学習する機会が増えることによって密度の理解が深まるのではないかと考えられる。こうした教育実験の総括に基づいて有用なデータを得られるような教材と評価の方法についてさらなる研究が期待される。

謝辞

プログラムの実施に際しては事前からのグラフ関数電卓の貸し出し、並びに事前講習会の実施など(株)カシオ計算機のご厚意に感謝申し上げます。また教育実験に際してお手伝い頂いた京都府立北嵯峨高等学校教諭の村井翔馬氏並びに岐阜大学教育学部河崎ゼミの学生・院生諸氏に、この場を借りて感謝申し上げます。

注釈

- [1] 実践では小学生の参加者も多く、「重さ」と「質量」の区別をせず、「重さ」をはかりで測った数量とし、「密度＝質量／体積」という定義を既知とすることを前提としなかった。したがって「質量」という用語は使用していない。
- [2] 密度が物質固有の量であることの説明を中心に、温度・圧力によってその値が変化することの説明はしていない。またものの浮き沈みの実験では、密度と比重の違いの説明は割愛した。

参考文献

- [1] 岩田 眞樹子,「小3 から中2 にかけての密度概念の発達」, 2014 年度日本認知科学会第 31 回大会, pp.417-425.
- [2] 国立教育政策研究所&日本学術会議,「日本人が身に付けるべき科学技術の基礎的素養に関する調査研究 21 世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きるための智～プロジェクト 数理科学専門部会報告書(案)」,平成 20 年(2008 年)3 月.
- [3] 村橋貴之・稲葉芳成・丸山解・小林一茂・河崎哲嗣,「プログラミング学習の有効活用へ結びつく算数・数学の教育実験 ―距離センサを用いた「速さ」の量認識―」,岐阜大学教育学部(教育実践研究・教師教育研究), 第 20 巻, pp.43-54, 2018 年 3 月.
- [4] 藤島一満,「『速さ』の概念の指導」,日本物理教育学会誌第 38 巻 1 号, pp.13-16, 1990.
- [5] 永瀬美帆,「密度概念の発達に関する研究」,広島大学大学院教育学研究科紀要第一部第 51 号, pp.25-33, 2002.
- [6] 佐藤康司,「教授ストラテジーの構成と改善に関する研究-液体の「密度」の学習について」,東北教育心理学研究, 4 , pp.15-25, 1991.
- [7] 横地清,「小学生の思考力Ⅱ」,三一書房, 1965.
- [8] A Büchter, 他 3 名, (2007),「Die Fermi Box」, Sauerländer.