

強制開口外力を受けるき裂の応力関数と 応力集中に関する研究

The study of stress functions of a crack with pressure
widening the crack and stress concentration

平成11年1月

学位論文：博士(工学)甲93

阿 部 安 秀

目 次

第 1 章 序論	1
1.1 き裂解析の現状と本研究の主題	1
1.1.1 非線型破壊力学の従来の研究	2
1.1.2 破壊基準（破壊のパラメーター）	3
1.1.3 面外問題における従来の研究	4
1.1.4 本研究の基礎となる研究の概要と本研究の主題	4
1.2 本研究の特徴	6
1.3 本研究の概要	10
参考文献	11
第 2 章 面内強制開口する直線状き裂の解析	17
2.1 まえがき	17
2.2 基礎式とその平滑化の手法	17
2.3 無限板内のき裂内部を強制開口する基本解と計算例	21
2.3.1 集中荷重による応力関数と応力集中の平滑化	21
2.3.2 一様分布の開口外力による応力関数	22
2.3.3 数値計算例	24
2.4 有限矩形板中央のき裂に対する適用と計算例	27
2.4.1 有限矩形板に対する適用手法	27
2.4.2 数値計算例	28
2.4.3 閉じ合わせ誤差の検討	29
2.5 自由面に平行なき裂に対する基本解と計算例	32
2.5.1 基本開口関数	32
2.5.2 数値計算例	34
2.5.3 き裂から自由辺までの距離が与える影響	38
2.6 まとめ	41
参考文献	42
第 3 章 有限矩形板き裂に対する適用例	43
3.1 まえがき	43
3.2 実験概要	43
3.3 実験結果	44
3.4 解析モデル	45
3.5 解析結果と実験結果の比較	46
3.5.1 プロセスゾーン長の評価	46
3.5.2 き裂周辺のひずみ量と孔径変位量の評価	47

3.5.3	き裂周辺応力と変位図	47
3.6	まとめ	48
	参考文献	49
第4章	自由面に平行なき裂の解への適用例	50
4.1	まえがき	50
4.2	岩盤破碎実験	50
4.2.1	岩盤掘削工法の概要	50
4.2.2	静的破碎剤による岩盤破碎工法の概要	52
4.2.3	原位置実験	53
4.3	シミュレーション解析	58
4.3.1	解析手法	58
4.3.2	解析モデル	59
4.3.3	解析条件	60
4.4	解析結果と考察	61
4.5	まとめ	66
	参考文献	67
第5章	円孔周辺の放射状き裂の面内問題解析	68
5.1	まえがき	68
5.2	円孔周辺に放射状(半径方向)き裂を構成する 各種応力関数の定義	69
5.2.1	一様応力が作用する円孔の無い無限板	69
5.2.2	円孔周辺に一様内圧が作用する無限板	70
5.2.3	面内引張り型き裂開口形状を構成する応力関数	70
5.2.4	面内曲げ型のき裂開口形状を構成する応力関数	72
5.2.5	面内強制開口外力による応力関数	73
5.3	解析モデル	74
5.4	解析方法	76
5.5	数値計算例	78
5.5.1	き裂4本のモデル	78
5.5.2	き裂3本のモデル	78
5.6	各パラメーターが応力集中に与える影響	82
5.6.1	各パラメーターの変化と計算ケース	82
5.6.2	計算結果および考察	83
5.7	まとめ	87
	参考文献	88

第 6 章	面外強制開口する直線状き裂の解析	90
6.1	まえがき	90
6.2	面外強制開口の解	90
6.3	数値計算例	96
6.4	FEM解析結果との比較	97
6.4.1	FEM解析のモデル化	97
6.4.2	解析結果の比較と考察	99
6.5	まとめ	103
	参考文献	104
第 7 章	直線状き裂の面内・面外問題における応力集中の比較検討	105
7.1	まえがき	105
7.2	面内強制外力の作用幅と応力集中の関係	105
7.3	面外強制外力の作用幅と断面力集中の関係	109
7.4	面内・面外問題における応力および断面力集中の比較検討	112
7.5	まとめ	113
	参考文献	114
第 8 章	結論	115
8.1	本研究の成果	115
8.2	今後の課題	117
	参考文献	118

図 の 一 覧 表

第 2 章

図-2.1	一様引張り応力を受ける直線状き裂を持つ無限板	19
図-2.2	き裂先端部における応力集中	19
図-2.3	重み関数 ρ と適用区域	20
図-2.4	1次式の重み関数 ρ_s	20
図-2.5	き裂内部に作用する等分布荷重	21
図-2.6	一对の集中荷重	21
図-2.7	等分布荷重と作用位置	22
図-2.8	X方向変位 U 分布図	25
図-2.9	Y方向変位 V 分布図	25
図-2.10	X方向応力 σ_x 分布図	25
図-2.11	Y軸上のX方向応力 σ_x の拡大図	25
図-2.12	Y方向応力 σ_y 分布図	26
図-2.13	せん断応力 τ_{xy} 分布図	26
図-2.14	仮想き裂の配置図	28
図-2.15	数値計算モデル	28
図-2.16	仮想き裂を含めたY軸上の σ_x 分布図	29
図-2.17	自由辺における閉じ合わせ誤差の対象とする応力	30
図-2.18	き裂長と閉じ合わせ誤差の関係	31
図-2.19	自由辺の構成法	33
図-2.20	半無限板数値計算モデル	34
図-2.21	X方向変位 U 分布図 ($-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	35
図-2.22	X方向変位 U 分布図 (視点 $Y=15$) ($-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	35
図-2.23	Y方向変位 V 分布図 ($-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	35
図-2.24	Y方向変位 V 分布図 (視点 $Y=0$) ($-10 \leq X \leq +10, 0 \leq Y \leq +10$)	35
図-2.25	X方向応力 σ_x 分布図 ($-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	36
図-2.26	X方向応力 σ_x 分布図拡大図 ($-5 \leq X \leq 0, 0 \leq Y \leq +10$)	36
図-2.27	X方向応力 σ_x 分布図 (視点 $Y=15$) ($-20 \leq X \leq +10, -10 \leq Y \leq +10$)	36
図-2.28	Y方向応力 σ_y 分布図 ($-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	37
図-2.29	Y方向応力 σ_y 分布図 (視点 $Y=15$) ($-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15$)	37
図-2.30	せん断応力 τ_{xy} 分布図	37
図-2.31	せん断応力 τ_{xy} 分布図 (視点 $Y=15$)	37
図-2.32	自由辺との距離が最大応力に及ぼす影響 ($1 \leq L/a \leq 3$)	39
図-2.33	自由辺との距離が最大応力に及ぼす影響 ($2 \leq L/a \leq 10$)	39
図-2.34	Y軸上の σ_x 分布と計算誤差の対象	40
図-2.35	L/a と 計算誤差 e_1, e_2 の関係	40

第3章

図-3.1	実験供試体概念図	44
図-3.2	載荷圧力とひずみの関係	44
図-3.3	解析モデル	45
図-3.4	Y軸上における σ_x 拡大図(Case B 載荷ステップS-2)	48
図-3.5	X方向変位u分布図(Case B 載荷ステップS-2)	48
図-3.6	X方向応力 σ_x 分布図(Case B 載荷ステップS-2)	48
図-3.7	Y \geq 6.6cmにおけるX方向ひずみ ϵ_x 分布図 (Case B 載荷ステップS-2)	48

第4章

図-4.1	施工フロー	52
図-4.2	削孔ピッチ及び抵抗線長	53
図-4.3	施工配置図	54
図-4.4	破壊完了時(24時間後)のき裂幅	55
図-4.5	き裂進展状況のパターン	56
図-4.6	内圧の作用する円孔モデル	59
図-4.7	き裂重ね合わせのモデル化	60
図-4.8	解析モデル	60
図-4.9	モデル1(削孔ピッチ70cmの場合)の解析結果	61
図-4.10	モデル2(削孔ピッチ70cmの場合)の解析結果	62
図-4.11	モデル3(削孔ピッチ70cmの場合)の解析結果	62
図-4.12	モデル3(削孔ピッチ50cmの場合)の解析結果	63
図-4.13	モデル3(削孔ピッチ70cmの場合)の解析結果	63
図-4.14	モデル3(削孔ピッチ90cmの場合)の解析結果	64

第5章

図-5.1	円孔なしの無限板	69
図-5.2	一様内圧が作用する円孔を有する無限板	70
図-5.3	重み関数の形状	71
図-5.4	面内引張り型き裂形状を有する無限板	71
図-5.5	面内曲げ型き裂形状を有する無限板	73
図-5.6	静的破砕材に対する解析モデル	75
図-5.7	鉄筋の腐食膨脹に対する解析モデル	76
図-5.8	v_θ	78
図-5.9	v_θ 拡大図	78
図-5.10	σ_r	80
図-5.11	σ_r 拡大図	80

図-5.12	σ_{θ}	80
図-5.13	σ_{θ} 拡大図	80
図-5.14	$\tau_{r\theta}$	81
図-5.15	u_r	81
図-5.16	v_{θ}	81
図-5.17	v_{θ} 拡大図	81
図-5.18	プロセスゾーン近傍の応力及び開口変位	83
図-5.19	き裂線上の応力分布	84
図-5.20	プロセスゾーン長さ b_2 の変化と最大応力の関係	84
図-5.21	き裂長 a の増加による応力集中 (クラック長 a と最大応力の関係)	85
図-5.22	き裂本数の増加による応力の低下	85
図-5.23	円孔の寸法効果	86

第6章

図-6.1	き裂開口部に作用する面外相反分布荷重 (Mode III)	91
図-6.2	面外相反分布荷重が作用する直線状き裂	96
図-6.3	面外変位 (W_{III}) 分布図	96
図-6.4	等価せん断力 (R_x) 分布図	96
図-6.5	Y 軸上の等価せん断力 (R_x) 分布図	97
図-6.6	FEM モデルの全体図	98
図-6.7	要素分割図	98
図-6.8	き裂先端部のモデル詳細図	99
図-6.9	プロセスゾーン内のばね配置	99
図-6.10	面外変位 (W_{III}) の比較	100
図-6.11	プロセスゾーン内における面外変位 (W_{III}) の比較	100
図-6.12	等価せん断力 R_x 分布の比較	101
図-6.13	Case-5 におけるばね定数値分布	102
図-6.14	Case-5 における面外変位 (W_{III}) の比較	103
図-6.15	Case-5 における等価せん断力の比較	103

第7章

図-7.1	等分布荷重と作用位置	105
図-7.2	荷重分布幅と最大応力の関係	106
図-7.3	荷重を全幅に作用させた時の最大応力に対する 各荷重分布幅における最大応力の比率	107
図-7.4	荷重位置 Case 1	107

図—7.5	荷重位置 Case 2	107
図—7.6	荷重作用位置と最大応力 $\sigma_{x\max}$ の関係	108
図—7.7	プロセスゾーン長さと最大応力の関係	109
図—7.8	き裂開口部に作用する面外相反分布荷重 (Mode III)	109
図—7.9	荷重分布幅と最大等価せん断力の関係	110
図—7.10	集中荷重作用時の最大等価せん断力に対する各荷重分布幅における最大等価せん断力の比率	111
図—7.11	プロセスゾーン長さと最大等価せん断力の関係	111
図—7.12	荷重分布幅と最大断面力の面内・面外問題の比較	112
図—7.13	面内・面外問題において b が最大断面力に与える影響の比較	113

表 の 一 覧 表

第 1 章

表—1.1	研究の位置付け	8
表—1.2	本研究の内容	9

第 2 章

表—2.1	設定境界条件の着目点	29
表—2.2	き裂長と閉じ合わせ誤差の関係	31
表—2.3	自由辺との距離と応力・変位量の関係	38

第 3 章

表—3.1	プロセスゾーン長と最大引張応力	46
表—3.2	ひずみ量とき裂中央の変位量の比較	47

第 4 章

表—4.1	岩盤掘削工法の分類	51
表—4.2	岩種による破壊係数 K	53
表—4.3	施工諸元	54
表—4.4	変位測定位置での変位量の経時変化	55
表—4.5	開口変位量 U の比較 ($E = 20,000 \text{ kgf/cm}^2$)	64
表—4.6	開口変位量 U の比較 ($E = 13,000 \text{ kgf/cm}^2$)	65
表—4.7	16 時間後の変位測定位置での変位量 U の比較	66

第5章

表-5.1	円周上で完全な開口を示すモデルの入力値と未定係数 $C_j(k)$ (図-5.8、図-5.9 参照)	79
表-5.2	円周上で閉じた開口を示すモデルの入力値と未定係数 $C_j(k)$ (図-5.10～図-5.17 参照)	79

第6章

表-6.1	ばね定数値のケース	99
表-6.2	等価せん断力 R_x (kgf/cm^2) の比較	100
表-6.3	載荷荷重と等価せん断力の合計の比較	101
表-6.4	Case-5 における K 値	102

第7章

表-7.1	荷重載荷位置と最大応力の関係	108
-------	----------------	-----

写真の一覧表

写真-4.1	破壊完了時き裂状況	57
写真-4.2	破壊完了時き裂状況 (削孔ピッチ 50cm)	57

第1章 序論

1.1 き裂解析の現状と本研究の主題

き裂を含む弾性体に外力が作用するとき裂先端に応力集中が発生し、き裂の進展と破壊に結びつく。この応力集中をはじめに力学問題として取り上げ、ガラスなどの脆性材料に対する脆性破壊理論を発表したのが Griffith¹⁾である。それ以降この力学問題は破壊力学という一分野に発展し、現在まで数多くの研究が発表されている。Griffithによって発表された脆性破壊理論は、Irwin²⁾などによって延性材料である金属材料にも適用できるように修正され、線形弾性破壊力学 (Linear elastic fracture mechanics) として大きく発展してきた³⁾。近年においてはさらに様々な材料やき裂の現象について多岐にわたる研究がなされている。土木工学の分野においても、コンクリート、岩石、セラミックや複合材料なども破壊力学の対象となっている。本節では一様弾性体中のき裂の解析的研究に的を絞って簡単に従来の研究の動向を述べる。

破壊力学の研究内容を大別すると、2つの分野から成り立っている。一つはき裂を含む材料に外力が作用した時に発生する応力やひずみ分布を求める連続体力学であり、もう一つはき裂を含む材料が与えられた条件下で破壊するかしないかという破壊基準 (クライテリオン) に関するものである⁴⁾。

連続体力学は、1920年に Griffith¹⁾が発表した楕円き裂モデルの長軸端に生じる応力集中に基づく脆性破壊理論の提案にその端緒が開かれた。これは外力により蓄えられるひずみエネルギーとき裂表面のひずみエネルギーの関係を論じたものである。それ以降多くの研究が行われたが、直線状き裂の先端における応力集中の解析解を与えたのが Westergaard⁵⁾である。Westergaardは1939年に、直線状き裂を有する無限板に無限遠方においてき裂に直角に一様引張応力を作用させたときの応力関数を発表した。この応力関数がその後の破壊基準の研究を含めた破壊力学の解析的な研究の基礎となっている。

Westergaardの応力関数の特徴でありかつ問題点は、き裂先端で応力が無限大に発散することである。このことは、非常に小さい荷重が作用してもき裂先端は常に応力が無限大となるため、部材は破壊されなければならないことになり実際の現象を表現し得ていないと言える。実際には、き裂先端での応力が破壊強度を超えると、破壊が起こりき裂が進展することになるわけで、その破壊に直接関係する有限な応力と材料の破壊強度が工学的には重要な問題といえる。その後の研究において、金属では転位の集積に起因した塑性域が、コンクリート、岩石、セラミックスなどではマイクロクラックの発生・成長・合体に起因した破壊進行領域 (fracture process zone、以下プロセスゾーンと呼ぶ) がき裂先端前方に形成されるため、塑性域を無視した線形破壊力学では破壊挙動に合理的な表現を与えることが出来ないことがわかった。特に非均質な物性を持つコンクリートや岩石などでは、破壊時のき裂先端

における塑性域が大きいいため、均質な金属材料とは異なりその影響は大きいことが確認されている。その後の連続体力学の主要な研究の一つに、この塑性域の変位と応力状態を表現する非線形破壊力学として破壊挙動をいかに現実に則したものとして表現し得るかという課題があげられる。後述する中川等の研究もこの課題に対する研究であり、本研究もその延長線上に位置づけられるものである。

1.1.1 非線形破壊力学の従来の研究

き裂先端の塑性領域での変位・応力分布を表現する試みは、大別して以下の3通りに分類できるが、実際の研究では組み合わせて活用されることが多い。

- (1) 応力形状を指定して応力関数を導く方法
- (2) 実験値による数値モデル化と逆解析
- (3) 有限要素法や境界要素法などによる近似数値解析

き裂先端で応力が無限大となる Westergaard の解に対して、Barenblatt⁶⁾はき裂先端の微小な領域に対して、結合応力としての原子・分子間結合力を仮定した。脆性破壊材料に対する Griffith 理論が結合力モデル (Barenblatt モデル) でも成立することを示すことにより、小規模降伏条件下での線形弾性破壊力学の適用が可能なることの理論的根拠を与えた。しかしながら、Barenblatt は具体的な応力関数を示したのではない。Dugdale⁷⁾はき裂先端の非線型領域としての弾塑性領域を仮定し、その領域での応力が一定の降伏応力と等しくなるモデル (Dugdale モデル) を提案し、その完全弾性解を示した。その領域では、応力と開口変位が共存する解であり、コンクリートの分野でのき裂先端開口変位 (crack tip opening displacement, CTOD) 概念⁸⁾の基礎を与えた。両者を合わせ Dugdale-Barenblatt モデルと呼ばれ、その後の研究の基礎概念として広く引用されている。

中川・段⁹⁾は、Westergaard の解に適当な重み関数を乗じて積分する重み積分法を破壊進行領域である弾塑性領域に適用し、完全弾性解でありながら Barenblatt モデルのような滑らかな応力分布と CTOD が共存可能な応力関数を導き提案している。また 1.1.4 項で説明するように同様の手法を用いて、様々な境界条件における解を導き報告している。

次に土木工学での主要な材料の一つであるコンクリートの分野での非線形破壊力学の適用に関する研究を概括する。コンクリートは脆性材料であるという先入観から、初期には線形破壊力学の適用が可能と考えられ、1961年に Kaplan¹⁰⁾がはじめて実験によるコンクリートの破壊靱性値を報告した。その後線形破壊力学を適用する試みが数多くなされた。しかしながら、コンクリートの場合ではき裂先端の破壊進行領域の存在が無視できないものであり、従来の線形破壊力学をそのまま適用することには不都合があることが明らかになった。Hillerborg¹¹⁾¹²⁾¹³⁾はき裂先端のプロセスゾーンを、応力と開口変位の関係 (引張軟化則) で構成した仮想ひびわれモデル (fictitious crack model) を提案し有限要素法に活用した。また引張軟化曲線下

の面積を、破壊エネルギーとして提案した。その後今日まで、Bazant, Cedolin¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾により提案されたひびわれ帯モデル (crack band model) をはじめとして多数の数値解析用のモデルが提案されている。また Bazant, Oh¹⁷⁾はコンクリートの破壊シミュレーション解析を行うことを目的に、引張軟化特性を導入する手法を提案し良好な研究成果を報告している。Wium¹⁸⁾はハイブリット方式という数値解析法を活用して、Barenblatt モデルのようにき裂先端より応力が滑らかに立ち上がる応力分布を導いている。また、Cho¹⁹⁾、Visalvanich²⁰⁾はファイバーコンクリートの実験結果からも同様な応力分布を報告している。これらはいずれもプロセスゾーンに引張軟化曲線を活用した有限要素法による解析結果と比較され、有限要素法の有効性を示している。

このようにコンクリートの非線形破壊力学の適用においては、プロセスゾーンに引張軟化特性を構成する応力と変位の関係を導入することにより、Barenblatt モデルのような応力分布を呈する実際の破壊時の応力状態を再現する試みが主流となっている。数値解析用の引張軟化曲線は、直線とするもの²¹⁾²²⁾、2直線とするもの²³⁾²⁴⁾、多曲線および曲線とするもの²⁵⁾等種々の形状が提案されている。しかし、破壊エネルギーの値が同じであっても引張軟化曲線の形状の相違により、有限要素法 (FEM) や境界要素法 (BEM) で求められる荷重—変位曲線の挙動は大きく異なることが報告されている²³⁾²⁶⁾²⁷⁾。従って荷重—変位曲線と引張軟化曲線との関係がまだ明確化されていないと考えられる。プロセスゾーンの発生機構、その力学特性や大きさ、引張軟化曲線との対応など、現在鋭意研究が進められている課題である。

1.1.2 破壊基準 (破壊のパラメーター)

Irwin²⁾は、Westergaard の応力関数⁵⁾に基づいて、き裂先端で無限大に発散する応力分布を無次元化するスケールファクターである応力拡大係数 K (stress intensity factor) を提案した。 K 値は線形弾性解析および体積力法、選点法、FEM、BEM などの数値解析法により、多くの研究者により様々なケース²⁸⁾²⁹⁾について求められており、脆性材料や金属材料の破壊のクライテリオンとして、線形破壊力学の最も重要なパラメーターとして活用されている。しかしながら、 K 値の基本式は、き裂長さの平方根とき裂発生前のき裂位置での平均応力値の積に部材の形状と外力の載荷形式によって決まる補正係数を乗じた式で表わされ、母材の物理的性質や材料特性を評価したものではない。また、あくまでもき裂先端における特異性を容認しているため、塑性域が無視できないような破壊の非線形挙動を評価することは出来ない。このため、脆性材料などに見られる非線形領域が微少の小規模降伏状態に限って適用が可能となる。

別の破壊力学パラメーターとして、Rice³⁰⁾により提案された破壊過程におけるエネルギー平衡論に基づく J 積分がある。 J はき裂を単位面積進展させるのに必要なエネルギーとしての物理的な意味を持ち、非線型弾性体におけるき裂先端近傍の応力・ひずみ度の特異性の強さを表わすパラメーターとなる。

また Wells や Cottrell⁸⁾により提案されたき裂先端開口変位 (CTOD) も、破壊基準の一つと言える。CTOD の概念は、き裂先端の塑性鈍化による開口変位が材料に固有の限界値に達したときに、き裂が進展するという条件を与えるものである。

1.1.3 面外問題における従来の研究

上記までの記述はき裂問題全般についての記述であるが、本研究では面外問題についても取り扱うため、面外問題における従来の研究を概括する。

き裂を有する薄板の面外力問題に関する研究は、その多くが古典曲げ理論に基づき応力拡大係数を求めたものである。Reissner³¹⁾は「き裂を持つ板の面外力問題の特異点は $3/2$ 乗のオーダーであるから、 $1/2$ 乗のオーダーの特異性しか持たない面内力問題に比較して、き裂線上の連続条件 (境界条件) を重調和関数で満足させることは非常に厳しいものである」と論証している。しかし、Erdogan³²⁾³³⁾³⁴⁾あるいは Rice³⁵⁾等によりいくつかの解が報告されているが、いずれも応力拡大係数に関するものである。また西谷等³⁶⁾は、数値解析法の一つである体積力法を用いて、長谷部等³⁷⁾³⁸⁾は有利写像関数と複素応力関数を用いて、いくつかの問題に対する応力拡大係数を求めている。

古典曲げ理論では、 Y 軸に垂直な面の境界条件に対して近似式を用いており、板厚が他の寸法と比較し十分小さい場合に限って用いることができる。これに対して Reissner³¹⁾は、やはり近似理論ではあるが板厚を考慮に入れたより厳密な解として、3境界条件である M_y, M_{xy}, Q_y を独立に指定できる解析法を提案し、長方形板のねじり問題および円孔を有する無限板の曲げモーメントとねじりが作用する問題に適用している。Reissner の理論を適用した解として、Wang³⁹⁾⁴⁰⁾、Hartranft⁴¹⁾等による1個のき裂を持つ無限板の面外曲げ問題、Erdogan、Bouduroglu³⁴⁾⁴²⁾による2個のき裂を持つ帯板と半無限板の外側き裂の面外曲げ問題、Wang⁴³⁾、Delale⁴⁴⁾等によるねじりと面外せん断の問題、玉手による1個⁴⁵⁾、2個⁴⁶⁾、無限周期き裂群⁴⁷⁾ならびに帯板⁴⁸⁾に対する研究などがある。これらはいずれも応力拡大係数を求めたものであり、形状パラメーターや板厚の影響などを検討しているが、古典曲げ理論で求められた結果との比較という点では明確にされていない。

1.1.4 本研究の基礎となる研究の概要と本研究の主題

本研究は、線形の解に基づいて1.1.1項で述べた非線形破壊力学の問題を近似的に表現するものであり、応力形状を指定して応力関数を導く手法を基本とするものである。指定する応力分布は、コンクリートに対する実験から報告¹⁹⁾²⁰⁾されている結合モデル (Barenblatt モデル) の概念によるものであり、課題とする問題の境界条件を満足しつつ、プロセスゾーンにおいて滑らかな応力分布と開口変位を与える応力関数を求めることを目的とするものである。

Westergaard の解におけるき裂先端での応力の特異性を解消するため、中川・段等⁹⁾は適当な重み関数を乗じてプロセスゾーン区間において積分する重み積分法を

考案し、有限で滑らかな応力分布と CTOD が共存可能な応力関数を導いている。中川等は、この重み積分法を用いてき裂を有する薄板に対して一連の研究を報告している。本研究の主題と位置づけを明確化するために、以下にその内容を簡単に述べる。

最も基本となる一様弾性体無限板内の1個の中心き裂に対する平滑化された応力関数が、1986年に段・児島・中川⁹⁾により発表されている。この関数は√関数を基礎関数として、長方形、1次式、2次式による重み積分が示されている。その後 Log 関数を主体とした特異関数による解⁴⁹⁾および指数関数による解⁵⁰⁾も導かれている。これらはすべて無限遠方において一様な引張、せん断、曲げ、ねじり等の面内外力が作用した時の解である。また一様弾性体中のき裂の解としては、指数関数による半無限板外側き裂の無限遠方外力作用時の一般解⁵¹⁾および√関数を用いた外側き裂の強制開口外力作用時の解⁵²⁾と固定辺近傍のき裂に一様引張外力が作用する時の解⁵³⁾が導かれている。これらの解析関数は、コンクリート梁の荷重変位曲線のシミュレーション⁵⁴⁾、コンクリートの引張軟化曲線に対するシミュレーション⁵⁵⁾、プロセスゾーン長さの逆推定⁵⁴⁾⁵⁶⁾、岩盤破碎工法の1つであるくさび貫入工法の設計法への適用⁵²⁾および誘発目地の設計法への適用⁵³⁾などに応用され報告されている。

上記の応用問題として、半無限直交異方性板中の自由辺に平行なき裂の近似解が、√関数を基礎関数として導かれている⁵⁷⁾。これは自由辺構成用の補正関数により開口部に生じた応力を作用荷重とみなしたときの解となっている。また無限等方性板の外側き裂および中心き裂の面外問題に対しても、√関数を基礎関数として一般解が導かれている⁵⁸⁾。この解は、き裂開口部の境界条件を $M_x=0$ または等価せん断力 $R_x=0$ と指定することにより求められており、無限遠方において開口部の境界条件を満たすような面外せん断力、面外曲げモーメントまたはねじりモーメントが作用する解である。以上が一様板内のき裂に関する研究の概要である。

境界面き裂の面内問題の研究も多数報告されている。等方性異材直線状界面問題では、Fourier 級数を基礎関数として剛体と弾性体間の境界面き裂が一様引張応力を受けた時の解⁵⁹⁾、指数関数を適用しせん断力が作用した時の解⁶⁰⁾および一様引張応力を受けた時の解⁶¹⁾が報告されている。また円形境界問題にも拡張され、Fourier 級数を利用した中央の円形剛体に集中力が作用した時の未接合領域近傍の解⁶²⁾、指数関数を用いた外側部材にねじり力が作用した時の解⁶³⁾および無限遠方での一様引張応力が作用した時の解⁶⁴⁾が導かれている。直交異方性直線状中心き裂の問題では、Fourier 級数を用いた解⁶⁵⁾⁶⁶⁾および指数関数を用いた解⁶⁷⁾が、また外側き裂の問題ではやはり指数関数を用いて一般解が導かれている⁶⁸⁾。面外問題については、√関数を利用し等方性異材界面き裂の問題を、一様弾性体の場合と同様に開口部の境界条件を指定することにより導いている⁶⁹⁾。

さらに3次元問題にも重み積分法は拡張され、円盤状の空隙に対して偏平楕円座標系を利用して一様引張問題⁷⁰⁾やせん断問題の解⁷¹⁾を導いている。

重み積分法で得られる応力集中の度合いは重み関数の形状により変化するが、J積分との比較において重み関数の形状によるJの値の差異はほとんどないことが報

告されている⁵⁶⁾⁶¹⁾⁷⁰⁾。

以上中川等の一連の研究を概括したが、現在まで導かれている応力解の多くが無
限遠方に作用する外力に関するものである。土木工学においては、くさびや薬液な
どでき裂内部に外力を作用させて岩盤を破砕する工法や、コンクリート壁やスラブ
の開口部に外力が作用しき裂が進展する場合など、開口部内部に外力が作用するケ
ースも多い。著者はこの点に注目し、き裂内部に分布荷重として外力が作用する場
合の平滑化された応力解を導くと共に、その適用範囲を研究することを本研究の主
題とする。

1.2 本研究の特徴

本研究の特徴は次の5点である。

- (1) 中川等のき裂先端で有限な応力集中と開口変位を伴うプロセスゾーンを構
成し得る応力関数を基礎に、一様弾性体中のき裂開口部に強制開口外力が作用
する時の解を系統化するとともに、き裂近傍における応力集中の特性を明確化
したことである。面内問題においては、無限板、矩形板、半無限板の直線状き
裂開口部に外力を作用させる解および円孔周辺の放射状き裂の場合には円孔
周辺の応力あるいは変位を指定する各応力関数を導いた。また、面外問題につ
いては、無限板中の直線状き裂に対して面外方向の強制開口力を作用させる問
題の解を導いた。
- (2) 矩形板および自由辺を有する半無限板の面内問題に対し、それぞれ数値計算
例により応力集中の特性を論じるとともに、閉じあわせ誤差等を求めることに
より解の適用限界を示した。
- (3) 無限板中の直線状き裂に対する面外強制開口問題におけるき裂線に沿う等
価せん断力の符号反転現象に対して、ばね常数をき裂先端からプロセスゾーン
端部の完全弾性体部まで指数関数的に増加させたモデルを設定し、FEM解析
により符号反転現象を検証することが出来た。このことは、古典理論に基づく
薄板の曲げの微分方程式を基本とした場合には、面外方向のせん断力の符号反
転現象は当然の帰結と結論付けられた。
- (4) 直線状き裂に対する強制開口の面内問題と面外問題の比較において、面内問
題においてはき裂先端に荷重を集中させることがより大きな応力集中を発生
させ、反対に面外問題においては開口部中央に荷重を集中させることがより大
きな断面力集中を発生させることを示した。
- (5) 室内実験および現場実験の結果に矩形板および半無限版の解を適用し、解の
有効性を検証し工学的な意味付けをおこなった。特に中川等の一連の研究にお
いて課題となっていたプロセスゾーン長さの推定方法とき裂進展の予測に対

して、具体的な成果が得ることが出来た。

参考資料として一様弾性体中のき裂に関する研究の概要と本研究の位置づけを表1.1に示す。表1.2には本研究の内容を示す。

表 - 1.1 研究の位置付け

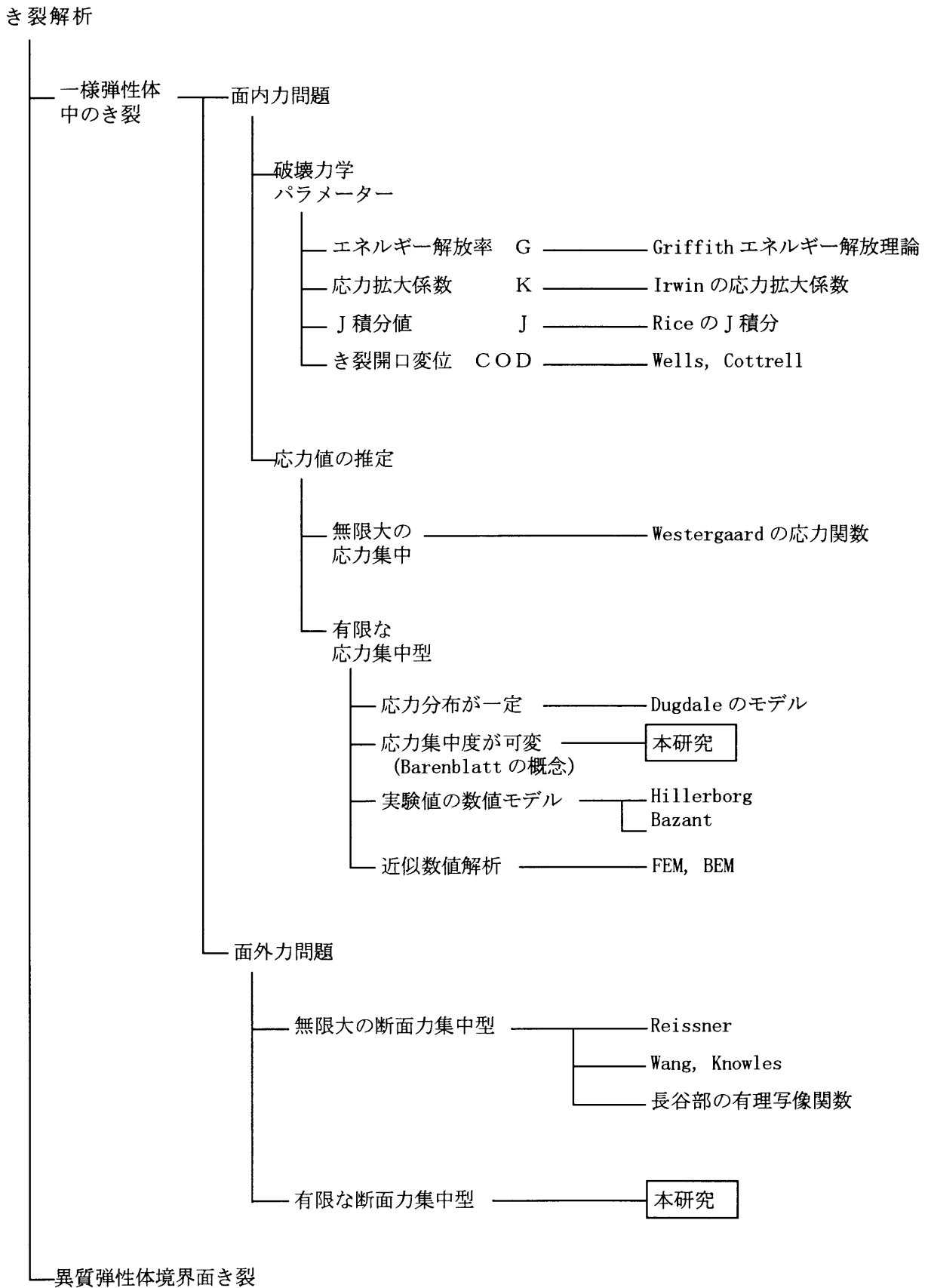
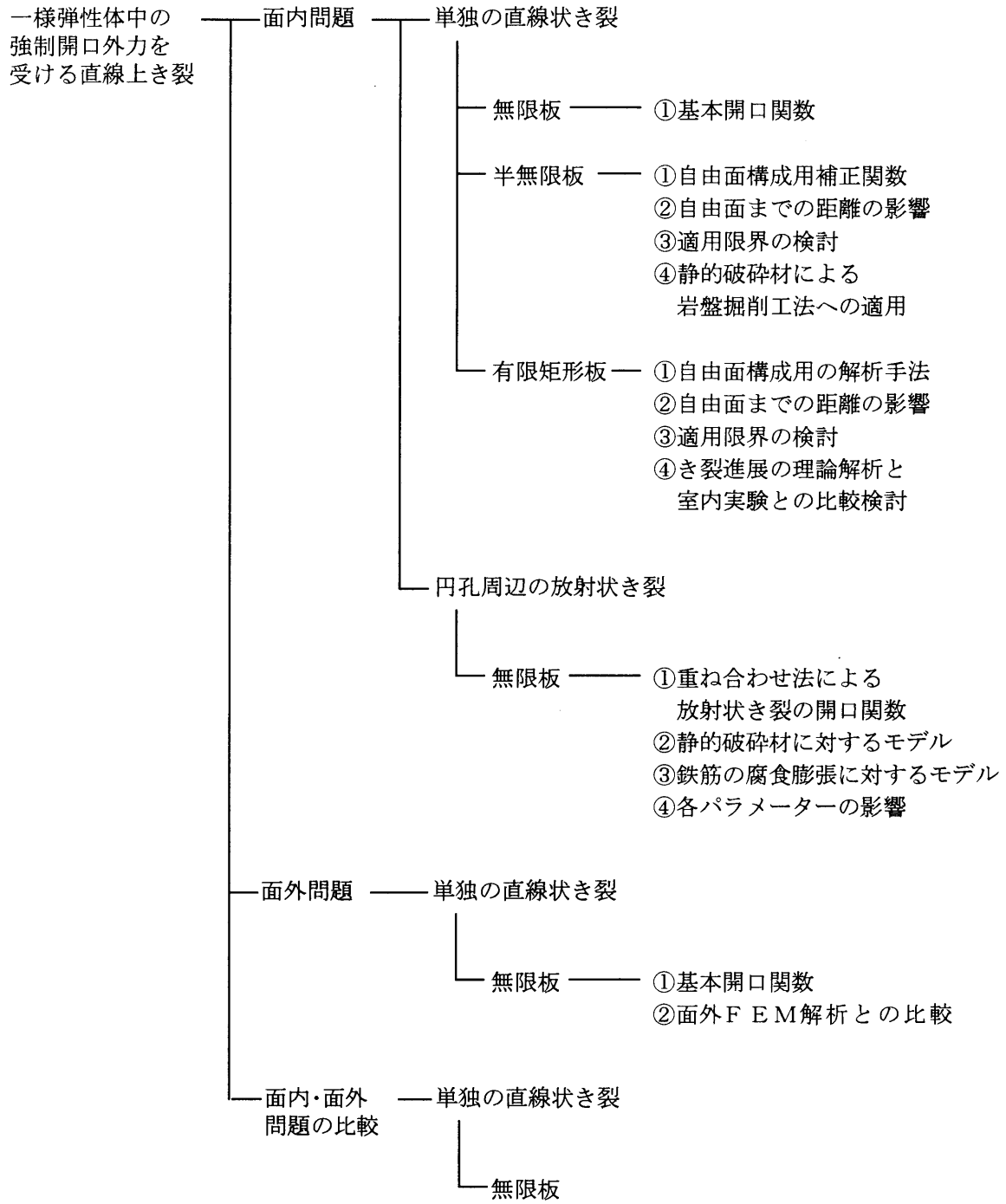


表-1.2 本研究の内容



1.3 本研究の概要

本論文の構成を次に示し、各章の概要を述べる。

第1章 序論

第2章 面内強制開口する直線状き裂の解析

第3章 有限矩形板き裂に対する適用例

第4章 自由面に平行なき裂の解への適用例

第5章 円孔周辺の放射状き裂の面内問題解析

第6章 面外強制開口する直線状き裂の解析

第7章 直線状き裂の面内・面外問題における応力集中の比較検討

第8章 結論

第2章では、無限板、矩形板、自由辺を片側に有する半無限板等の直線状き裂の開口部に、任意の分布幅を有する面内強制開口外力が作用する問題の解を導く。重み積分法を活用して平滑化された応力集中を持ち、開口部に外力が作用している基本開口関数を求めるとともに、重ね合わせ法により矩形板および半無限板の境界条件の整合に対する解析手法を導いている。また矩形板および自由辺を有する半無限板の面内問題に対し、それぞれ数値計算例により応力集中の特性を論じるとともに、閉じあわせ誤差等を求めることにより解の適用限界を求めている。

第3章では、矩形板中のき裂に対する解析手法を、モルタル供試体を用いた孔内載荷試験結果に適用し、き裂進展に伴う開口変位量と測定点でのひずみ量の比較検討を行った。またプロセスゾーン長さを逆推定することを試みた。

第4章では、自由辺を有する半無限板中のき裂の応力関数を、静的破砕剤工法による岩盤の破砕実験に対して適用した。実験は9個の円孔を持つモデルについて行われたため、解析では応力関数を複数重ね合わせる手法を用い、実験結果の開口変位量および自由面方向への変位量との比較を行っている。

第5章では、無限板内の円孔周辺の放射状き裂における面内強制開口問題に対して、円孔周辺の応力あるいは変位を指定する応力関数を導いた。静的破砕剤や薬液注入時の膨張作用により発生するき裂を想定した円周上でき裂が開いたモデルと、鉄筋の腐食膨張などを想定した円周上で円周方向の変位が0に拘束されたモデルについて数値計算例を示すとともに、き裂長さ、プロセスゾーン長さ、円孔の半径、およびき裂本数の各パラメーターの変化による応力集中の特性の検討を行っている。

第6章では、無限板中の直線状き裂に対して開口部に部分的に等分布する面外方向の荷重による強制開口問題の解を導いている。プロセスゾーン内に生じる等価せん断力の符号反転現象に対して、プロセスゾーン部分を面外方向のばねに置き換えたシェル要素モデルを設定して、FEM解析による計算例で比較検討を行い、せん断力の反転現象を検証している。

第7章では、直線状き裂に対する強制開口の面内問題と面外問題における応力および断面力集中について、分布荷重の作用幅およびプロセスゾーン長さの変化に対して、それぞれの特性の違いを検討している。

参 考 文 献

- 1) Griffith, A. A. : The phenomena of rupture and flow in solids, Philosophical Transaction of the Royal Society, London, Series A, Vol. 221, pp. 163-168, 1920.
- 2) Irwin, G. R. : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. Appl. Mech., Trans. of the ASME, Vol. 24, pp. 361-364, 1957.
- 3) 岡村弘之 : 線形破壊力学入門、培風館、1976.
- 4) 日本コンクリート工学協会 : 破壊力学の応用研究委員会報告書、1993.
- 5) Westergaard, H. M. : Bearing Pressures and Cracks, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 33, A49-A53, 1939.
- 6) Barenblatt, G. I. : The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture, General Ideas and Hypotheses, Axially-Symmetric Cracks, PMM 23, 3, pp. 434-444, 1959.
- 7) Dugdale, D. S. : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. of Mech. Phys, Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 8) J. F. ノット著、宮本博 訳 : 破壊力学の基礎、培風館、1976.
- 9) 段樹金、児島弘行、中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数、土木学会論文集、No. 374, I-6, pp. 399-407, 1986.
- 10) Kaplan, F. M. : Some aspects of the strength of concrete, Civil Engineering (London), Vol. 54, 1959.
- 11) Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P. E. : Analysis of crack formation and crack growth in concrete Research, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- 12) Hillerborg, A. : The theoretical basic of a method to determine the fracture energy G_f of concrete, Materials and Structure, Vol. 18, No. 106, pp. 25-30, 1985.
- 13) Hillerborg, A. : Application of the fictitious crack model to different types of materials, Inter. J. of Fracture, 51, pp. 95-102, 1991.
- 14) Bazant, Z. P. and Cedolin, L. : Blunt crack band propagation in finite element analysis, J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol. 105, No. EM2, pp. 297-315, 1979.
- 15) Bazant, Z. P. and Cedolin, L. : Finite element modeling of crack band propagation, J. of the Struct. Div., ASCE, Vol. 109, No. ST1, pp. 69-92,

- 1981.
- 16) Bazant, Z.P. and Cedolin, L. : Effect of finite element choice in blunt crack band analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.24, pp.305-316, 1980.
 - 17) Bazant, Z.P. and Oh, B.H. : Crack band theory for fracture of concrete, *Materials and Structures*, Vol.16, No.93, pp.155-177, 1983.
 - 18) Wium, D.J.W., et al: Hybrid model for discrete cracks in concrete, *J. of Eng. Mech.* 110, 8, pp.1211-1229, 1984.
 - 19) Cho, K.Z., et al: Fracture process zone of concrete cracks, *J. of Eng. Mech.* 110, 8, pp.1174-1184, 1984.
 - 20) Visalvanich, K. and Naaman, A.E. : Fracture model for reinforced concrete, *ACI Journal*, Title no.80-14, pp.128-138, 1983.
 - 21) 岸谷孝一、村上聖、平居孝之 : コンクリートの破壊力学に関する研究 (一その1 破壊過程域の損傷解析一)、日本建築学会構造系論文集、第368号、pp.11-17, 1986.
 - 22) Gustafsson, P.J. and Hillerborg, A. : Sensitivity in shear strength of longitudinally reinforced concrete beams to fracture energy of concrete, *ACI Structural Journal*, Vol.85, No.3, pp.286-294, 1989.
 - 23) Roelfstra, P.E. and Wittmann, F.H. : Numerical method to link strain softening with failure of concrete, *Proc. of Conc. on Fracture Mechanics of Concrete*, 1, Oct., pp.127-139, 1985.
 - 24) 野村希晶、三橋博三、鈴木篤、和泉正哲 : 非線形破壊力学手法に基づく高強度コンクリートの靱性化機構の考察、日本建築学会構造系論文集、第416号、pp.9-16, 1990.
 - 25) Du, J.J., Kobayasi, A.S. and Hawkins, N.M. : An experimental-numerical analysis of fracture process zone in concrete fracture specimens, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.35, No.1/2/3, pp.15-27, 1990.
 - 26) 村上聖、岸谷孝一、平居孝之 : 境界要素法の破壊力学への適用 (一J積分法による応力拡大係数の解析一)、日本建築学会構造系論文集、第404号、pp.25-31, 1989.
 - 27) Petersson, P.E. : Crack growth and development of fracture zones in plane concrete and similar materials, Report TVBM-1001, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1981.
 - 28) Murakami, Y. : *Stress Intensity Factors Handbook*, Vol.1, Pergamon Press, 1987.
 - 29) 石田 誠 : き裂の弾性解析と応力拡大係数、1976.
 - 30) Rice, J. R. : A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. of Applied Mechanics*, Trans.

