岐阜数学教育研究
2019, vol. 18, 53－67

面積を求めることを中心に置いた積分に関する授業実践

桑原　修平[1]

本研究は，高等学校における数学Ⅱの単元の一つである「積分」を，「面積を求めること」を導入として授業展開した際の有用性について考察したものである。通常の場合，「積分」は「微分」を学んだ後に，微分の逆演算として導入される。しかし，この実践研究では，微分について学習する前に，「面積を求める方法」として積分を導入し，さらに積分は面積を求める手段であることを念頭に置いた授業展開を行った。このことにより，生徒が数学と実社会との結びつきを感じながら，学習に主体的に取り組むことができた。本論文では，その授業展開，生徒の活動と本実践研究についての考察を報告する。
＜キーワード＞ 面積，不定積分，定積分

1. はじめに

学習指導要領や数学Ⅱの教科書（岡本[１]）によれば，微分・積分の単元では，まず微分を学習させ，その後に「微分の逆演算」として不定積分を導入する。幾何的な解釈は後回しにし，代数的な計算が先行して授業展開されている。しかし，柴田[２]によると，数学史において「面積を求める」ことが学問として体系化されたのは，紀元前３世紀ごろのユークリッド「原論」からであるとされている。微分積分学の起こりから考えれば，微分の概念が登場するには相当の時間を要する。算数・数学教育の観点からも，「面積を求める」などの積分の概念の基となるものは小学校３年生から学習するが,「グラフの傾きを求める」などの微分の概念の基となるものは関数概念の登場を待たなければいけない。従って，筆者は，算数・数学の指導内容の系統性からも，「面積を求めること」を積分の導入教材とすることは，生徒が数学と実社会との結びつきを感じ，学習に主体的に取り組むために有用であると推察した。微分が未習である生徒に対して，「面積を考える」という幾何的な解釈を念頭に置きながら積分を導入し，定積分を用いて面積を求められることを目標に授業展開することを試みた。

以下にその授業実践の結果を報告する。

2. 研究のねらい

本研究のねらいは，積分という単元を，計算練習中心の知識・技能習得の学習だけではなく，「面積」を定積分で表現し処理するという学習にも重きを置くことで，思考力・判断力・表現力などを身につける教材や指導法を開発することにある。本実践の具体的なねらいを以下に提示した。

①導入時から図形の面積を求めることに注目することにより，代数的な計算と幾何的な計量の計算を結びつける。
②座標平面上のグラフで囲まれた部分の面積を，定積分を用いて計算できるようにする。
③不定積分・定積分の意味を意識した上で，計算方法を習得する。

