関数空間上における積分作用素の性質に関する研究

は　し　が　き

本報告書は，平成１４，１５年度科学研究費補助金

基盤研究 (C)(2) 「関数空間上における積分作用素の性質に関する研究」

（研究課題番号　14540168）

の研究成果報告書である。本研究の研究組織および研究経費は次の通りであった。

研究組織

研究代表者	山　田　雅　博	（岐阜大学・教育学部・助教授）
研究分担者	竹　内　　　茂	（岐阜大学・教育学部・助教授）
	愛　木　豊　彦	（岐阜大学・教育学部・助教授）
	石　渡　哲　哉	（岐阜大学・教育学部・助教授）
	下　村　　　哲	（広島大学・教育学部・助教授）
	米　田　力　生	（愛知教育大学・教育学部・助手）

研究経費

平成１４年度	２，１００千円
平成１５年度	１，２００千円
計	３，３００千円

この間，各方面よりいただいたご援助に深甚なる謝意を表すものである。

２００４年3月

第 II 部　研究成果

本研究では，ベルグマン空間上の積分作用素に関連する様々な結果を得ることができた。以下，各事項ごとに成果を報告する。

1. 調和ベルグマン空間上のカールソン不等式

本研究では，テープリッツ作用素の有界性に関する研究を行った。特に，$\mathbf{R}^n$ の上半平面で定義された調和バーグマン空間におけるテープリッツ作用素の有界性に関連したカールソン不等式の解析を行った。テープリッツ作用素の可逆性に関する研究に関連して，調和ベルグマン空間における接導関数と非接導関数との関連性に関する研究を行い，それらの関数のノルムが同値となることを示した。また，カールソン不等式と呼ばれる積分不等式の性質の解析を行い，申請者が過去に行った研究結果を含んだより一般的な結果を得た。ここでは，考えるベルグマン空間も調和関数によって作られるバナッハ空間とし，そこにおける (A_p) 条件に相当する新しい概念を導入した。具体的には，$n-$ 次元ユークリッド空間の上半平面で $p-$ 乗可積分な調和ベルグマン空間を考える。一方の測度の任意の調和関数の $p-$ 乗積分が他方の測度の調和関数の $p-$ 乗積分で上から押さえられるための必要十分条件を，他方の測度が $(A_p)_\partial$ 条件を満足するときに特徴付けた。α–ベルグマン空間という新たな概念が提示され，通常のベルグマン空間を放物型作用素の解空間の一種と見なし，より統一的にベルグマン空間を研究するという方向が示された。

2. α–ベルグマン空間上のカールソン不等式

本研究では，α–ベルグマン空間上のカールソン不等式を考察し，カールソン不等式が成立するための特徴付けを行った。この特徴付けは，ある種の微分方程式の基本解をもとに構成した再生核を用いて行った。また，その際に必要十分条件を記述するため，α–カールソンボックスという概念を導入し，再生核の境界挙動や評価を行い，その性質を明らかにした。

3. 形状記憶合金問題

形状記憶合金の力学的変化において，歪みと応力の関係は通常の関数関係ではなく，ヒステリシスと呼ばれる過去の履歴に依存する作用素において表現される。従来，数学的困難からこの関係は多項式近似によって表現され，これをもとにした数理モデルに対する研究が進められてきた。そこで，本研究ではその対応を generalized stop opeartor を用いて

数学的に表現し，それと同値である常微分方程式をシステムに取り込んだ数理モデルを導出し，そのモデルを解析してきた。

まず，第一段階としてヒステリシスと同値である常微分方程式を近似した1次元問題を考え，その解の存在と一意性を証明した。次に，常微分方程式を近似せずそのままの形を扱ったシステムを考察した。この際，問題となるのは，常微分方程式には空間的正則性を保証する性質がないので，古典解の存在を証明できないことである。従って，ここでは弱解を考えその存在と一意性を示した。そして，3次元問題を考察対象としたが，解の正則性が不十分なため，近似問題の適切性のみを証明するにとどまった。

4. 強磁性体における磁化過程

強磁性体における磁化過程は最も代表的なヒステリシス現象であるにも関わらず，その数学的取り扱いが確定していない。そこで，本研究において generalized Duhem model のアイデアを用い，ヒステリシスを数学的に表現し，それをモデルに採用し，問題の適切性を示すことができた。

5. sublinear な方程式に対する1相ステファン問題

この問題は，数値実験によって得られた現象を数学的に証明することを目的として始めた。次の sublinear な方程式に対する1相ステファン問題を考える。

$$u_t - u_{xx} = u^p, 0 < p < 1.$$

$p > 1$ のときは，本研究グループのメンバーによって解析が進められてきた。$0 < p < 1$ の場合，その項がリプシッツ連続ではないので，解の一意性の証明が簡単ではない。1相ステファン問題に限らず，この方程式に対する初期値境界値問題が考察対象となったのはごく最近のことである。本研究では，まず，sublinear な方程式に対する1相ステファン問題の解の存在と一意性を示した。一意性を示すにあたって，Green 関数を用いた解の表現が本質的なアイデアである。そのため，解が十分に滑らかでなければならず，C^2 クラスに属するような古典解の存在を同時に示す必要があった。

次に，解の時間無限大での挙動に関する結果を得ることができた。それは，解は時間に関して大域的に存在し，時間無限大のとき，温度 u と自由境界 $x = \ell(t)$ が

$$u(t,x) \to \infty \text{ and } \ell(t) \to \infty \text{ as } t \to \infty$$

を満たすということである。ステファン問題と通常の熱方程式とを比較した場合，あまり

変わらない，というのが従来の結果であった。sublinear な方程式に対する境界値問題は非自明な定常解を一つしか持たないので，時間が無限大になったとき，解は定常解に近づく。それに対し，1相ステファン問題の場合は上述したように，大きく異なる挙動を示す。これは，領域が無限区間のとき，sublinear な方程式に対する定常解が存在しないことに起因する。これからは，無限大に発散するそのレートに対する評価を求めて行く予定である。微分方程式の解のあるノルムが有限時間で発散するとき，この解を爆発解という。非線形項から誘導される自然な特異性を持つ解を Type I の爆発解といい，この特異性は，爆発する自己相似解と特徴づける指標となっている。近年，この Type I より強い特異性をもつ解の存在が知られ，「Type II の爆発解」，あるいは，「速い爆発解」と呼ばれている。矢崎氏との共同研究により，界面運動方程式の1つであるクリスタライン運動に現れる Type II の特異性について詳細な結果を得た。特に，空間的な解のプロファイルと解のもつ時間的な特異性の対応関係を明らかにした。

6. 距離空間上におけるソボレフの定理

近年，微分構造を仮定せず，一般の距離空間上でソボレフの定理を展開する試みが行われている。ソボレフの定理におけるヘルダー型連続性について新しい知見を得た。半空間における分数巾ポアソン核による積分の無限遠点での極限値についても成果を得た。さらに，半空間における L^p 関数の分数巾ポアソン核による積分の境界極限値の存在について調べ，p がある範囲に含まれる場合に Fatou 型定理を得た。