- of the ASME, Vol. 35, pp.379-386, 1968.
- 31) Reissner, E. and Mass, C. : The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plate, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol.12, pp. A69-A77, 1945.
 - 32) Sih, G.C., Paris, P.C. and Erdogan, F. : Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems, J. of App. Mech. Vol.20, Trans. of the ASME, vol.84, Series E, Vol.29, pp.306-312, 1962.
 - 33) Erdogan, F. and Sih, G.C. : J. of Basic Eng., Trans. of the ASME, December, pp519-527 (1963)
 - 34) Boduroglu, H. and Erdogan, F. : Internal and Edge Cracks in a Plate of Finite Width Under Bending, J. of App. Mech., Vol.50, Trans. of the ASME. September, pp.621-629 (1983)
 - 35) Sih, G.C. and Rice, J.R. : The bending plates of dissimilar materials with cracks, J. of App. Mech., Trans. of the ASME. 31. Pp.477-482, 1964.
 - 36) 西谷弘信、才本明秀、飛田仁、須藤真 : 体積力法による面外せん断問題に関する汎用解析法、日本機械学会論文集(A編)、57巻、543号、pp.222-228, 1991.
 - 37) 飯田字朗、長谷部宣男、中村卓次 : 面外曲げを受ける薄板の矩形孔から発生したクラックの S. I. F. と近似式、土木学会中部支部学術講演会 I-7, 1988.
 - 38) Hasebe, N. : Bending of Strip with Semielliptic Notches or Cracks, J. of Eng. Mech. Division, ASCE, 104, pp.1433-1450, 1978.
 - 39) Knowles, J.K. and Wang, N.M. : On the Bending of an Elastic Plate Containing a Crack, J. of Mathematics and Physics, Vol.39, pp.223-236, 1960.
 - 40) Wang, N.M. : Effects of Plate Thickness on the Bending of an Elastic Plate Containing a crack, J. of Mathematics and Physics, Vol.47, pp.371-390, 1968.
 - 41) Hartranft, R.J. and Sih, G.C. : Effect of Plate Thickness on the Bending Stress Distribution around through Cracks, J. of Mathematics and Physics, Vol.47, pp.276-291, 1968.
 - 42) Erdogan, F. and Boduroglu, H. : Surface Cracks in a Plate of Finite Width under Extension or Bending, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol.2, pp.197-216, 1984.
 - 43) Wang, N.M. : Twisting of an Elastic Plate Containing a Crack, Int. J. of Frac. Mech., Vol.6, pp.367-378, 1970.
 - 44) Delale, F. and Erdogan, F. : The Effect of Transverse Shear in a Cracked Plate under Skew-Symmetric Loading, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol.46, pp.618-624, 1979.
 - 45) Tamate, O. : Technology Reports, Tohoku University, Vol. 40, No.1, 1975.

- 46) 玉手統 : 中央にき裂を有する帯板の面外単純曲げ、機械学会論文集、43 巻 371 号、pp. 2459-2465, 1977.
- 47) 玉手統 : 直線き裂を有する半無限平板の単純曲げ、機械学会論文集、42 巻 354 号、pp. 367-376, 1976.
- 48) 玉手統 : 一直線上に周期的き裂群を有する無限平板の純曲げ、機械学会論文集、44 巻 379 号、pp. 785-789, 1978.
- 49) 段樹金、堀晃芳、中川建治 : 亀裂をもつ板の二次元問題を解析するための特異関数に関する研究、土木学会論文集、No. 396, V-9, pp. 21-28, 1986.
- 50) 栖原秀郎、中川建治: 亀裂先端で有限な応力集中を構成する応力関数に関する研究、土木学会論文集、No. 501, I-29, pp. 65-74, 1994.
- 51) 栖原秀郎 : き裂先端で遷移区間を構成する応力関数のくさび貫入工法と誘発目地工法への適用に関する研究、岐阜大学学位論文、1996.
- 52) 栖原秀郎、藤井康寿、中川建治: くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案、土木学会論文集、No. 528, V-29, pp. 167-177, 1995.
- 53) 栖原秀郎、長谷川豊、藤井康寿、中川建治、服部育男 : 半地下トンネルにおける誘発目地工法の設計法に関する一提案、構造工学論文集、Vol. 42A, pp. 1157-1166, 1996.
- 54) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model for fracture process of four point bending concrete beam, Eng. Frac. Mech., Vol. 40, No. 1, pp. 37-44, 1991.
- 55) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model of the strain softening curve for crack extension, Eng. Fract. Mech. vol. 48, No. 4, pp. 505-514, 1994.
- 56) 藤井康寿 : 遷移区間を導入した応力関数に基づく破壊過程の基礎的研究、京都大学学位論文、1997.
- 57) 長瀬裕信 : 直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と岩盤問題への応用に関する研究、岐阜大学学位論文、1996.
- 58) 前田春和、藤井康寿、中川建治 : き裂を持つ薄板の面内と面外問題の解の関連性と断面力集中度の比較について、土木構造・材料論文集、第 13 号、pp. 69-78, 1997.
- 59) Duan, S., Yazaki, H. and Nakagawa, K.: A Crack at the Interface of an Elastic Half Plane and a Rigid Body, Eng. Fract. Mech., Vol. 32, No. 4, pp. 373-580, 1989.
- 60) Fujii, K., Duan, S., Kato, Y. and Nakagawa, K.: Stress function with finite magnitude of stress concentration around an interface crack, Eng. Frac. Mech., Vol. 47, No. 6, pp. 881-891, 1994.
- 61) 藤井康寿、中川建治: 面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数、土木学

- 会論文集、No.502, V-25, pp.23-32, 1994.
- 62) Fujii, K., Kato, Y., Duan, S. and Nakagawa, K.: Stress analysis around a partially bonded rigid cylinder in an elastic medium with process zones, Eng. Frac. Mech., Vol.45, No.1, pp.31-38, 1993.
- 63) 村瀬安彦、中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析、土木学会論文集、No.483, I-26, pp.41-49, 1994.
- 64) Murase, Y., Duan, S. and Nakagawa, K.: Stress Analysis around a Circular Interface Crack between Dissimilar Media Loaded by Uniform Tension at Infinity, Eng. Frac. Mech., Vol.34, No.3, pp.325-337, 1994.
- 65) Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S.: A Mathematical Approach of the Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Frac. Mech., Vol.36, No.3, pp.439-449, 1990.
- 66) Fujii, K., Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S.: The stress concentration ratio of the interface crack between dissimilar anisotropic composite materials, Eng. Frac. Mech., Vol.44, No.1, pp.1-19, 1993.
- 67) 長瀬裕信、中川建治: 直交異方性体間の界面き裂周辺の応力解析に関する基礎的な研究、土木学会論文集、No.507, I-30, pp.53-63, 1995.
- 68) 長瀬裕信、土居亮太、中川建治: 部分接合された直交異方性体の未接合領域近傍の応力解析、土木構造・材料論文集、第11号、pp.109-119, 1995.
- 69) 前田春和、藤井康寿、中川建治: 異質等方性板界面き裂の面外問題に関する研究、土木構造・材料論文集、第12号、pp.97-108, 1996.
- 70) Duan, S., Fujii, K. and Nakagawa, K.: Finite stress concentrations and J-integrals from normal loads on a penny-shaped crack, Eng. Fract. Mech. vol.32, No.2, pp.167-176, 1989.
- 71) 段樹金、中川建治: せん断を受ける円盤状き裂の周辺で有限な応力集中を与える応力関数、土質工学論文集、Vol.28, No.1, pp.153-160, 1988.
- 72) Duan, S. and Nakagawa, K.: Stress functions with finite stress concentration at the crack tips for a central cracked panel, Eng. Fract. Mech. vol.29, No.5, pp.517-526, 1988.
- 73) Duan, S. and Nakagawa, K.: Stress Functions for General Straight Cracked Anisotropic Plate, Appl. Math. and Mech., Vol.9, No.6, pp.531-539, June 1988, (Published in China).
- 74) Duan, S., Yazaki, H., Fujii, K. and Nakagawa, K.: A mathematical approach of the interface crack with a fracture process zone, Research Report of Faculty of Engineering, Gifu University, No.41, pp.1-10, 1991.
- 75) Duan, S., Fujii, K. and Nakagawa, K.: Numerical modeling of fracture process of concrete beam, Proc. of the 4th International Conf. on EPMESC., Vol. II, pp.866-873, 1992.

- 76) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model of the strain softening curve for crack extension, Eng. Frac. Mech. Vol.48, No. 4, pp. 505-514, 1994.
- 77) Murase, Y., Nakagawa, K. and Duan, S.: Introduction of Stress Functions around a Circular Interface Crack between Dissimilar Materials, Eng. Frac. Mech., Vol. 53, No. 4, pp. 661-673, 1996.
- 78) 村瀬安彦 : 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の解析に関する研究、岐阜大学学位論文、1995.
- 79) 長瀬裕信 : 直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と岩盤問題への応用に関する研究、岐阜大学学位論文、1996.
- 80) 前田春和 : き裂を持つ平板の面外問題に関する基礎的な研究、岐阜大学学位論文、1998.
- 81) 阿部安秀、中川建治、岡千裕 : プロセスゾーンを考慮したき裂進展の理論解析と実験的検証、材料、Vol. 47, No. 2, pp. 161-168, 1998.

第2章 面内強制開口する直線状き裂の解析

2.1 まえがき

本章では、無限板内の直線状中心き裂の開口部を一様圧力によって面内方向に押し開く問題の応力関数を導き、その解を基礎に有限矩形板、自由辺を有する半無限板の解を導いている。従来の中川等の応力集中平滑化の解¹⁾²⁾³⁾⁴⁾は、Westergaardの解⁵⁾を基本とし無限遠方で一様応力を受ける場合のもので、開口部分の応力は0になる解であった。また長瀬⁶⁾、栖原等⁷⁾により、自由辺近傍の直線状き裂の開口部全幅に一様分布の内圧による応力集中問題が検討されている。これに対して、本研究では、種々の境界条件をもつ板内のき裂開口部に、任意の分布幅を持つ外力（内圧）を作用させる問題を検討するものであり、き裂先端で有限な応力集中を構成し得る応力関数を導き、その数値計算例を示すものである。

はじめに、本研究の最も基礎となる中川等により示されたWestergaardの基本解に対する平滑化の手法を示す。次に、主題である強制開口の基本解として、無限板内のき裂が等分布荷重により面内方向に強制開口する場合の解を求める。実際の問題としては、無限板より有限板としての方が活用範囲が広いため、有限矩形板内のき裂問題に拡張する手法を示すとともに、その適用範囲を論じる。このケースは、き裂先端部からき裂線上の有限板自由面までの距離が問題となり、その距離が小さくなれば解析結果の誤差が大きくなり適用が難しくなる。

次に半無限板内で、自由面に平行な中心き裂の強制開口問題へ拡張した解を求める。中川、栖原等⁷⁾は自由面に平行な直線状外側き裂の解を、自由面を持たない無限板の解を基に、自由面構成用の補正関数を重ね合わせて解を導いている。本研究でも同様の手法を用いて中心き裂の解を求めるものである。

2.2 基礎式とその平滑化の手法

2次元弾性問題の複素応力関数を W とすると、 $W(x, y)$ は任意の調和関数 $\psi(z), \phi(z)$ によって

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) &= 0 \\ W(x, y) &= \bar{z}\psi(z) + \phi(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

と与えられる。ただし複素変数 z は $z = x + iy$ （共役の場合 $\bar{z} = x - iy$ ）である。 W は複素関数で構成されるため、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および変位 u, v は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re}[2\psi'(z) - \{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \\ \sigma_y &= \operatorname{Re}[2\psi'(z) + \{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re}[-i\{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \\ 2G(u - iv) &= \kappa\bar{\psi}(z) - \bar{z}\psi'(z) - \phi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ただし、式中の Re は実数記号であるが、今後煩雑なため割愛する。 G がせん断弾性係数、 κ はポアソン比 ν の関数で平面応力では $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 、平面ひずみでは $\kappa = (3 - 4\nu)$ である。

既に中川等の報告¹⁾²⁾³⁾⁴⁾で応力関数とその平滑化の方法は報告されているが、本研究の基礎となるので簡単に述べる。

従来から活用されている応力関数は式(2.1)に示されるように $\psi(z)$, $\phi(z)$ の2つの関数で構成される。本研究では Y 軸上にき裂があって、この線上で $\sigma_x = 0$ および $\tau_{xy} = 0$ の応力状態のみを対象にするので、関数 ϕ は ψ の従属関数となり、関数 ψ のみで応力と変位が与えられることになる。このような手法は Westergaard⁵⁾ により既に式(2.3)に示すように導かれている。

$$\phi'(z) = z\psi'(z) - \psi'(z) \quad (2.3)$$

Westergaard は図-2.1 に示すように Y 軸上に長さ $2a$ のき裂を有する等方等質な弾性板に無限遠方で一様引張り応力 $\sigma_x = \sigma_0$ が作用する解を次のように定義している。

Westergaard の基本解

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) &= 0 \\ W(x, y) &= \bar{z}\psi(z) + \phi(z) \\ \psi(z) &= -\frac{\sigma_0}{4}z + \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{z^2 + a^2} \\ \phi'(z) &= -\frac{\sigma_0}{2}z - \frac{\sigma_0}{2}\frac{a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

上記の式による応力は式(2.5)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \\ \tau_{xy} &= -\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

また、式(2.5)よりき裂線上 ($|y| > a, x = 0$) の応力集中は、式(2.6)のように表される。

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \tag{2.6}$$

この応力分布は図-2.2に示すようにY軸上の $Y = \pm a$ で無限大の応力集中となる。これは $z/\sqrt{z^2 + a^2}$ に起因するが、この特異性は z あるいは a による積分は可能であって定積分は有限値となる。具体的には、図-2.3および式(2.7)に示すように、き裂の長さを表すパラメータ a を積分変数 t として、解析関数 $\psi(z, t = a)$ に適当な重み関数 $\rho(t)$ を乗じつつ遷移区間 $(a, a + b)$ にわたって積分する方法である (重み積分法と仮称)。関数 ϕ は ψ の従属関数であるため、 ψ を式(2.7)のように変形し重み積分法を実行する。このように変形するのは、Y軸上のクラック先端 ($Y = \pm a$) に設定するプロセスゾーン (長さ b_1, b_2 の2種類) がそれぞれ異なる長さを有する場合にも対応可能にするためである。これにより、き裂先端で無限大応力を解消し、遷移区間において有限な勾配で立ち上がる応力分布と滑らかな開口変位が共存するプロセスゾーンに相当する区間を実現することが可能な応力関数を導くことができる。

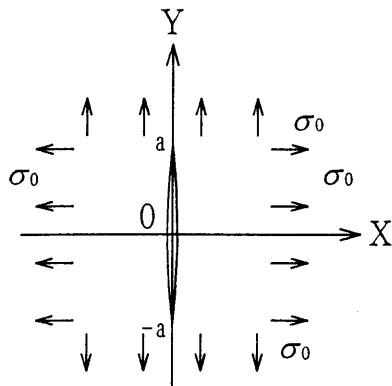


図-2.1 一様引張り応力を受ける直線状き裂を持つ無限板

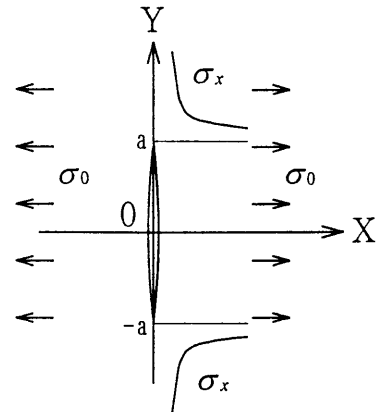


図-2.2 き裂先端部における応力集中

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z + ia} \sqrt{z - ia} \\ &= \frac{\sigma_0}{2} \psi_1(z, a) \psi_2(z, a) \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{\sigma_0}{2} \int_a^{a+b_1} \rho(t_1, a, b_1) \psi_1(z, t_1 = a) dt_1 \\ &\quad \times \int_a^{a+b_2} \rho(t_2, a, b_2) \psi_2(z, t_2 = a) dt_2 \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

ただし、重み関数 $\rho(t)$ は、き裂の長さを表すパラメータ a に対して、定義域をき裂先端からプロセスゾーンの区間 $(a, a+b)$ として総面積が1になるような基準化した関数である。式(2.8)の $\Psi(z)$ は Westergaard の基本解 ψ を重み積分した関数であり、 ψ と Ψ を区別して活用することとする。また、式(2.7)を矩形の重み関数で積分した結果を式(2.9)に示す。式(2.9)は、本研究の各章で示す数値計算例において、検討対象の問題に対する解に重ね合わせることにより、境界条件の適合に利用することになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho(a, b_k) &= \frac{1}{b_k} \quad (\text{ただし、} k=1, 2) \\
 \Psi(z) &= c f_1(z, b_1) f_2(z, b_2) \\
 c &= \frac{2\sigma_0}{9b_1 b_2} \\
 f_1(z, b_1) &= (z + ia + ib_1)^{3/2} - (z + ia)^{3/2} \\
 f_2(z, b_2) &= (z - ia - ib_2)^{3/2} - (z - ia)^{3/2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

具体的な重み関数として中川等は、矩形、1次式、2次式、4次式の各ケースを既に報告している¹⁴⁾。本章においては図-2.4に示す1次式の重み関数を採用するが、対象としている解に対して他の高次の重み関数による積分を施すと極めて煩雑になるため導き難い。しかし、本章および第3章、第4章に示した数値計算例の結果から判断すると、本章で求めた解析解で実用上不都合はないと考えられる。

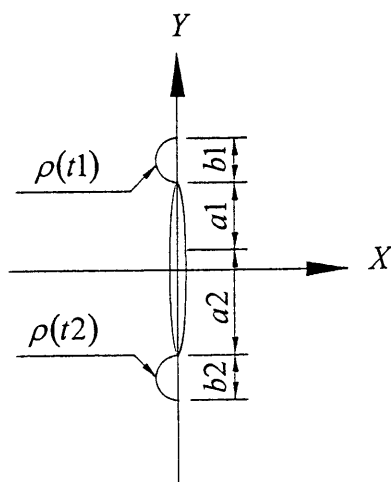


図-2.3 重み関数 ρ と適用区域

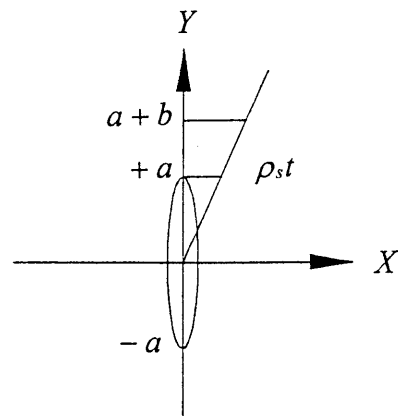


図-2.4 1次式の重み関数 ρ_s

2.3 無限板内のき裂内部を強制開口する基本解と計算例

2.3.1 集中荷重による応力関数と応力集中の平滑化

2つの半無限板の一部を連結することにより作られる外側き裂を有する板に、き裂を開口させる内圧が作用する問題に対する応力関数は、岩盤のくさび貫入破壊の研究の一環として中川、栖原等により既に報告されている⁷⁾。本章では図-2.5に示すように無限板中心のき裂開口部に、部分的な一様圧力を作用させて開口を進行させるような応力状態の解を導く。まず図-2.6で示すように $Y=s$ に $\pm P$ の一对の集中荷重を作用させた応力関数を導く。この場合の応力関数を式(2.10)のように仮定するが、これは先見的の仮定であり、最終結果によって間違いのないことが判明する。

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \bar{z}\psi_1 + \phi_1 \\ \psi_1' &= \frac{A}{(z-is)\sqrt{z^2+a^2}} \\ \phi_1'' &= z\psi_1'' \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

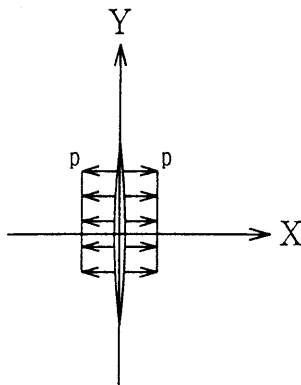


図-2.5 き裂内部に作用する等分布荷重

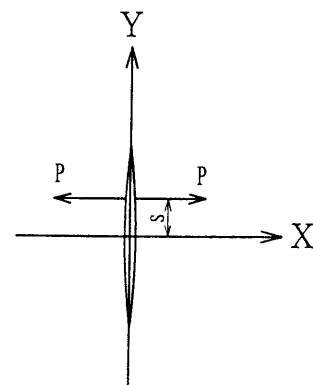


図-2.6 一对の集中荷重

詳細は割愛するが、集中荷重 P に対する A を求めると、 $A = P\sqrt{a^2 - s^2}/2\pi$ となる。これにより積分して $\psi_1(z)$ を求めると式(2.11)となる。

$$\psi_1(z, s) = \frac{P}{4\pi} \log \left\{ \frac{a^2 + isz - \sqrt{a^2 - s^2}\sqrt{z^2 + a^2}}{a^2 + isz + \sqrt{a^2 - s^2}\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \quad (2.11)$$

き裂先端の応力集中を有限化するため、式(2.11)を $a=t$ として一次式重みにより、区間 $(a, a+b)$ において重み積分を行い平滑化を行う。得られた結果を式(2.12)に示す。

$$\Psi_2(z, s, t) = \frac{P\rho_s}{4\pi} \left\{ \frac{t^2}{2} \log \left[\frac{t^2 + isz - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{t^2 + ist + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (z + is)^2 \log \left(\sqrt{t^2 - s^2} + \sqrt{t^2 + z^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2} \right\}_{t=a}^{a+b} \quad (2.12)$$

$$\rho_s = \frac{2}{(2a+b)b}$$

2.3.2 一様分布の開口荷重による応力関数

図-2.7に示すように開口部の分布荷重 p の中心位置を s_0 、分布幅を c とし、式(2.12)を s について区間 $(s_0 - c/2, s_0 + c/2)$ にわたって積分する。得られた結果を式(2.13)、(2.14)に示す。

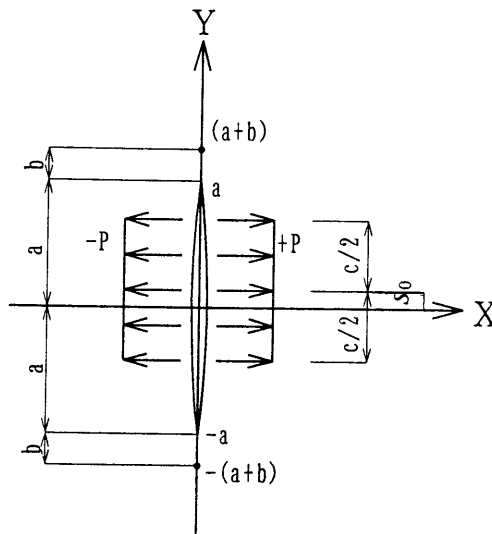


図-2.7 等分布荷重と作用位置

$$\begin{aligned}
\Psi_3(z, s, t) &= \frac{1}{c} \int_{s_0-c/2}^{s_0+c/2} \Psi_2(z, s, t) ds \\
&= B \left\{ \Psi_0 \left(z, s_0 + \frac{c}{2}, a+b \right) \right. \\
&\quad - \Psi_0 \left(z, s_0 + \frac{c}{2}, a \right) \\
&\quad - \Psi_0 \left(z, s_0 - \frac{c}{2}, a+b \right) \\
&\quad \left. + \Psi_0 \left(z, s_0 - \frac{c}{2}, a \right) \right\} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

ここで B および $\Psi_0(z, s, t)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}
B &= \frac{p\rho_s}{8\pi c} = \frac{2p}{8\pi cb(2a+b)} \\
\Psi_0(z, s, t) &= \left[\left\{ t^2(s+iz) + \frac{i2}{3}z^3 \right\} \right. \\
&\quad \times \log \left\{ \frac{t^2 + isz - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{t^2 + isz + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}} \right\} \\
&\quad - \frac{i2}{3}(t^2 + z^2)^{3/2} \log \left\{ \frac{s + i\sqrt{t^2 - s^2}}{s - i\sqrt{t^2 - s^2}} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{3}(s-iz)^3 \log(\sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{z^2 + t^2}) \\
&\quad - \frac{i4z^3}{3} \log(s+iz) \\
&\quad + \frac{1}{3}(s+3iz)\sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2} \\
&\quad - \frac{1}{18}(s-iz)^3 - \frac{1}{18}(s+iz)^3 \\
&\quad \left. + \frac{iz}{2}(s+iz)^2 + 2sz^2 \right] \tag{2.14}
\end{aligned}$$

無限板内の Y 軸上の直線状き裂を押し開く一様分布荷重 p による応力関数は、上記の Ψ_3 を用いて式(2.15)のように表される。

$$W = \bar{z} \Psi_3(z) + \Phi_3(z) \quad \text{ここで、} \quad \Phi''_3 = z \Psi''_3 \tag{2.15}$$

式(2.15)において b と材料の物性値が確定出来れば、一様分布荷重 p による応力と変位を求めることが可能となり、き裂進展に対する数値シミュレーションに利用出来る。この課題に関連する多くの研究では、FEM(有限要素法)やBEM理論(境界要素法)が活用されている。他方、円孔周辺のき裂に関する面内力問題に関する研究も報告されているが⁸⁾⁹⁾、それらは応力拡大係数で表現されたものであって、応力が穏やかに立ち上がるBarenblattモデル¹⁰⁾に関連するものではない。本研究で用いている解析解は以下の特徴を持ち、き裂を有する平板の解析においては上記の方法と比較すると、より簡便にかつ精度の高い結果を得ることが出来る。

- (1) 関数で表現するため、開口部やき裂先端部のような応力急変部でも、変位や応力変化を明確に表現する事が可能である。
- (2) 少ない関数の重ね合わせで周辺の境界条件が精度良く満足される。少ない選点条件で関数の未定係数を決定した後に、変位や応力のどのような詳細図も簡単に描くことが可能である。

2.3.3 数値計算例

本節では、2.3.2項で導いた応力関数が、所定の境界条件を満足していることを、関数曲面を図化することによって示す。

開口長さ10cmのき裂($a=5$ cm)を有する無限板においてき裂内に作用する内圧を、荷重強度 $P=3\text{kgf}/\text{cm}^2$ 、作用幅 $c=6$ cmとして計算した。プロセスゾーン長さは $b=1$ cmと仮定し、板の物理定数をそれぞれ弾性係数 $E=181,000\text{kgf}/\text{cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.167$ とした。

計算結果のうちX方向変位 U 、Y方向変位 V の分布図を図-2.8、図-2.9に、X方向応力 σ_x の分布図を図-2.10、図-2.11に示す。図-2.11は、き裂部分及びプロセスゾーン相当部分のY軸上の σ_x を拡大したものである。またY方向応力 σ_y の分布図を図-2.12,せん断応力 τ_{xy} の分布図を図-2.13に示す。特性の認識を目的としているため、縦軸のスケール等の詳細データは割愛する。開口部の一様圧縮力の分布やプロセスゾーンでの応力分布の状況が、設定条件を満足するとともに、Barenblattモデルとしてプロセスゾーン相当部分を近似的に表現出来得るものであることが判定されよう。

き裂近傍の最大引張応力は $\sigma_{x\max}=3.4\text{kgf}/\text{cm}^2$ を示している。もし、材料の引張強度を $\sigma_{t0}=3\text{kgf}/\text{cm}^2$ と仮定すると、き裂は進展することになる。最大引張応力値は、 a, b, c 各長さの値に影響されるが、ここで b, c は一定であって応力集中が $\sigma_{x\max}=\sigma_{t0}$ の位置まで a が進行すると仮定して、この位置を逆算で求めると、き裂が長さ13cm($a=6.5$ cm)になったとき釣り合うという結果が得られる。このように、 σ_{t0} と b 値を推定することが可能であれば、き裂に内圧が作用した場合のき裂進展の有無および進展の長さ a を、式(2.15)により求めることが可能である。

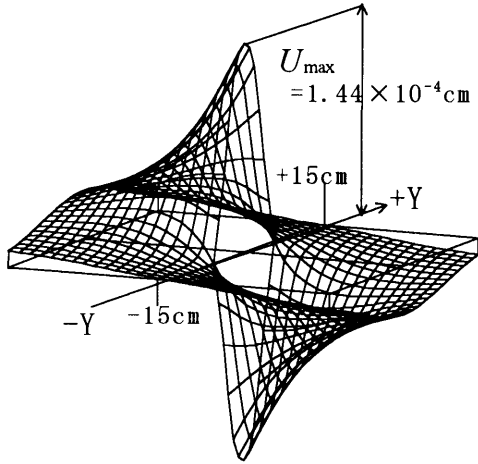


図-2.8 X方向変位U分布図

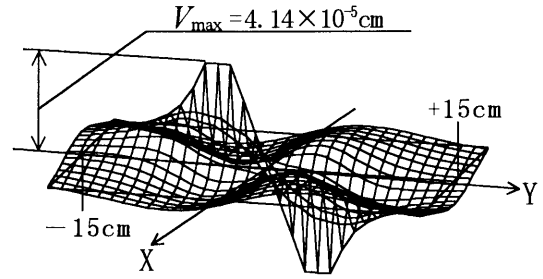


図-2.9 Y方向変位V分布図

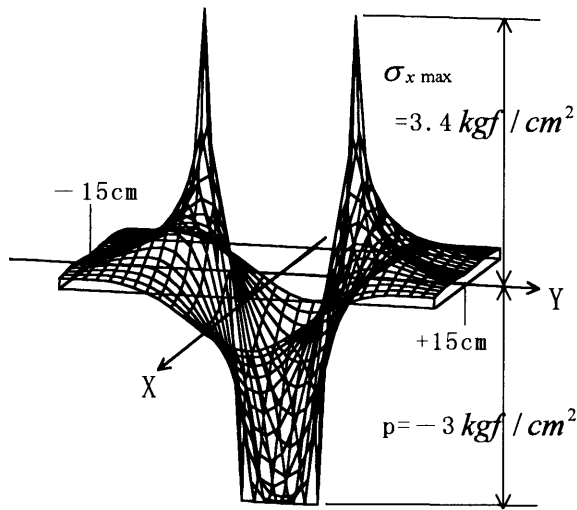


図-2.10 X方向応力 σ_x 分布図

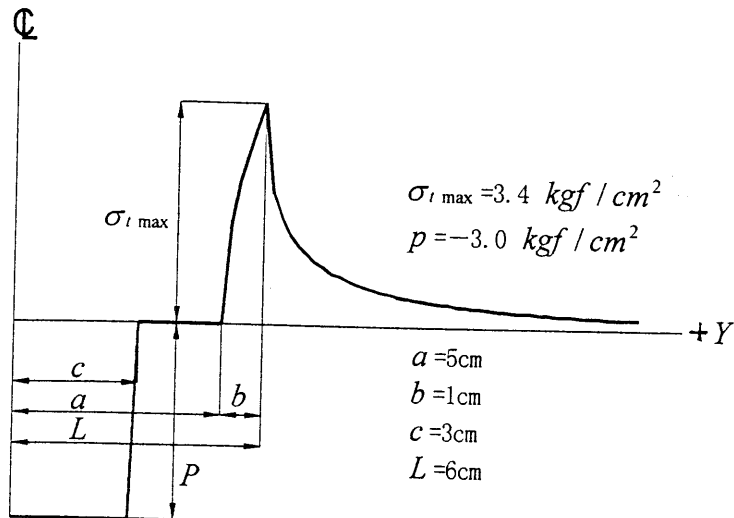


図-2.11 Y軸上のX方向応力 σ_x の拡大図

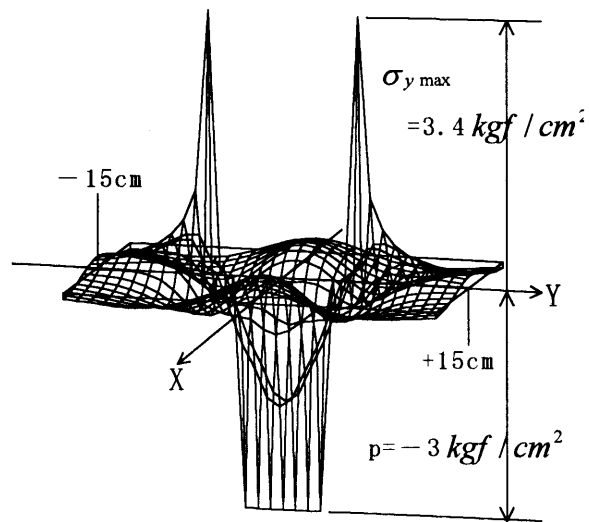


図-2.12 Y方向応力 σ_y 分布図

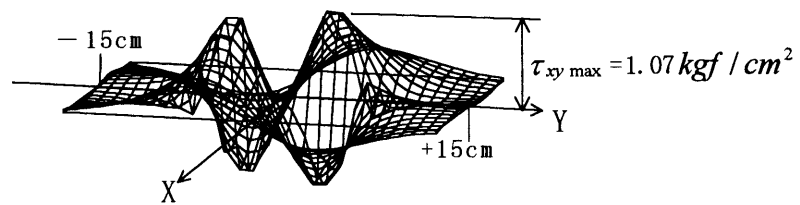


図-2.13 せん断応力 τ_{xy} 分布図

2.4 有限矩形板中央のき裂に対する適用と計算例

本節では、2.3節で求めた無限板に対する基本解を、中央に亀裂を有する矩形板（4辺が自由）に対して適用する手法を示し、数値計算例とともにその適用限界を論ずる。

2.4.1 有限矩形板に対する適用手法

2.3節で求めた基本解は、無限板に対する応力解であるため、開口部の内圧分布の条件は満足しているが、有限な矩形板モデルの周辺境界条件を満足しない。周辺自由という境界条件を満足させるために、き裂近傍から離れた部分の応力は急速に一様化していることに着目して、次のような重ね合わせ法を用いる。

まず、対象とするモデルの応力分布を整合させるために、式(2.16)に示す無限板に一様応力 $\sigma_x = \sigma_1$ のみが作用する解 W_1 と、式(2.17)に示す一様応力 $\sigma_y = \sigma_2$ のみが作用する解 W_2 を活用する。

$$W_1 = \frac{\sigma_1}{4} z(\bar{z} - z) \quad (2.16)$$

$$W_2 = \frac{\sigma_2}{4} z(\bar{z} + z) \quad (2.17)$$

さて、中央にY軸に沿うき裂1つを持つ矩形板において、き裂先端方向の自由面で応力が0になる解を近似的に構成するため、自由面の境界線を近似的に応力の対称軸になるように、対象とするき裂の延長線上に2つの仮想き裂を図—2.14に示すように配置する。合計3個のき裂に対する解を求めるために重ね合わせる応力関数は、各開口部に対して、式(2.9)で示した平滑化されたWestergaardの解1つと、式(2.15)で示した開口部を強制開口する分布外力を持つ解、合わせて6個の解を重ね合わせる。さらに矩形板周辺上の平均応力 σ_x, σ_y を0とするために、式(2.16)と式(2.17)の一様応力解を1つずつ重ねる。求めた解に対して、それぞれ未定係数を乗じ、境界条件を満足させることにより対象となるき裂の解を求めるものである。関数に乗じる未定係数は、境界線上の適当な点で、それぞれの応力条件（ $\sigma_x = 0$ または σ_y および $\tau_{xy} = 0$ ）が満足されるように選点法で決定するものである。

生じる応力は、対象となるき裂先端より急速に減少するため、自由面である矩形板縁辺がき裂先端よりある程度離れている場合には、この手法により近似解が求められることになる。次節の数値計算例により、検証するものとする。

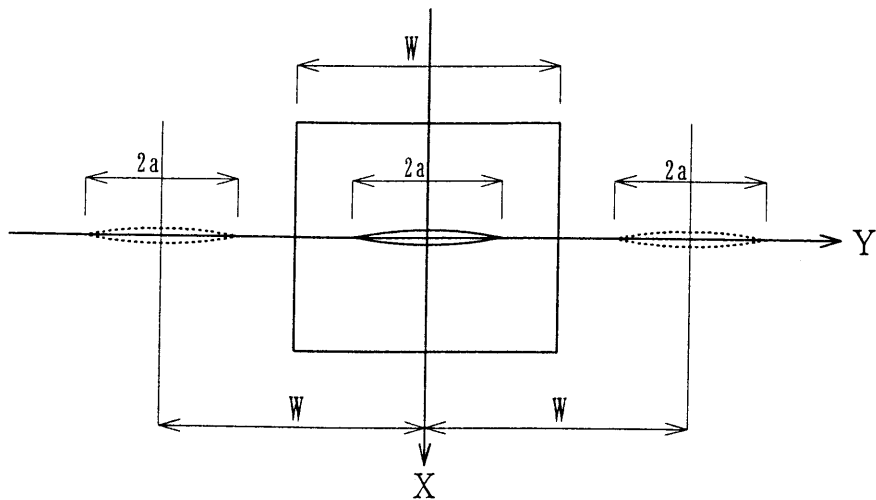


図-2.14 仮想き裂の配置図

2.4.2 数値計算例

図-2.15に示すように、中央にき裂を有する矩形板（幅90cm×奥行90cm、亀裂長 $2a=10\text{cm}$ ）についての数値計算例を示す。2.3.3項と同じ荷重条件および同じプロセスゾーン長さ $b=1\text{cm}$ として計算を行う。また2個の仮想き裂は、き裂中心座標を $(X=0\text{ cm}, Y=\pm 90\text{ cm})$ とし、同じき裂長、プロセスゾーン長さを持つものとする。