また，具体例を比較・検討することにより，類推し一般化する力をはぐくむことについても試みた。

3. 指導の展開

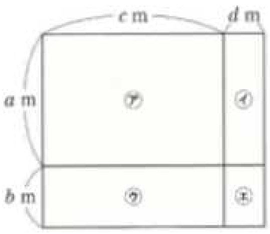
3.1. 多項式の展開（面積を求めるという視点で）

一松[３]では，中学校３年生において，多項式の展開を，長方形の面積を用いて次のように説明されて

[1] 札幌静修高等学校

いる。以下は，一松[３]の文章を一部改変したものである。

図のような長方形がある。この長方形の面積をいろいろな式で表すことを考える。



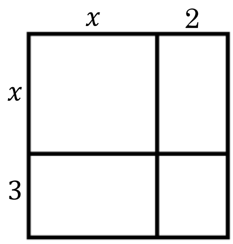
全体の面積を表す式は，（縦）×（横）や，

ア＋イ＋ウ＋エで表すことができるから，次の式が成り立つ。

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

このことから，本実践では次の例題を通じて，面積を求めるという視点で多項式の展開について確認した。

例題１ 縦の長さが $x+3$，横の長さが $x+2$ である長方形の面積が x^2+5x+6 で与えられることを確かめよう。



例題１について，以下のような解答を与え，面積を文字式で表現することによって，多項式の展開について確認した。

（解答）

この長方形の面積は，$(x+3)(x+2)$である。

この長方形を４つの小さな長方形に分けると

$$x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$$

であるから，$(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$ （終）

3.2. 既習の内容を活用して，関数のグラフで囲まれた部分の面積を求める

小学校で既習である，長方形，三角形，台形の面積の公式を確認する。

長方形の面積＝（縦）×（横）

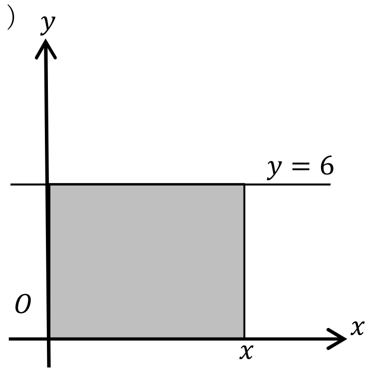
三角形の面積＝（底辺）×（高さ）÷２

台形の面積＝（上底＋下底）×（高さ）÷２

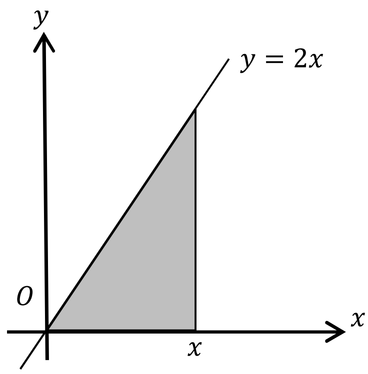
次の例題について，公式を用いて面積を求める。

例題２ 次の斜線部分の面積を求めよ。

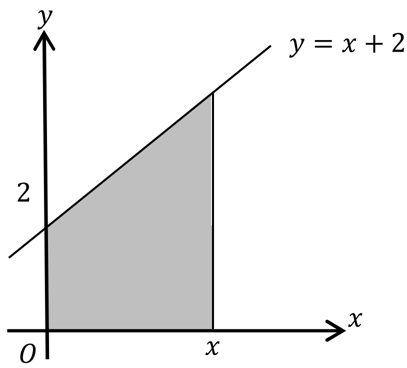
（１）



（２）



（３）



（解答）

（１）長方形の面積は $x\times 6=6x$

（２）三角形の面積は $\frac{1}{2}\times x\times 2x=x^2$

（３）台形の面積は

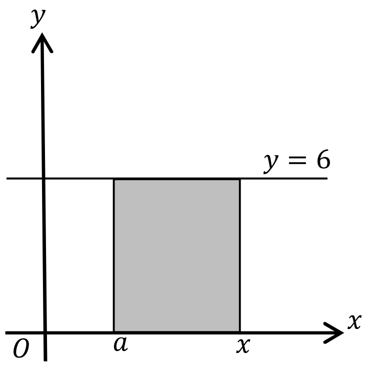
$$\frac{1}{2}\times(2+x+2)\times x=\frac{1}{2}x^2+2x$$

例題２を通じて，次のことを確かめる。

（ア）x 軸に平行な直線（定数関数のグラフ）と x 軸で囲まれた部分の面積は１次関数で表される。

（イ）x 軸に平行でない直線（１次関数のグラフ）と x 軸で囲まれた部分の面積は２次関数で表される。

積分定数について，今回は詳細を説明せずに導入した。具体的に説明するためには，扱うグラフを変えずに，定義域を変更した図形の面積を求めることにより，定数の差が出ることに留意する。例えば，a を定数とし，$x>a$ とする。



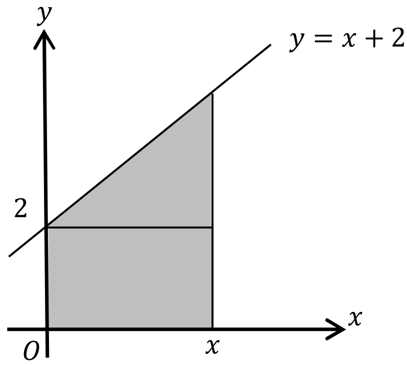
この斜線部分の長方形の面積を求めると，

$$(x-a)\times 6=6x-6a$$

a は定数であるから，a の値が変化するとそれにともなって面積の値も変化する。このことは不定積分を定義する際に，積分定数を説明することにつなげるができる。

また，台形の場合には，通常の公式で面積を求めるだけではなく，長方形と直角三角形に分割して面積を求めることにより，積分の線型性の確認に活用できることに留意する。

例３　例題２（３）で取り扱った台形は，図のように三角形と長方形に分割する。



三角形の面積＝$\frac{1}{2}x^2$　　長方形の面積＝$2x$

であるから，台形の面積は $\frac{1}{2}x^2+2x$ である。

3.3. 不定積分・定積分を定義する

グラフを表す式と，そのグラフと x 軸で囲まれる部分の面積を表す式の関係から，不定積分，定積分を定義する。

定義４　関数 $y=f(x)$ とx軸で囲まれた部分の面積を一般的に表したものを

$$\int f(x)dx$$

と定義する。これを不定積分という。

定義５　a を定数とする。

（１）長方形の面積の計算から

$$\int adx=ax+C$$

（２）三角形の面積の計算から

$$\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$$

ここで，C は積分定数とする。

２次関数の不定積分は，定数関数や１次関数の不定積分から類推する形で導出する。

定義６

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

ここで，C は積分定数とする。

積分定数については，被積分関数を変えずに積分区間が異なるものを複数例示することより，取り扱うことができる。

定義７　a, b を定数とする。定義域が具体的に定まっている場合は

$$\int_a^b f(x)dx$$

とかく。

定積分の計算については，記号

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

を用いて，天下り的に与えた。

ここで，例題４より，

台形の面積＝三角形の面積＋長方形の面積

であることを用いると，

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

であることを確かめることができる。このことを特に公式として授業で触れることは避けた。

記号の導入などの説明が一通り終わったら，不定積分，定積分の定義を定着させるために，不定積分，定積分の計算演習を十分に行わせた。

3.4. 積分の計算を活用して，関数のグラフで囲まれた部分の面積を求める

次の３つの場合に場合分けをして，面積を求める問題を扱った。

（ア）関数のグラフと x 軸で囲まれる部分のうち，x 軸より上側の面積を求める。

（イ）関数のグラフと x 軸で囲まれる部分のうち，x 軸より下側の面積を求める。

（ウ）関数のグラフと x 軸で囲まれる部分のうち，x 軸より上側，下側両方の面積を求める。

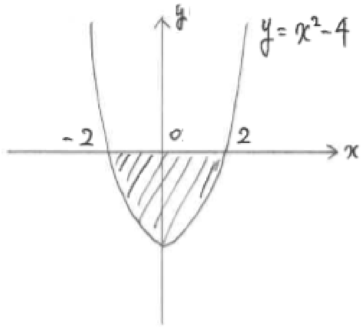
（ア）の場合は，例題２などで既に取り扱っているものを，積分を用いて計算するというものである。

（イ）の場合は，（ア）同様に計算すると負の値が得られるが，面積は正の値であることに留意する。

（ウ）の場合は，上部と下部に分けて計算することに留意する。

（イ）と（ウ）に関する問題は，それぞれ例題８，例題９として，以下に示す。

例題８　次の斜線部分の面積を求めよ。

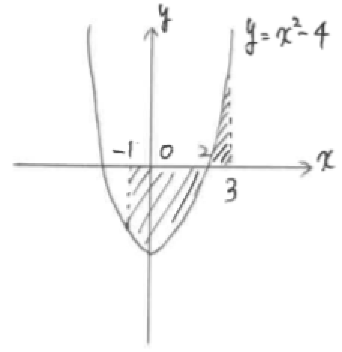


（解答）

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} = -\frac{32}{3}$$

となるから，斜線部分が x 軸の下側にあることに留意すると，斜線部分の面積は $\frac{32}{3}$ である。

例題９　次の斜線部分の面積を求めよ。



（解答）

x 軸より上側の部分の面積は

$$\int_{2}^{3}(x^2-4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3=\frac{7}{3}$$