境界条件を満足させるため選点法を利用するが、設定した着目点は表-2.1の通りである。

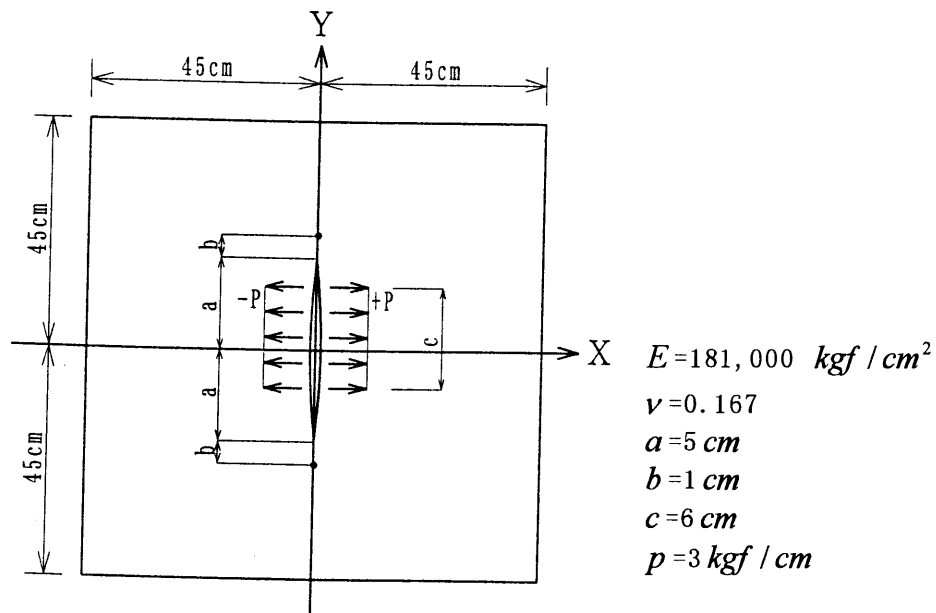


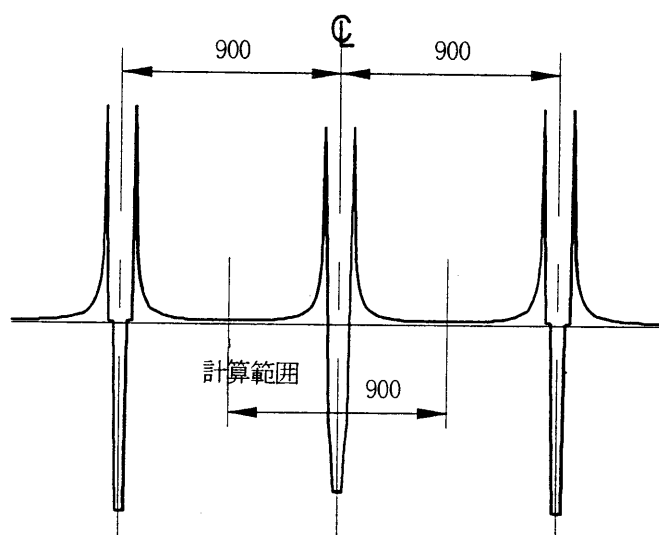
図-2.15 数値計算モデル

表-2.1 設定境界条件の着目点

X (cm)	Y (cm)	設定応力度 (kgf/cm ²)
0	4	$\sigma_x = 0$
0	-4	$\sigma_x = 0$
0	45	$\sigma_y = 0$
45	0	$\sigma_y = 0$
18	45	$\tau_{xy} = 0$
18	-45	$\tau_{xy} = 0$

得られた最大引張応力は $\sigma_{x \max} = 3.55 \text{ kgf/cm}^2$ となり、無限板上のき裂の結果より若干大きめの応力が得られた。また閉じ合わせ誤差としての自由辺での応力は、 $Y = \pm 45 \text{ cm}$ で、 $\sigma_{y \max} = 5.086 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\tau_{xy \max} = 1.462 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^2$
 $X = \pm 45 \text{ cm}$ で、 $\sigma_{x \max} = 5.265 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\tau_{xy \max} = 2.036 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^2$ となった。

この閉じ合わせ誤差を最大引張応力度の比で表すと、 σ_x, σ_y はそれぞれ 1.48、1.43%、また、 τ_{xy1}, τ_{xy2} はそれぞれ 0.57、0.44% となる。図-2.16 に仮想き裂を含めた Y 軸上の σ_x 分布を示すが、3 個の解関数を平行移動して重ねあわせるだけでほぼ境界条件を満足していることが分かる。

図-2.16 仮想き裂を含めた Y 軸上の σ_x 分布図

2.4.3 閉じ合わせ誤差の検討

次にこの応力解の適用範囲を検討するため、き裂先端から自由辺までの距離と自由辺における閉じ合わせ誤差の関係を求める。計算条件の基本モデルは、図-2.15 で示した 90cm X 90cm の矩形板とし、き裂長さ $2a$ のみを変化させ、部材定数、プロセスゾーン長さ、荷重強度と分布幅および境界条件に対する着目点 (表-2.1) は同

様とする。閉じ合わせ誤差 e は、式(2.18)に示すように、本来0とならなければならない各自由辺での最大応力値を、本モデルで発生する最大引張応力 $\sigma_{x\max}$ の比として表すものとする。対象とする応力の位置関係を図-2.17に示す。

$$e\sigma_x = \frac{\sigma_{x\max}|_{x=\pm 45\text{cm}}}{\sigma_{x\max}|_{x=0\text{cm}}}, \quad e\sigma_y = \frac{\sigma_{y\max}|_{y=\pm 45\text{cm}}}{\sigma_{x\max}|_{x=0\text{cm}}} \tag{2.18}$$

$$e\tau_{xy1} = \frac{\tau_{xy\max}|_{x=\pm 45\text{cm}}}{\sigma_{x\max}|_{x=0\text{cm}}}, \quad e\tau_{xy2} = \frac{\tau_{xy\max}|_{y=\pm 45\text{cm}}}{\sigma_{x\max}|_{x=0\text{cm}}}$$

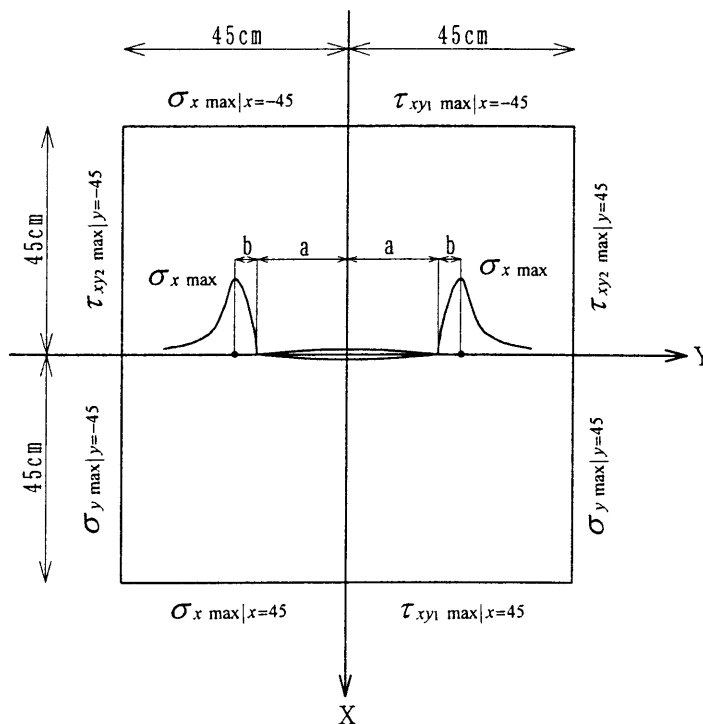


図-2.17 自由辺における閉じ合わせ誤差の対象とする応力

表-2.2と図-2.18に、き裂長と閉じ合わせ誤差の関係を示す。 $Y = \pm 45\text{cm}$ の位置での自由辺の閉じ合わせ誤差について見ると、 a が 25cm 以上、すなわちき裂先端 ($Y = \pm a$) と自由辺との距離が 20cm より小さくなると誤差の増加が顕著になる。この応力関数のみを平行移動させ重ね合わせる近似解法の適用限界と判定される。き裂先端が自由辺に近づいた場合には、本応力関数に低次のフーリエ級数解のような重調和解をさらに重ねて、選点法によって周辺上と開口部の境界条件を整合させる手法が望ましい。

また、き裂に平行 (Y 軸に平行) な $X = \pm 45\text{cm}$ の自由辺での境界条件 $\sigma_x = 0$ に対する誤差は a が 30cm で 11.6% と 10% 超える。本節では、 $X = \pm 45\text{cm}$ の自由辺に対しては重ね合わせ等の補正は行っていない。次項で検討するように、き裂軸と自由辺の距離が近づいた場合には、境界条件における誤差を少なくする補正項等を付加することが望ましい。

表-2.2 き裂長と閉じ合わせ誤差の関係

a (cm)	$e\sigma_x$ (%)	$e\sigma_y$ (%)	$e\tau_{xy1}$ (%)	$e\tau_{xy2}$ (%)
5	1.48	1.43	0.57	0.04
10	3.70	3.77	1.43	0.11
20	7.40	9.30	2.80	0.22
25	8.37	11.83	3.17	0.12
26	8.50	12.07	3.24	0.21
28	8.80	11.07	3.47	0.89
30	11.63	22.30	11.93	11.93
32	7.77	30.93	4.20	4.20
35	7.47	29.60	2.60	2.60

a : き裂半長さ (き裂先端位置) (cm)

$e\sigma_x$: $X=\pm 45\text{cm}$ の自由辺における $\sigma_{x\max}$ のY軸上で発生する最大応力 $\sigma_{x\max}$ に対する比 (%)

$e\sigma_y$: $Y=\pm 45\text{cm}$ の自由辺における $\sigma_{y\max}$ のY軸上で発生する最大応力 $\sigma_{x\max}$ に対する比 (%)

$e\tau_{xy1}$: $X=\pm 45\text{cm}$ の自由辺における $\tau_{xy\max}$ のY軸上で発生する最大応力 $\sigma_{x\max}$ に対する比 (%)

$e\tau_{xy2}$: $Y=\pm 45\text{cm}$ の自由辺における $\tau_{xy\max}$ のY軸上で発生する最大応力 $\sigma_{x\max}$ に対する比 (%)

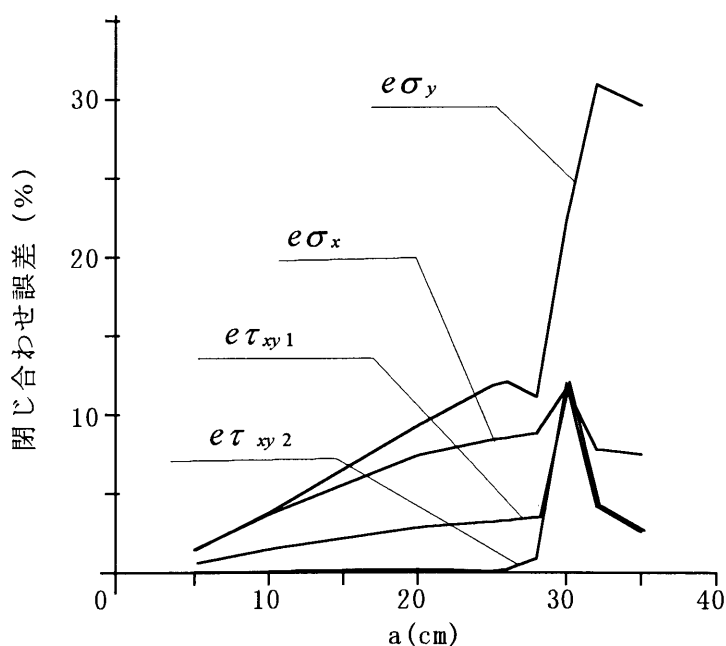


図-2.18 き裂長と閉じ合わせ誤差の関係

2.5 自由面に平行なき裂に対する基本解と計算例

本章では、自由辺に平行なき裂が自由辺に直角方向に面内強制開口される場合の開口関数を導く。導く手法は、2.3節で求めた無限板での解に、中川、栖原等⁷⁾が外側き裂の強制開口問題について報告している自由面構成用の補正関数を活用し、重ね合わせ法により求めるものである。

2.5.1 基本開口関数

中川等は、既に自由面近傍の円孔に一樣内圧が作用する問題、自由面に平行に直線状外側き裂が存在する問題の解をそれぞれ導いている⁷⁾。いずれも自由面を持たない無限板の解を基にして、図-2.19に示すような重ね合わせ法によって、自由面を構成する補正項と補正方法を示している。本文でも上記の強制開口の無限板の解に対して自由面構成用の補正関数を導く。導き方の詳細は文献⁷⁾に述べてあるため、本文では結果の式のみを示す。

自由面近傍のき裂あるいは円孔を構成する応力関数 W_0 を、次のように表すことができる。

$$W_0 = W_1 - W_2 + 2W_3 \quad (2.19)$$

W_0 : 自由面近傍のき裂に内圧を作用させて開口させる応力関数

W_1 : 無限板内に含まれるき裂に内圧を作用させて開口を構成する基本応力関数 (式(2.15))

W_2 : W_1 をX軸方向に $+2C_0$ シフトした曲面 (よって、 $-W_2$ は $x = C_0$ 軸を対称軸として W_1 を反転した曲面を表す。)

W_3 : W_1 および W_2 によって $x = C_0$ に生じるせん断応力を打消す曲面 (Y軸上で、 $\tau_{xy} = -\tau_{xy0}$, $\sigma_x|_{x=0} \equiv 0$ となる曲面)

C_0 : Y軸 (き裂線上) から自由面までの距離

τ_{xy0} : W_1 および W_2 による $x = C_0$ におけるせん断応力 τ_{xy}

結果として中心き裂を有する無限板が $Y = s$ で開口力 p を受けている問題 (式(2.15))において $X = C_0$ におけるせん断応力を打消して自由辺を構成するための補正関数は、式(2.20)のように表される。

$$\begin{aligned}
 \psi = & \left\{ -\frac{iC_0 p}{2\pi b(2a+b)b_s} \right\} \left[[-2(z-C_0)^2 \cdot \right. \\
 & \log \left\{ \frac{t^2 + is(z-C_0) - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2}}{t^2 + is(z-C_0) + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2}} \right\} \\
 & - (z-C_0 + is)^2 \log \left\{ \sqrt{t^2 - s^2} + \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2} \right\} \\
 & + 2(z-C_0) \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2} \cdot \log \left(\frac{s + i\sqrt{t^2 - s^2}}{s - i\sqrt{t^2 - s^2}} \right) \\
 & + 2t^2 \log \left\{ t^2 + is(z-C_0) + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2} \right\} \\
 & - 2(t^2 - s^2) \log (z-C_0 - is) - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + (z-C_0)^2} \\
 & \left. + \frac{(z-2)^2}{2} + i2s(z-C_0) \right] \Bigg|_a^{t=a+b} \Bigg|_{-bs/2}^{s=bs/2} \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

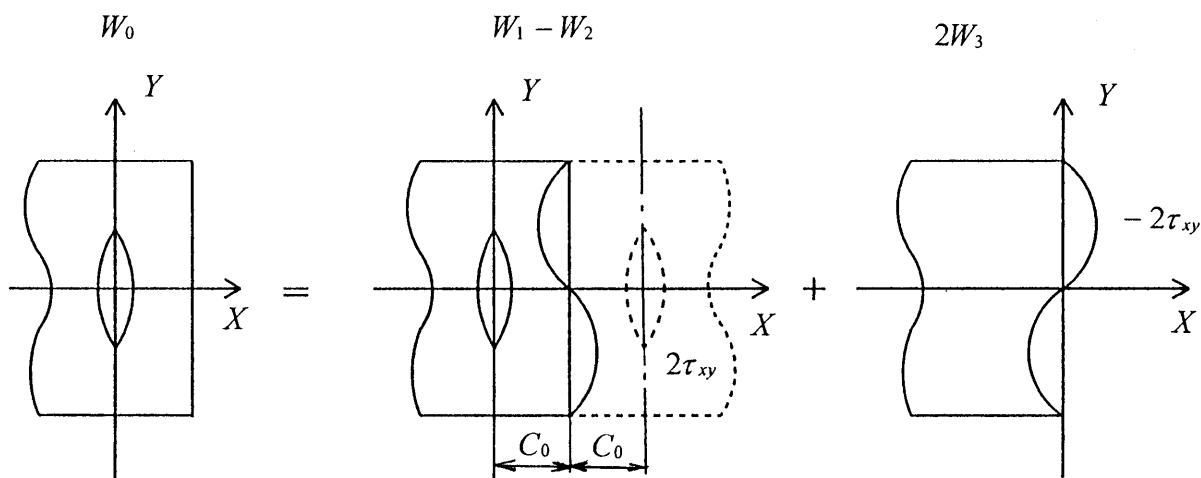


図-2.19 自由辺の構成法

2.5.2 数値計算例

図—2.20に示すように、き裂の中心軸（Y軸）から10cm離れた位置に自由面を持つ半無限板についての数値計算例を示す。き裂条件、荷重条件およびプロセスゾーン長さはすべて2.3.3項と同じとする。また境界条件としての着目点として $(X=0, Y=4)$ の点で $\sigma_x=0$ 、 $(X=0, Y=100)$ の点で $\sigma_y=0$ の2点を設定した。

得られた最大引張応力は $\sigma_{x\max}=4.79\text{ kgf/cm}^2$ となり、無限板での $\sigma_{x\max}=3.40\text{ kgf/cm}^2$ 、矩形板での $\sigma_{x\max}=3.55\text{ kgf/cm}^2$ と比較しかなり大きな値を示し、自由辺の存在が大きく影響しているのが判る。

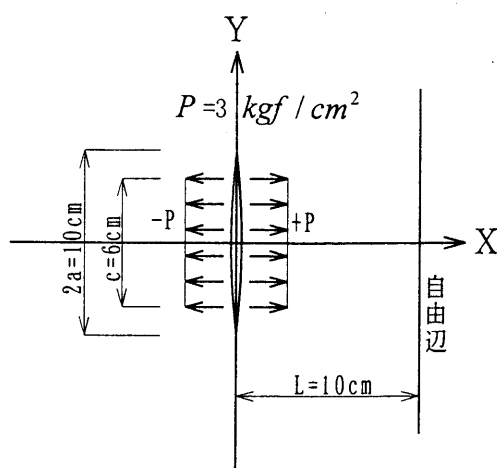
自由辺の影響を把握するために、平面（2次元）としての計算結果を3次的に図化したものを図—2.21～図—2.31に示す。図—2.21はき裂開口変位U（X方向変位）を斜め上部から見た図である。自由辺側の変形量が反対の無限側より大きくなっていることがわかる。また自由辺にも大きな変位が現れていることがわかる。図—2.22はX軸と直角方向からのX方向変位Uを図示したものである。自由辺側と無限側の変形の違いがより明確にわかる。

図—2.23はY方向の変位Vを図示したものである。変位性状をわかり易くするためにYのプラス側のみをX軸と直角方向から見た場合を示したのが図—2.24である。

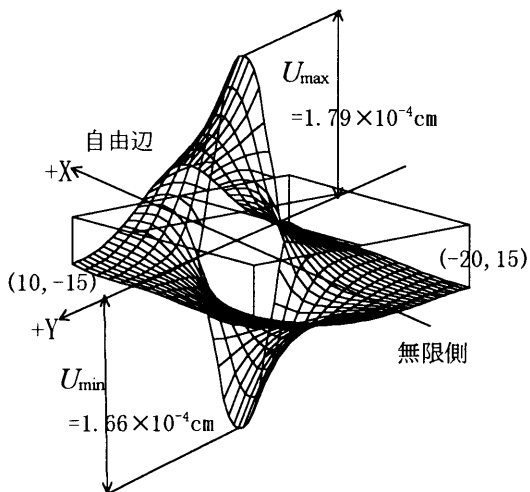
図—2.25にX方向応力 σ_x の分布図を示す。荷重と応力集中の関係が明解にわかる。図—2.26は応力集中部に対して計算ピッチを小さくし拡大したものである。より滑らかな応力の変化が見て取れる。また図—2.27は、X軸と直角方向から見たもので、自由辺での境界条件が満足されていることがわかる。

図—2.28はY方向応力 σ_y を示したものである。 σ_x とは異なり自由辺においても比較的大きな応力が発生していることがわかる。図—2.29にX軸と直角方向から見た図を示す。プロセスゾーン位置での応力集中、荷重そして自由辺で発生している応力の状況が明確となっている。

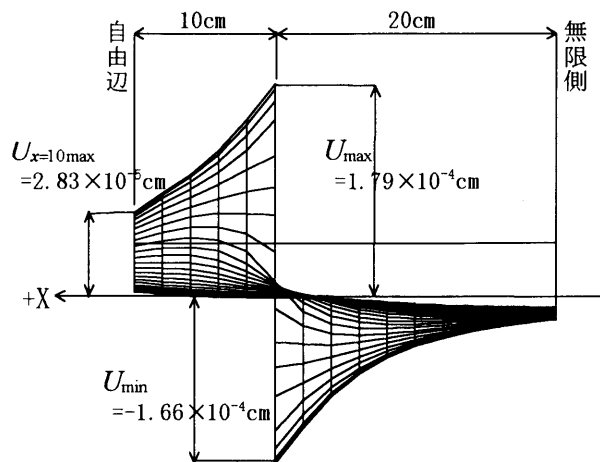
図—2.30にせん断応力分布図、図—2.31にX軸と直角方向から見たせん断応力分布図を示す。自由辺での境界条件 $\tau_{xy}=0$ を満足していることがわかる。



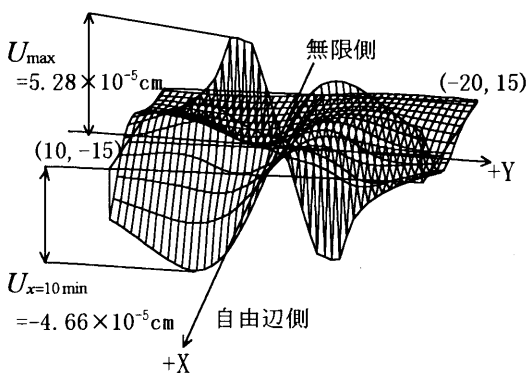
図—2.20 半無限板数値計算モデル



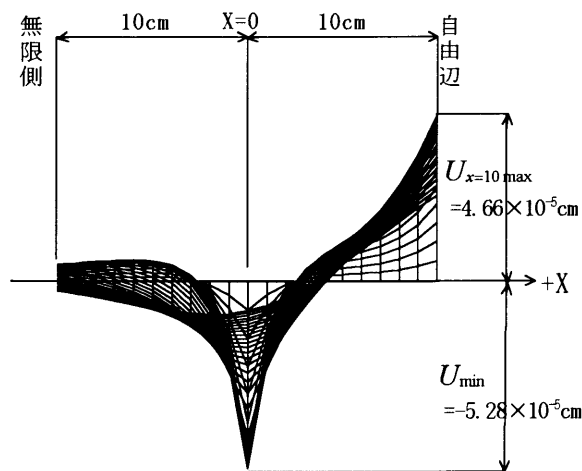
图—2.21 X方向变位U分布图
 $(-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



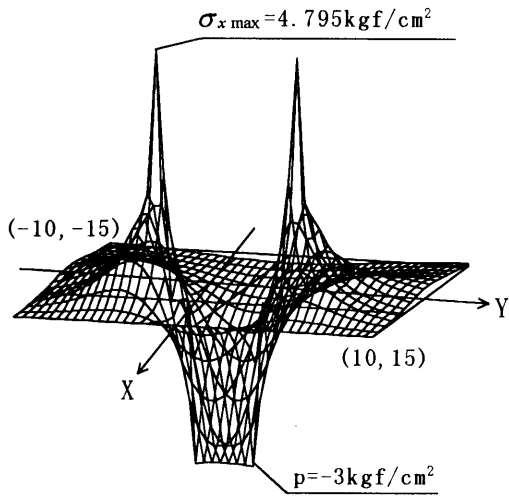
图—2.22 X方向变位U分布图
 (视点Y=15)
 $(-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



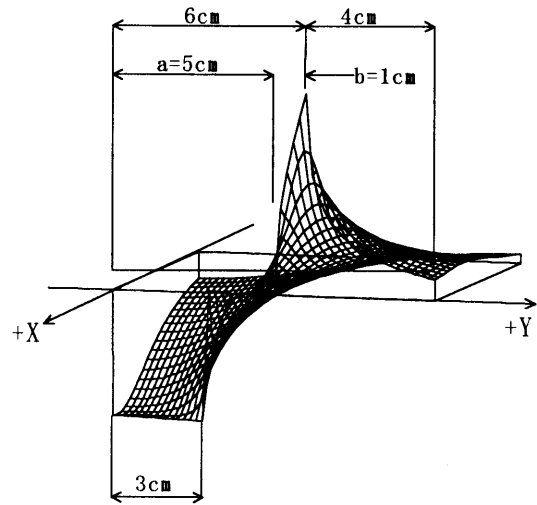
图—2.23 Y方向变位V分布图
 $(-20 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



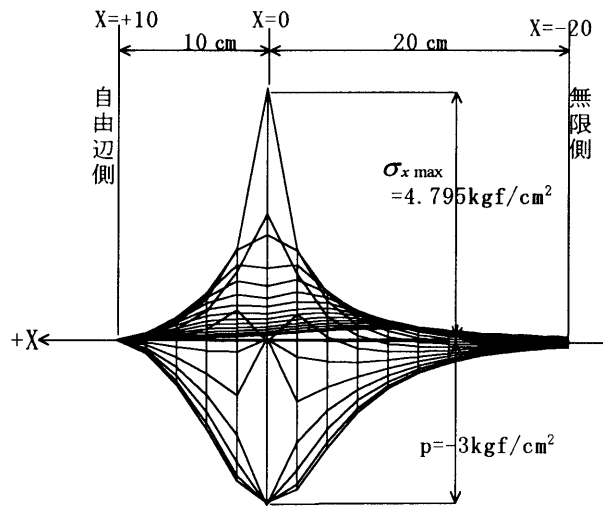
图—2.24 Y方向变位V分布图
 (视点Y=0)
 $(-10 \leq X \leq +10, 0 \leq Y \leq +10)$



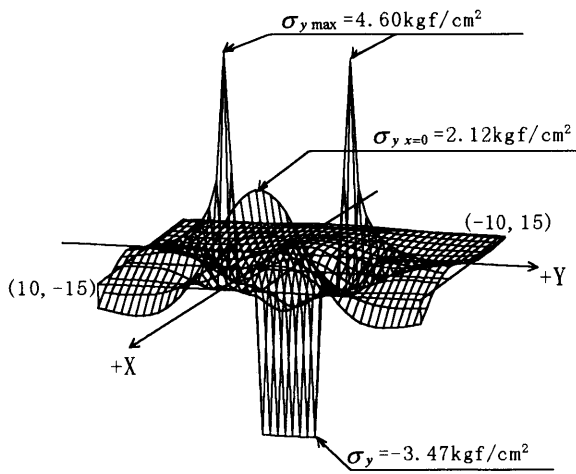
图—2.25 X方向应力 σ_x 分布图
 $(-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



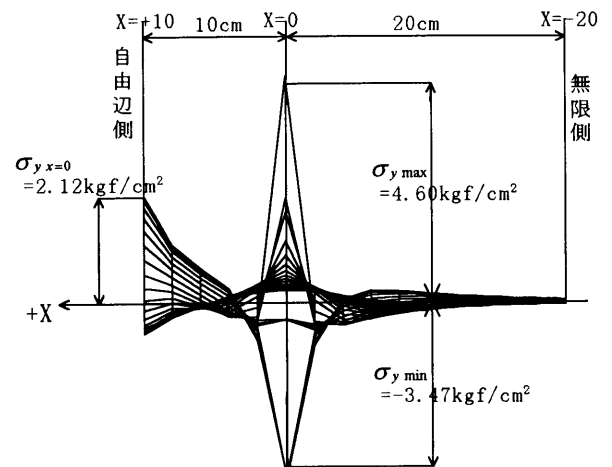
图—2.26 X方向应力 σ_x 扩大图
 $(-5 \leq X \leq 0, 0 \leq Y \leq +10)$



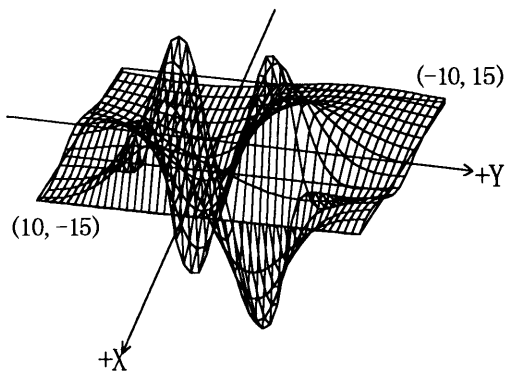
图—2.27 X方向应力 σ_x 分布图
 (视点 $Y=15$)
 $(-20 \leq X \leq +10, -10 \leq Y \leq +10)$



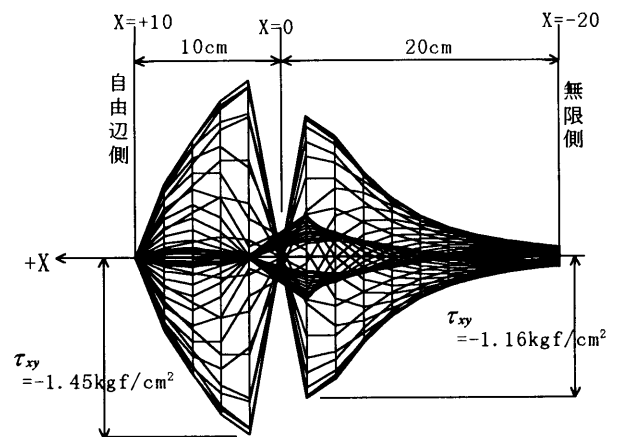
図—2.28 Y方向応力 σ_y 分布図
 $(-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



図—2.29 Y方向応力 σ_y 分布図
 (視点 $Y=15$)
 $(-10 \leq X \leq +10, -15 \leq Y \leq +15)$



図—2.30 せん断応力 τ_{xy} 分布図



図—2.31 せん断応力 τ_{xy} 分布図
 (視点 $Y=15$)

2.5.3 き裂から自由辺までの距離が与える影響

本節ではき裂から自由辺までの距離が与える影響と求めた関数の適用限界を検討する。はじめに、2.3節、2.4節で求めた無限板ならびに矩形板での数値計算例との比較を行い、それぞれの結果の関連を検討する。

表—2.3 に無限板、矩形板、半無限板での最大引張応力とき裂中央での開口変位量の比較を示す。自由辺との距離が10cmの場合には、当然のことながら自由辺側への変形量が自由辺と反対側での変形量より大きな値を示している。表—2.3には自由辺との距離が45cmの半無限板の計算結果も比較のため表示した。最大引張応力において矩形板と半無限板の結果では約2%の差が生じている。この理由は、表—2.2で示したように矩形板において $a = 5\text{cm}$ の場合でも自由辺での誤差が約1.5%あること。また半無限板においても着目点として、 $(X=0, Y=100)$ の点で $\sigma_y = 0$ としており、着目点の設定位置により応力の値が誤差範囲ではあるが違いが生じるためと考えられる。

き裂中央における開口変位量の比較において、自由辺との距離が45cmの半無限板の合計変位量(U3)は、矩形板より若干少なくなっており、片側が無限板であることからほぼ妥当な値と考えられる。また自由辺側と無限側での変位量は、自由辺との距離が離れていることから差は生じていない。

表—2.3自由辺との距離と応力・変位量の関係

	自由辺との距離 L (cm)	最大引張応力 $\sigma_{x \max}$ (kgf/cm ²)	き裂中央での変位量		
			U 1 (cm)	U 2 (cm)	U 3 (cm)
無限板	∞	3.4017	1.44E-04	-1.44E-04	2.88E-04
矩形板 (90cm×90cm)	45 cm	3.5486	1.46E-04	-1.46E-04	2.93E-04
半無限板 ①	45 cm	3.4822	1.45E-04	-1.45E-04	2.91E-04
半無限板 ②	10 cm	4.7945	1.91E-04	-1.54E-04	3.45E-04

L : X軸(き裂延長線)から自由辺までの距離 (cm)

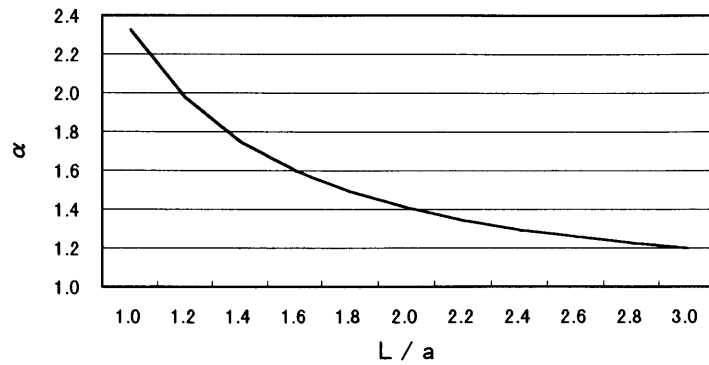
U1: 自由辺側のき裂中心における開口変位量 (cm)

U2: 自由辺とは逆側のき裂中心における開口変位量 (cm)

U3: U1-U2 き裂中心における全開口変位量 (cm)

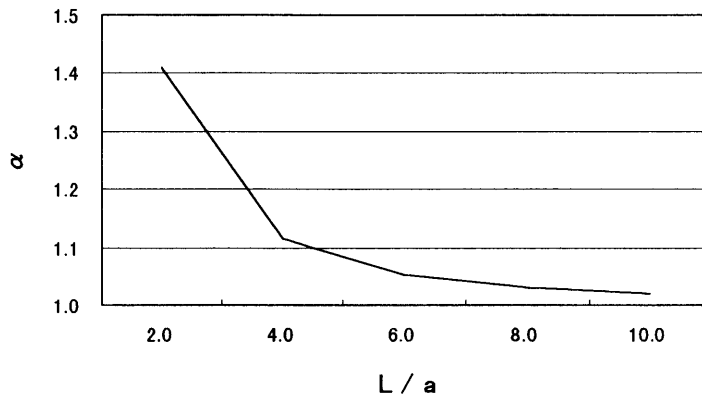
次に自由辺からき裂までの距離Lを変化させた時の最大応力を求め、無限板での最大応力との比較を行うことにより、Lが最大応力に与える影響を調べる。図—2.32は $1 \leq L/a \leq 3$ の範囲での、また図—2.33は $2 \leq L/a \leq 10$ の範囲での両者の比を示したものである。自由辺との距離Lが小さくなると最大応力は大きくなる。特に L/a が4より小さくなると応力集中の度合いは大きくなる。また $L/a = 10$ でほぼ無限板に

における最大応力と同程度となるが、これは表—2.3との比較と符合する。



α : 無限板での最大応力に対する半無限板の最大応力の比

図—2.32 自由辺との距離が最大応力に及ぼす影響 (1 ≤ L/a ≤ 3)



α : 無限板での最大応力に対する半無限板の最大応力の比

図—2.33 自由辺との距離が最大応力に及ぼす影響 (2 ≤ L/a ≤ 10)

次に、自由辺を有する半無限板の解の計算誤差を求めることにより、導いた応力関数の適用限界を検討する。計算モデルは、図—2.20で示した数値計算例と同じモデルを使用する。図—2.34にY軸上のX方向応力 σ_x の分布図の一例を示すが、次の2点において境界条件を十分には満足していない。

- (1) 作用させた分布荷重は、 $-3\text{cm} \leq Y \leq +3\text{cm}$ の領域で $p = \pm 3\text{kgf/cm}$ の一様分布荷重であるが、図示した例（自由辺からき裂までの距離Lが6 cm）ではき裂中央で指定した荷重が設定されているが、端部ではより大きな荷重状態が生じている。
- (2) き裂開口部で荷重が作用しない領域（計算例では $3\text{cm} \leq |Y| \leq 5\text{cm}$ ）においては、応力は0にならなければならないが、着目点 ($Y=4\text{cm}$) は $\sigma_x = 0$ となっているが、作用荷重端部およびき裂先端部を最大とした応力の誤差が発生している。

このため計算誤差として、荷重強度に対する誤差 e_1 とき裂開口部の境界条件に対する誤差 e_2 を、式(2.21)のように定義し求める。

$$e_1 = \frac{\Delta p_{\max}}{p_0}, \quad e_2 = \frac{\sigma_{0\max}}{p_0} \quad (2.21)$$

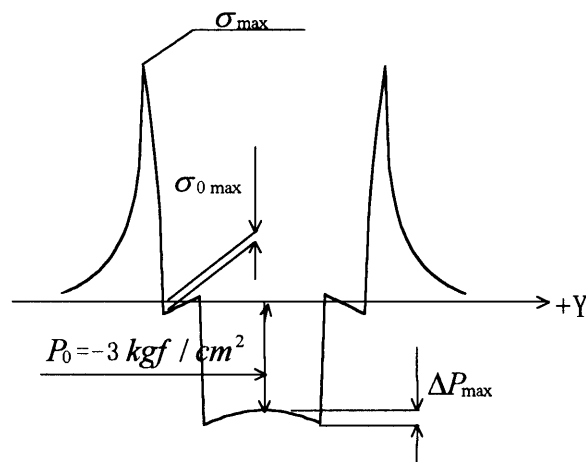
e_1 : 荷重強度に対する誤差 (%)

e_2 : き裂開口部の境界条件に対する誤差 (%)

Δp_{\max} : 最大荷重強度と載荷荷重との差

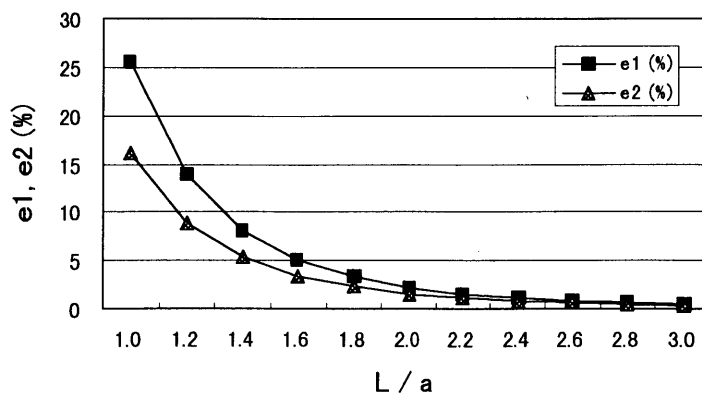
$\sigma_{0\max}$: 荷重載荷範囲外のき裂開口部で発生するX方向最大応力度

p_0 : 載荷一様分布荷重 ($\pm 3 \text{ kgf/cm}^2$)



図—2.34 Y軸上の σ_x 分布と計算誤差の対象

図—2.35に自由辺からき裂までの距離 L と計算誤差 e_1, e_2 の関係を示す。 $L/a \geq 1.6$ で e_1, e_2 は5%以下となっており、導いた応力関数の適用限界と考えられる。



図—2.35 L/a と計算誤差 e_1, e_2 の関係

2.6 まとめ

中川等が提案しているき裂先端で有限な応力集中と開口変位を伴うプロセスゾーンを構成し得る応力関数を基礎に、一様弾性体中の直線状き裂の開口部に任意分布幅を有する面内強制開口外力が作用する問題に対し、無限板、矩形板、自由辺を片側に有する半無限板の平滑化された応力関数および解析手法を導き、数値計算例を示した。

矩形板においては4辺が自由辺となるが、本研究ではき裂先端方向の自由面での境界条件を満足させることを目的に、自由面の境界線が近似的に応力の対称軸になるように、対象とするき裂の延長線上に2つの仮想き裂を配置して無限板で導いた応力関数を重ね合わせ解を導いた。さらに重ね合わせた関数の数と等しい数の着目点を指定し、選点法により決定された未定係数を乗じ境界条件を満足させるという手法を採用した。き裂先端と自由面との距離が十分に離れている時には、無限板での解との比較において妥当性のある結果が得られたが、近づくと誤差が大きく生じることが判明した。このため本来0となるべき自由面におけるX方向応力 σ_x と τ_{xy} について閉じあわせ誤差に対する検討を行った。その結果、き裂先端と自由面との距離がき裂半長さの10倍程度離れている場合には閉じあわせ誤差が1%程度であるが、2倍程度に近づくと閉じあわせ誤差は10%を超える。矩形板に対する解の適用限界として境界条件に対する閉じ合わせ誤差を5%以下とすると、矩形板長さに対するき裂長さの比は20%程度以下にする必要があることが判明した。

自由辺を有する半無限板の解は、自由面を構成する補正項と無限板の解を重ね合わせることにより導いた。自由辺における境界条件は完全に満足する結果は得られたが、自由辺がき裂に近づくと一定であるべき荷重強度にばらつきが生じること、および本来応力が0であるべき荷重が作用していないき裂開口部に応力が生じるという現象が現れる。この荷重のばらつきと開口部に生じる応力を誤差と考え、作用した荷重強度に対する比を求め導いた解の適用範囲を検討した。その結果 $L/a \geq 1.6$ の時共に誤差は5%以下になり、 $L/a = 1.6$ が適用限界であることが判明した。

本研究の主題であるき裂内部に外力が作用する応力関数は、実際の工学的な問題への適用範囲が広いと考えられる。しかしながら、実際の問題の多くは有限の問題であるため、無限板での応力関数の適用範囲を明確にする必要がある。弾性破壊力学の分野では、き裂先端の近傍において適用可能と表現されるが、本研究の応力関数は全領域を対象としているため、特にその必要性があると思われる。本文での矩形板および半無限板での試みもその一つと言える。矩形板での閉じ合わせ誤差の結果は必ずしも満足のいくものではなく、今後境界条件に対する誤差を縮小するため、平滑な級数解を重ね合わせる選点法や補正項などで対処する必要がある。また、半無限板の解においてもより適用範囲が拡大出来るように、他の解を重ね合わせるなど今後工夫を行いたい。

参 考 文 献

- 1) 段樹金, 小嶋弘行, 中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, NO. 374/1-6, pp. 399-407, 1986.
- 2) Duan, S. and Nakagawa, K. : Stress functions with finite stress concentration at the crack tips for a central cracked panel, Eng. Fract. Mech. vol. 29, No. 5, pp. 517-526, 1988.
- 3) 栖原秀郎, 中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数, 土木学会論文集, NO. 501/1-29, pp. 65-74, 1994.
- 4) 藤井康寿, 中川建治: 面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数, 土木学会論文集, No. 502, V-25, pp. 23-32, 1994.
- 5) Westergaard, H. M. : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol. 33, A-49~53, 1939.
- 6) 長瀬裕信 : 直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と岩盤問題への応用に関する研究, 岐阜大学学位論文, 1996.
- 7) 栖原秀郎, 藤井康寿, 中川建治: くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案, 土木学会論文集, No. 528/V1-29, pp. 167-177, 1995.
- 8) 石田 誠: き裂の弾性解析と応力拡大係数, 1976.
- 9) Murakami, Y. : Stress Intensity Factors Handbook, Vol. 1, Pergamon Press, 1987.
- 10) Barenblatt, G. I. : The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, general ideas and hypotheses. axially-symmetric cracks, PPM. 23, 3, pp. 434-444, 1959.