である。

x 軸より下側の部分の面積は

$$\int_{-1}^{2}(x^2-4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-1}^{2}=-9$$

であるから，9 である。

従って，斜線部分の面積は $\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$ である。

4．授業実践について

本実践については，筆者の勤務校である札幌静修高等学校の３年生の文系大学進学希望者からなる２クラス（クラスの在籍人数はそれぞれ 25 名）で行ったものである。このクラスは，学校設定科目として，２単位の数学の授業があり，教科担当である筆者に授業内容の裁量がある。このクラスでは，数学Ⅱが教育課程上，設定されていない科目であるため，「微分・積分」については未習である。今回は微分について学習する前に，積分について学習を行なった。

4.1．実践内での活動の様子について

本実践研究においては，面積を求める方法として積分を扱うことを終始確認しながら授業を行った。

（１）多項式の展開

例題を説明してから，同様の問題演習を行った。時間のある生徒については，自分で問題を作成し，それを解くように指導した。演習問題には，$(a+b+c)^2$のように項が多くなり，答えもより複雑になるようなものも含めたが，面積を通して考えることにより，見通し良く答えにたどり着いていた。問題演習の様子を見て，ほとんどの生徒が面積を念頭に置きながら，展開公式について証明を与えることができた。また，自分で長方形の面積を考える問題を作り，それを通じて多項式の展開を説明できる生徒も多数いた。なお，実践の中では，因数分解についても触れた。

（２）既習の内容を活用して，関数のグラフで囲まれた部分の面積を求める

面積の公式を一つずつ確認したが，多くの生徒が覚えている内容であり，公式を活用して面積を求めることができた。既習内容の復習であるため，順調に進むことができた。

（３）積分を定義する

記号の導入，単項式の積分の定義については，定着を図ることができた。しかし，多項式の積分については，計算量が多くなるにつれて，個人のみで問題演習を行うことに困難を感じる生徒が現れたため，（自発的に）互いに教えあいながら答えを確認する姿が多くみられた。その一方で，不定積分の積分定数Cの説明については，まだまだ改良の余地があると筆者には感じられた。

（４）積分の計算を活用して，関数のグラフで囲まれた部分の面積を求める

３つの場合に場合分けをして，それぞれ時間をかけて考えたため，一つ一つの項目は理解しながら進めることができた。x軸の上側のみ，x軸の下側のみの場合は，一つの積分の計算で済むので，困難はなかったが，x軸の上側と下側に分かれる場合には，二つの積分の計算をしなければいけない。そのため，時間がかかったり，途中計算を間違えたりするケースが散見された。

5. 実践のまとめ

5.1. 実践後のアンケートについて

実践後に,「高校２年生まで学んだ数学と比較して,積分はどのような感想を持ったか」という事を自由に記述する形式で無記名回答してもらった。以下では,その一部を抜粋する。

・昔とかわらなくむずかしい
・割とむずい
・分かりやすくなった。楽しくなった（多少）
・１，２年の方が計算することが多かった。
・けっこう難しくなっていると思うけど,やり方を覚えればできる。
・１，２年のときよりも楽しい。
・難しさは同じくらいだけど,今のほうが頭を使っている。
・１，２年の勉強とつながっている事がおおいから今はとても簡単に勉強できている。
・１，２年生のときと同じくらい頑張ることができているので,授業を受けていて,とても良いと感じている。
・計算の量が増えたと感じます。
・図形と確率が好きじゃないので,計算ができて楽しいです。
・「公式を覚えないと解けなくなる」問題が多い
・ややこしい。解き方がわからない
・1，2年の時に比べたらテストの点は上がってる。でも積分は難しい
・初めて見る計算の仕方があって少し難しいけど分かったら楽しい。
・今まで苦手だった数学が少し克服できたと思う。３年では自分で問題を解く力が身についてきたと思う。

5.2. 実践のねらいについて

実践のねらいについて再掲する。

①導入時から図形の面積を求めることに注目することにより,代数的な計算と幾何的な計量の計算を結びつける。
②座標平面上のグラフで囲まれた部分の面積を,定積分を用いて計算できるようにする。
③不定積分・定積分の意味を意識した上で,計算方法を習得する。

①に関連して,アンケートの結果から,難易の感想について,学年進行で「難しい」という感想が増えると予想していたが,１，２年次の学習内容と比較して「変わらない」「変わらず難しい」と感じる生徒が複数名いた。図形の問題を取り扱っていて苦手意識を持つ生徒も,計算ができて楽しいという感想を持ったことからも（図形の面積という）イメージを持ちながら計算をすることには,一定の効果があるのではないかと分析する。

②について,座標平面上のグラフで囲まれた部分の面積を求めるために,定積分の式を立てることは授業の様子,定期考査の解答状況から鑑みて,おおむね達成されたと考える。

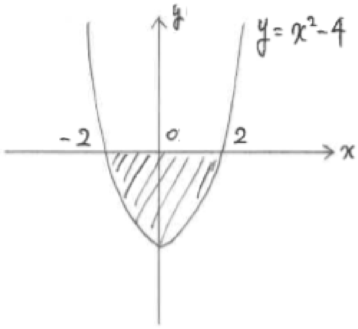
③について,アンケートの結果から,計算量が増えていると答える生徒が複数名いた。ただしそのことに対して否定的な意見は少ない。むしろ,計算量の多い問題,例えば,多項式の定積分については,粘り強く取り組み,生徒同士で互いの計算結果を自発的に持ち寄り,確認しあう姿が印象的であった。

いずれの項目についても,ねらいについては概ね達成されたと考えられる。

5.2. 実践全体を通して

今回の実践では,生徒の「なぜ積分を学ぶのか」という疑問に対して,「面積を求める」という意義を実感してもらいたい,一貫してそのような意識で授業を行った。数学と実社会との結びつきを感じながら,数学の学習をすることは非常に有意義であり,生徒は意欲的に授業,問題の演習に取り組んでいた。

さらに，生徒が自主的に工夫をしながら問題を解くという姿があった。生徒の工夫の一つを次にあげる。例題８において，次のような図形の面積を計算させた。図は例題８のものの再掲である。



この問題に対して，複数の生徒が

・放物線のグラフが y 軸対称であること
・y 軸で左右に分割した際に，右側の計算した結果

$$\int_0^2 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^2 = -\frac{16}{3}$$

から，面積を

$$\frac{16}{3} \times 2 = \frac{32}{3}$$

と導出できること

を自身で発見した。偶関数の積分の公式を発見できたことになる。ただし授業内でこの事実を全体で共有することがなかなかできなかったので，次に生かしていきたい。

計算演習の場面では, 0 を含む区間の積分の計算において，間違う生徒が複数名いた。

例１０（生徒の間違い）

$$\int_0^5 4dx = [4x]_0^5 = 4 \times 5 - 4 \times 0 = 16$$

4×0と$4 + 0$を混同している生徒が多くいるようである。偶関数の積分の公式を活用する際に，0 を含む計算を行うので，注意が必要であると感じた。

6. 終わりに

この実践が終わったのち, 柴田[２]に偶然にも目を通す機会があった。この参考文献においても，積分から微分の順番で紹介しており，筆者同様に考えた先人がいることを実感した。