第3章 有限矩形板き裂に対する適用例

3.1 まえがき

本章では、佐久間等により報告されているモルタル供試体を使った孔内載荷実験結果¹⁾に対して、2.3節で求めた応力関数および2.4節で示した矩形板に対する解析手法を適用することにより、その有用性を検討する。また、中川等の研究の内、残された最も重要な課題である塑性領域としてのプロセスゾーン相当長さ b を実際の実験結果より逆推定することを試みる。

佐久間等は岩盤の初期応力測定法の1つとして「ダブルフラクチャリング法」を開発している²⁾。この方法は、岩盤の孔内にウレタンチューブ製の載荷試験装置を挿入し、孔内載荷を行って孔内にき裂を発生させ、そのときの載荷圧力およびき裂発生位置から、岩盤の初期地圧を求めるものである。この測定法の検証実験の1つとして、モルタル供試体を用いた孔内載荷試験を行っている¹⁾。この室内実験は目的が異なるため、本研究で取り上げている理論解と孔内における荷重条件等が違っている。実験は円孔内に一様圧力を作用させるが、理論解では直線状スリットに分布開口力を作用させる。しかし、き裂が進展するに従い本研究の理論モデルに近似してくると考えられる。本章では、その適用限界を考慮しつつ、この実験のデータを用いてプロセスゾーン長さ b の推定とき裂周辺の応力状態を求めることを試みる。実験では孔内載荷荷重の増加に伴うき裂進展状況を計測しているので、理論解によるき裂周辺の応力と比較することにより、き裂進展の数値的評価をより合理的なものにすることを試みる。実際には、き裂の進行に合わせて b の長さを数回の反復計算を行い推定を行っている。

3.2 実験概要

実験に用いた供試体は、モルタル製 ($\sigma_c=342 \text{ kgf/cm}^2$, $\sigma_t=25.5 \text{ kgf/cm}^2$, $E_c=181,000 \text{ kgf/cm}^2$) で幅90cm×奥行90cm×高さ30cmのサイズであり、この供試体中央に直径7.6cmの孔を削孔している。図-3.1に供試体の概念図を示す。実験は、この供試体を反力装置に装入し、フラットジャッキにより周辺に沿って水平方向から一定の拘束圧を作用させた状態で、供試体中央で孔内載荷試験を実施したものである。周辺の拘束圧として、Y方向の圧力 p_0 を 49.0 kgf/cm^2 、X方向の圧力 q_0 を 24.5 kgf/cm^2 に設定している。

供試体表面のき裂発生方向の近辺には孔内載荷を行う前にあらかじめひずみゲージを原点よりY軸に沿って L_k の距離に7枚 ($k=1\sim 7$) 貼付している。ひずみゲージはき裂による破断を避けるため、き裂が発生する位置からゲージ端部を1.0cm X方向に偏位して貼付している。

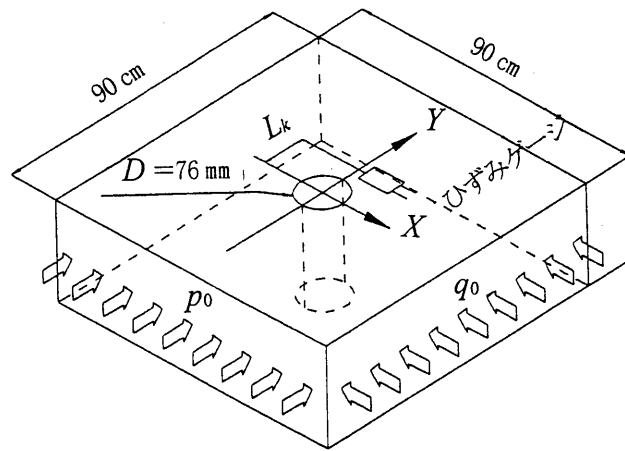


図-3.1 実験供試体概念図

3.3 実験結果

図-3.2に実験結果に基づく載荷圧力とひずみの関係を示す。孔内載荷が開始されて載荷圧が大きくなるにつれてひずみがほぼ直線的に増大して、き裂が進展してして行くのが分かる。そのき裂がゲージ近傍を通過すると、ひずみ量は減少し始めるとみなして良いので、ひずみ量が最大値を示した点がプロセスゾーンの先端であって、最大応力が発生したと考えられる。

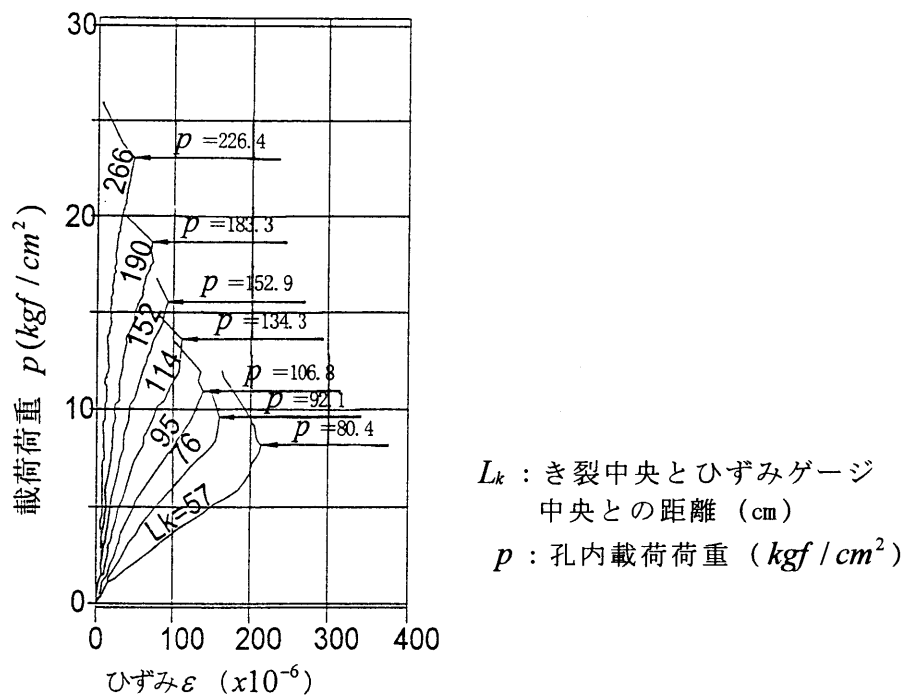


図-3.2 載荷圧力とひずみの関係

3.4 解析モデル

実験の解析モデルを、図-3.3に示す。実際には孔壁放射方向に分布する孔内載荷圧力 p を、直線き裂に対し孔径と同幅に矩形分布する一様な圧力としているので、載荷圧のY方向成分の影響およびき裂の進展に対する円孔形状の影響は考慮していない。しかしながら、塑性域としてのプロセスゾーンが形成された以後は、円弧状載荷と直線状載荷による応力状態は近似するもの考えられるため、解析の第1ステップをき裂発生後としている。したがって、ここでの解析は、載荷圧 p のX方向成分のみが作用している場合限定している。解析用の関数は、2.3節で導いた式(2.13)および式(2.15)と開口部に外力を持たない場合の応力関数である式(2.9)を適用する。2.4節で示したようにこの2つの関数をそれぞれY軸上に平行移動させ、それぞれ3個のき裂に対する解を重ねて境界条件を満足させるようにそれらの未定係数を求める。詳しい数値は割愛して、この解析結果と実験結果を比較検討する。

実験結果の図-3.2より、ひずみゲージ中央(1.5, L_k)においてひずみ量が最大値を記録した時、Y軸上の点(0, L_k)において最大引張応力が発生しており、かつ供試体の引張強度と釣り合っているものとし、 b_k およびき裂周辺の応力とひずみ量を求めることとする。

解析モデルは周辺自由の有限板であり、2.4節で求めた応力解の適合範囲内では有効であることを確認している。

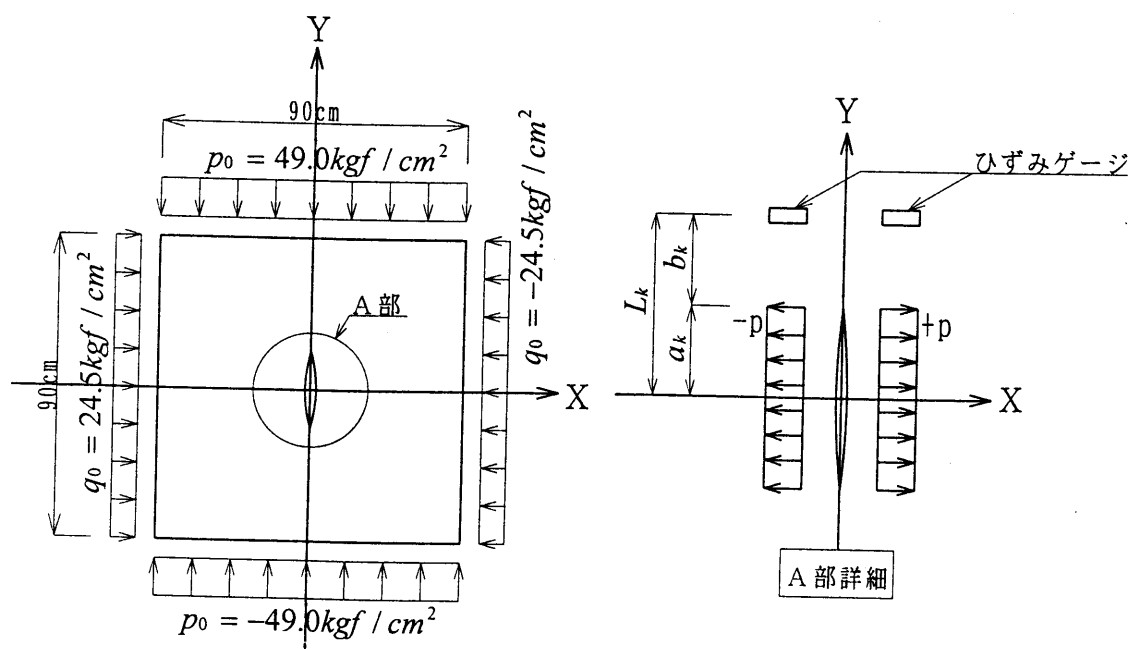


図-3.3 解析モデル

3.5 解析結果と実験結果の比較

3.5.1 プロセスゾーン長さの評価

逆算により求めた b の結果を表-3.1のCase Aに示す。载荷ステップS-1とS-7を除くと、求められた b の値は0.77~1.85cmとばらついているが、実験供試体のプロセスゾーン長さの評価としては概ね $b=1.0$ cm程度と考えられる。S-1 ($L_k=5.7$ cm)においては、実験値 p と σ_x が釣り合うような b の値を得る事は出来なかった。また、S-7 ($L_k=26.6$ cm)の場合は、き裂先端の位置が自由辺に近づいたため、自由辺 ($Y=45.0$ cm)での境界条件を十分満足させ得なかったので参考値として表示する。

次に $b=1.0$ cmとして孔内载荷圧力 p により生じる最大引張応力を求めた。結果を表-3.1のCase Bに示す。S-1とS-7を除いた各载荷ステップでは、実験で求めた引張強度に対する最大引張応力の比は、当然のことではあるがほぼ1に近い値となっている。実際には、プロセスゾーン長さも供試体の引張強度も一定ということではなく、ある幅を持っていると考えられる。本計算例においてはマイクロクラックの発生や材料の組織感性を無視していることを勘案すると、この程度のバラツキは妥当性のある範囲と考えられる。ポアホールに最も近いS-1では、最大引張応力は圧裂試験で求めた引張強度の1.66倍となっている。これは比較的孔壁近傍での载荷条件であるため、孔内载荷のY方向圧力成分によるポアソン効果がき裂の進展を制御する方向に作用するためと考えられる。

表-3.1 プロセスゾーン長と最大引張応力

载荷 ステップ	L_k (cm)	p (kgf/cm^2)	Case A	Case B	
			b_k (cm)	σ_{ct} (kgf/cm^2)	σ_{ct}/σ_{t0}
S-1	5.7	-80.4	—	42.0	1.66
S-2	7.6	-92.1	1.11	26.9	1.05
S-3	9.5	-106.8	0.77	22.0	0.86
S-4	11.4	-134.3	1.78	35.3	1.38
S-5	15.2	-152.9	0.92	24.1	0.95
S-6	19.0	-183.3	1.85	33.3	1.31
S-7	26.6	-226.4	4.50	55.9	2.19

Case A : $\sigma_{ct} = \sigma_{t0} = 25.5kgf/cm^2$ と一定とした時の b の逆推定値

Case B : $b=1.0$ cmと一定とした時の σ_{ct} の逆算値

L_k : 円孔中心からひずみゲージ中心までの距離 (cm)

p : 円孔に载荷される内圧 (kgf/cm^2)

b_k : プロセスゾーン長さ (cm)

σ_{ct} : 最大引張応力 (計算値) (kgf/cm^2)

σ_{t0} : モルタル供試体の引張強度 ($25.5kgf/cm^2$)

3.5.2 き裂周辺のひずみ量と孔径変位量の評価

表-3.2に、ゲージ位置におけるひずみ量およびボアホール中央での孔径変位量の実験値および計算結果を示した。表-3.2の実験値によるひずみ量は、図-3.2の p による引張応力ひずみに、周辺拘束圧力による圧縮ひずみを加えたものである。計算値はゲージ中央(1.5, L_k)と(2, L_k)の2点について求めたが、計算値がやや大きい値を示している。実験では、き裂そのものの進行がY軸に完全に一致しているわけではなく、実際にはかなりジグザクとなっているため、き裂とゲージの位置関係を正確に特定することは難しい。

実験値の孔径変位量は、載荷圧力による弾性変形値とき裂の開口による孔径変位の和を計測したものであるが、計算値では直線状き裂の中央の変位を求めたものである。実験値のほうがやや大きな値となっているが、オーダー的にはほぼ同程度の結果が得られている。

表-3.2 ひずみ量とき裂中央の変位量の比較

載荷 ステップ	L_k (cm)	ε	δ (cm)	ε_1	ε_2	δ' (cm)	δ/δ'
S-1	5.7	103	0.0092	104	71	0.0058	1.59
S-2	7.6	43	0.0112	85	69	0.0078	1.44
S-3	9.5	60	0.0137	76	65	0.0103	1.34
S-4	11.4	60	0.0168	113	99	0.0148	1.13
S-5	15.2	45	0.0200	88	78	0.0188	1.06
S-6	19.0	54	0.0240	123	109	0.0252	0.95
S-7	26.6	43	0.0320	190	170	0.0370	0.86

ε : ひずみ (実験値) ($\times 10^{-6}$)

δ : 円孔中央の変形量 (実験値) (cm)

ε_1 : $X=15\text{mm}$, $Y=L_k$ におけるひずみ量 (計算値) ($\times 10^{-6}$)

ε_2 : $X=20\text{mm}$, $Y=L_k$ におけるひずみ量 (計算値) ($\times 10^{-6}$)

δ' : 円孔中央の変形量 (計算値) (cm)

3.5.3 亀裂周辺応力と変位図

S-2 ($L_k=7.6\text{cm}$, $a=6.6\text{cm}$, $b=1.0\text{cm}$, $p=-92.1\text{kgf/cm}^2$)の解析結果を図-3.4から図-3.7に示す。図-3.4は、Y軸上のX方向応力 σ_x を拡大して示したものである。一様内圧およびそれによって生じたき裂先端の平滑化された応力がよくわかる。図-3.5、図-3.6は、X方向変位量U、X方向応力 σ_x の分布を3次元的に図示したものである。

また図-3.7は、き裂先端部分($x=-15\sim+15$, $y=6.6\sim 16.6$)でのX方向ひずみ ε_x の3次元分布をX軸平行面に投影した図である。図よりゲージ付近は、 ε_x の変化率が大きい位置である事が分かる。このような状況でも、表-3.2に示される程度の誤差

で、実験値と計算値が近似している事は、この応力関数ならびにこの実験方法の有用性を示すものと思われる。

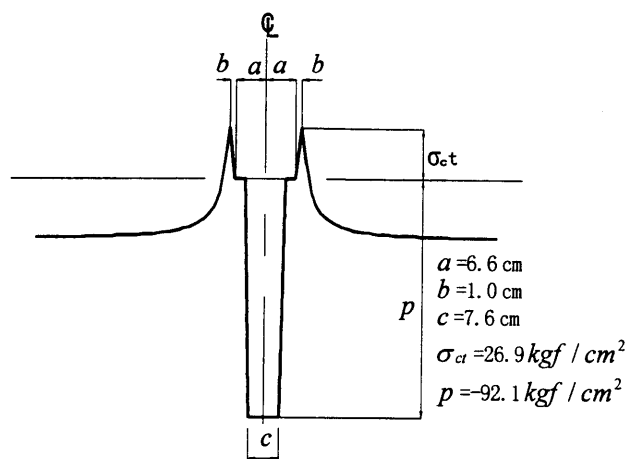


図-3.4 Y軸上における σ_x 拡大図
(Case B 荷重ステップS-2)

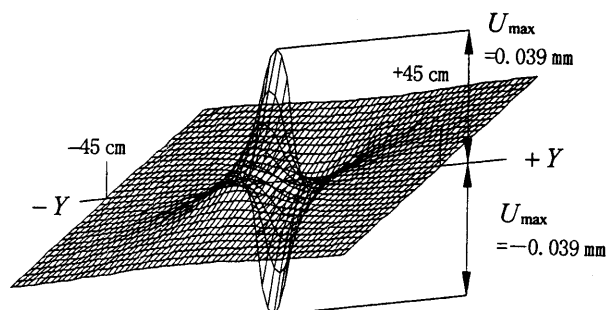


図-3.5 X方向変位U分布図
(Case B 荷重ステップS-2)

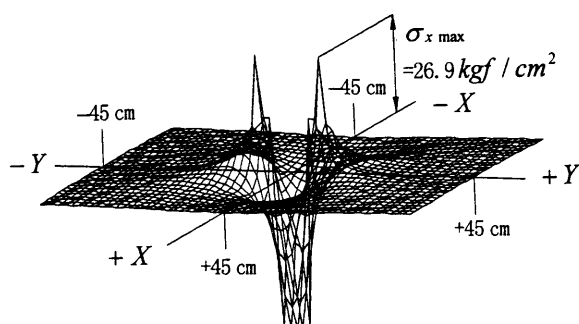


図-3.6 X方向応力 σ_x 分布図
(Case B 荷重ステップS-2)

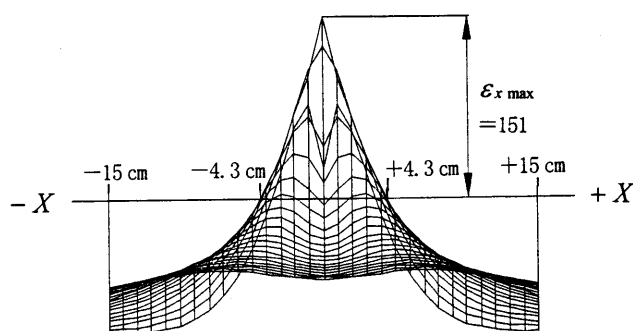


図-3.7 $Y \geq 6.6$ cmにおけるX方向ひずみ ϵ_x 分布図
(Case B 荷重ステップS-2)

3.6 まとめ

室内実験の結果をもとにき裂の進展に合わせた応力状態をシミュレーション解析するとともに、プロセスゾーン長を逆推定することを試みた。3.4節でも述べたように、解析モデルの荷重条件は実験モデルの荷重条件を厳密に表現したものではない。このため、実験モデルにおける円孔上から発生した初期段階のき裂周辺の応力および変位状態を正確に表し得たものではない。しかし、き裂が進展し、き裂先端と荷重作用位置が離れるにしたがい、解析モデルと近似してくるので解析解とみな

して良いと考えられる。その結果、本章で取り上げた実験モデルにおいては、き裂先端の最大引張応力がき裂進展の判定要素となり、第2章で求めた関数、および有限矩形板に対する解析手数が、破壊の数値シミュレーションに適用可能と考える。

しかしながら、周辺の一様圧力の境界条件に対して、き裂先端が自由辺に近づくと、本計算例のような解関数の平行移動による重ね合わせだけでは、境界条件に対する誤差が大きくなる。境界条件に対する誤差を縮小するには、平滑な級数解を重ね合わせる選点法で対処可能と考えるが今後の検討課題と致したい。

中川等の一連の研究において、重要な課題として残されていたプロセスゾーン相当部分の長さも、バラツキはあるものの1.0cm前後と現実的な値が得られた。限られた実験例ではあるが、本実験によりプロセスゾーン長さ b を求める方法についての方向性を示し得た成果は大きいと考える³⁾。また、応力拡大係数が支配的なパラメーターとなる緻密な組織の金属材料の破壊力学に対して、き裂先端でヘアークラックやマイクロクラックが広く発生するような混成材料で構成されたコンクリートや岩盤の破壊力学により適合すると思われる応力関数の有用性を示したことになる。

亀裂の発生、進展評価の基準となる最大引張応力は、プロセスゾーンの長さ b に依存するが、個々の材料に対して基準となる b の値はまだ得られていない。その物性論的な特性の把握とその長さについての実験、今後の積み重ねが課題と考える。

参 考 文 献

- 1) 佐久間彰三、菊地慎二、中村哲也、岡 千裕：「孔内载荷による亀裂発生に関する実験とその考察」 第23回岩盤力学シンポジウム講演論文集、1991.
- 2) 佐久間彰三、菊地慎二、水田義明、世良田章正：「ダブルフラクチャリング法による地山応力の測定」、土木学会論文集、No.406/III-11、1989.
- 3) 阿部安秀、中川建治、岡千裕：プロセスゾーンを考慮したき裂進展の理論解析と実験的検証、材料、Vol. 47, No. 2, pp. 161-168, 1998.

第4章 自由面に平行なき裂の解への適用例

4.1 まえがき

本章では、2.5節で求めた関数を、静的破砕剤工法による岩盤掘削工法の原位置実験に適用し、実験により求められたき裂進展およびその開口量に対してシミュレーション解析を行う。

本研究で論じている解析解は弾性理論を基本としているが、き裂先端に生じる破壊進行領域（フラクチャープロセスゾーン）を表現し得る関数であるため、線形破壊理論による変形に塑性変形相当分を加えることにより、き裂進展等の塑性問題に適用可能なものとなる。実施に伴う岩盤の破砕では数cmの開口変位が発生するので、これを数値解析で検証するには一般的な大変形問題として取り扱わなければならない。しかし、ここでは弾性理論を基にした解析解により取り扱うのであるが、解析モデルを工夫することにより対応可能なことを本章において示す。

岩盤掘削工法のうち、最も経済的で一般的なものは発破工法であるが、岩盤の種類、岩質、き裂・風化の程度等により機械掘削も一般的に行われている。また、工事に伴う振動や騒音が問題になる場合には、無振動無騒音工法が採用されている。いずれも地上の工事においては、通常一面に自由面を持つベンチカット工法が採用される。

中川、栖原等は、機械掘削工法の一つであるくさび貫入工法の応力解析に対して自由面に平行な外側き裂の解を適用し、設計法を提案している。本研究では、別の割岩方式である静的破砕剤の最適ボアホールピッチ（以下削孔ピッチとする）を解析的に決定することを目的に原位置実験を行い、亀裂の発生や進展の状況を計測し、その結果とシミュレーション解析結果を比較検討した。くさび貫入工法は外側き裂を持つ板の強制開口問題に相当し、片側より順次施工するものである。これに対して、静的破砕剤は内圧を同時に受ける多数の中心き裂の強制開口問題に相当する。また、くさび貫入工法は衝撃圧という動的な荷重が作用し、き裂の発生が瞬時であるため動弾性係数を物性値として採用しているが、静的破砕剤工法はき裂の進展が静的（1日）であるため、静弾性係数を採用することによって好ましい結果が得られた。

4.2 岩盤破砕実験

4.2.1 岩盤掘削工法の概要

岩盤掘削工法には、発破工法のほか数々の方法が提案実施されているが、概ね表-4.1のように分類される¹⁾。工法の選定においては、対象岩盤の種類、岩質、き裂・節理等の程度および工事環境などが考慮される。一般的な地上の工事においては、

通常経済性から発破工法が採用されている。しかし堅固な岩盤に対しても、工事環境からの騒音、振動に対する制約や、基礎岩盤のゆるみの制限等制約がある場合には、表－4.1の2), 3)の無発破工法が採用される場合が数多くある。

表－4.1 岩盤掘削工法の分類

工法名	詳細分類
1)発破工法	a)標準爆破 b)コントロールブラスティング
2)機械掘削工法	a)切削によるもの b)ブレードによるもの c)くさび貫入によるもの d)リッパーによるもの b)機械的打撃によるもの
3)その他の工法	a)静的破砕剤 c)ウォータージェット d)電磁波照射 e)高温岩石熔融 f)その他

無発破工法のうち堅固な岩盤に適用可能な工法をその掘削メカニズムにより分類すると、主にトンネルで用いられる切削方式、ブレイカーに代表され転石や2次破砕後の小割りに用いられる打撃方式、および新鮮な岩盤の1次破砕に用いられる割岩方式がある。通常明かり工事における堅固で新鮮な岩盤に対する掘削では、割岩工法により1次破砕を行い、その後2次破砕掘削されるのが一般的である。代表的な割岩工法には、くさび貫入によるもの（くさび貫入工法）と静的破砕剤によるもの（静的破砕剤工法）がある。ともに岩盤にボアホールを設け、そのボアホールの内壁に押し広げる力を加えることにより、岩盤を引張破壊させるものである。その破壊メカニズムから効率良く割岩するために、自由面を持つベンチカット方式で施工されるのが一般的である。

割岩方式は、ボアホールを介して割岩力を与えるため、岩盤の強度、割岩力の大きさ、ボアホールの径、長さおよびピッチ等が設計的に重要な要素となる。このうち割岩力の大きさは、くさび貫入工法ではくさびに与える打撃エネルギーの大きさとくさび形状に、また静的破砕剤工法は破砕剤の性能とボアホールの径に影響される。また、ピッチの大きさはボアホール間に生じるクラックの大きさに影響を与える。経済性の面から言うと、特に最適なボアホールピッチの選定が重要である。しかしながら現状は、試験施工によるか過去の事例からの経験またはそれに基づいた簡易式により決定されている。本章では、静的破砕剤の最適ボアホールピッチ（以下削孔ピッチとする）を解析的に決定することを目的としている。

4.2.2 静的破碎剤による岩盤破碎工法の概要

静的破碎剤は、爆薬と同じように削孔された岩盤中に装薬され、生ずる化学反応により装薬孔を通じて徐々に岩盤中に膨張圧を加えることで、岩盤中にき裂を発生させ岩盤を破壊するものである。破碎後、リップング工法等により岩盤を2次破碎し、油圧シャベル等により掘削する。施工法的には、通常のベンチカット工法と同様に、一方向に自由面を配し、自由面と平行にき裂を発生させるものである。図-4.1に施工フローを示す²⁾。

静的破碎剤の主成分は、酸化カルシウムや石灰系珪酸塩塩化物で、この酸化カルシウムが水和反応により、水酸化カルシウムに変化するとき、無拘束状態においては約2倍の体積膨張を示す性質を有する³⁾。

静的破碎剤の使用は、リップング工法等の2次破碎を容易にすることを目的とするため、本工法は通常言われているき裂の平均幅として1.5cm、最小幅として1.0cm程度のクラックを発生させる必要がある。破碎剤の配置を密にすれば、き裂幅も大きく施工性は良くなるが、施工コストは増大することとなる。このため経済性および工期の面から、静的破碎剤の装薬孔の削孔ピッチの決定が、設計的には最も重要な要素となる。

通常、削孔ピッチおよび抵抗線長等（図-4.2参照）の寸法は、施工実績に基づき経験的に決定されるか、または岩種により決定される常数（破壊係数K、表-4.2参照）と削孔径dとの積で求める方法がある²⁾。以下に破壊係数による方法を示す。

$$L = K \cdot d \tag{4.1}$$

ここに、L：削孔ピッチ（cm）

d：削孔径（cm）

K：破壊係数

通常、破壊係数Kについては、設計時点での決定は難しくその後の予備破碎（試験施工）によって削孔ピッチLを決定することとなる。

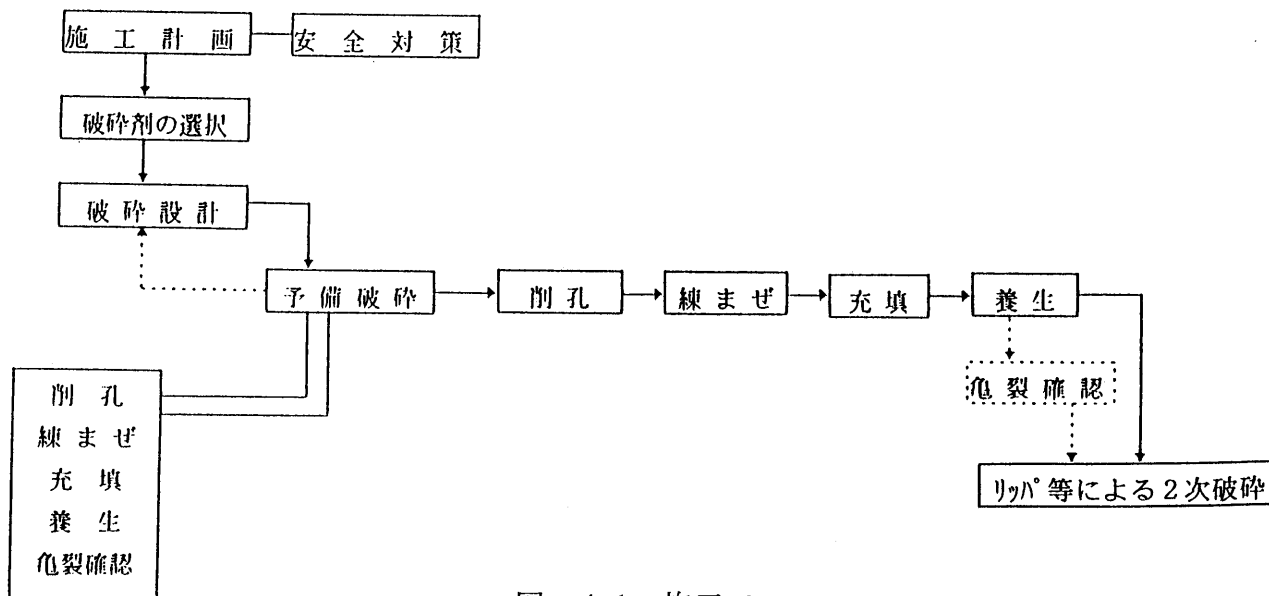
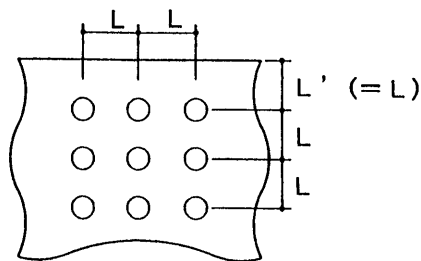


図-4.1 施工フロー



L : 削孔ピッチ
L' : 抵抗線長

図-4.2 削孔ピッチ及び抵抗線長

表-4.2 岩種による破壊係数K

岩種	K 値
軟岩 (Ⅱ)	10 ~ 18
中硬岩	8 ~ 12
硬岩	10 以下

4.2.3 原位置実験

(1) 実験内容

表-4.3に施工諸元を示す。原位置実験での岩種は石灰岩で、岩盤等級区分としては電研式田中の分類でCM級、建設省の掘削性に基づく岩の分類で中硬岩と区分される。本石灰岩は、頁岩中に含まれる巨大な岩塊と推定され、所々に亀裂および土砂化している箇所が目視され、物性的にはかなりばらつきのある岩盤である。特に後述する実験箇所の削孔ピッチ50cmのケースでは、自由面とは反対側の装薬孔の背面に亀裂を伴う脆弱部が認められている。

実験における削孔ピッチは、50cm、70cm、90cmの3ケースとした。これは、表-4.2の中硬岩の破壊係数 $K = 8 \sim 12$ より前述の式(4.1)を適用し求めた削孔ピッチ $L = 56 \text{ cm} \sim 84 \text{ cm}$ を参考にしたものである。また削孔径は7cm、削孔深さは100cmである。

図-4.3に施工配置図を示す。各ケースそれぞれ3列配置で1列に3孔、合計9孔を配置した。実験場所の制約ならびに亀裂等岩盤の脆弱部を避けるため、各ケースは隣接して配置した。また合わせて図-4.3に変位測定位置を示す。図の通り各ケースそれぞれ4ヶ所の変位測定位置を設定し、静的破砕剤充填後8、16、24時間のXおよびY方向の変位量を測定した。不動点として、最端部の破砕剤位置よりY方向にそれぞれ4m離れた点を設定した。また、破壊完了時のき裂開口変位量として、破砕剤充填後24時間経過時の破砕剤位置間に生じた最大き裂幅を測定した。

表-4.3 施工諸元

項目	施工諸元
岩盤の種類	石灰岩
削孔径	70 mm ϕ
〃 ピッチ	50 cm , 70 cm , 90 cm
〃 深さ	100 cm
変位測定位置	図-13参照
〃 項目	X, Y絶対変位量、開口変位量

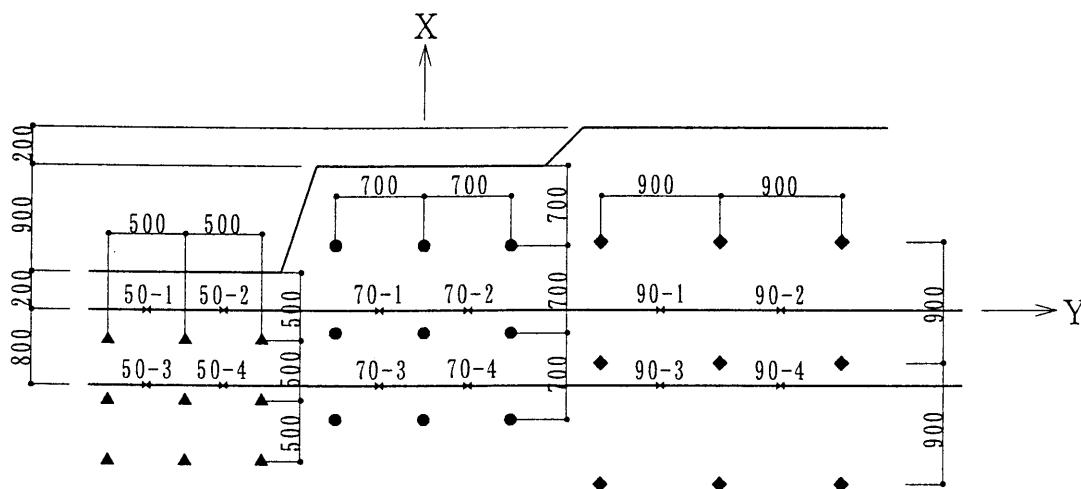


図-4.3 施工配置図

(2) 実験結果

表-4.4に変位測定位置におけるX、Y方向変位量を示す。破壊完了を充填後24時間としその時点における変位を最終変位とした。表より充填後8時間では変位は全く発生せず、16時間経過時でほとんどの変位が発生していることが分かる。充填した破砕剤の膨張も、削孔径7 cmに対して8時間後では変化なく、12時間後で8 cm、16時間後で9 cmであり、その後は変化がなかった。すなわち、割岩システムとしての膨張変位は、充填後8時間から16時間の間にそのほとんどが発生しているという結果が得られた。

破壊完了時のき裂開口変位量を図-4.4に、クラックの全体状況を写真-4.1、削孔ピッチ50 cmの場合の拡大写真を写真-4.2に示す。また、き裂の進展状況をパターン化したものを、図-4.5に示す。き裂は自由面と平行にしかも始めは第一列の破砕剤充填孔を結ぶように発生し、順次第2列、第3列へと同様に進展する。これと同時に自由面と直角方向にも十字に格子状にき裂が発生する。しかし、この自由面に直角方向のき裂幅は、自由面に平行なものに比べるとその幅は極めて小さいものであった。

図-4.4より判別されるように、各ケース各列中央の破砕剤位置から発生した左右のき裂幅には、かなりばらつきがみられる。また削孔ピッチ70 cmと90 cmの場合

は、一般的に予想されるように開放面に近い列におけるき裂幅は大きく、反対側の連続面ではき裂幅が小さくなっていることが分かる。しかし削孔ピッチ50 cmの場合では、この傾向が逆になっている。これは、写真-4.1（手前側が削孔ピッチ50 cmの場合）でも認められるように、連続面側の第3列背面に岩盤の脆弱部が存在した結果である。

通常2次破碎に最適と言われるき裂最小幅1 cm、平均幅1.5 cmを基準に、最適削孔ピッチを第2列のクラック幅に着目し判定する。削孔ピッチ50 cmでは、平均開口幅が2.1 cmでありロスが大きく不経済であり、削孔ピッチ90 cmでは平均開口幅が0.5 cmであり、2次破碎にコストを要し不経済である。よって、今回の条件においては削孔ピッチ70 cmの場合が最も妥当であるという結果が得られた。

表-4.4 変位測定位置での変位量の経時変化

ピッチ	変位測定位置	各経過時間における変位量 (mm)					
		8 h r		1 6 h r		2 4 h r	
		X方向変位	Y方向変位	X方向変位	Y方向変位	X方向変位	Y方向変位
50 cm	50-1	0	0	+32	-10	42	-11
	50-2	0	0	+23	-9	25	-4
	50-3	0	0	+23	-19	23	-23
	50-4	0	0	+13	-8	26	-12
70 cm	70-1	0	0	+15	0	15	-3
	70-2	0	0	+8	0	8	0
	70-3	0	0	+2	+2	3	+4
	70-4	0	0	+1	-5	2	-5
90 cm	90-1	0	0	+9	+6	10	+6
	90-2	0	0	+9	+7	10	+7
	90-3	0	0	0	+4	0	+4
	90-4	0	0	+2	+4	2	+4

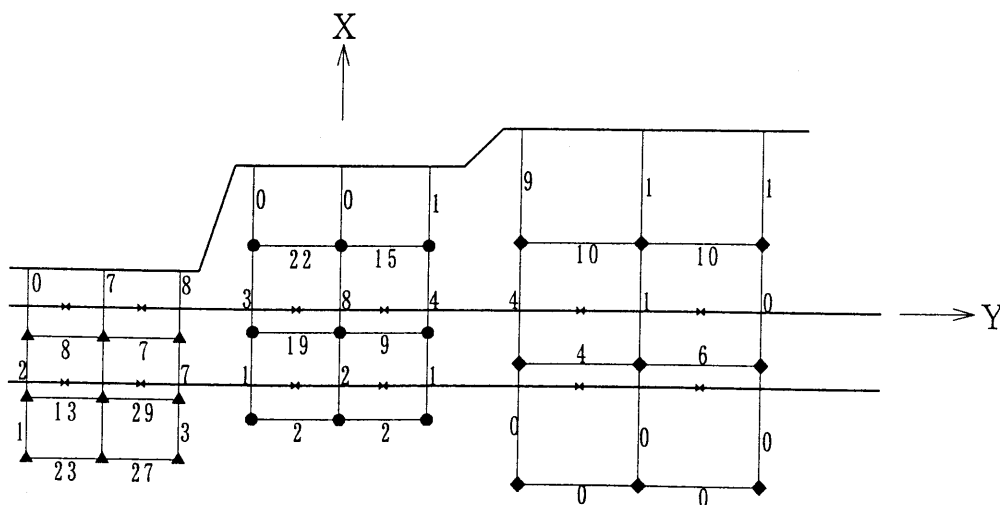


図-4.4 破壊完了時（24時間後）のき裂幅

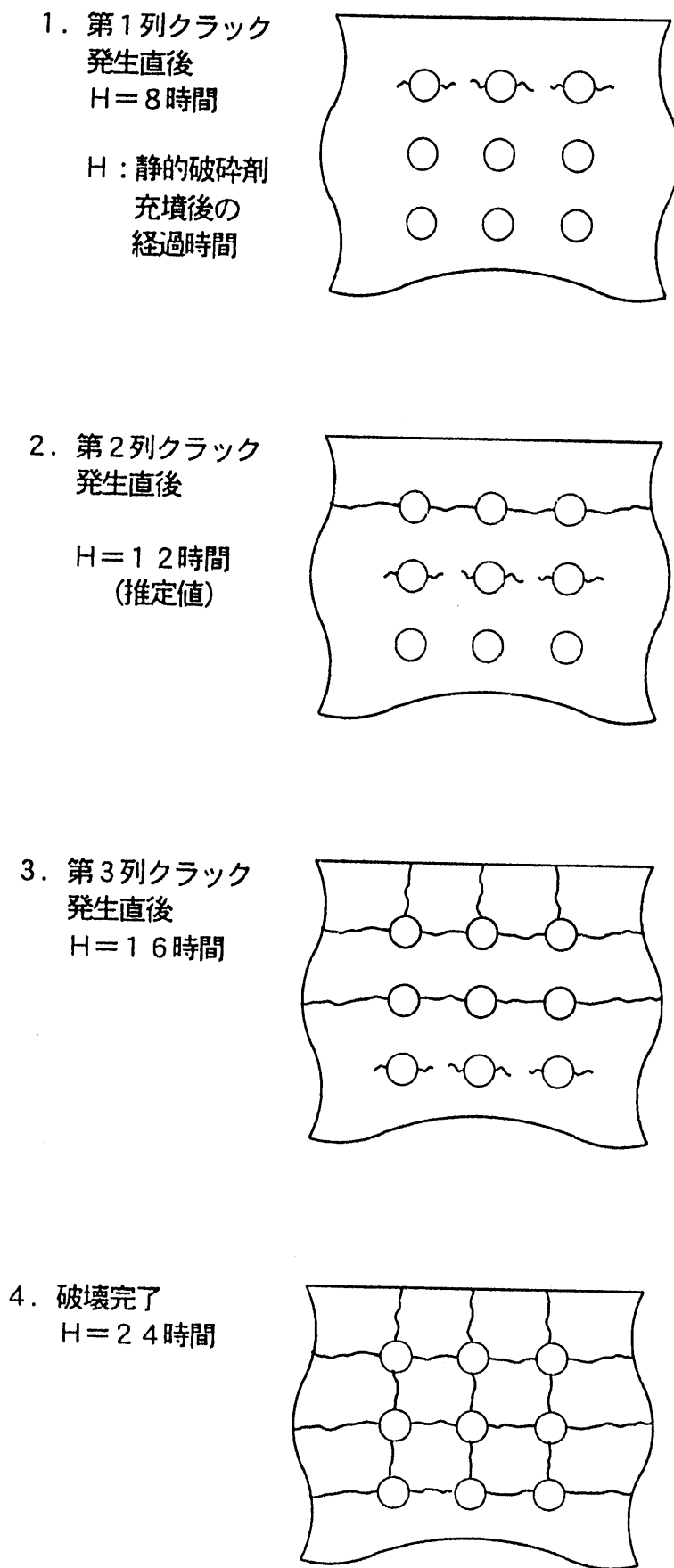


図-4.5 き裂進展状況のパターン

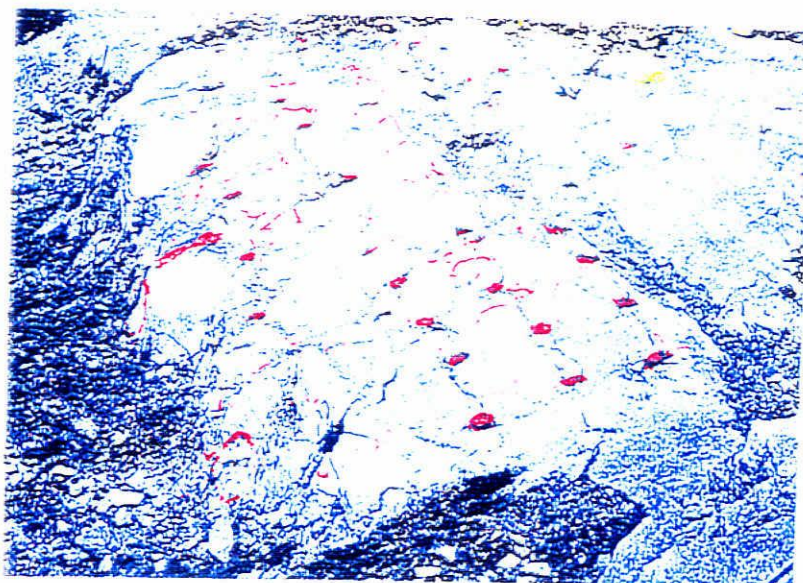


写真-4.1 破壊完了時き裂状況

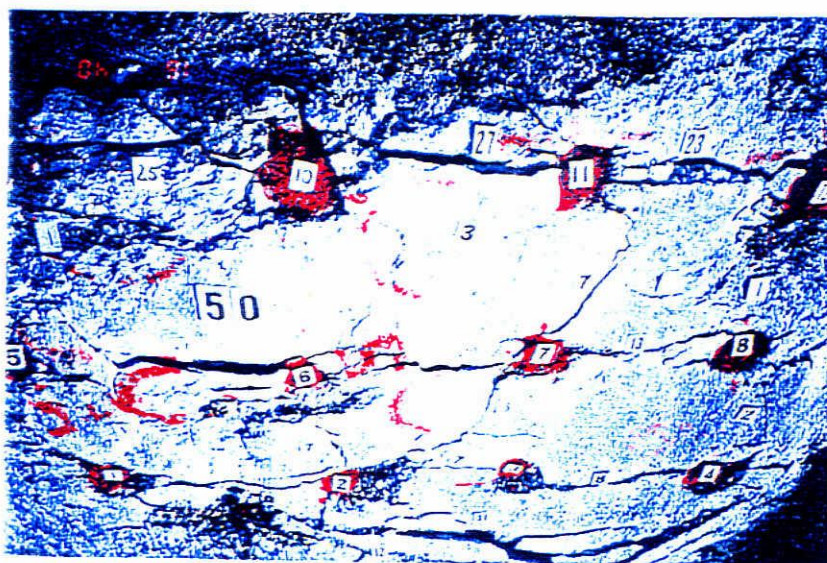


写真-4.2 破壊完了時き裂状況 (削孔ピッチ50cm)