「積分」という教材は，小学校で学ぶ内容から導入でき，代入の計算，四則演算について再度確認できるので，計算する力を養うという意味でも有意義な教材であると感じた。具体例から一般的な法則性を見つけるという数学における重要な考え方ができる単元である。積分の線形性を示すために，求積部分を上下に分割することを試みた。考えやすいものに分割して足し合わせるという積分の考え方に到達することができたと考えている。しかし，区分求積法につなげるという観点から，縦に分割したものを考察するのも有益であろう。また微分の学習を進めた際に，積分との関連性にどのように触れるのかという課題も残っている。限られた時間の中で，考えをより深められるような具体例を考えるなど，さらなる教材の工夫をしなければいけないと感じた。

引用・参考文献

[１]　岡本和夫ほか 9 名，2017，新版数学Ⅱ　新訂版，　実教出版

[２]　柴田　敏男，1981，微積分に強くなる その意味と考え方（ブルーバックス），講談社

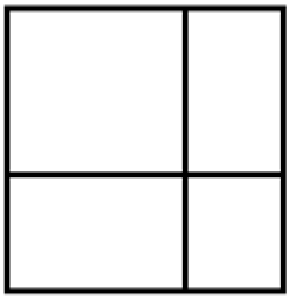
[３]　一松信，岡田禕雄，町田彰一郎，池田敏和ほか 31 名，2018，中学校　数学３，学校図書

[４]　文部科学省，2018，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編

2019年度　３年文系数学　授業プリント　No.1　～簡単な事を説明する難しさ～

面積とは…平面上の図形の大きさ・広さの量のことである。
展開とは…複数の多項式の積で表された式を，１つの多項式で表すことである。

例１　次の長方形の面積を考えることにより，$(x+3)(x+2)$を計算しなさい。

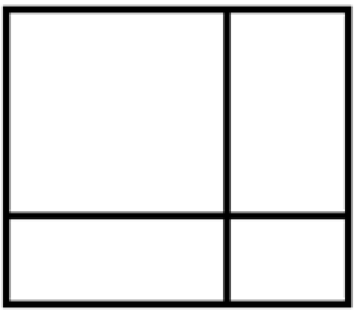


この長方形の面積は，$(x+3)(x+2)$である。
この長方形を４つの小さな長方形に分けると

$$x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$$

であるから，$(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$　　（終）

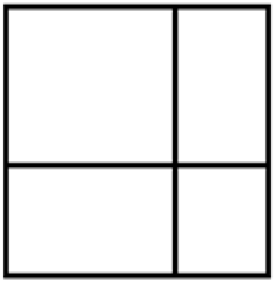
問題１　次の正方形の面積を考えることにより，$(a+b)^2$を計算しなさい。



まとめ

因数分解とは…展開の逆の計算である。

例２　次の長方形の面積を考えることにより，x^2+6x+8 を因数分解しなさい。

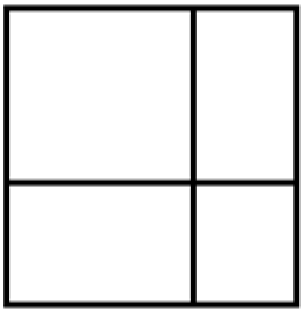


この長方形全体の面積を　x^2+6x+8　とする。
左上と右下の小長方形の面積をそれぞれ　x^2，8　と考えると，左下と右上の小長方形の面積は，（色々なパターンを考えると）それぞれ$4x$，$2x$となる。
よって，長方形の縦と横の長さはそれぞれ$x+4$，$x+2$　となるから

$$x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$$

（終）

問題２　（１）面積が８である長方形の縦と横の長さを求めなさい。
（２）次の図形の面積を考えることにより，$x^2+12x+35$ を因数分解しなさい。



（１）
（２）

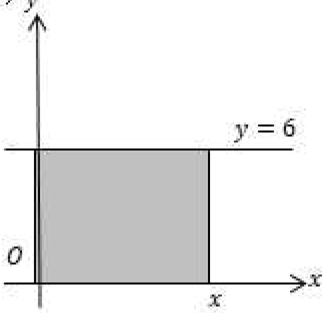
まとめ長方形の面積が数で表される場合，縦と横の長さの組合せはたくさんある。しかし，長方形の面積が文字式で表される場合，縦と横の長さの組合せは１組しかない。（これを**<u>因数分解の一意性</u>**という。）