4.3 シミュレーション解析

4.3.1 解析手法

岩盤に削孔された円孔内の圧力が徐々に増大し、き裂が発生、進展する状況を解析するため、本項では第2章で求めた式(2.13)～式(2.17)、(2.19)、(2.20)に加えて、中川、栖原等により求められている自由辺近傍の円孔に対する解⁴⁾を適用する。ここでは詳細な記述は省略して結果のみを、式(4.2)、(4.3)として示す。

(1) 自由近傍に円孔を持つ解

- a) 無限板の中心にある円孔(半径 $r=r_0$)の周辺に一様圧縮力 σ_0 が作用する問題の応力関数は式(4.2)のように表される。(図-4.6参照)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_1 &= 0 \\ W_1 &= \bar{z}\psi + \phi \\ \psi &= 0 \\ \phi &= -\sigma_0 r_0^2 \log z \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

- b) 無限板の円孔周辺に一様圧縮力 σ_0 が作用する問題の $X=c_0$ における、せん断応力を打ち消す応力関数は、式(4.3)のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z}\psi + \phi \\ \psi &= \frac{-r_0^2}{2(z-c_0)} \\ \phi &= \frac{-r_0^2 z}{2(z-c_0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

円孔およびき裂に内圧が作用する場合の解(式(4.2)、式(2.15))とそれぞれの自由面構成用の補正関数(式(4.3)、式(2.20))を重ね合わせることにより、静的破砕剤によるき裂進展の状況を表現するものである。計算結果によると、この手法では自由面の境界条件は完全に満足するが、き裂線上の開口部における境界条件 $\sigma_r = -\sigma_0$ 、 $\tau_{xy} = 0$ を完全には満足させ得ないことが判明した。しかし、これらの閉合誤差は最大応力の1割以下で滑らかな形状を持つため、関数の重ね合わせと選点法により微少化することが可能である。その重ね合わせの基礎となる単体の解の一例として、円孔の場合を図-4.6に示す。応力図は σ_x について描いたものであるため、 $X=\pm a$ 、 $Y=0$ で符号の反転した最大、最小応力が発生している。また、直線状き裂に内圧が作用した場合の例は、2.5節で既に示したので本節では省略する。解析では、内圧の作用する円孔ならびに直線状き裂の関数に、開口部に荷重を持たない関数を複数個重ね合わせ、境界条件を満足させるように選点法により未定係数を決定する一般的な手法を採用した。

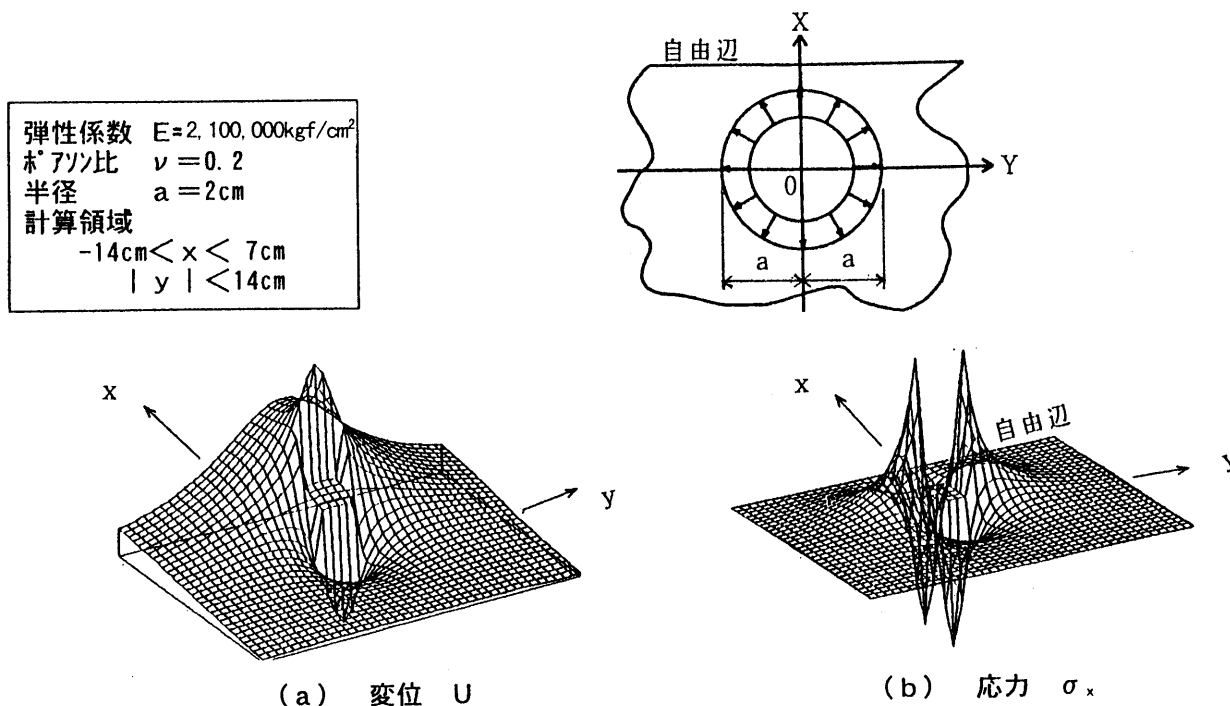


図-4.6 内圧の作用する円孔モデル

4.3.2 解析モデル

図-4.7に示すように円孔から発生したき裂が連結し、さらにき裂幅が拡大していく状態を表現するため、隣接するき裂の一部が重なり合うようモデルを設定したことが本解析手法の特徴と言える。この方法により、実験で測定した岩盤の開口変位と解析によるき裂の開口変位を近似させることを可能にしている。

また開口変位と応力が共存する区間としてのプロセスゾーンの位置を、荷重の作用位置である破砕剤近傍に配置し、載荷点近傍に応力集中が生じるようにモデルを設定した。これは、地表ではき裂が生じているが、地中では未だ引張り耐力を有しており、き裂が発生・進展しようとしている状況表現したものである。

具体的な解析モデルとして、図-4.5のき裂発生パターンに基づき、図-4.8に示すような以下の3ケースとする。

モデル1：第1列のき裂発生直後の初期状態で、試験施工では8時間後の状態

モデル2：第2列まで自由面に平行なき裂が発生した状態で、実験では8～16時間の状態

モデル3：第3列に自由面に平行なき裂が発生した直後で、実験では16時間後の状態

ここで、自由面に直角なき裂は解析上無視し得るものとする。なお、試験施工では24時間後の変位測定も行っているが、この状態については岩盤の破壊が完了した状態であり、このモデル化は行わない。

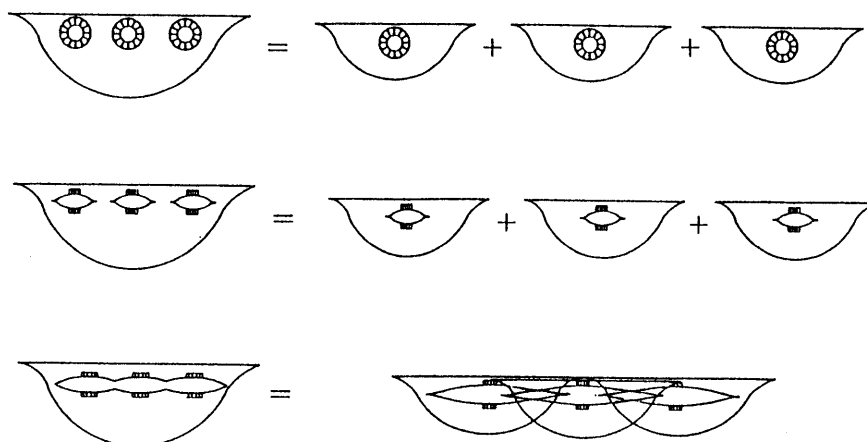


図-4.7 き裂重ね合わせのモデル化

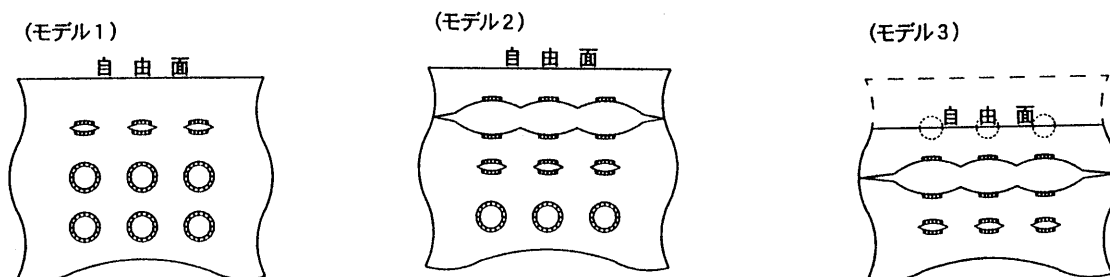


図-4.8 解析モデル

4.3.3 解析条件

岩盤の種類と力学的諸特性との関係については、種々の研究がなされているが、必ずしも精度の高いものではない。よって、力学的諸係数の設定は最も重要かつ難しい問題であり、力学的諸係数の設定の精度の向上が重要であるといえよう。

本解析において最も重要な力学的ファクターは、岩盤の静弾性係数であろう。当係数の決定の方法としては、ジャッキ法等の静的載荷試験結果を用いるのが最良であるが、これがない場合には、岩種、電研式田中の分類、建設省の掘削性に基づく岩の分類（軟岩、中硬岩等）等に基づいて、岩盤等級区分と物性値（岩盤の静弾性係数等）の関係より推定することが出来る⁵⁾。

前述の実験内容で記述したように、対象岩盤の岩盤等級はCM級であり、上記の関係より岩盤の静弾性係数は、15,000 ~ 40,000 kgf/cm² である。本岩盤は空洞および割れ目の多い石灰岩であることを考慮し、静弾性係数を 20,000 kgf/cm² と低めに設定する。また、岩盤のポアソン比については、自由辺方向の変位に大きな影響を及ぼさないと考えられるので、ここではポアソン比 $\nu = 0.2$ と仮定する。

静的破砕剤の膨張圧の経時変化については、メーカーの技術資料²⁾と実験の行われた季節を参考に以下のように仮定した。荷重載荷幅は、実験結果より8時間後で

7.0cm、12時間後で8.0cm、16時間後で9.0cmとした。

削孔径7.0cm（破碎剤使用量15kgf/m³、時期 夏期）の場合の膨張圧の経時変化は、以下の通りである。

破碎剤充填後	8 時間	200 kgf/cm ²
同上	12 時間	250 kgf/cm ²
同上	16 時間	300 kgf/cm ²
同上	24 時間	400 kgf/cm ²

4.4 解析結果と考察

削孔ピッチ70cmのモデル1からモデル3の解析結果のうち、X方向の変位と応力を図-4.9～図-4.11に示す。また、各削孔ピッチのモデル3のX方向変位と応力を図-4.12～図-4.14に示す。解析領域全体を図化したため、き裂先端の応力形状は折れ線状であるが、メッシュを細かくすることにより平滑化することは可能である。各図においてはき裂の開口と応力集中の状況を示すことが目的であるため、詳しいスケールは省略する。

き裂発生直後のき裂先端の応力は、削孔ピッチに拘わらずモデル1で90 kgf/cm²、モデル2で98 kgf/cm²、モデル3で120kgf/cm²であった。これは通常の中硬岩で予想される引張強度を大きく上回り、割岩とき裂進展に必要な応力が発生しているといえる。

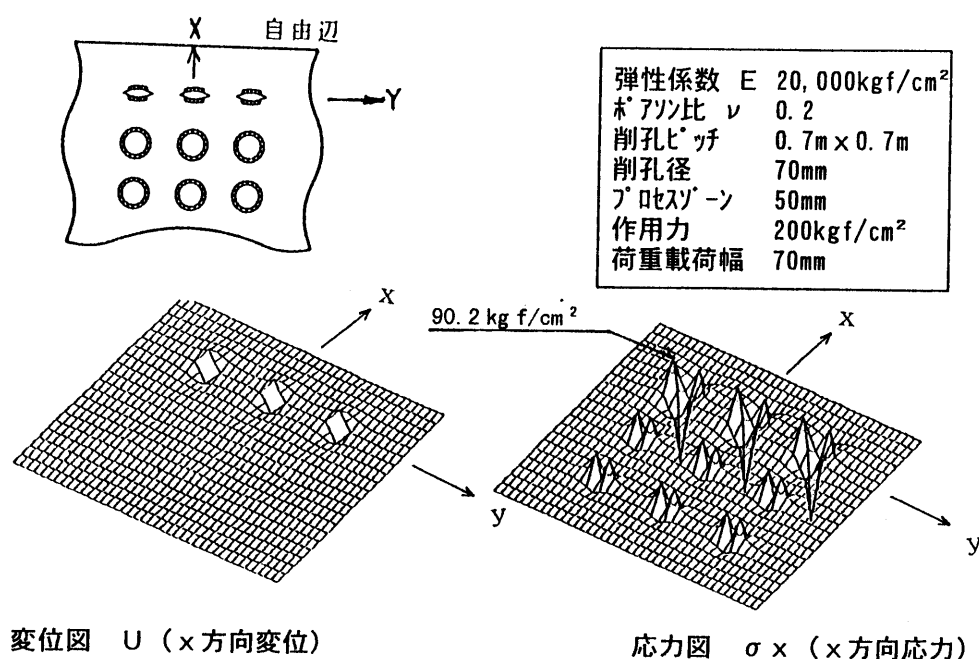


図-4.9 モデル1（削孔ピッチ70cmの場合）の解析結果

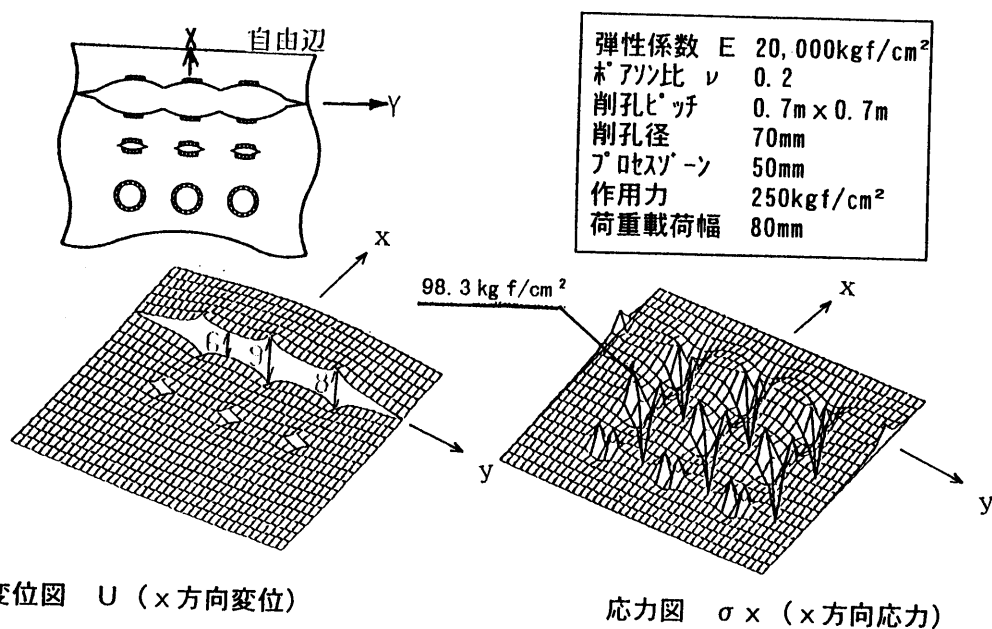


図-4.10 モデル2 (削孔ピッチ70cmの場合) の解析結果

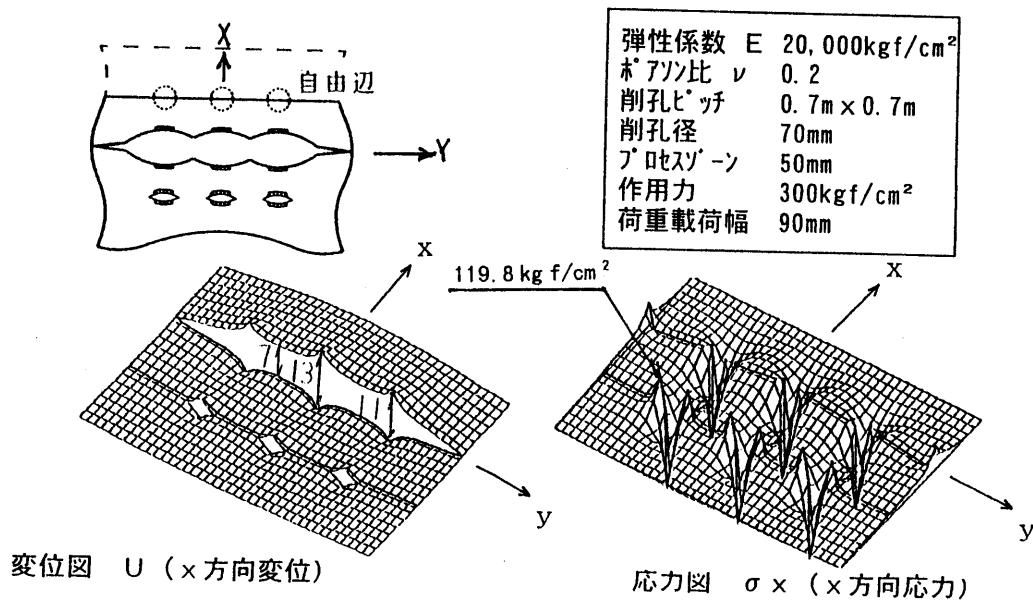


図-4.11 モデル3 (削孔ピッチ70cmの場合) の解析結果

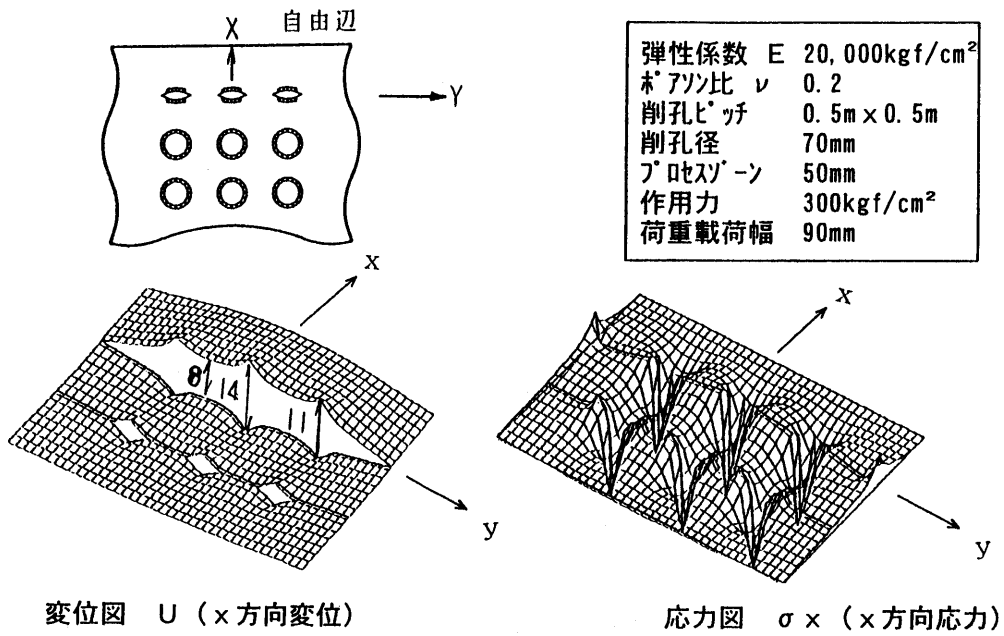


図-4.12 モデル3 (削孔ピッチ50cmの場合) の解析結果

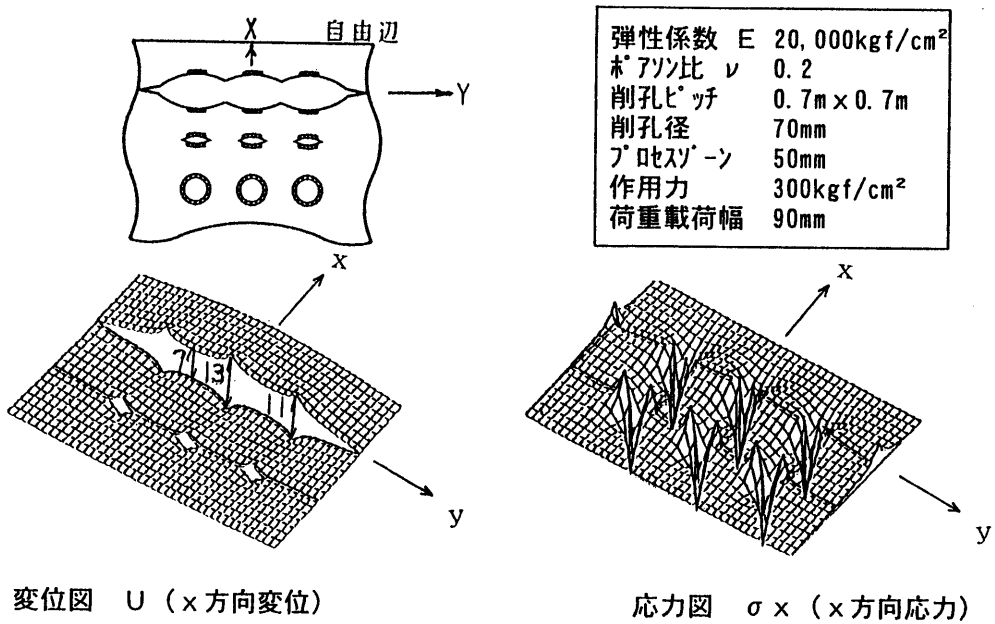


図-4.13 モデル3 (削孔ピッチ70cmの場合) の解析結果

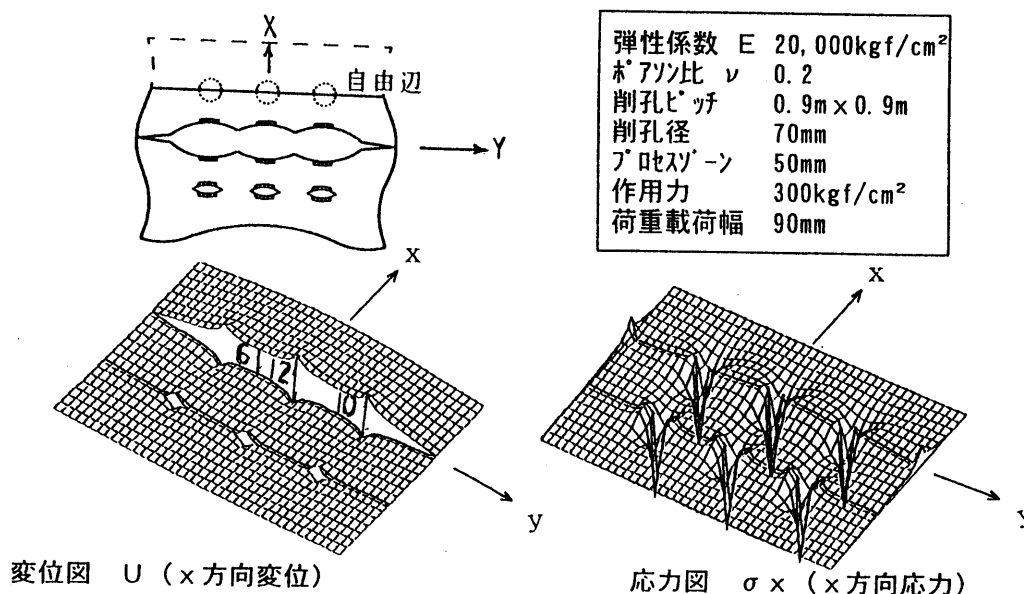


図-4.14 モデル3 (削孔ピッチ90cmの場合) の解析結果

表-4.5に各削孔き裂における第2列目の開口変位量の計算値と実験結果の比較を示す。計算値における最大値は、載荷点位置での変位量であり、最小値は各載荷点の中間点での変位量である。開口変位量の平均値に着目すると、約5割実変位量の方が大きい結果となっている。

この理由については以下の事が考えられる。

- 1) き裂等脆弱部を含むため、原地盤全体の弾性係数としては、コア試験等で得られる弾性係数より値が小さくなる事。
- 2) 破壊進展に伴い岩盤の弾性係数が低下する事。
- 3) 解析値は、クラック発生時(16時間後)の弾性変位量であるのに対して、実験結果は24時間後の破壊完了時の変位量である事(24時間後の破壊完了時はモデル化していない)。ただし、変位が16時間でほぼ終了している事から、この差は少ないと思われる。

表-4.5 開口変位量Uの比較 (E = 20,000 kgf/cm²)

ピッチ (cm)	E (kgf/cm²)	U (cm) 解析結果			U (cm) 実験結果		
		最大値	最小値	平均値	左側	右側	平均値
50	20,000	1.4	0.8	1.1	1.3	2.9	2.1
70	20,000	1.3	0.7	1.0	1.9	0.9	1.4
90	20,000	1.2	0.6	0.9	0.4	0.6	0.5

ここで、弾性係数値 $20,000\text{kgf/cm}^2$ を $13,000\text{kgf/cm}^2$ に低減した時の変位量を表-4.6に示す。その場合の開口変位量は、ほぼ測定値のオーダーとなる。削孔ピッチ70cmの場合では、き裂最小幅が1.0cm、き裂平均幅が1.5cmとなり、経験的な削孔ピッチ選定条件に一致する。しかしながら実験結果と比較し、解析値は削孔ピッチによるき裂幅の差が小さく、最適削孔ピッチの判定と言う点では十分な結果は得られていない。これは、解析モデルにおいてき裂長を変化させることで、より実測値に近い値を求めることは可能と考える。

表-4.7の変位測定位置(50-3, 50-4, 70-1, 70-2, 90-1, 90-2)での16時間後の変位量に対して、解析解と実験結果との比較を示す。解析値においては、弾性係数値 $E = 20,000\text{kgf/cm}^2$ と $13,000\text{kgf/cm}^2$ の2ケースについての結果を示す。実測値に対する計算値の変位量は、 $E = 13,000\text{kgf/cm}^2$ の場合でも、60%程度と小さな値となった。

これは、実験では図-4.3に示した通り、各ピッチのケースを隣接して行っているため、相互の影響が出ているのに対して、解析値は各ケース単体で行った影響と考えられる。しかしながら削孔ピッチ90cmの場合の実験値では、表-4.7における変位量が表-4.5の開口変位量より大きくなっていることから判るように、不均質な岩盤の実際の塑性挙動を、解析によりすべて一致することを期待するのは難しいと言える。

今回は、割岩力に関係する破砕剤の膨張圧および削孔径を一定として、削孔ピッチとき裂幅の関係のみに限定しシミュレーション解析を行った。また岩盤に関して、均質な等方性岩盤として、一様な静弾性係数のみで評価した。設計方法という観点からすれば、これらの点をも含めより詳細な検討が必要となろう。しかしながら、破壊進展に伴い対象岩盤の静弾性係数が低下することを考慮することにより、本研究における解析法は、発生するき裂の進展状況とその大きさのある程度表現し得ると言える。今回の事例では、当初仮定した弾性係数値の62%となったが、今後計測例を増やすことにより、き裂の進展とその大きさの予測さらに本工法における最適削孔ピッチ決定の一方法として有効になり得ると考える。

しかしながら、設計上必要となる削孔ピッチとき裂幅の関係では、解析値は実験結果程大きな差を表せておらず今後の課題と言える。

表-4.6 開口変位量Uの比較 ($E = 13,000\text{ kgf/cm}^2$)

ピッチ (cm)	E (kgf/cm^2)	U (cm)解析結果			U (cm)実験結果		
		最大値	最小値	平均値	左側	右側	平均値
50	13,000	2.1	1.2	1.7	1.3	2.9	2.1
70	13,000	2.0	1.1	1.5	1.9	0.9	1.4
90	13,000	1.8	0.9	1.3	0.4	0.6	0.5

表-4.7 16時間後の変位測定位置での変位量Uの比較

ピッチ (cm)	U (cm) 解析結果		U (cm) 実験結果		
	E=20,000 (kg f/cm ²)	E=13,000 (kg f/cm ²)	左側	右側	平均値
50	0.7	1.1	(50-3) 2.3	(50-4) 1.3	1.8
70	0.5	0.8	(70-1) 1.5	(70-2) 0.8	1.2
90	0.3	0.5	(90-1) 0.9	(90-2) 0.9	0.9

4.5 まとめ

本解析法により求めた開口変位量および自由面方向への変位量は、対象岩盤の静弾性係数を低減することにより、実験結果の状況をほぼ表現し得たものと思われる。研究対象の特性からも計測値と解析値が精度良く一致することは期待するべくもないが、本文に報告した程度で近似させ得たことは2.5節で求めたき裂関数の有用性を示すものであろう。

従来の設計法における式(4.1)の破壊係数Kについては、例えば中硬岩の場合は8~12と大きな幅をもっているため、試験施工によって削孔ピッチを決定するのが通常である。それに対し本解析法は、弾性係数の低減率の決定方法等について今後さらに研究を積む必要はあるが、試験施工によらず削孔ピッチの決定を可能にする一方法と認められる。

本研究では、静的破砕剤の特性から岩盤の静弾性係数を用いたが、くさび貫入工法では、その特性から動弾性係数を採用している。いずれも本来3次元の力学問題ではあるが、大胆な2次元のモデル化を行い、線形弾性破壊力学理論に則したプロセスゾーンを持つ専用のき裂関数により解析したものである。完全に開口した塑性状態のクラックを、弾性解で表現することには矛盾があるように思えるが、簡便に破壊時の大変形問題を表現し得ることが本解析法の特徴と言える。境界要素法的な理論であるためプログラムは多少複雑になるが、プログラムディスク1枚をノートパソコンにセットするだけで、実行は容易である。入力データは、岩盤の物理常数、膨張圧、削孔径と位置、重ね合わせるき裂関数の種類と位置、選点位置における境界条件だけである。有限要素法のような膨大なデータや計算を伴わないで、1ケース5分程度で処理され、本文に示した変位・応力図を簡便に出力できるため、現場事務所においても十分活用可能である。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編：ダムの岩盤掘削，pp.27-58，土木学会，1992.
- 2) (株)小野田：ブライスター技術マニュアル，pp.1-24，1983.
- 3) 土木学会編：ダムの岩盤掘削，pp.51-53，土木学会，1992.
- 4) 栖原秀郎、藤井康寿、中川建治：くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案，土木学会論文集，No. 528/V1-29，pp.167-177，1995.
- 5) 土木学会編：ダムの岩盤掘削，pp.18-22，土木学会，1992.

第5章 円孔周辺の放射状き裂の面内問題解析

5.1 まえがき

近年、都市の過密化あるいは高度化に伴って老朽化したコンクリート構造物の解体あるいは岩盤の掘削に静的破砕剤の使用が増加してきた。また、コンクリート中にある鉄筋の中性化による錆やアルカリ骨材反応等によって、コンクリート片が剥落するケースが多く見られるようになってきた。これらは、いずれも内部膨張によるき裂の発生が主たる原因であることは疑う余地もない。したがって、コンクリートの膨張圧による破壊条件の解明を行うことは、解体作業における施工計画の効率化や材料特性の改善を図る上で重要な検討課題であると言えよう。膨張圧によるき裂発生メカニズムを研究した実験あるいは解析には次のような例がある。

例えば、原田¹⁾は、無筋および鉄筋コンクリートを破砕するために、静的破砕剤を用いて膨張圧による破壊を検討している。中空円筒の供試体を用いた広範囲な実験および解析的研究から、有効な破砕剤投入の穴間隔や配置を決定するための基礎的知見が得られている。伊良波²⁾は、原田の行った多くの実験結果には、活用した供試体の内径と外径の比に対するコンクリートの破壊圧力の大きさにバラツキが見られることを指摘している。その原因を検討するために、破壊力学的な手法の一つである引張軟化則を考慮した有限要素法を用いて検証を行っている。数値解析の結果、破壊圧力のバラツキの原因は、円筒に生じたき裂の数と円筒の寸法および引張軟化曲線の形状によるものであると結論付けられている。このような問題の解析には有限要素法が活用されることが多いが、引張軟化特性を表現するためバネ要素をどのように設定するかという問題や要素分割数の制約等解析法特有の問題が詳細な応力集中の追求の支障になり勝ちである。

本章では、コンクリートのき裂先端の破壊遷移区間（プロセスゾーン）をマクロに開口変位として表現し得る応力関数を活用して、円孔周辺の放射状クラックを解析する手法を導き、き裂のパラメータの変化による応力集中の特性を容易に求め得るようにした。

このき裂開口関数の適用にあたっての主な留意点はつぎのような点である。本解析法はいくつかの線形独立なき裂開口関数を重ねる境界要素法的なものであるから、関数が多い程境界条件の選点の自由度が高くなる筈であるが、中心の円孔の境界条件（応力解放、一様内圧作用あるいは一様の変位拘束）と放射状のき裂の境界条件（開口と応力解放）との相互干渉の効果で応力集中や応力や変位の閉合誤差（残差）に不自然な大きな振動成分が現れる可能性が高い。この問題は選点法と応力の曲率（2階微分）の自乗和最小化（最小自乗法）で解決されることを示す。応力分布図の上で判定する限りはき裂の境界条件が良好な状況で満足されているという状態にした上で、き裂数やプロセスゾーンの長さ等のパラメータと応力集中の大きさの関連を求めてその特性を例示する。計算例は、破砕剤を使用したコンクリート構造物

の解体等の実施工で活用し得るようなデータを導くことを目標としているので、円孔を有する無限弾性板に外部拘束に相当する圧縮応力が作用するモデルを対象とする。その他円孔半径の増加による寸法効果等の計算結果も示しているが、本解析法では有限要素法の分割数の制約に阻まれることはないのでパラメータの微小変化に対応して滑らかな応答結果が得られることが特徴である。

5.2 円孔周辺に放射状(半径方向)き裂を構成する各種応力関数の定義

本章では、2.3.2項の式(2.15) (5.2.5項に再掲する)に加えて以下に示す4つのタイプの応力関数を活用する。各タイプとも応力関数だけを示して応力あるいは変位成分は示していないが、応力関数を式(2.2)に代入することにより求められるので割愛する。

5.2.1 一様応力が作用する円孔の無い無限板

図-5.1に示すように、円孔の無い無限弾性板に無限遠方($z \rightarrow \infty$)で一様引張り応力($\sigma_x|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_y|_{z \rightarrow \infty} \equiv \sigma_0$)が作用する応力関数は次のように与えられる³⁾。

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \bar{z}\psi_1(z) + \phi_1(z) \\ \psi_1(z) &= \frac{\sigma_0}{2}z \\ \phi_1(z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

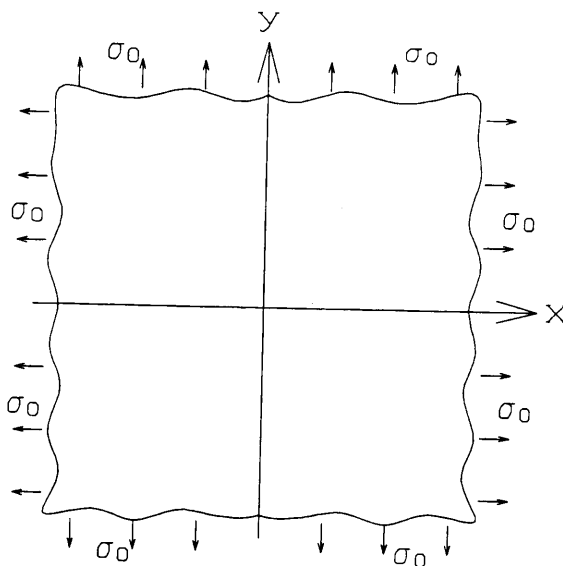


図-5.1 円孔なしの無限板

5.2.2 円孔周辺に一様内圧が作用する無限板

図-5.2 に示すように無限弾性板の中心に半径 r_a の円孔を持ち、円孔周辺に一様な内圧（引張り応力 σ_1 ）が作用する応力関数は式 (5.2) のように表される³⁾。

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= \bar{z}\psi_2(z) + \phi_2(z) \\ \psi_2(z) &= 0 \\ \phi_2(z) &= \sigma_1 r_a^2 \log z \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

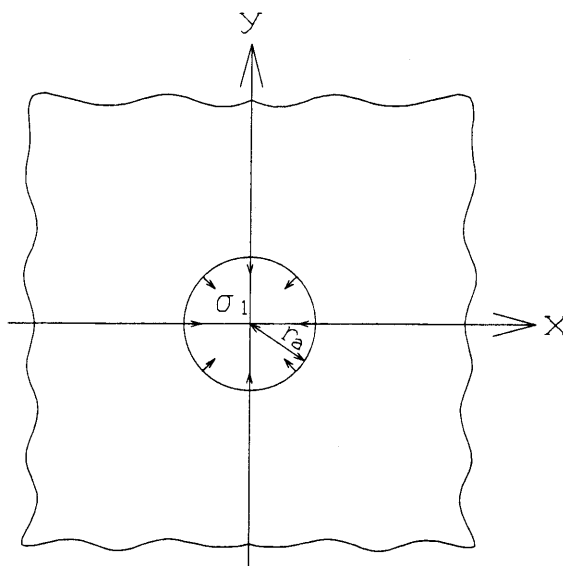


図-5.2 一様内圧が作用する円孔を有する無限板

5.2.3 面内引張り型き裂開口形状を構成する応力関数

平滑化のための重み関数として式 (5.3) に示すような 4 次式を採用する。またその形状を図-5.3 に示す。

$$\rho_4(t) = \frac{30}{b^5} (t-a)^2 (t-a-b)^2 \quad (5.3)$$

重み関数 $\rho_4(t)$ は両端 ($t=a$, $a+b$) で 0 の重根になれば応力集中の形状が滑らかなものとなる。重み関数を用いて積分し応力を平滑化するという手法は、あたかも他の弾性学の問題で、集中荷重による応力分布の解を積分して分布荷重によるものに置き換える手法に対応するものである。

図-5.4 に示すように Y 軸に沿って原点を中心に長さ $2a$ の開口を持ち、両端に異なる長さのプロセスゾーン b_1 , b_2 を伴うき裂を有する無限板がモード I 型（面内引張り型）の力を受ける問題の応力関数は、式 (2.8) で定義された重み積分法に式 (5.3) に示した 4 次式重みを代入して積分することにより、式 (5.4) のように表される。

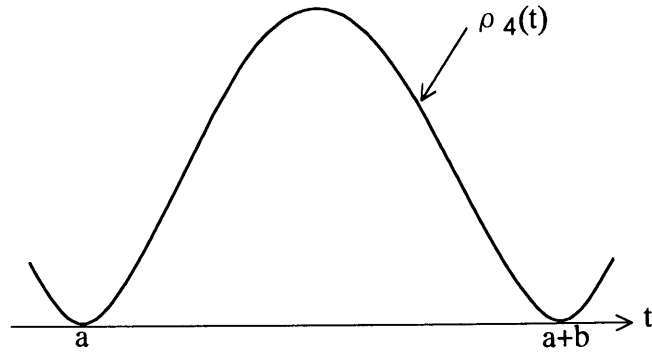


図-5.3 重み関数の形状

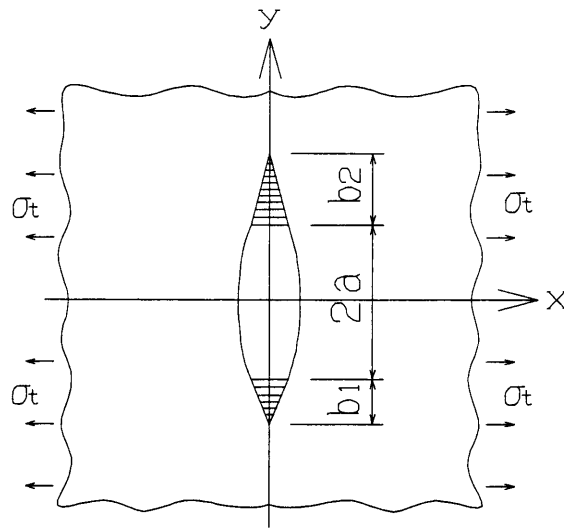


図-5.4 面内引張り型き裂形状を有する無限板

$$\left. \begin{aligned} W_3 &= \bar{z} \Psi_3(z) + \Phi_3(z) \\ \Psi_3(z) &= f_4(z) \\ \Phi_3'(z) &= z \Psi_3'(z) - \Psi_3(z) = z f_4'(z) - f_4(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ここで、 $f_4(z)$ は以下に示す4次式重みを採用した重み積分である。

$$\left. \begin{aligned} f_4(z) &= \frac{-900}{(b_1 b_2)^5} \int_a^{a+b_1} (t_1 - a)^2 (t_1 - a - b_1)^2 \sqrt{z + i t_1} dt_1 \\ &\quad \times \int_a^{a+b_2} (t_2 - a)^2 (t_2 - a - b_2)^2 \sqrt{z - i t_2} dt_2 \\ &= c_4 h_4(z, a, b_1) \times g_4(z, a, b_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

ただし、 $c_4, h_4(z, a, b_1), g_4(z, a, b_2)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{-900}{(b_1 b_2)^5} \left(\frac{16}{105} \right)^2 \\
h_4(z, a, b_1) &= ib_1^2 \{ (z + ia + ib_1)^{7/2} - (z + ia)^{7/2} \} \\
&\quad - \frac{4}{3} b_1 \{ (z + ia + ib_1)^{9/2} + (z + ia)^{9/2} \} \\
&\quad - i \frac{16}{33} \{ (z + ia + ib_1)^{11/2} - (z + ia)^{11/2} \} \\
g_4(z, a, b_2) &= -ib_2^2 \{ (z + ia + ib_2)^{7/2} - (z - ia)^{7/2} \} \\
&\quad - \frac{4}{3} b_2 \{ (z - ia - ib_2)^{9/2} + (z - ia)^{9/2} \} \\
&\quad + i \frac{16}{33} \{ (z - ia - ib_2)^{11/2} - (z - ia)^{11/2} \}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

仮定した種々の重み関数の中で4次式重みを採用した理由は2つある。一つは中川等の過去の研究成果によると、き裂先端の応力分布と開口形状を滑らかなものにするのは高次の重み関数であることが判明している。本研究では微小なき裂であり、滑らかな開口形状を有する状態を想定するので4次式重みを活用するのである。もう一つは、式(5.6)に見られるように4次式重みで積分した結果は、係数のみが異なる同型の関数 h_4 と g_4 の積として構成されるため、プログラム作業が簡素化される点である。なお、式(5.4)中の関数 Φ はWestergaard方式(式(2.3))に従った Ψ の従属関数であるから、Y軸上に目的とするき裂の開口が形成されるのである。

5.2.4 面内曲げ型のき裂開口形状を構成する応力関数

図-5.5に示すようにY軸上の原点を中心にき裂開口長さ $2a$ の面内曲げ型開口を持ち、両端に異なるプロセスゾーン長さ b_1, b_2 を有する無限板の応力関数は、式(5.7)のように表される。この関数は図-5.5に示すように、 $y > 0$ 領域では図-5.4と同じ面内引張り型き裂形状を呈し、 $y < 0$ 領域の開口形状は両側のき裂面が交差する(き裂面が互いにめり込む)。ただし、この関数は本研究で対象とする2種類の解析モデルにおける開口形状を実現するための非対称食い違い問題の一つの解である。しかし実際には引張り型の解と重ね合わせて活用されるので、結果的には解析モデルの開口部はくい込みにはならず非対称開口(放射状き裂では特に有効)が実現されることになる。

$$\left. \begin{aligned}
W_4 &= \bar{z} \Psi_4(z) + \Phi_4(z) \\
\Psi_4(z) &= z f_4(z) \\
\Phi_4'(z) &= z \Psi_4'(z) - \Psi_4(z) = z^2 f_4'(z)
\end{aligned} \right\} \tag{5.7}$$

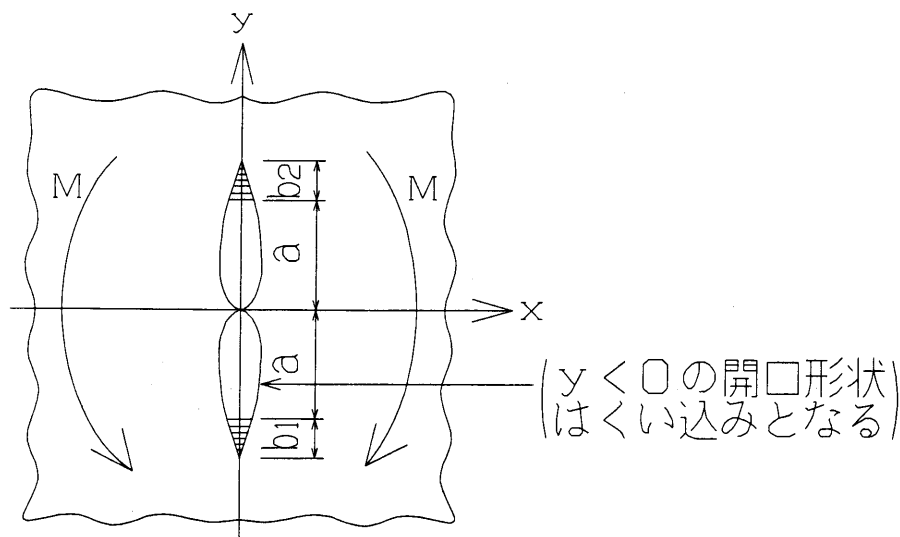


図-5.5 面内曲げ型き裂形状を有する無限板

式(5.4)と式(5.7)に関連したものでプロセスゾーンの等しい場合は、既に栖原・中川等の研究⁴⁾において定義し活用されている。さらに6次式重みによるものは前田⁵⁾によって導かれているが、本文で導いたものは面内問題で平滑な応力となる最低次の重み関数で放射状(半径方向)き裂の解析にも適用できるように改良を加えたものである。式(5.4)と式(5.7)の主な相違点は $f_4(z)$ と $zf_4(z)$ の項である。Y軸上では $z = iy$ となるので、 $f_4(z)$ による対称的な開口形状を $zf_4(z)$ によって逆対称型の開口に変換することになっているのである。すなわち、簡単な代数関数 $f_4(z)$ を工夫して、その関数の応力特性がき裂線上(Y軸上)で、せん断力(τ_{xy})が0、応力 σ_x が $|y| > a$ において対称分布形状を示すものならば、複素変数 z を乗じることにより逆対称の応力分布を実現することができる。これは複素関数の特性を利用した常套手段である。このように境界条件を満足する基礎となる代数関数の一つを見つけだすことができれば、非常に簡単な操作(この場合は z を乗じている)を施すことにより、全く異なる関数の特性(応力や開口形状の特性)に変更することが可能となる。このことは従来から活用されている数値解析的な手法とは異なり、本研究を含めた中川等の手法の大きな特徴の一つである。

定義したこれら2種類の開口関数と類似する低次の重み関数によるものは、開口部における応力の条件($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$)を満足していることを栖原・中川等の報告⁴⁾で示してある。本研究ではこれらの関数を多数重ね合わせて円孔の外側に等間隔に放射状(半径方向)のき裂が発生する問題の解を構成するのである。

5.2.5 面内強制開口外力による応力関数

無限板内の直線状き裂を押し開く一様分布荷重 p による応力関数は、2.3.2項で求めた式(2.13)~(2.15)により表わされ、本章の放射状き裂にも適用する。本章で示した式(5.1), (5.2), (5.4), (5.7)と式(2.15)を重ね合わせることにより、目的とする放射状き裂の解を求めることができる。以下に式(2.13)~(2.15)を W_5 とし

て再掲する。

$$W_s = \bar{z} \Psi_s(z) + \Phi_s(z) \quad \text{ここで、} \quad \Phi''_s = z \Psi''_s \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_s(z, s, t) = & B \left\{ \Psi_0 \left(z, s_0 + \frac{c}{2}, a+b \right) \right. \\ & - \Psi_0 \left(z, s_0 + \frac{c}{2}, a \right) \\ & - \Psi_0 \left(z, s_0 - \frac{c}{2}, a+b \right) \\ & \left. + \Psi_0 \left(z, s_0 - \frac{c}{2}, a \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで B および $\Psi_0(z, s, t)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} B &= \frac{p\rho_s}{8\pi c} = \frac{2p}{8\pi cb(2a+b)} \\ \Psi_0(z, s, t) &= \left[\left\{ t^2(s+iz) + \frac{i2}{3}z^3 \right\} \right. \\ &\quad \times \log \left\{ \frac{t^2 + isz - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{t^2 + isz + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2}} \right\} \\ &\quad - \frac{i2}{3}(t^2 + z^2)^{3/2} \log \left\{ \frac{s + i\sqrt{t^2 - s^2}}{s - i\sqrt{t^2 - s^2}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3}(s - iz)^3 \log(\sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{z^2 + t^2}) \\ &\quad - \frac{i4z^3}{3} \log(s + iz) \\ &\quad + \frac{1}{3}(s + 3iz) \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{t^2 + z^2} \\ &\quad - \frac{1}{18}(s - iz)^3 - \frac{1}{18}(s + iz)^3 \\ &\quad \left. + \frac{iz}{2}(s + iz)^2 + 2sz^2 \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

5.3 解析モデル

コンクリート構造物の解体では静的破砕剤などの薬液を注入して、その膨張作用によって破砕する例が近年見られるようになった。静的破砕剤を使用するにあたり、最初にある一定の間隔で先行削孔を行い、そこに薬液を充填して経時変化による構造物の破砕状況を観察してみると、削孔間隔による破砕状況にばらつきが見られるものの、削孔の円周方向に対して直角（半径方向）に 90° 間隔で4方向の破断が見られることが多い。本研究では膨張圧によるひび割れ発生メカニズムを検討するために、図-5.6 に示す解析モデルを対象とする。すなわち、実験で観測される破砕剤による破断状況が4方向のき裂であることから、本研究では断らない限り、円周方向に対して直角に 90° の間隔で4本のき裂が発生するモデル（以後放射状き裂と仮称する）を解析対象とする。

ここでは、無限遠方で一様圧縮応力 σ_0 が作用する場合としているが、以下に示す2ケースの状況を想定しているからである。1つはコンクリート構造物に静的破砕剤を適用する場合であり、スラブや壁板など板要素部材は結合（もしくは連結）されている状態で破砕剤が使用される場合が多い。このとき、連結部材によって一様圧縮応力が作用している状態とみなすのである。また、静的破砕剤の別の使用法としては、発破を使わない岩盤掘削工法への適用が考えられる。この場合は周辺の岩盤による拘束を無限遠方で一様圧縮力が作用した状態を考慮に入れたモデルと考えるべきであろう。

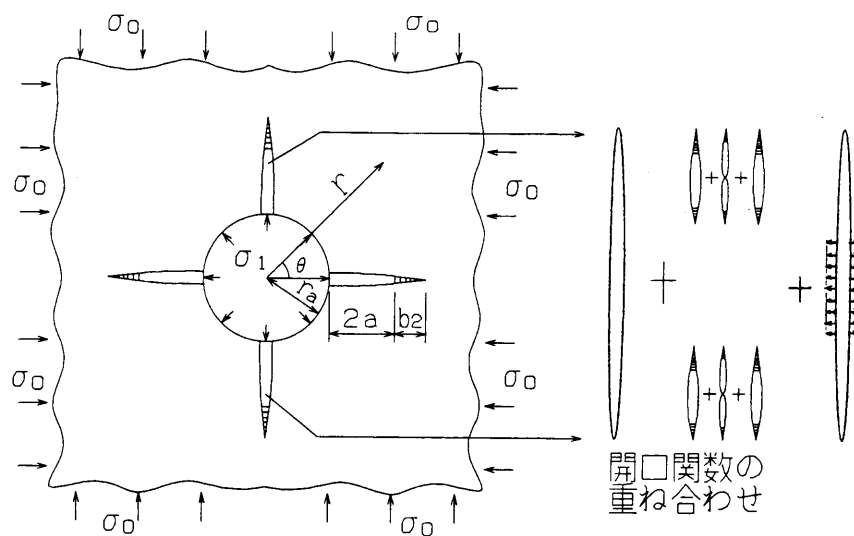


図-5.6 静的破砕材に対する解析モデル

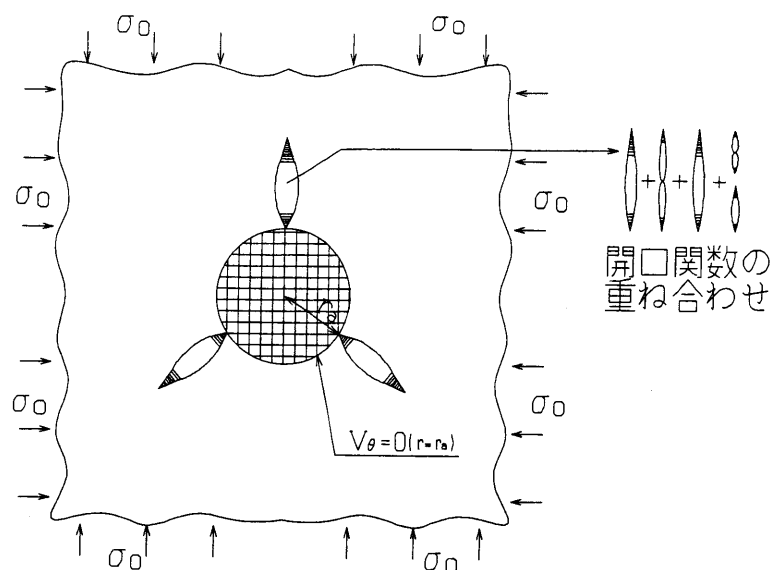


図-5.7 鉄筋の腐食膨脹に対する解析モデル

図-5.7に示す解析モデルは、図-5.6のモデルに対して次の点が大きく異なる。図-5.6のモデルは円孔周辺に膨張圧相当の応力として、放射(半径)方向に一様圧縮応力 σ_1 が作用するき裂モデルである。したがって、円孔領域内は薬液を充填される空洞領域であり、その領域では σ_1 の大きさを指定することは可能であるが、変形には何の拘束も指定しない。このため、図-5.6に示すように円孔中心から放射(半径)方向に押し広げられたようなき裂開口形状を構成するのである。これに対して、図-5.7の解析モデルは、円孔周辺の円周方向の変形は固定($v_\theta = 0$)されている状態であるにもかかわらず、放射(半径)方向の変形 u_r は一様伸縮として指定が可能なモデルである。これはあたかも円孔部分に鉄筋が装填されている状態で、鉄筋の腐食膨脹による体積増加によってヘアークラックの発生を想定していると考えられよう。あるいは、円柱などで変位拘束を受けた平板が乾燥収縮を受けて放射状(半径方向)のき裂が発生する状況を想定している。

想定した2種類の割裂機構には上記の理由から、いずれもある一定の圧縮力が作用している。このような境界条件の中で薬液の膨張圧によるき裂進展や腐食膨脹によるき裂発生メカニズムを検討することは、膨張劣化機構を解明する重要な研究課題である。

5.4 解析方法

5.2節の諸応力関数を組み合わせて円孔周辺の放射状き裂のモデルを解析するために、本研究では次のような手法を採用している。

- 1) 一様応力状態の応力関数と内圧を受ける円孔の応力関数を要素関数 $W_j()$ として選ぶ場合は、そのまま未定係数 C_j を乗じて採用する。

- 2) 放射状き裂を構成するために開口関数 (式(2.15), 式(5.4)～式(5.7)) を活用する場合は次のようにして要素関数 $W_j()$ を構成する。まず正のY軸を放射状き裂線として、開口長さ a と両端のプロセスゾーン b を適宜に選んだ開口関数を、この線上に1つ配置する。次に他の等間隔に配置される放射状き裂線上へ、この関数を平行と回転の移動で重ね合わせる。このようにして N_L 本のき裂線上へ、等サイズの開口を放射状に配置したものを1つの要素関数 $W_j()$ として、未定係数 C_j を乗じて解として重ね合わせる。
- 3) 放射線上では、同種の開口関数でも開口の中心位置や長さ a あるいはプロセスゾーン長さ b が異なるものは線形独立とみなして良いので、解を構成するために必要と思われるだけパラメータの異なるものを重ねることが許される。解は $W = \sum \{C_j \times W_j()\}$ となる。
- 4) 解としての放射線上の開口部は、各要素関数の開口部の共通部分となり、プロセスゾーンは要素関数の b で覆われた部分となる。
- 5) 未定係数の決定法は次の2つの部分で構成する。第1は選点法であってY軸上の開口部では2個以上の点で応力条件 ($\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$) を設定して、円孔周辺では応力や変位の条件 ($\sigma_r = \sigma_0$ or $u_r = u_0$) を満足させる。遠方の周辺で変位や応力の値を拘束する選点を行うのは任意である。
- 6) 第2は最小自乗法であって、プロセスゾーン部分の応力の曲率 ($\partial^2 \sigma_\theta / \partial r^2$, r : 放射(半径)方向長さ)の自乗和、あるいは中心の円孔周上の応力や変位の指定値からの残差の自乗積分を最小化する一般の最小化条件式である。これらの条件式の数と未定係数の数と一致するようにするのであるが、サイズの異なる多くの要素関数を重ねて選点法だけで未定係数を決定すると、開口線上の閉合誤差に振動が現れたり、応力集中に不自然な変動成分が現れる。プロセスゾーン部分の応力の曲率自乗和最小化条件によって解の整合性が向上し、極めて滑らかな応力集中が得られる。

図-5.6 に示すように円孔周辺とき裂開口部が交わるモデルでは、同図に併記したように 180° の偏角を持つき裂線に共通の長い開口のクラックと個別で円孔内に一方のプロセスゾーンが入り込むもの(円孔内では如何に乱れても無関係)を設ける。図-5.7 に示すように円孔周辺の変位 ($u_r = u_0$, $v_\theta = 0$) が拘束される場合は、図中に併記したように円周と要素関数のプロセスゾーン先端が交叉しないように配慮する。変位拘束という建前からプロセスゾーンの開口が円周と交わらないようにする。要素関数としての面内曲げ型き裂関数の開口部片側のめり込み(負の開口、但し、 $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$)は、面内引張りの要素関数の開口と重ね合わされて正值の開口となり、対象としているモデルのすべての開口部でくい込みは生じないことが確認された。モデルの開口部の応力0の条件が極めて精度良く満足されている。この理由は、要素関数の開口部は完全な開口条件 ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$) を満足していることと、これを放射状き裂線上へいくつか重ね合わせても、モデルの開口部を要素関数のプロセスゾーンの応力集中で乱さないように要素関数の開口長さを適切に選び得ることである。

5.5 数値計算例

本研究では図-5.6、図-5.7に示す2種類の解析モデルに対しての数値計算例を示す。数値計算例により求めた応力と変位の状態を、図化することにより解析法の特性を調べることにする。

要素関数は重調和関数であるから2次元問題の解であることには異論がない。したがって、これを重ね合わせて目的とする境界条件を満足させることができれば正解と認められる。図上で条件の整合性を確認することがここに得られた関数が正解に近似している程度を確認することになる。その妥当性を確認するために、2次元の応力および変形状態を描画して開口部の境界条件が乱れていないことを検証する。

5.5.1 き裂4本のモデル

解析条件は、き裂長さ $2a = 0.9\text{cm}$ 、プロセスゾーン $b_2 = 0.05\text{cm}$ 、円孔半径 $r_a = 1.0\text{cm}$ 、円孔周辺に作用する膨張圧に相当する一様圧縮応力は、 $P_u = -1\text{ kgf/cm}^2$ 、母材側の無限板の弾性係数 $E = 210,000\text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.167$ とする。また、完全に開口しているき裂長さ ($2a$ 部分) とプロセスゾーン (b_2 部分) は、発生するき裂全てに共通で同一長さとする。すなわち、全て同一長さのき裂が放射状(半径方向)に発生するものとする。

求めた結果のうち放射状き裂近傍の領域 ($r = 1.0\text{cm} \sim 2.15\text{cm}$ の範囲) における変位 v_θ の状態を図-5.8 および図-5.9 に示す。応力分布に関しては、次項で詳細な検討を行うため割愛する。

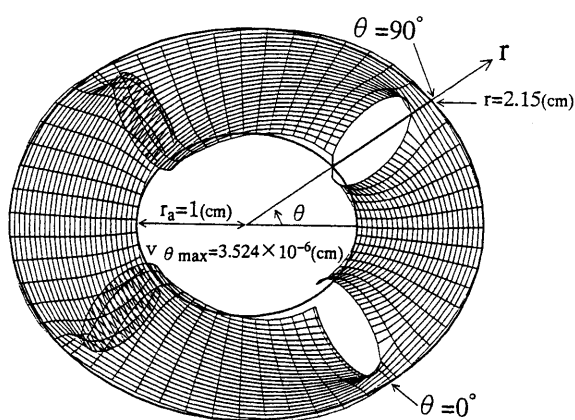


図-5.8 v_θ

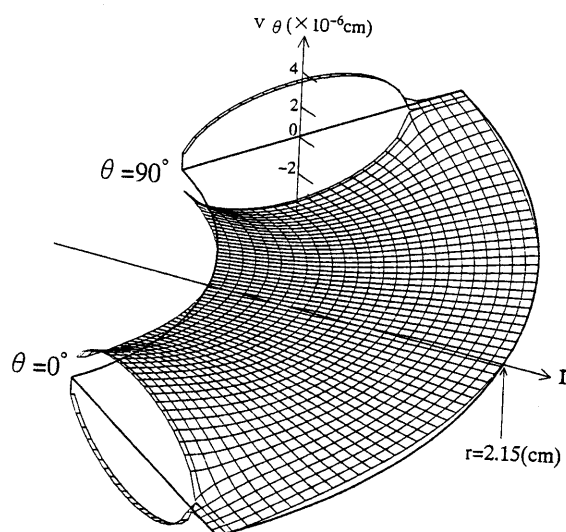


図-5.9 v_θ 拡大図

5.5.2 き裂3本のモデル

図-5.7に示す解析モデルにおいて、き裂長さ $2a = 8.0\text{ cm}$ 、プロセスゾーン $b_1 = b_2 = 1.0\text{ cm}$ 、き裂を3本として計算した変位 u_r, v_θ と応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ の状態を図-5.10~図-5.17に示す。このとき、重ね合わせに用いた要素関数の数、種類、配

置と未定計数値は表-5.1、表-5.2に示すデータを活用して計算した。なお、母材の物理定数および荷重条件は、5.5.1項の条件と同じである。

表-5.1 円周上で完全な開口を示すモデルの入力値と未定係数 $C_j(k)$ (図-5.8、図-5.9 参照)

円孔半径 r_a (cm)					1
重ね合わせる要素関数の数					4
要素関数	入力データ				未定計数値 $C_j(k)$
	Y_c (cm)	a (cm)	b_1 (cm)	b_2 (cm)	
W1	—	—	—	—	-4.628
W2	1.45	0.45	—	0.03	-0.405
W3	1.45	0.45	—	0.03	0.03
W4	1.45	0.45	—	0.05	-0.0264

- W1：一様応力が作用する円孔の無い無限板
 W2：一様内圧が作用する円孔を有する無限板
 W3：面内引張り型クラック形状を有する無限板
 W4：面内曲げ型クラック形状を有する無限板
 Y_c ：円孔中心から各要素き裂の中心までの距離 (cm)
 $2a$ ：き裂長さ (cm)
 b_1, b_2 ：プロセスゾーン長さ (cm)
 $C_j(k)$ ：未定係数値

表-5.2 円周上で閉じた開口を示すモデルの入力値と未定係数 $C_j(k)$ (図-5.10～図-5.17 参照)

円孔半径 r_a (cm)					10
重ね合わせる要素関数の数					5
要素関数	入力データ				未定計数値 $C_j(k)$
	Y_c (cm)	a (cm)	b_1 (cm)	b_2 (cm)	
W1	—	—	—	—	25.976
W2	—	—	—	—	-0.274
W3	15	4	1	0.6	0.361
W3	15	4	0.85	1	1.174
W4	15	4	1	0.8	0.0237

ただし、これらの解析結果はき裂近傍の開口や応力の特性を表示することが目的であるから詳しいスケールは省略するが、開口量や応力の最大値を図中に示す。膨張剤が充填された円孔の円周上に発生する開口は、完全な開口を示すもの(図-5.8、

図-5.9 参照) であり、鉄筋などの剛な材料が円孔に装填されて、腐食膨張によって体積増加が発生してヘアーク裂を形成する場合の円孔上の開口は、円周上で閉じた開口の場合である(図-5.16、図-5.17 参照)。閉じた開口を示す場合のき裂部分の応力は、次のような特性が見られる。すなわち、 σ_θ は図-5.13 に見られるように、き裂部分では応力は0、プロセスゾーンで引張応力が見られるが、 σ_r はき裂部分で圧縮応力が現れている(図-5.11 参照)。これは体積増加によって放射方向にひずみが増大している状況にあることと、円孔周辺に回転角方向の変形がき裂部分で拘束($v_\theta = 0$)されているため、 σ_r の円孔周辺に圧縮応力が作用したためと考えられる。

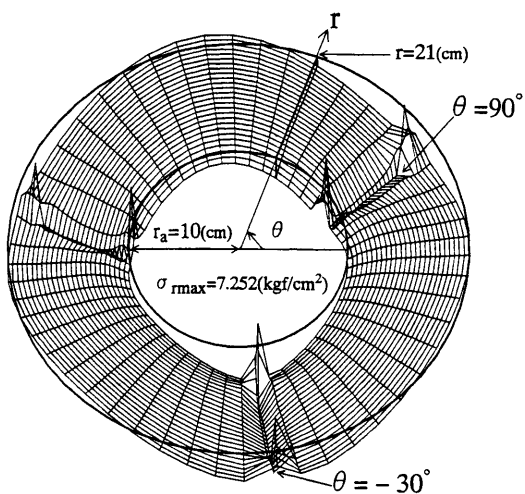


図-5.10 σ_r

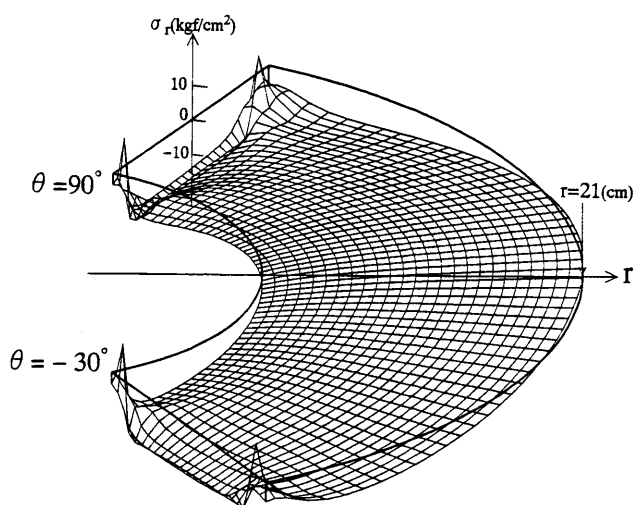


図-5.11 σ_r 拡大図

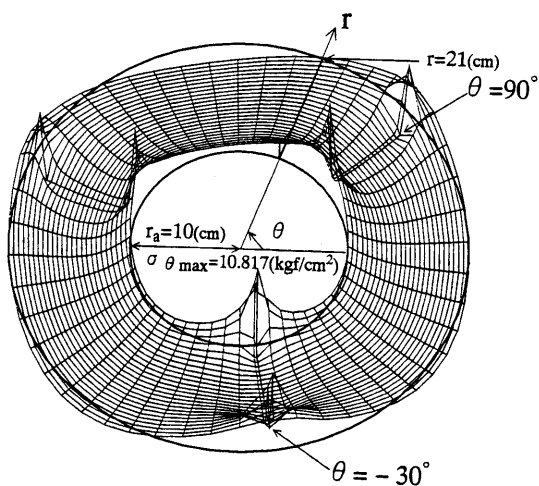


図-5.12 σ_θ

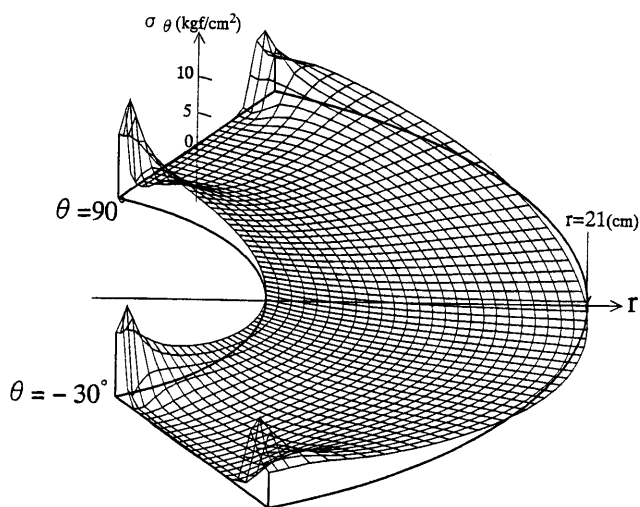


図-5.13 σ_θ 拡大図

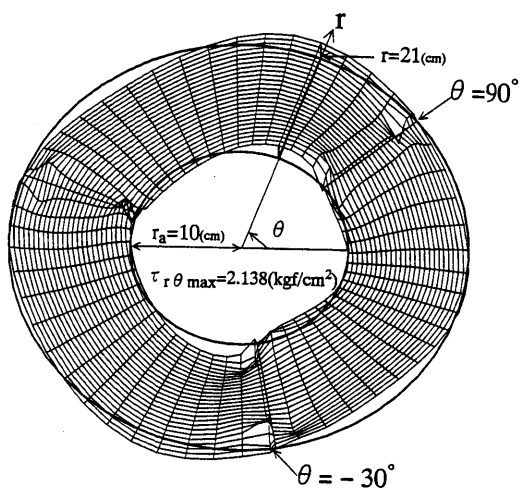


图-5.14 $\tau_{r\theta}$

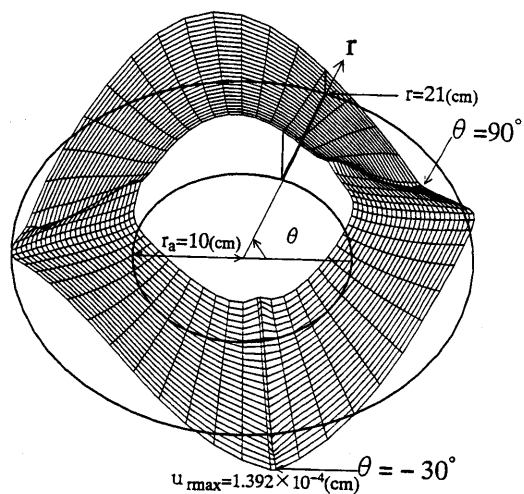


图-5.15 u_r

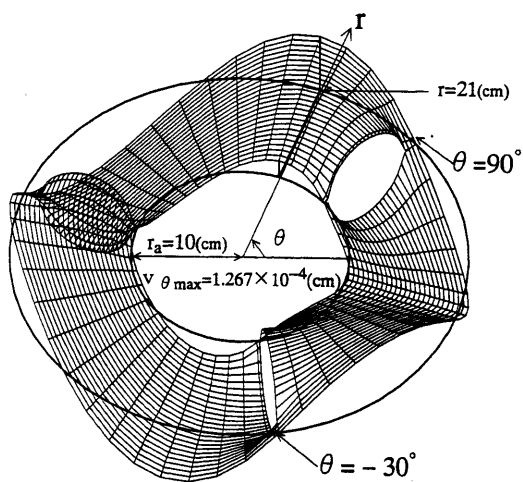


图-5.16 v_θ

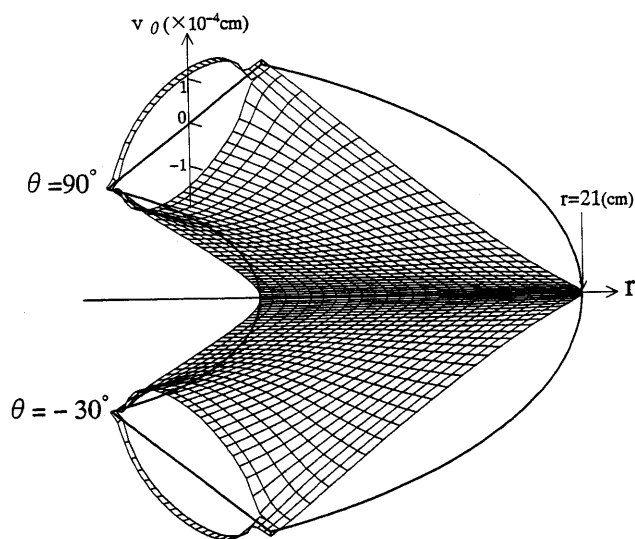


图-5.17 v_θ 扩大图

5.6 各パラメーターが応力集中に与える影響

本節では、き裂長さ $2a$ 、プロセスゾーン長さ b 、き裂本数 n の変化が最大応力に与える影響について検討する。対象とするモデルは、図-5.6の円孔周辺で開口するモデルを基本とする。図-5.7の円孔周辺でき裂が閉塞するモデルによる解析結果は、図-5.6の解析モデルとほぼ同様な応力集中の傾向が得られることが判明したため割愛する。

5.6.1 各パラメーターの変化と計算ケース

計算は以下のケースについて行うが、母材の物理定数、荷重条件、および円孔の半径は以下の通りであり、各ケース共通である。

板の物理定数	: 弾性係数	$E = 210,000 \text{ kgf/cm}^2$
	ポアソン比	$\nu = 0.167$
荷重条件	: 一様分布荷重	$P_u = -1 \text{ kgf/cm}^2$

また、完全に開口しているき裂長さ($2a$ 部分)とプロセスゾーン(b_2 部分)は、発生するき裂全てに共通で同一長さとする。すなわち、全て同一長さのき裂が放射状(半径方向)に発生するものとする。

計算ケース

- | | | |
|----------|------------------------------|----------------------------------|
| 1) 基本ケース | : き裂半長さ | $a = 0.05\text{cm}$ |
| | プロセスゾーン長さ | $b_2 = 0.25\text{cm}$ |
| | 円孔の半径 | $r_a = 1.0\text{cm}$ |
| | き裂本数 | $n = 4 \text{ 本}$ |
| 2) ケース1 | : プロセスゾーン長さ b_2 のみが変化するケース | |
| | プロセスゾーン長さ | $b_2 = 0.025 \sim 0.45\text{cm}$ |
| | き裂半長さ | $a = 0.05\text{cm}$ |
| | 円孔の半径 | $r_a = 1.0\text{cm}$ |
| | き裂本数 | $n = 4 \text{ 本}$ |
| 3) ケース2 | : き裂半長さ a のみが変化するケース | |
| | き裂半長さ | $a = 0.05 \sim 0.9\text{cm}$ |
| | プロセスゾーン長さ | $b_2 = 0.05\text{cm}$ |
| | 円孔の半径 | $r_a = 1.0\text{cm}$ |
| | き裂本数 | $n = 4 \text{ 本}$ |

- 4) ケース3 : き裂本数が変化するケース
 き裂本数 $n = 4 \sim 16$ 本まで変化
 き裂半長さ $a = 0.2\text{cm}$
 プロセスゾーン長さ $b_2 = 0.05\text{cm}$
 円孔の半径 $r_a = 1.0\text{cm}$
- 5) ケース4 : 円孔半径 r_a を変化させるケース
 円孔の半径 $r_a = 1 \sim 7\text{cm}$
 き裂半長さ $a = 0.2\text{cm}$
 プロセスゾーン長さ $b_2 = 0.05\text{cm}$
 き裂本数 $n = 4$ 本

5.6.2 計算結果および考察

1) 基本ケース

き裂線に沿うプロセスゾーン近傍の応力度 σ_θ と開口変位 v_θ を図-5.18 に示す。図-5.18 の解析結果から、重み積分法によって平滑化された応力分布と滑らかな開口変位が共存するプロセスゾーンが構成されていることが判る。

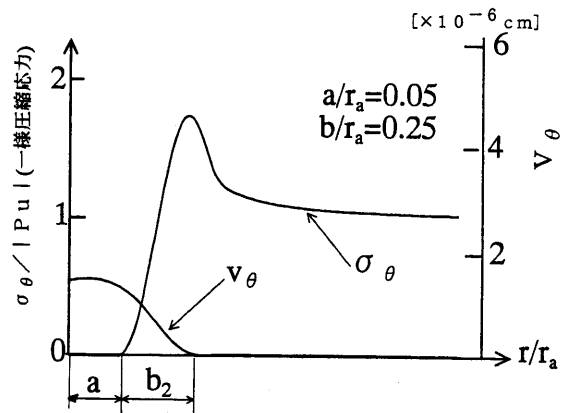


図-5.18 プロセスゾーン近傍の応力及び開口変位

2) ケース1

図-5.19 はき裂長さ a/r_a を 0.05 一定の条件下で、プロセスゾーン長さとして b_2/r_a を 0.45 ~ 0.025 まで変化させたときのき裂線上 σ_θ の応力分布を示した図である。プロセスゾーン長さ b_2 の減少と共に応力集中が増大していることが認識できる。これは極限として b_2 が 0 に近づけば、式(2.7)の重み積分を実行しないことになり、結果として式(2.6)に示す Westergaard の応力分布に漸近することになることを示している。また、プロセスゾーンから離れるにつれて、応力度は一定値に収束して無限遠方応力と一致することが判る。

また、図-5.20は、プロセスゾーン長さ b_2 と最大応力の関係を示したものである。最大応力についても、 b_2 が小さいときにも応力集中が大きくなり、 b_2 が大きくなるにつれて一定値に収束する。

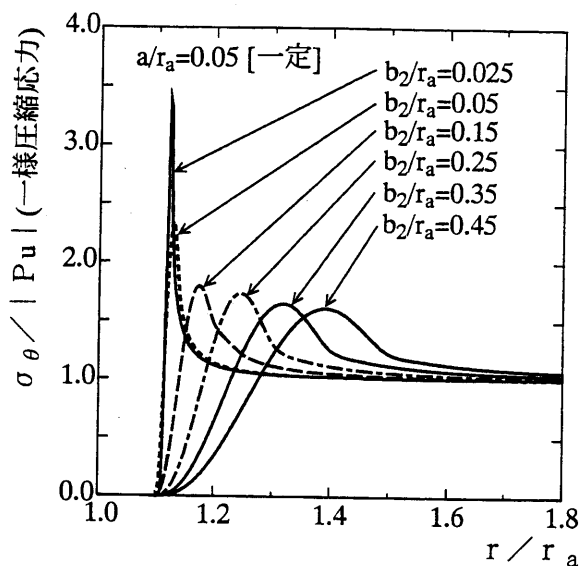


図-5.19 き裂線上の応力分布

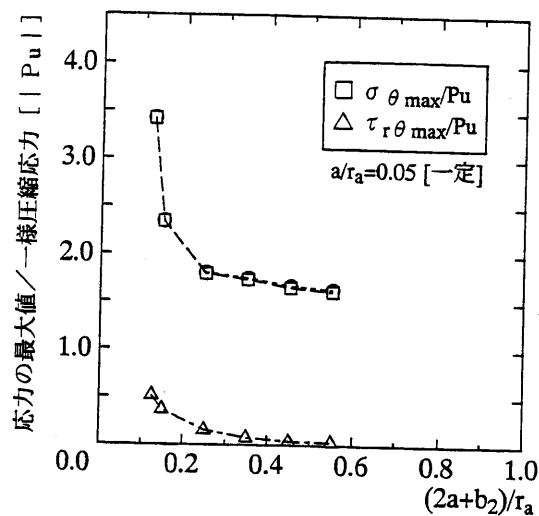


図-5.20 プロセスゾーン長さ b_2 の変化と最大応力の関係

3) ケース2

き裂長さ a の増加による最大応力の分布を図-5.21に示す。ケース1とケース2の解析結果の検討から、次の結論が導かれる。すなわち、き裂 a のみが増加する場合、き裂長さに対するプロセスゾーン長さは減少し、その結果応力は増加傾向をたどる。これは、プロセスゾーンが短くて脆性的な破壊形態の材料に膨張剤を活用する状態と想定できよう。逆に b_2 のみが増加する場合には応力の解放される領域が広がって応力は減少傾向を示し、膨張剤による破壊エネルギーは、プロセスゾーンを形成するエネルギーに変換されて延性的な破壊形態を示す材料に適用した状態を想定することが妥当であることを意味している。