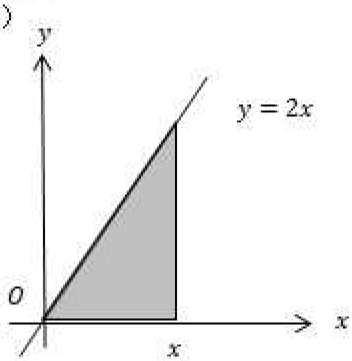
３年　　組　　番	氏名	検印

2019年度　３年文系数学　授業プリント　No.２　～面積を求める工夫をしよう～

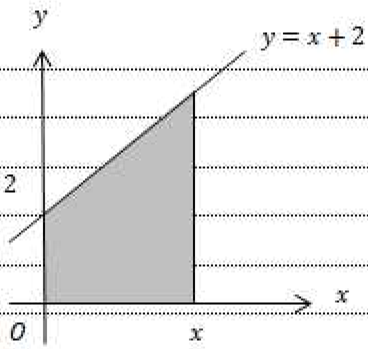
面積公式　①長方形の面積＝
②三角形の面積＝
③台形の面積＝

例３　次の図における斜線部分の面積を計算しなさい。

（1）


（2）


問題３　次の図における斜線部分の面積を計算しなさい。



まとめ
①長方形の面積は
②三角形・台形の面積は

不定積分・・・グラフを表す式から，面積を表す式を求めること。

関数$y=f(x)$を積分することを，$\int f(x)dx$とかく。

公式１　$\int a dx = ax + C$　（x 軸に平行な直線のグラフでできる図形の面積）

公式２　$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$　（直線のグラフでできる図形の面積）

公式３　$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$　（放物線のグラフでできる図形の面積）

これらの公式をたし算，ひき算，定数倍を組み合わせて使うこともできる。

例４　次の不定積分を求めなさい。

（１）$\int 3x^2 dx$

（２）$\int 6x dx$

（３）$\int (x^2 + x + 1)dx$

（４）$\int (6x^2 - 4x + 2)dx$

（５）$\int \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{3}\right) dx$

練習４　次の不定積分を求めなさい。

（１）$\int 6x^2 dx$

（２）$\int (-4x) dx$

（３）$\int (3x^2 + 2x + 1)dx$

（４）$\int (12x^2 - 2x + 8)dx$

（５）$\int \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}\right) dx$

３年　　組　　番	氏名	検印

2019年度　３年文系数学　授業プリント　No.3　～積分の計算をマスターしよう～

定積分・・・関数$y=f(x)$の不定積分を$F(x)$と書くとき，
$F(b)-F(a)$の値を，$y=f(x)$の a から b までの定積分という。

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

$\boxed{\text{例５}}$次の定積分を求めなさい。

（１）$\int_0^5 3dx$

（２）$\int_2^6 4xdx$

（３）$\int_{-2}^2 x^2dx$

$\boxed{\text{練習５}}$次の定積分を求めなさい。

（１）$\int_2^4 5dx$

（２）$\int_3^5 6xdx$

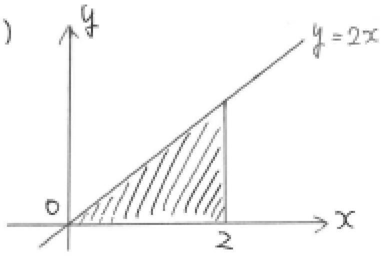
（３）$\int_{-3}^3 (x^2+2)dx$

３年　　　組　　　番	氏名	検印

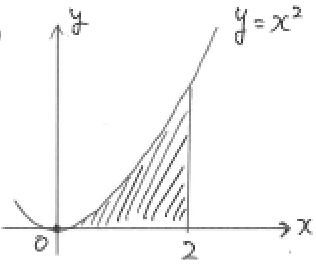
2019年度　３年文系数学　授業プリント　No.4　～積分で面積の計算をしよう～

例７　次の図形の面積を求めなさい。

（1）

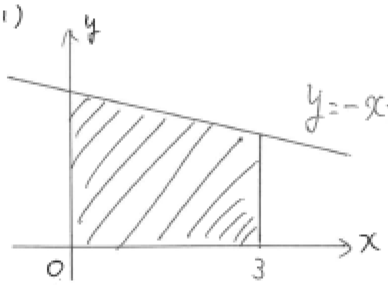


（2）

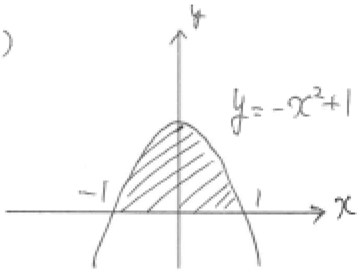


問題７　次の図形の面積を求めなさい。

（1）



（2）

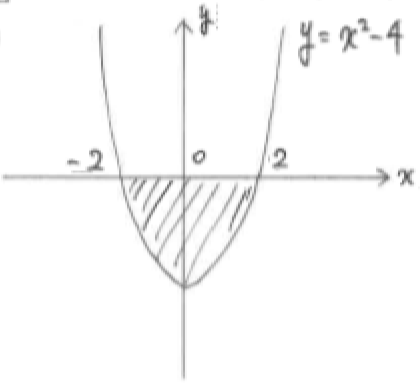


３年　　組　　番	氏名	検印

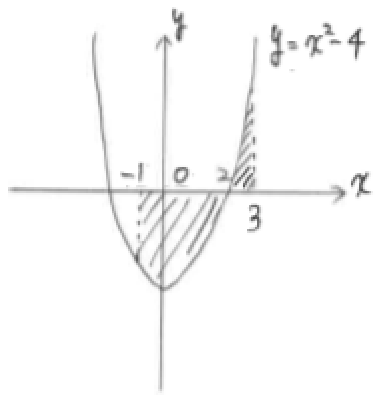
2019年度　3年文系数学　授業プリント　No.5　～積分で面積の計算をしよう②～

例8　次の図形の面積を求めなさい。

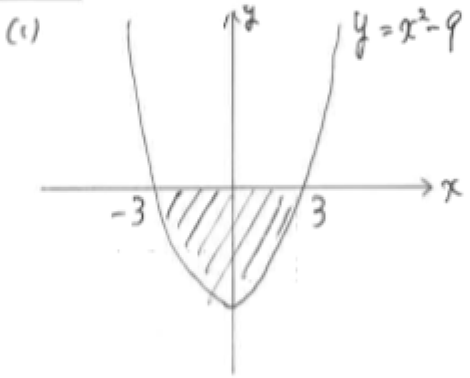
(1)

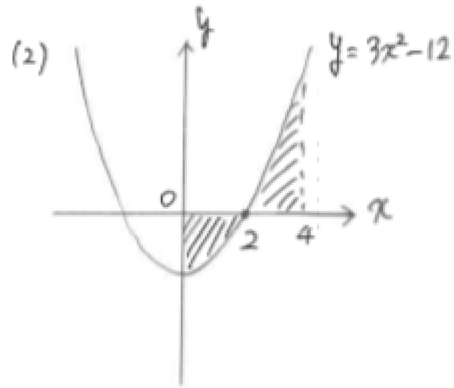


(2)



問題８　次の図形の面積を求めなさい。





３年　　組　　番	氏名	検印