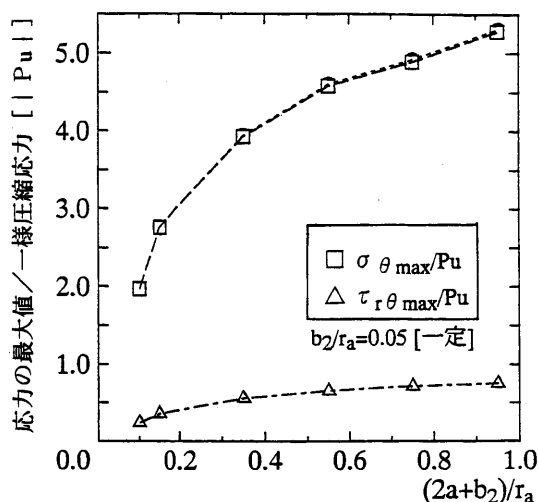


図-5.21 き裂長 a の増加による応力集中
(き裂長 a と最大応力の関係)

3) ケース 3

き裂本数を 4 本から 16 本まで増加させたときの応力の変化状況を図-5.21 に示す。き裂本数の増加によって応力の低下が見られる。き裂発生に伴って、応力の解放が行われていることが確認できる。応力の解放があまり顕著でないのは、無限遠方で圧縮応力が作用していることと、完全に開口しているき裂の半長さ a と円孔半径 r との比 a/r_a が影響していると考えられる。

すなわち、き裂半長さ $a=0.2\text{cm}$ 、円孔半径 $r_a=1.0\text{cm}$ 、プロセスゾーン $b_2=0.05\text{cm}$ を固定値として解析しているため、完全に開口しているき裂長さ a の割合が円孔半径 r_a に比べて小さいことも応力の低下が顕著に見られなかった要因と考えられる。

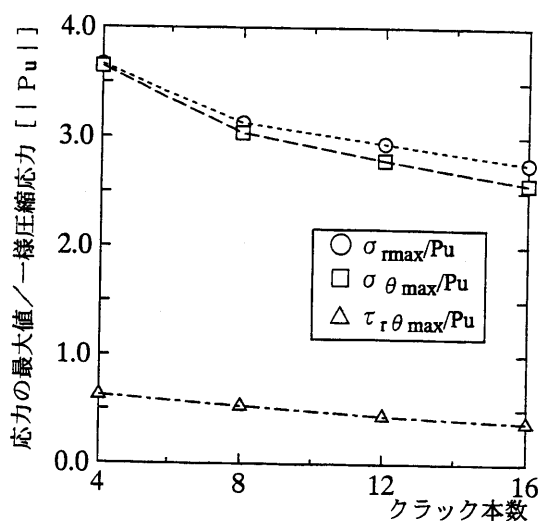


図-5.22 き裂本数の増加による応力の低下

4) ケース4 (円孔半径 r_a の増加による応力の変化)

伊良波²⁾の行った円筒の寸法効果を示す解析結果から得られた結論は、き裂本数、強度一定の条件下では「外径と内径の比が同じならば、内径が大きいものほど応力集中は小さくなる」ということである。本解析法においても同じような特性が得られるかどうかを検証するために、き裂本数を4本と設定したときの円孔半径 r_a の増加による応力の増加状況を検討する。その結果を図-5.23に示す。円孔半径は1.0cm~7.0cmまで変化させた。同一な解析条件のもと、円孔半径のみを増加させると応力は低下することが判明した。すなわち、これは寸法効果を示していると言える。ただし、重み関数の相違による寸法効果の特性は、値の大きさには違いが見られるが傾向には変化はないと考えられる。なぜなら、重み関数の相違は応力分布の最大値の大きさに差異が見られるのみであるからである。供試体の半径(実験では直径を測定)の増加による強度の低下をもたらす実験には、割裂引張強度試験による寸法効果が報告されている⁶⁾⁷⁾。また、割裂引張強度試験による引張強度を求める代わりに、円孔に鋼材などの剛な材料を押し込む試験法が提案されている⁸⁾⁹⁾。押し込み試験から得られる引張り強度も割裂引張強度と同様な寸法効果が存在すると確かめられている。このような問題に著者等の解析手法を適用して割裂引張強度の寸法効果を実現するには、境界条件を設定し直すだけで活用することができる。すなわち、押し込み試験による方法は、本解析モデルの膨張圧の作用状況と全く同じ載荷状態であると言える。しかし、円形の供試体に相当する領域を実現するためには、無限遠方で圧縮応力が作用する応力関数を外し、円孔の外側に供試体の直径に相当する円形領域を確保する必要がある。これは、応力が0の境界条件を円形領域に設定するだけで円形の供試体に相当する部分を形成することができるのである。

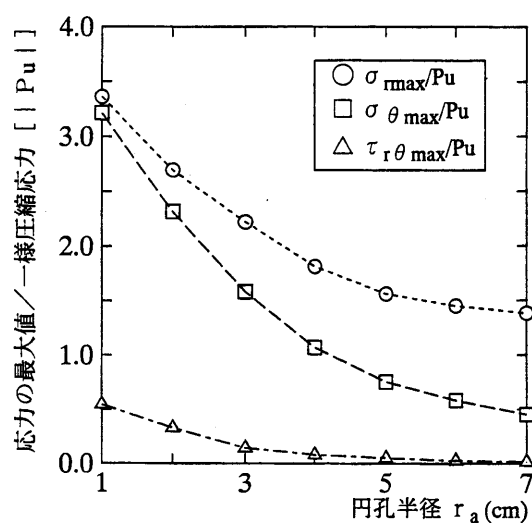


図-5.23 円孔の寸法効果

5.7 まとめ

本章では第2章での研究成果の延長として、開口関数を円孔周辺に放射状にき裂が発生する問題に適用できるように関数の大幅な修正を試みた。図-5.8 から図-5.17 の計算例に見られるように、き裂開口部の開口形状および応力度解放という境界条件が望ましい状態で満足されることが示された。き裂線上のみの応力度や変位は図-5.18 や図-5.19 で示すように、非常に詳細な解析(図化部分は800等分割)を行い得る。要素関数は全て重調和関数であるから境界条件の精度が解の精度を表しているともみなして良い。すなわち、有限要素法では期待し得ない程厳密解に近いと思われるが、要素関数を重ねているにも拘らず選点法特有の閉合誤差の振動現象が消滅しているのは応力分布の曲率の自乗和最小の条件も併用しているためである。要素関数が重調和関数として確定されているのでプロセスゾーン部分の変化の激しい応力や変位の勾配を予め導いて、分布の曲率の自乗和最小化という手段で応力や変位の振動現象を消滅させて平滑化する条件を導入できるのである。これが本解析法の精度の向上を実現させている要因である。この結果に自信を得て、図-5.20 から図-5.23 に示すようなプロセスゾーンの変化あるいは開口部の長さの変化、円孔半径の変化あるいは放射状き裂の数などの各パラメータの変化と応力の最大値との関連性を求めて計算例として示した。これらの結果はこのようなき裂の問題に対する特性の一端であると考えられる。これらの計算例は求めたき裂関数(式(5.4)~(5.7), (2.13)~(2.15))が、コンクリート構造物のスラブや壁板などを静的破碎剤で割裂する機構を解明する問題に有用な情報を与えるものであろう。また、鉄筋の腐食膨張に対するモデル化では、き裂としての条件と共に円孔周辺の境界条件(円孔周辺 $r=r_a$ で $v_\theta=0$)を付加することで容易に解析が可能であることを示し得た。いずれのモデルも2次元弾性問題の範囲内の解析結果ではあるが、膨張劣化機構の解析へ適用可能な特性を有することが判明した。

伊良波は内圧を受けるコンクリートの中空円筒のモデルを解析している²⁾。本研究での解析手法とは異なるため一概に比較検討することはできないが、き裂線上の応力分布性状について考察を行うと次のような見解が得られる。伊良波の行った有限要素法による数値解析例では、対称性を考慮して全体の4分の1あるいは8分の1を対象にして解析を実施している。解析範囲を限定して要素分割をき裂線上で細かくする操作を施しても、解析法の特性より完全に開口しているき裂部分において引張り応力が発生している²⁾。要素分割を細かくする等の処理ではき裂先端の応力と歪みの鋭敏な領域の境界条件を満足することは困難であると推察される。これに対して、本研究での解析モデルは図-5.18 あるいは図-5.19 に示すき裂線上の応力分布に見られるような精度で条件を満足させるものである。なお、図-5.8 から図-5.17 の計算例はNECのパーソナルコンピュータ(PC9821V200)上で動く Visual Basic(Ver.5)で作成されたプログラムを活用すると計算から描画までの時間は、3分以内である(ただし、データの入力および修正は除く)。また、図-5.18 および図

5.19 に示すき裂線に沿う応力および開口形状のみに限定すると着目範囲を80等分割数で計算しても1分以内で詳細図を描くことが可能である。このように、本研究で開発した解析プログラムを活用すれば、き裂本数、き裂に重ね合わせる要素関数の数とタイプ、母材の材料定数や境界条件を設定するだけで、従来から活用されている有限要素法や境界要素法に見られるような膨大な節点番号、要素番号あるいは幾何学的条件等の煩わしい入力作業を全く行う必要がなく、数分で応力や変形量を計算することが可能である。き裂先端部分の詳細図を部分的に描くことも可能である。このような点も従来の数値解析法とは異なり、本研究の特徴の一つと言えよう。

今後に残された検討課題は、たとえば以下に示すような点が挙げられよう。

本研究を含めた中川等が報告している一連の応力関数では、き裂線上のプロセスゾーン部分においては応力は平滑化され緩やかな勾配で立ち上がるが、応力と開口変位の形状には確定的な条件を設定していない。しかし、開口部では応力が0となりき裂全体の開口形状が確定するのである。プロセスゾーンの長さあるいは重み関数の相違によって、プロセスゾーンの応力と形状には相応の差異が生じる。したがって、プロセスゾーンの長さあるいは重み関数を如何にすべきかは物理的な意味を含めて今後の重要な検討課題である。第3章で示したように、実験で計測される変形やひずみ量からプロセスゾーン長さを逆推定することが極めて簡単であるため、上記の検討課題に結論を得ることができるならば、材料固有の破壊クライテリオンに相当するパラメータを決定できることになろう。

本章で提案した放射状(半径方向)き裂は、全て同一のき裂長さで構成されている。コンクリートの解体などの実施工の予備的な解析に適用し概算値を求めるには十分であると考えられるが、鉄筋の腐食膨張圧によるヘアークリacksを検証するには、長さの異なる放射状(半径方向)き裂を正確に配置して解析することも重要であると考えられる。有効な破砕剤投入の穴間隔や配置を検討するためには、長さの異なる放射状き裂を複数配置することが可能なプログラムへ拡張することが必要である。

また、膨張剤を活用する破壊形態は、経時変化を伴う破壊である。従って、化学反応速度をパラメータに取り入れた応力関数を導き出すことも今後の課題と言えよう。

参 考 文 献

- 1) 原田哲夫：静的破砕剤を用いたコンクリート構造物の解体に関する基礎的研究、東京大学学位論文、1988.
- 2) 伊良波繁雄：内圧を受けるコンクリートの中空円筒の破壊、コンクリート構造物の破壊力学に関するコロキウム、pp. II-67-II-74、1990.
- 3) Timoshenko, S. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, 2nd Ed. McGraw-Hill,

1951.

- 4) 栖原秀郎・中川建治:亀裂先端で有限な応力集中を構成する応力関数に関する研究、土木学会論文集、No. 501、I-29、pp. 65-74、1994.
- 5) 前田春和:き裂を持つ平板の面外問題に関する基礎的な研究、岐阜大学学位論文、1998.
- 6) 長谷川俊昭・塩谷俊幸・岡田武二:コンクリートのひびわれと寸法効果—大型コンクリート円柱試験体の割裂引張強度—、セメント・コンクリート、No. 474、pp. 6-20、1986.
- 7) Bazant, Z. P., Kazemi, M. T., Hasegawa, T. and Mazars, J. : Size Effect in Brazilian Split-Cylinder Tests : Measurements and Fracture Analysis, ACI Materials Journal, May-June, pp. 325-332, 1991.
- 8) Chen, W. F. : Double Punch Test for Tensile Strength of Concrete, ACI Journal, pp. 993-995, Dec. 1970.
- 9) Marti, P. : Size Effect in Double-Punch Tests on Concrete Cylinders, ACI Materials Journal, pp. 597-601, Nov. 1989.

第6章 面外強制開口する直線状き裂の解析

6.1 まえがき

本章では、直線状き裂を持つ無限弾性板のき裂部分に面外開口用の相反方向分布外力を作用させる場合の解を導く。き裂面における境界条件は、等価せん断力の概念に基づいた古典曲げ理論による近似を用いている。Reisner¹⁾はより厳密解に近い3境界条件理論を提案しており、「き裂を持つ板の面外力問題の特異点は $3/2$ 乗オーダーであるから、 $1/2$ 乗オーダーの特異性しか持たない面内力問題に比較して、き裂線上の連続条件（境界条件）を重調和関数で満足させることは非常に厳しいものである」と論証している。本文では古典曲げ理論に則ってはいるが、重調和関数を活用しき裂線上の境界条件を満足し、かつき裂先端での特異性を解消し得る関数解を導くものである。Erdogan²⁾⁻⁴⁾あるいはRice⁵⁾等により面外問題におけるいくつかの解が報告されているが、それらは全てき裂先端で断面力が無限大となる解を基に応力拡大係数が与えられているものである。

本章は、第2章で導いた面内方向に強制開口する応力関数を不定積分して、面外力問題の解へ拡張することが主題である。その過程での大きな特徴は、面外力問題の厳しい境界条件を満足させるため面内力問題においては設定不要な補正関数を必要とすること、および等価せん断力の集中部に符号反転現象が生じるということである。この面外力問題の断面力反転現象は、開口部に外力を作用させずに無限遠方で一様せん断力を作用させる解において、前田等により既に指摘されている⁶⁾。これは古典理論に則った板の曲げに関する初等的な微分方程式の解（重調和関数）を基本としていることと、面外方向のせん断力はたわみの3階微分となることより、古典理論に則る限り符号の反転は生じるものと考えられる。ここでは関数解の数値計算例をモデル化して有限要素法（FEM）解析により、符号反転問題と塑性領域としてのプロセスゾーンの特性を検討する。

6.2 面外強制開口の解

Y軸上に1つの直線状のき裂を持つ無限板において、図-6.1に示すようにき裂開口部に相反方向の等分布荷重を作用させて板を面外へ強制開口させる問題（モードⅢ）の解を導く。

面外力問題におけるたわみ関数も、古典理論に従えば式(2.1)と同様に重調和関数であり、たわみ角、曲げモーメント、ねじりモーメントおよび等価せん断力（反力）は式(6.1)のように表される。関数の実部が活用されることは自明であるため、記号 $\text{Re}[\]$ は省略する。Dは板の曲げ剛性、 ν はポアソン比である。

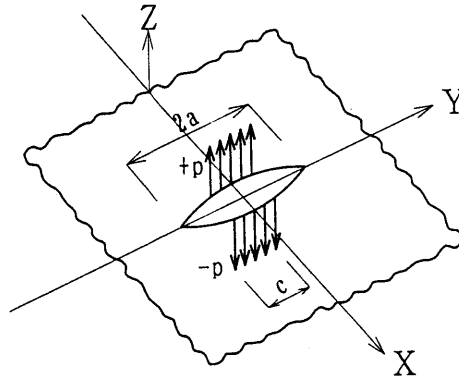


図-6.1 き裂開口部に作用する面外相反分布荷重 (Mode III)

$$\left. \begin{aligned}
 W_{\text{III}} &= \bar{z}\psi_{\text{III}}(z) + \phi_{\text{III}}(z) \\
 W_{\text{III}x} &= \psi_{\text{III}}(z) + \bar{z}\psi'_{\text{III}}(z) + \phi'_{\text{III}}(z) \\
 W_{\text{III}y} &= i(-\psi_{\text{III}}(z) + \bar{z}\psi'_{\text{III}}(z) + \phi'_{\text{III}}(z)) \\
 M_x &= -D \left[2(1+\nu)\psi'_{\text{III}}(z) + (1-\nu)\{\bar{z}\psi''_{\text{III}}(z) + \phi''_{\text{III}}(z)\} \right] \\
 M_y &= -D \left[2(1+\nu)\psi'_{\text{III}}(z) - (1-\nu)\{\bar{z}\psi''_{\text{III}}(z) + \phi''_{\text{III}}(z)\} \right] \\
 M_{xy} &= -i(1-\nu)D\{\bar{z}\psi''_{\text{III}}(z) + \phi''_{\text{III}}(z)\} \\
 R_x &= -D \left[-(1-\nu)\{\bar{z}\psi'''_{\text{III}}(z) + \phi'''_{\text{III}}(z)\} + (5-\nu)\psi'''_{\text{III}}(z) \right] \\
 R_y &= -iD \left[(1-\nu)\{\bar{z}\psi'''_{\text{III}}(z) + \phi'''_{\text{III}}(z)\} + (5-\nu)\psi'''_{\text{III}}(z) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

さて無限遠方で面外純せん断力が作用する場合で、き裂開口部には荷重が作用しない場合の解、すなわちY軸上で $M_x|_{x=0} \equiv 0$ となる解の基本型は、中川、前田等により既に報告されているので⁶⁾、その結果を示す。

Y軸上で $M_x|_{x=0} \equiv 0$ となる面外の純せん断の解は、調和関数 ψ_{III} と $\bar{\psi}_{\text{III}}$ を積分した関数 $\Psi_{\text{III}} = \int \psi_{\text{III}} dz$ をもって表現することができる。任意の ψ_{III} に対して ϕ_{III} を

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{III}} &= z\psi_{\text{III}} - \frac{4}{1-\nu} \int \psi_{\text{III}} dz \\
 &= z\psi_{\text{III}} - \frac{4}{(1-\nu)} \Psi_{\text{III}}
 \end{aligned} \quad (6.2)$$

と定義すると、Y軸上では、 $z + \bar{z} = 0$ であるから、式(6.1)より

$$\begin{aligned}
W_{\text{III}} &= \frac{-4}{(1-\nu)} \Psi_{\text{III}}(z) \\
W_{\text{III}x} &= \frac{-2(1+\nu)}{(1-\nu)} \psi_{\text{III}}(z) \\
W_{\text{III}y} &= i \frac{-4}{1-\nu} \psi_{\text{III}}(z) \\
M_x &= 0 \\
M_y &= -4D(1+\nu) \psi_{\text{III}}'(z) \\
M_{xy} &= i2D(1+\nu) \psi_{\text{III}}'(z) \\
R_x &= -2D(3+\nu) \psi_{\text{III}}''(z) \\
R_y &= -i4D(1-\nu) \psi_{\text{III}}''(z)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる。この関係は、本章のテーマである面外強制開口の解にも当てはまる。ここで式(6.3)の W_{III} は任意の関数 $\Psi(z)$ に対してY軸上で $M_x=0$ を満足するように構成されているので、 $\Psi(z)$ に条件を付けてき裂開口部の等価せん断力 $R_x=0$ 、あるいは開口用相反荷重を表すために $R_x=p$ となるようなものを定義すれば開口部で純せん断荷重を受ける板の面外問題の解となる。

第2章で求めた面内強制開口の解を、面外強制開口の解に活用する。面内力問題においてY軸上で $\tau_{xy}=0$ となる解は、 $\phi_1''=z\psi_1''$ と定義することで導かれる。Y軸上で $z+\bar{z}=0$ となるから、Y軸に沿う σ_x は式(2)より $\sigma_x=R_x[2\psi_1']$ と簡単な形で求められることになる。

本章で対象とするような開口部で面外の純せん断力（開口用の面外外力）が作用する問題では、反力となる等価せん断力を対象とするが、式(6.3)よりY軸上において $M_x=0$ となる等価せん断力は、

$$R_x = [-2D(3+\nu) \psi_{\text{III}}''] \tag{6.4}$$

となる。

ここで、面内力問題における ψ_1' と面外力問題における ψ_{III}'' を対応させることにより、面外力問題の解を求めることにする。すなわち面内力問題のY軸上の σ_x を表す ψ_1' を、面外力問題の R_x を表す ψ_{III}'' と等しいものとする。面外力問題ではさらに式(6.2)のように $\Psi_{\text{III}} = \int \psi_{\text{III}} dz$ とする必要があるから、式(6.1)のたわみ関数 W_{III} に必要な ψ_{III} は、第2章の式(2.13)の Ψ_3 を2回積分して定義すれば良いことになる。 Ψ_3 を z に関して2回不定積分したものを $\Psi_{\text{III}_0}(z, t, s)$ と定義して、式(6.6)に示す。式中の p は荷重強度、 c は荷重の分布幅、 $2a$ はき裂長さ、 b はプロセスゾーンの長さを表す。

$$\psi_{\text{III}}(z, t, s) = \left[\left[\Psi_{\text{III}_0}(z, t, s) \right]_{t=a}^{t=a+b} \right]_{s=-\frac{c}{2}}^{s=\frac{c}{2}} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\text{m}_0}(z, t, s) = & \frac{p}{4\pi b(2a+b)c} \left[\frac{i}{30} \left\{ z^5 + i3s^5 + 5t^2(z-is)^3 \right. \right. \\
& + 5s^4(z-is) \left. \left. \right\} \log \left\{ \frac{t^2 + isz - \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{z^2 + t^2}}{t^2 + isz + \sqrt{t^2 - s^2} \sqrt{z^2 + t^2}} \right\} \right. \\
& + \frac{i}{60} (z+is)^5 \log(\sqrt{t^2 - s^2} + \sqrt{z^2 + t^2}) \\
& - \frac{1}{60} \left\{ 10sz(5t^2 - 2s^2) + i8(t^2 - s^2)^2 \right\} \sqrt{t^2 - s^2} \\
& + \frac{1}{2} t^4 z \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t^2 - s^2}}{s} \right) \cdot \log(z + \sqrt{z^2 + t^2}) \\
& + \frac{1}{15} (z^2 + t^2)^{5/2} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t^2 - s^2}}{s} \right) + \left\{ \frac{t^2}{6} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t^2 - s^2}}{s} \right) \right. \\
& + \frac{i}{20} (z-is)\sqrt{t^2 - s^2} \left. \right\} (z^2 + t^2)^{3/2} \\
& - \frac{i}{60} \sqrt{t^2 - s^2} \cdot z (25t^2 + 11t^2) \sqrt{z^2 + t^2} \\
& + \left\{ \frac{s}{60} (11t^2 - 9s^2) \sqrt{t^2 - s^2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} t^4 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t^2 - s^2}}{s} \right) \right\} \sqrt{z^2 + t^2} \left. \right]
\end{aligned}$$

(6. 6)

式(6. 5)の導関数および、(6. 1)式へ代入して得られる変位と断面力は割愛するが、 Ψ_{m} を導くために2回不定積分を行ったためにこの関数だけではき裂両側の線上の一方では、完全連続の条件が満足されない結果となる。これは中川、前田等が既に報告した開口部に外力が作用しない場合の解で現れた現象と同じであり、 Ψ_{m_0} に含まれる $\log(z + \sqrt{z^2 + t^2})$ の虚数部の不連続性によるものである。この \log 項の虚数部のY軸上の形状についての詳細は割愛するが、元来 \log 関数の虚数部は多価関数であって複雑な曲面を形成するので、代数関数と対数関数の積を積分する場合にはいずれの面を起点に積分していることになるかを配慮し、Y軸上での不合理な食い違いを避ける必要がある。この煩雑さを回避しつつ式(6. 6)よりこの成分を消去するために、中川、前田等が文献⁶⁾で示した式(6. 7)の関数 $g_1(z, t)$ 、 $g_2(z, t)$ をY軸上の境界条件の乱れを補正する項として活用する。すなわち、関数 $g_1(z, t)$ 、 $g_2(z, t)$ を3回積分した関数を Ψ_{m_1} 、 Ψ_{m_2} と定義し、 $\text{Im}(\log(z + \sqrt{z^2 + t^2}))$ を消去する。

$$\left. \begin{aligned} g_1(z, t) &= \frac{z}{b} \log \left(\frac{t + \sqrt{z^2 + t^2}}{a + b} \right) \\ g_2(z, t) &= \frac{1}{b} \log \left(\frac{z + \sqrt{z^2 + t^2}}{t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{m_1}(z, t) &= \iiint g_1 dz dz dz \\ &= \frac{1}{2b} \left[-\frac{13}{144} z^4 + \frac{t}{4} (z^2 + t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{12} t^3 \sqrt{z^2 + t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^4}{12} \log \left(\frac{t + \sqrt{z^2 + t^2}}{a + b} \right) + \frac{t^3}{3} z \log \left(\frac{z + \sqrt{z^2 + t^2}}{t} \right) \right] \\ \Psi_{m_2}(z, t) &= \iiint g_2 dz dz dz \\ &= \frac{1}{b} \left[-\frac{11}{36} (z^2 + t^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{12} t^2 \sqrt{z^2 + t^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{4} t^2 \right) \log \left(\frac{z + \sqrt{z^2 + t^2}}{t} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

式(6.3)から推察されるように、開口部で $\Psi''(z)=0$ となるもの(文献6)において式(6.7)および式(6.8)がこの条件を満足することを示している)あるいは $\Psi''(z)=-p/(2D(1+\nu))$ となるもの(式(6.6))を選べば、実際の解はそれらを重ね合わせて構成することができる。

式(6.8)の $\Psi_{m_1}(z, t)$ および $\Psi_{m_2}(z, t)$ は適切な定数を乗じて重ね合わせると、き裂開口部に外力を伴わない解となるため、 $\Psi_{m_0}(z, t, s)$ へ重ねて全体としてき裂開口部における境界条件を満足させることができる。しかしこの関数の導入によって、無限遠方でY軸に沿うせん断外力を受けている状態が導入されるため、Y軸上のせん断力は $Y \rightarrow \infty$ で0とはならないことになる。図-6.1に示されるように開口部のみに相反せん断外力を作用させるので、無限遠方におけるY軸上のせん断力は0とならなければならない。結局、Y軸上の $\text{Im}(\log(z + \sqrt{z^2 + t^2}))$ によるたわみの不連続成分を打ち消し、同時にき裂先端より十分離れたY軸上の点 y_r で、等価せん断力 $R_x(y_r)$ が0となる条件を成立させる必要がある。このため、未定係数 c_1, c_2 を設定して、上記の関数3個を重ね合わせ、この条件を満足させることにより、式(6.9)により必要となる Ψ_{m_3} を求めるものとする。

$$\Psi_{m_3}(z, s, t) = \Psi_{m_0}(z, s, t) + c_1 \Psi_{m_1}(z, t) + c_2 \Psi_{m_2}(z, t) \quad (6.9)$$

式(6.6)~(6.8)の関数で最初に $\log(z + \sqrt{z^2 + t^2})$ の項が現れるのは $\Psi_{m_k}(z, s, t)$ (ただし、 $k=0, 1, 2$)の項であるから各導関数 $\Psi_{m_k}(z, s, t)$ のレベルで $\text{Im}(\log(z + \sqrt{z^2 + t^2}))$ の項を求めて総和を0にする方程式を導くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6b} \{(a+b)^3 - a^3\} c_1 - \frac{1}{4b} \{(a+b)^2 - a^2\} c_2 \\
&= \frac{-p}{24\pi b(2a+b)c} \left[c \left\{ \frac{c^2}{2} - 5(a+b)^2 \right\} \sqrt{(a+b)^2 - \frac{c^2}{4}} \right. \\
& \quad \left. - c \left\{ \frac{c^2}{2} - 5a^2 \right\} \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} + 6(a+b)^4 \left\{ \beta_{(a+b)} - \frac{\pi}{2} \right\} - 6a^4 \left\{ \beta_{(a)} - \frac{\pi}{2} \right\} \right] \quad (6.10)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\beta_{(a+b)} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{(a+b)^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{c}{2}} \right), \quad \beta_{(a)} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{c}{2}} \right) \quad (6.11)$$

この条件式は積分した関数 $\Psi_{\text{III}_k}(z, s, t)$ のレベルで $\text{Im}(\log(z + \sqrt{z^2 + t^2}))$ を消去する条件式と同じものとなる。これによって \log 関数の多価の特性で現れる Y 軸上のたわみとたわみ角の不連続性が消滅される。

次に Y 軸上の無限遠点の等価せん断力 $R_x|_{y=\infty}$ を 0 にする (これは $x=\infty$ 点で作用するせん断外力成分を 0 にすることと同じ意味である) ための条件式を導く。関数式の形で無限遠点の値を求めることは、極めて煩雑な級数展開を必要とすることから、本文ではコンピュータによる直接の数値計算で処理することとする。すなわち、 $y_r \gg 1$ で $\Psi_{\text{III}_k}(z, s, t)$ による等価せん断力成分を $R_{x*}(y_r)$ として

$$R_x(y_r) = R_{x0}(y_r) + c_1 R_{x1}(y_r) + c_2 R_{x2}(y_r) = 0 \quad (6.12)$$

とする。

式(6.10)と式(6.12)によって未定係数 c_1, c_2 がコンピュータの数値計算過程で決定され、 Ψ_{III} およびその導関数である ψ_{III} が確定することにより、式(6.3)により変位と各断面力を求めることができる。

6.3 数値計算例

計算モデルとして、以下の材料定数と中心き裂を持つ無限板に、図-6.2 のように幅 0.4cm、荷重強度 $p = 2.5\text{kgf/cm}$ を載荷したケースの計算結果を示す。式(6.12)の未定係数 c_1, c_2 を求めるにおいて、 y_r を 5.0cm と設定した。

弾性係数	: $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比	: $\nu = 0.3$
き裂長さ	: $2a = 1 \text{ cm}$
プロセスゾーン長さ	: $b = 0.3 \text{ cm}$
き裂中心座標	: $x = y = 0$

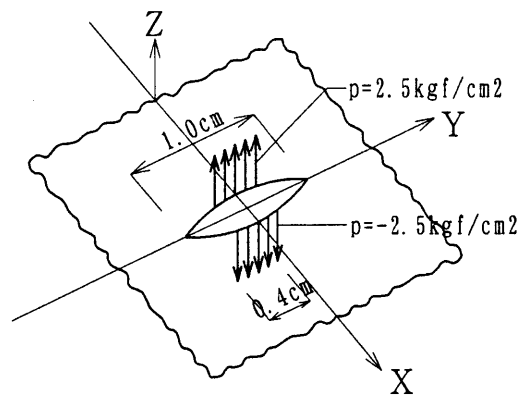


図-6.2 面外相反分布荷重が作用する直線状き裂

計算結果のうち、変位図を図-6.3、等価せん断力図を図-6.4 に示す。図化した領域は $|x| \leq 1.2\text{cm}$ 、 $|y| \leq 1.5\text{cm}$ の範囲とした。また Y 軸上の等価せん断力の拡大図を図-6.5 に示す。

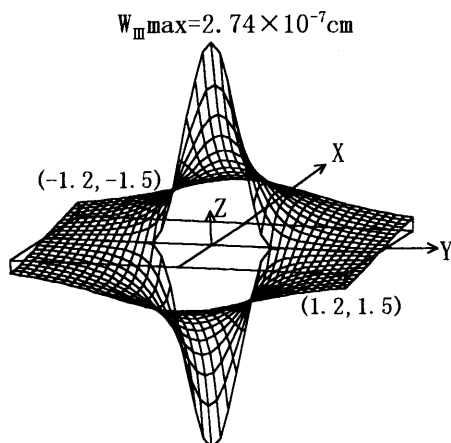


図-6.3 面外変位 (W_m) 分布図

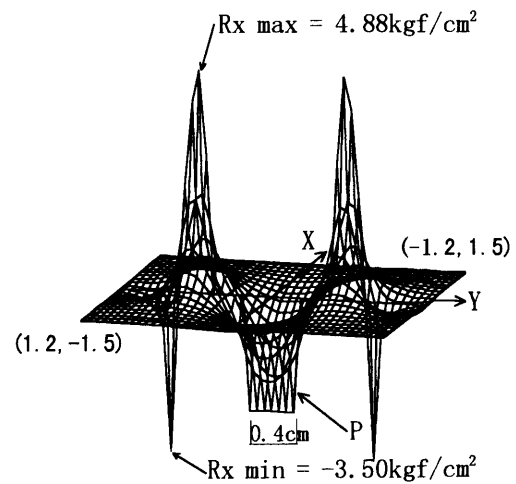


図-6.4 等価せん断力 (R_x) 分布図

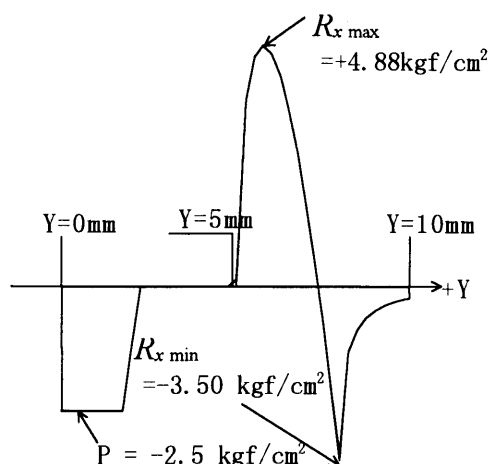


図-6.5 Y軸上の等価せん断力(R_x)分布図
($0 \leq y \leq 10$)

図-6.3に見られるように、面外方向の変位については、プロセスゾーン端部まで滑らかなたわみ変形が現われていることがわかる。しかし、図-6.4, 図-6.5の等価せん断力においては、大きな断面力集中が生じているプロセスゾーン部分において、断面力の反転現象が生じている。これは、 $|y| \geq a+b$ 区間での連続条件が、 W_{III}, W_{III} および M_x, R_x というたわみの3回微分までに関するものであるため生じる結果と考えられる。

6.4 FEM 解析結果との比較

Reisner¹⁾は破壊進行領域（塑性領域）としてのプロセスゾーンを考慮していないが、き裂先端の特異点近傍の境界条件を満足させることは、重調和関数だけでは非常に難しいと論証している。著者等の解は、プロセスゾーンを構成しつつ厳しい境界条件を満足するものであるが、せん断力の反転現象が生じるという結果が得られた。このため有限要素法によりこの反転現象を裏付ける試みを行う。全く異なる手法で、微分方程式の解へのアプローチを試みることに相当するので、せん断力が反転する傾向を把握することのみを目的とする。

6.4.1 FEM解析のモデル化

FEMモデルの基本要素として薄板のシェル要素を採用し、き裂先端のプロセスゾーン内の接点に面外方向（ z 方向）のばねを設けたモデルを考える。面外荷重によりばねに生じる反力から等価せん断力を求め、6.3節の数値計算例の結果と比較するものとする。

図-6.6にFEMモデルの全体図、図-6.7に要素分割図を示す。モデルは、き裂先端から十分離れた点においては、応力・変位とも0となることから、 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$

の4辺が単純支持された有限板とした。また、き裂先端部での要素分割を、最小 $0.05\text{cm} \times 0.05\text{cm}$ 、き裂の幅を 0.01cm とした。部材の物理定数ならびにき裂に関する諸元は、6.3節で示したものと同様であるため省略する。

図-6.8にき裂先端部の要素の詳細、荷重位置と強度を示す。また、図-6.9にプロセスゾーン内の接点に設けたZ方向のばねを示す。なお、解析プログラムは汎用解析ソフトである ANSYS を用いた。

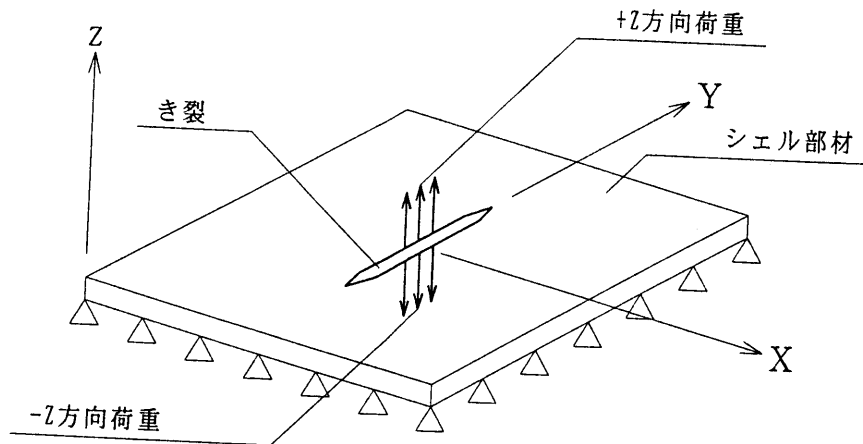


図-6.6 FEMモデルの全体図

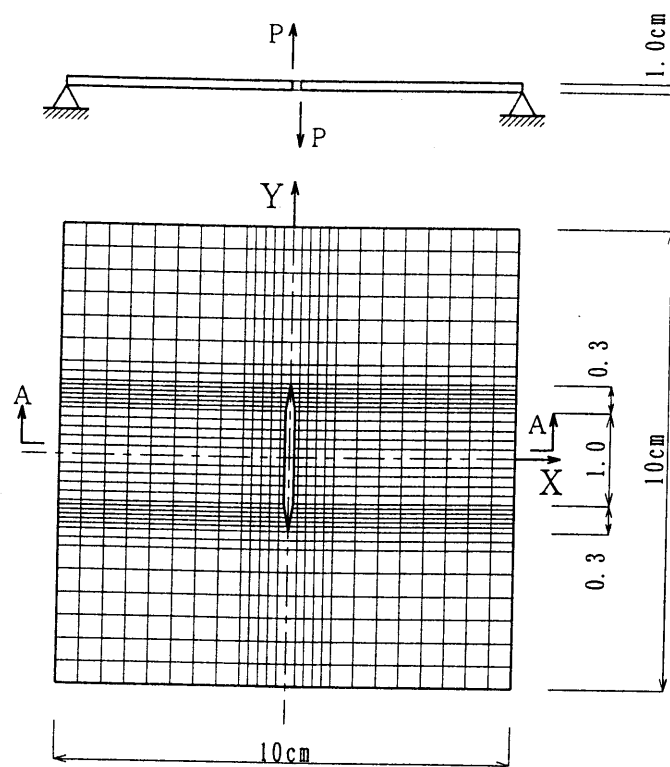
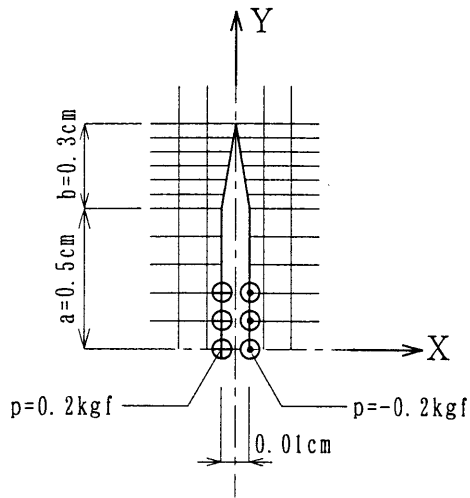


図-6.7 要素分割図



a : き裂長さの 1/2
 b : プロセスゾーン長さ
 c : 集中荷重

図-6.8 き裂先端部のモデル詳細図

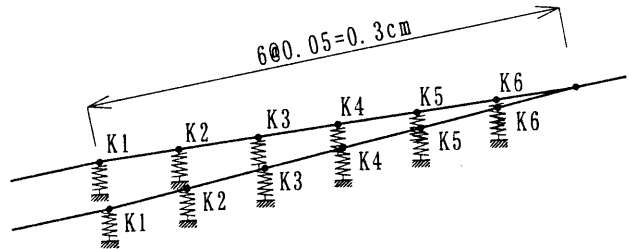


図-6.9 プロセスゾーン内のばね配置

6.4.2 解析結果の比較と考察

FEM解析におけるばねは、図-6.9に示すように0.05cmピッチに6ヶ所設け、各ばね定数を K_i ($i=1, 2, \dots, 6$)とする。はじめに各 K_i を一定として、表-6.1に示すように $K_i = 2.1 \times 10^8 \sim 2.1 \times 10^5$ までの4ケースについて計算を行い、6.3節に示した数値計算例で求めた結果との比較を行う。

表-6.1 ばね定数値のケース

Case	K (kgf/cm)
1	2.1×10^8
2	2.1×10^7
3	2.1×10^6
4	2.1×10^5

図-6.10にY軸上におけるき裂中央 ($x=0, y=0$) からプロセスゾーン端部 ($x=0, y=a+b$) までのZ方向の変位の比較図を示す。またプロセスゾーン部分における拡大図を、図-6.11に示す。

開口変位の形状ならびに変位量の比較において、ばね定数が $K = 2.1 \times 10^6$ kgf/cmのCase-3において、計算例とほぼ近似した結果が得られた。また、図-6.11のプロセスゾーン内での変位量について見ると、ばね定数の大きいCase-1と2では、若干ではあるが変位が反転するという結果が得られた。

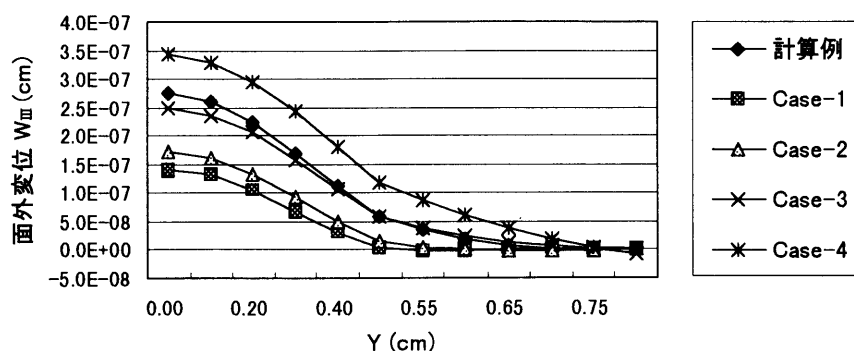


図-6.10 面外変位 (W_{III}) の比較

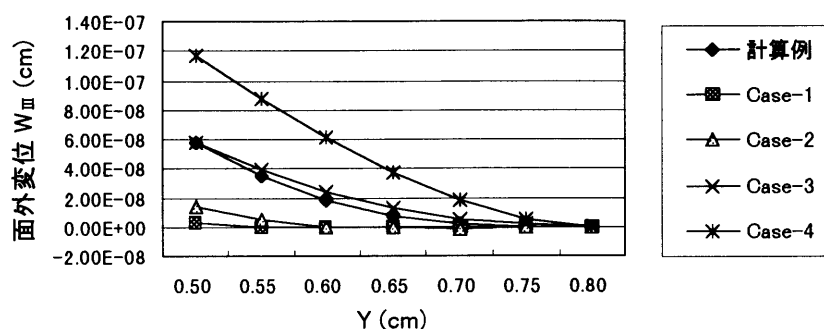


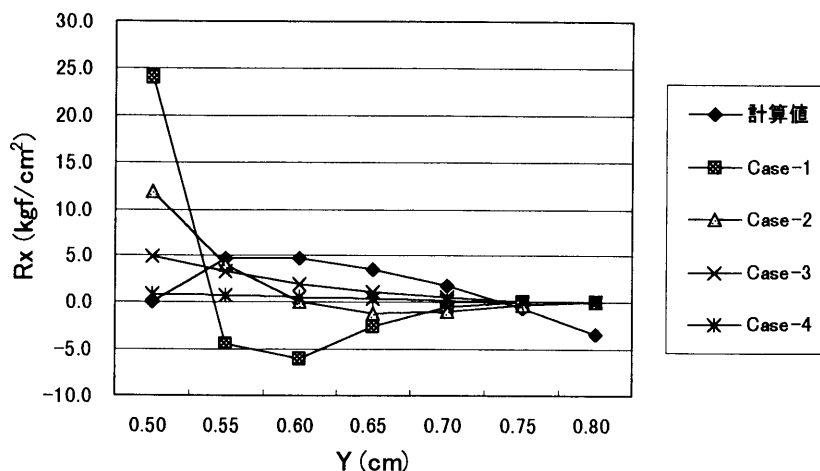
図-6.11 プロセスゾーン内における面外変位 (W_{III}) の比較

次にプロセスゾーン部分における数値計算例で求めた等価せん断力と、FEM解析のばね反力から求めたせん断力の比較を表-6.2と図-6.12に示す。

6.3節の計算例では、き裂先端において等価せん断力は0となり、 $Y=0.6\text{cm}$ で最大値を示し、 $Y=0.8\text{cm}$ のプロセスゾーン端部において負の最大値を示している。これに対し、FEM解析の結果はき裂先端部のばねに最大反力が生じ、その後は急減している。また、ばね定数の大きいCase-1と2では、計算例と同様にせん断力の値に反転現象が見られる結果が得られた。

表-6.2 等価せん断力 R_x (kgf/cm^2) の比較

Y (cm)	計算例	FEM 解析結果			
		Case-1	Case-2	Case-3	Case-4
0.50	0.02	24.12	11.86	4.86	0.98
0.55	4.65	-4.54	3.94	3.26	0.74
0.60	4.71	-6.06	0.11	2.00	0.52
0.65	3.59	-2.50	-1.10	1.08	0.32
0.70	1.72	-0.46	-0.94	0.48	0.16
0.75	-0.68	0.07	-0.36	0.12	0.04
0.80	-3.49	0.00	0.00	0.00	0.00

図-6.12 等価せん断力 R_x 分布の比較

全作用荷重の半分 ($\Sigma p = 0.5 \text{ kgf}$) と片側のプロセスゾーン内における等価せん断力 (ΣR_x) の差を、表-6.3 に示す。本来 Y 軸上における Σp と反力となる等価せん断力の合計は一致するはずであるから、その差 $\Sigma p - \Sigma R_x$ はプロセスゾーンの外 ($|Y| \geq a+b$) において発生していると考えられる。6.3 項の計算例では、図-6.5 に見られるように $|Y| \geq a+b$ において負のせん断力が発生しており、全体として載荷荷重とバランスしている。

同様に表-6.3 に見られるように、FEM 解析結果の Case 1, 2, 3 においても、 $|Y| \geq a+b$ において負のせん断力が発生している。Case 4 ではばね定数が弱いため、ばね反力のみでは荷重を負担出来ず、 $|Y| \geq a+b$ においても正の反力が発生していることがわかる。

表-6.3 載荷荷重と等価せん断力の合計の比較

Case	ΣR_x (kgf)	$\Sigma p - \Sigma R_x$ (kgf)
計算値	0.526	-0.026
Case 1	0.531	-0.031
Case 2	0.675	-0.175
Case 3	0.590	-0.090
Case 4	0.138	0.362

ΣR_x : 片側のプロセスゾーンに生じる等価せん断力の合計 (kgf)

Σp : 全作用荷重の 1/2 ($\Sigma p = 0.5 \text{ kgf}$)

次に数値計算例の等価せん断力分布と同等な反力分布となるばね定数 K_i (図-6.9 参照) を試行錯誤により求める。その結果を Case-5 として表-6.4 に示す。また求めたばね定数値の対数グラフを図-6.13 に、変位量および等価せん断力の数値計算例との比較を図-6.14、および図-6.15 に示す。

ばね定数値を、き裂先端 ($Y=0.5\text{cm}$) において 10^3 オーダーと極めて小さくし、 $Y=0.55\text{cm}$ 位置における 10^6 オーダーから $Y=0.75\text{cm}$ における 10^9 オーダーまで指数的に増大させることにより、変位量ならびに等価せん断力の分布形状を、6.3 項に示した数値計算例程度にほぼ一致させる結果が得られた。このことは設定した解析モデルが、プロセスゾーンをマイクロクラック等が発生している破壊進行領域と位置づけして、開口先端よりプロセスゾーン端部の完全弾性体部までの材料の物性値を、強さの変化するばねで表現したことになる。したがって導いたたわみ関数は、応力集中のおきるプロセスゾーン部分を、図-6.13 に示すようなばね定数のばねを挿入したモデルとして、FEM 解析して得られる結果に相当したものと言える。

表-6.4 Case-5 における K 値

Y (cm)	ばね番号	K (kgf/cm)
0.50	k1	1.0×10^3
0.55	k2	2.0×10^6
0.60	k3	1.0×10^7
0.65	k4	4.0×10^7
0.70	k5	2.0×10^8
0.75	k6	1.0×10^9

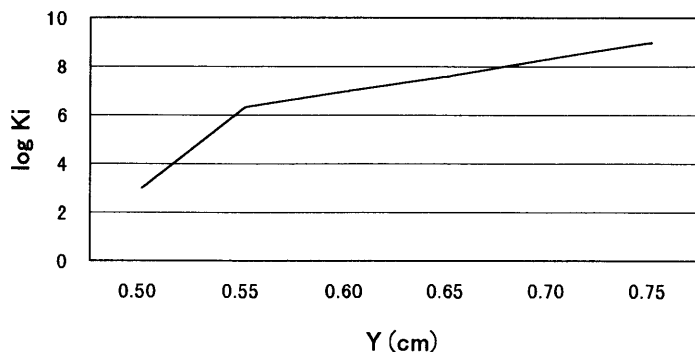


図-6.13 Case-5 におけるばね定数値分布

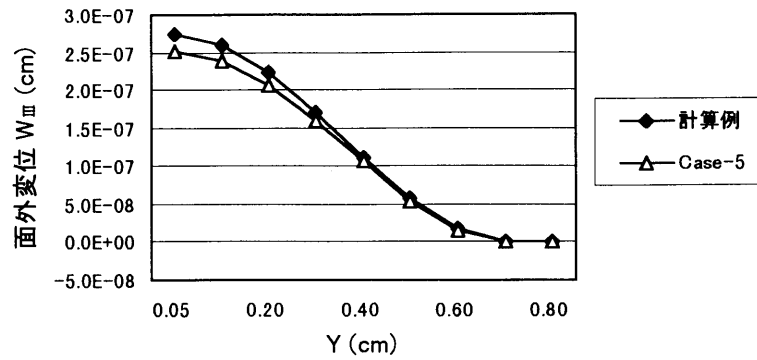


図-6.14 Case-5 における面外変位 (W_{III}) の比較

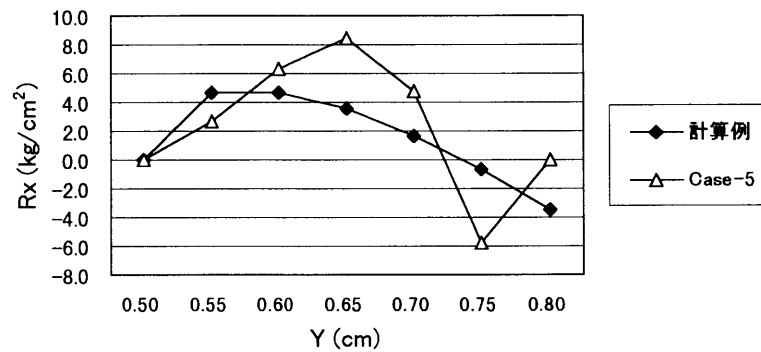


図-6.15 Case-5 における等価せん断力の比較

6.5 まとめ

Y軸上に一本の直線状き裂を持つ無限板に対して、面内強制開口用の相反分布外力を作用させる場合の応力関数を基にして、面外強制開口用の相反分布外力によるたわみ関数を導いた。面外強制開口では、面内問題の場合と異なり、得られた断面力に符号反転現象が現れる結果が得られた。Y軸上において連続という境界条件を満足させるためには、面内力問題では変位とその1階導関数の応力の連続性を考えればよいが、面外力問題ではたわみ W_{III} からその3階導関数までを含めた関数項(変形と断面力)の連続条件を満足させる必要がある。板の古典理論の範囲内(たわみ関数は重調和関数という制約の下)でこの厳しい境界条件を満足させるためには、開口部の荷重が0で無限遠方で純せん断力が作用する場合の解を利用した補正関数も必要となり、このためき裂線上で断面力の反転が生じるものと考えられる。

本研究と同様に古典理論の微分方程式を基本としたシェル要素モデルのFEM解析による検証を試み、符号反転現象が裏付けられた。また中川等により報告され本研究の基本となっている重み関数による積分法による応力または断面力の平滑化手法は、プロセスゾーンに硬さが変化するばねを挿入してFEM解析することに相当するということが示された。プロセスゾーンは、鋼材のような延性材料では塑性変

形が生じた領域であり、コンクリートのような混成材料では微細なひびわれが生じて応力の軟化現象が現れる領域であり、ともに破壊進行領域と位置づけられる。FEMの解析結果より、提案しているたわみ関数がき裂先端から完全弾性部までの剛性を指数関数的に増加させた場合を表現していることが判明したことは有意義なことと考える。しかしながら、断面力の反転現象については、工学的な見地からも今後光弾性実験等により実証していかなければならない課題と考える。

参 考 文 献

- 1) E. Reisner and C. Mass : The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plate, J. of App. Mech., Trans. ASME, Vol. 12, ppA69-A77, 1945
- 2) G. C. Sih, P. C. Paris and F. Erdogan : Crack Tip Stress Intensity Factors for Plane Extensions and Plate Bending Problems, J. of App. Mech. Vol. 20, Trans. ASME, vol. 84, Series E, pp. 306-312, 1962
- 3) F. Erdogan and G. C. Sih : On the Crack Extension in Plate under Plane Loading and Tranverse Shear, J. of Basic Engng., Trans. ASME, December, pp519-527, 1963
- 4) H. Boduroglu and F. Erdgan : Internal and Edge Cracks in a Plate of Finite Width Under Bending, J. of App. Mech., vol. 50, Trans. of ASME. September, pp. 621-629, 1983
- 5) G. C. Sih and J. R. Rice : The Bending of Dissimilar Materials with Cracks, J of App. Mech., Trans. of ASME. September, pp. 477-481, 1964
- 6) 前田春和、藤井康寿、中川建治：き裂を持つ薄版の面内と面外問題の解の関連性と断面力の比較について、土木構造・材料論文集、第13号、pp. 69-78, 1997. 12.

第7章 直線状き裂の面内・面外問題における 応力集中の比較検討

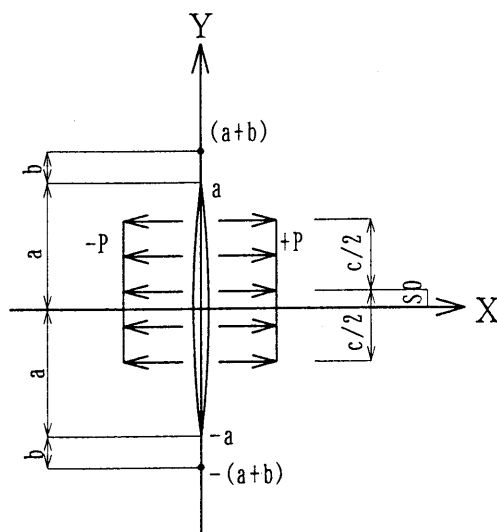
7.1 まえがき

本章では、相反分布力で面内あるいは面外へ強制開口してき裂を進展させるに際して、荷重分布幅の違いが最大応力度または断面力に及ぼす影響を検討する。この興味ある問題は、第2章および第6章で示した応力関数を用いて導かれる。なお、面外問題における断面力集中の問題は前田等による研究¹⁾があるが、無限遠点で外力が作用しき裂開口部には外力が作用しない場合の解を対象としており、き裂開口部に強制開口外力が作用する本研究の主題とは対象を異にするものである。

得られた結果によると、面外開口においてはき裂中央に集中力を作用させた方が、き裂長さ全体に外力を作用させる場合より大きな断面力集中を発生させることが判明した。他方、面内開口ではその逆に、き裂全幅に外力を作用させた場合の方がき裂先端の応力集中が大きくなることが判明した。開口部に作用する外力の作用幅と最大応力の大きさの関係を求めることは、応力拡大係数のように応力集中が無限大になる解では定性的には論じられても、最大応力度の値としては論じ難いことであるから、本研究で求めたような有限な応力集中を構成する関数を導く意義は、この点でも認めらると考える。

7.2 面内強制外力の作用幅と応力集中の関係

検討に用いるモデルは図-7.1に示すように、以下の材料常数を持つ母材に中心き裂を有する無限板とする。



弾性係数	: $E = 210,000 \text{ kgf/cm}^2$
ポアソン比	: $\nu = 0.167$
き裂長さ	: $2a = 2 \text{ cm}$
き裂中心座標	: $X = Y = 0$
分布荷重幅	: $c = 0.1 \sim 2.0 \text{ cm}$
荷重中心位置	: $s_0 = 0 \text{ cm}$

図-7.1 等分布荷重と作用位置

作用荷重の合計を $p \times c = \pm 1 \text{kgf}$ として、き裂中央に集中させた場合からき裂全幅に分布させた場合の最大応力 $\sigma_{x\max}$ (面内問題) を求める。き裂中央に集中させる場合の最小分布幅を $c=0.1\text{cm}$ とすると荷重強度は $p=10 \text{kgf/cm}$ となり、き裂全幅に作用する場合は $c=2\text{cm}$ で $p=0.5\text{kgf/cm}$ となる。また、プロセスゾーンの長さとして 0.1cm きざみに $b=0.1\text{cm}$ から 0.5cm までの5ケースについて計算を行う。このモデルは、面外問題においては荷重の方向が面外方向ということを除き、その他の条件はすべて共通とする。また面外問題においては、最大応力の代わりに最大等価せん断力 $R_{x\max}$ を求めるものである。

図-7.2 に荷重分布幅 c と最大応力 $\sigma_{x\max}$ の関係を示す。図より面内問題では、荷重を全幅に作用させた場合の方が最大応力が大きくなることが判る。プロセスゾーン長さ b が最小の 0.1cm の場合では、 $c=0.1\text{cm}$ としてき裂中央に作用させると最大応力 $\sigma_{\max}=1.35\text{kgf/cm}^2$ となり、全幅に作用させると $\sigma_{\max}=1.64\text{kgf/cm}^2$ となって 1.21 倍の値を示す。これに対して、 b を 0.5cm とした時には、き裂中央に作用させた場合で最大応力 $\sigma_{\max}=0.54\text{kgf/cm}^2$ 、全幅に作用した場合で $\sigma_{\max}=0.51\text{kgf/cm}^2$ と 1.06 倍とその差は小さくなる。図-7.3 はこの関係を示したもので、荷重を全幅に作用させた場合の最大応力に対する各分布幅のケースにおける最大応力の比を表したものである。

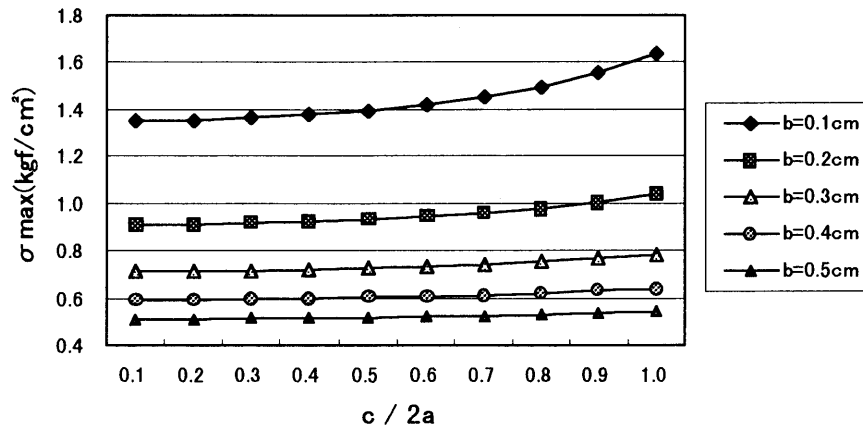
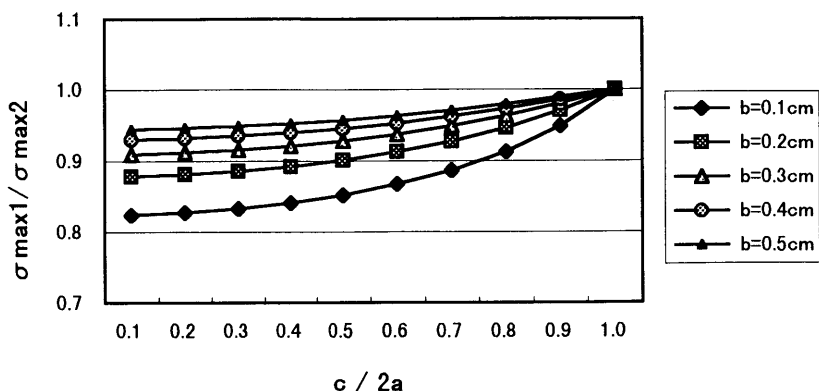


図-7.2 荷重分布幅と最大応力の関係



$\sigma_{\max 1}$: 各分布幅のケースにおける σ_{\max}
 $\sigma_{\max 2}$: 荷重をき裂全幅 ($c = 2cm$) に作用した場合の σ_{\max}

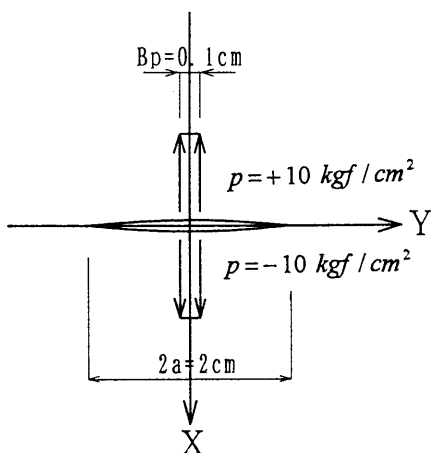
図—7.3 荷重を全幅に作用させた時の最大応力に対する各荷重分布幅における最大応力の比率

次に、この関係をより顕著に表すために図—7.4、図—7.5に示したように荷重を中央に集中した場合とき裂先端部に集中した場合の比較を行う。荷重ケースとして

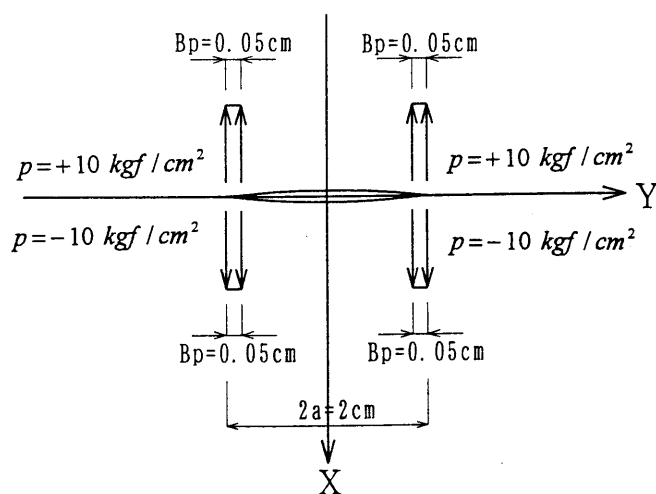
① Case 1 : 中央載荷 荷重幅 $c=0.1cm$

② Case 2 : き裂先端部載荷 荷重幅 $c=0.05cm$ とし 2ヶ所に載荷

とする。共に荷重強度は $p = \pm 10 kgf/cm$ とし荷重の合計は等しくする。プロセスゾーン長さ b を $0.1cm$ から $0.5cm$ まで $0.1cm$ ピッチとし、各最大応力値を求め比較する。結果を表—7.1と図—7.6に示す。予想どおり Case 2 の場合の応力集中は Case 1 よりかなり大きくなり、 b が最小の $0.1cm$ の時で、Case 2 は Case 1 の 1.83 倍となる。



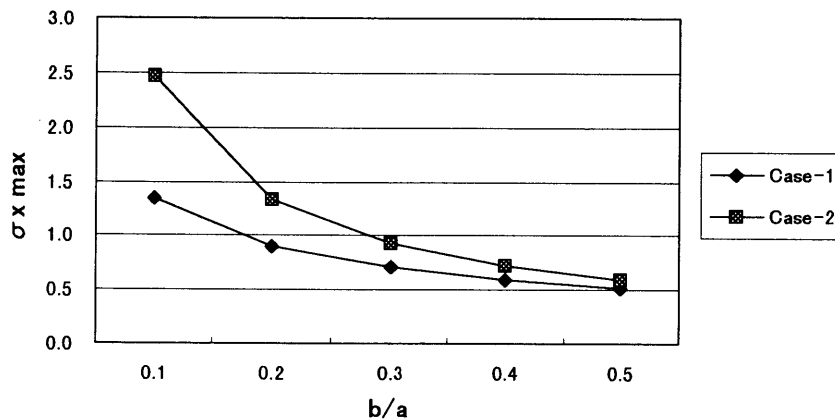
図—7.4 荷重位置 Case 1



図—7.5 荷重位置 Case 2

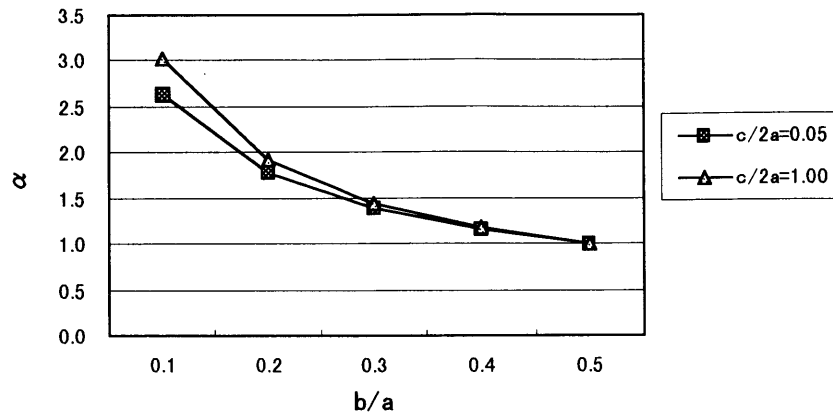
表—7.1 荷重載荷位置と最大応力の関係

	b (cm)	最大応力 $\sigma_{x \max}$ (kgf/cm ²)				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
①	Case 1	1.348	0.908	0.710	0.592	0.511
②	Case 2	2.470	1.333	0.930	0.723	0.597
③	②/①	1.833	1.467	1.309	1.222	1.167

図—7.6 荷重作用位置と最大応力 $\sigma_{x \max}$ の関係

また図—7.2 から判るように、最大応力はプロセスゾーンの長さに大きく影響される。この事は、藤井等²⁾³⁾により既に報告されているためここでは詳細については触れないが、後述する面外問題との比較という点で興味のある問題である。図—7.7 にプロセスゾーン長さ b と最大応力の関係を示す。図は、分布幅が最小（集中荷重作用）の $c=0.1\text{cm}$ と最大（等分布荷重が全幅に作用）の $c=2\text{cm}$ の2ケースについて、 b が 0.5cm の場合の最大応力を1とし、各 b 値 ($0.1, 0.2, 0.3, 0.4\text{cm}$) における最大応力の比を示したものである。 $b=0.1\text{cm}$ の場合で最大値を示し、荷重を全幅に作用した場合で3倍、分布幅が最小の場合で2.64倍となった。

塑性域として定義してあるプロセスゾーン長さ b が大きくなると、作用荷重に対する反力としての応力が分散されその結果最大応力値は小さくなり、またプロセスゾーン長さ b が小さくなると応力は集中し、最大応力値は大きくなる。 $b=0$ としたときには、最大応力値は無限大となり Westergaard の式に一致することになる。



α : $\sigma_{\max 1} / \sigma_{\max 2}$

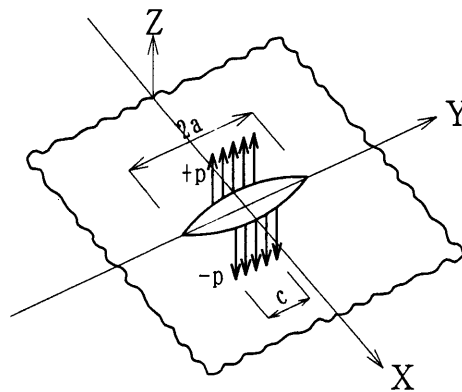
$\sigma_{\max 1}$: 各プロセスゾーン長さにおける最大応力 σ_{\max}

$\sigma_{\max 2}$: $b=0.5\text{cm}$ における最大応力 σ_{\max}

図—7.7 プロセスゾーン長さと最大応力の関係

7.3 面外強制外力の作用幅と断面力集中の関係

7.2項の面内問題で採用した材料物性およびき裂条件と同様の条件を、面外問題においても採用する。また作用荷重の合計も、 $p \times c = \pm 1\text{kgf}$ と同様とするが、荷重の方向はき裂縁辺に面外相反方向に作用するものとする。計算ケースとしてのプロセスゾーン長さおよび荷重分布幅についても、7.2項と同様のケースとする。検討対象としては、Y軸上に発生する面外方向の最大等価せん断力 R_{\max} とする。



図—7.8 き裂開口部に作用する面外相反分布荷重 (Mode III)

図—7.9に荷重分布幅 c と最大等価せん断力 R_{\max} の関係を示す。図より面外問題では、面内問題とは逆にき裂中央に集中荷重を作用させた場合の方が最大等価せん断力が大きくなるのが判る。プロセスゾーン長さ b が最小の 0.1cm の時で集中荷重を作用させた場合に生じる最大断面力 $R_{\max} = 29.5\text{ kgf/cm}^2$ は、全幅に作用させた場

合に生じる最大断面力 $R_{\max} = 24.4 \text{ kgf/cm}^2$ の 1.21 倍を示している。これに対して、 b を 0.5 cm とした時には、集中荷重時の最大断面力 $R_{\max} = 3.14 \text{ kgf/cm}^2$ 、全幅に作用させた場合で $R_{\max} = 2.84 \text{ kgf/cm}^2$ と 1.11 倍とその差は小さくなる。図-7.10 はこの関係を示したもので、荷重を全幅に作用させた場合の最大断面力を 1 とし、各分布幅における最大断面力の比を表したものである。

また図-7.9 から判るように、面内問題と同様に最大断面力はプロセスゾーンの長さに大きく影響される。図-7.11 にプロセスゾーン長さ b と最大断面力の関係を示す。図-7.7 と同様に、分布幅が最小（集中荷重作用）の $c = 0.1 \text{ cm}$ と最大（等分布荷重が全幅に作用）の $c = 2 \text{ cm}$ の 2 ケースについて、 b が 0.5 cm の場合の最大断面力を 1 とし各 b 値 ($0.1, 0.2, 0.3, 0.4 \text{ cm}$) における最大断面力の比を示したものである。 $b = 0.1 \text{ cm}$ の場合で最大値を示し、集中荷重の場合で 9.39 倍、全幅に作用した場合で 8.59 倍を示している。面内問題と比較し、面外外力作用時の方がプロセスゾーンの長さの違いが最大断面力に与える影響が大きいことが判る。

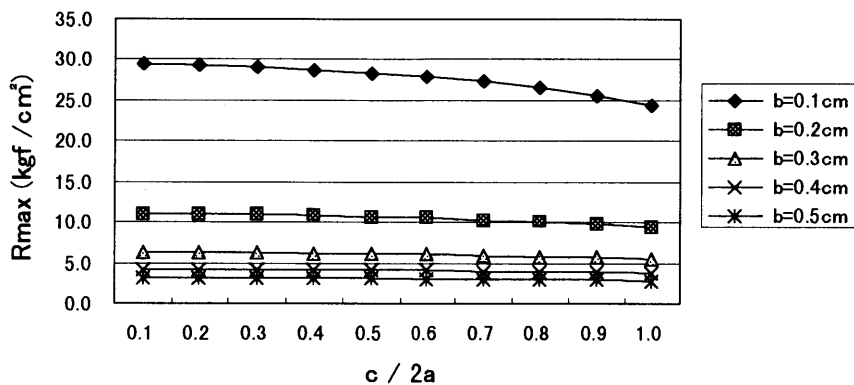
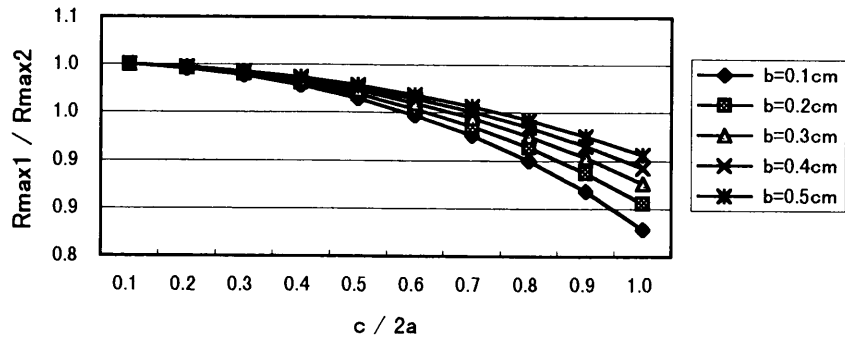
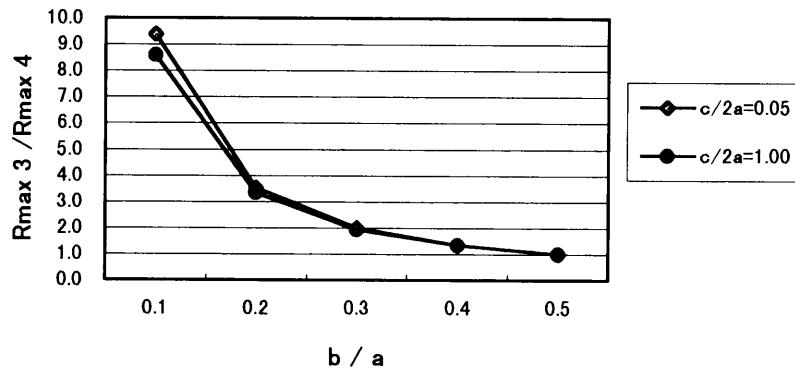


図-7.9 荷重分布幅と最大等価せん断力の関係



$R_{\max 1}$: 各分布幅ケースにおける最大等価せん断力 R_{\max}
 $R_{\max 2}$: 集中荷重 ($c=0.2\text{cm}$) 作用時の最大等価せん断力 R_{\max}

図—7.10 集中荷重作用時の最大等価せん断力に対する各荷重分布幅における最大等価せん断力の比率



$R_{\max 3}$: 各プロセスゾーン長さにおける最大等価せん断力 R_{\max}
 $R_{\max 4}$: $b=0.5\text{cm}$ における最大等価せん断力 R_{\max}

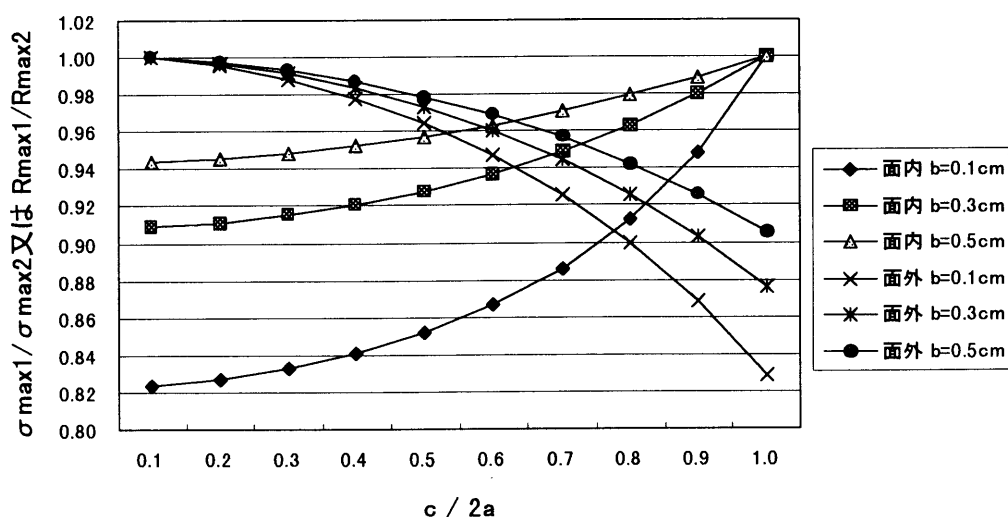
図—7.11 プロセスゾーン長さと最大等価せん断力の関係

7.4 面内・面外問題における応力および断面力集中の比較検討

本節においては、7.2節、7.3節で求めた荷重分布幅およびプロセスゾーン長さが最大応力または断面力に与える影響を基に、面内問題における応力集中と面外問題における断面力集中の定性的な違いを比較する。

図-7.12 に荷重分布幅と最大応力または最大断面力の関係の面内・面外問題の比較を示す。面内問題については、き裂全幅に等分布荷重が作用する場合の最大応力を1として、荷重分布幅 c を変化させた場合の各最大応力の比を、また面外問題においては、き裂中央に集中荷重が作用した場合の最大断面力を1として c を変化させた場合の最大断面力の比を示す。図より荷重分布幅の違いが最大断面力に与える影響は、面内と面外ではほぼ逆対称の傾向となる。しかしながら、荷重分布幅が中間の $c/2a=0.5$ の場合を比較すると、面内問題では最大断面力の値は最小値に近く、面外問題では最大値に近い値となっている。この事は面内問題ではき裂先端に荷重が近い程最大応力に与える影響の度合いが大きい事を意味している。7.2節で示したように中央に作用した場合と比較しき裂先端部に作用した場合には、 $b/a=0.1$ の場合で1.83倍の最大応力が得られた。

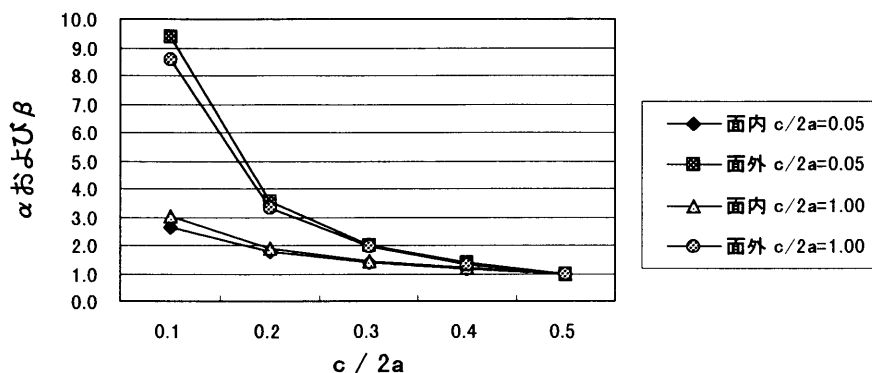
一方面外問題では、分布幅の影響は面内問題より小さく $c/2a=0.5$ の時で、最大断面力の差は4%以下である。この事は中央に集中荷重を作用させる時断面力集中が最も大きくなるが、荷重分布幅がき裂の半分程度に広がっても最大断面力に与える影響は面内問題よりも小さくなることを意味している。



- $\sigma_{\max 1}$: 各分布幅のケースにおける σ_{\max} (面内問題)
 $\sigma_{\max 2}$: 荷重をき裂全幅 ($c = 2\text{cm}$) に作用した場合の σ_{\max} (面内問題)
 $R_{\max 1}$: 各分布幅ケースにおける最大等価せん断力 R_{\max} (面外問題)
 $R_{\max 2}$: 集中荷重 ($c = 0.2\text{cm}$) 作用時の最大等価せん断力 R_{\max} (面外問題)

図-7.12 荷重分布幅と最大断面力の面内・面外問題の比較

次にプロセスゾーン長さ b が最大断面力に与える影響の面内と面外問題の比較を図-7.13に示す。図より b が小さくなるにつれて面内・面外とも最大断面力は大きくなるが、面外問題の方がその影響はより顕著である。これは、面外問題においては断面力の反転現象が生じるため、 b が小さくなればなるほど面内問題と比較し応力の集中度合いが大きくなるものと考えられる。



- α : 面内問題において $b = 0.5\text{cm}$ の場合の最大応力に対する他の b 値における最大応力の比
 β : 面外問題において $b = 0.5\text{cm}$ の場合の最大断面力に対する他の b 値における最大断面力の比

図-7.13 面内・面外問題において b が最大断面力に与える影響の比較

7.5 まとめ

本章では、分布荷重の作用幅およびプロセスゾーンの長さが面内および面外問題における最大応力度または断面力に与える影響を検討した。以下に検討結果をまとめる。

1) 面内問題

き裂全幅に荷重を作用させる方がき裂中央に荷重を集中させるより最大応力は大きくなる。さらに、き裂先端に荷重を集中させることが最も応力を集中させることになる。つまりき裂を進展させるためには、き裂先端に強制開口させる荷重を集中させることが効果的である。特に塑性領域であるプロセスゾーンの長さが小さいほど応力集中は大きくき裂は進展しやすくなるが、集中の度合いは面外問題よりは小さい。

2) 面外問題

面内問題とは逆にき裂中央に荷重を集中させた場合の方がき裂全幅に荷重を作用させる場合より大きな断面力集中が得られる。しかしながら、荷重の分布が

き裂中央を中心としている限り分布幅がき裂長さの半分程度に拡大しても、最大断面力に与える影響は少ない。本研究で採用したモデルでは、その差は4%以下であった。また面外問題では、断面力に符号反転現象が生じるため、プロセスゾーン長さによる最大断面力に与える影響は面内問題と比較し3倍程度大きくなる。

本章で得られた結論は、既に発表されている応力拡大係数から得られる定性的な結論⁴⁾と同じであるが、本研究で導いた関数は応力拡大係数と違い具体的な応力値または断面力値を与えるものであって、具体的な特性値で比較可能な結果を提供するので、工学的に取り扱いが容易であり適用範囲が広いと思われる。

参 考 文 献

- 1) 前田春和、藤井康寿、中川建治：き裂を持つ薄版の面内と面外問題の解の関連性と断面力の比較について、土木構造・材料論文集、第13号、pp.69-78, 1997.12.
- 2) 藤井康寿、中川建治：面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数、土木学会論文集、No.502, V-25, pp.23-32, 1994.
- 3) 藤井康寿：遷移区間を導入した応力関数に基づく破壊過程の基礎的研究、京都大学学位論文、1997.
- 4) Murakami, Y.: Stress Intensity Factors Handbook, Vol.1, Pergamon Press, 1987.

第8章 結論

8.1 本研究の成果

本研究の成果は、き裂先端で有限な応力集中と開口変位を伴うプロセスゾーンを構成する中川等の応力関数を基礎に、一様弾性体中のき裂開口部に強制開口外力が作用する場合の解析解を系統化するとともに、き裂近傍における応力集中の特性を明確化することが出来たことである。面内問題においては、無限板、矩形板、半無限板の直線状き裂開口部に外力を作用させる解および円孔周辺の放射状き裂の場合には円孔周辺の応力あるいは変位を指定する各応力関数を導き、それぞれ数値計算例により応力集中の特性と適用限界を示した。次に無限板中の直線状き裂に対して面外方向の強制開口力を作用させる問題の解を導き、数値計算例をFEM解析と比較検討することにより、解の妥当性を検証した。さらに、面内問題と面外問題における応力集中の特性の違いを示すことが出来たことである。また、室内実験および現場実験の結果に適用することにより、解の有効性を検証し工学的な意味付けが出来たことである。特に中川等の一連の研究において課題となっていたプロセスゾーン長さの推定方法とき裂進展の予測に対して、具体的な成果が得られたと考える。

本研究での具体的な成果を以下に述べる。

- (1) 無限板、矩形板、自由辺を片側に有する半無限板等の直線状き裂の開口部に、任意の分布幅を有する面内強制開口外力が作用する問題に対し、平滑化された応力集中を生じさせる応力関数および解析手法を導いた。矩形板に対する解の適用限界は、境界条件に対する閉じ合わせ誤差を5%以下とすると、矩形板長さに対するき裂長さの比は20%程度以下にする必要があることを示した。また、自由辺を有する半無限板については、自由辺での境界条件は完全に満足する結果は得られたが、自由辺がき裂に近づくとき荷重強度にばらつきが生じることと、外力が作用していないき裂開口部分において誤差応力が生じることが判明した。自由辺とき裂の距離がき裂半長さの1.6倍の時、作用した荷重強度に対する誤差が5%となり、本研究で導いた自由辺を有する半無限板に対する解の適用限界と判断される。
- (2) 無限板内の円孔周辺の放射状き裂において、円孔周辺で面内方向に内圧が作用する場合の応力関数を導いた。静的破砕剤や薬液注入時の膨張作用により発生するき裂を想定した円周上でき裂が開いたモデルと、鉄筋の腐食膨張などを想定した円周上で円周方向の変位が0に拘束されたモデルについて数値計算例を示すとともに、各パラメーターの変化による応力集中の特性を示した。き裂長さに対しプロセスゾーン長さの比が小さくなると応力集中が大きくなることは既に報告されており、放射状き裂においても同様の結果が得られた。き裂本数ならびに円孔半径の変化は、放射状き裂特有のものである。

が、いずれも増加すると最大応力の低下が認められた。き裂本数の増加による最大応力の低下は、応力の開放、分散と考えられ、円孔半径の増加による最大応力の低下は、割裂引張強度試験において報告されている寸法効果と考えられる。

- (3) 無限板中の直線状き裂に対して開口部に部分的に等分布する面外方向の外力による強制開口問題の解を導いた。数値計算例において、前田等の報告と同様にき裂線に沿う断面力に符号反転現象が確認された。せん断力の反転現象の検証として、プロセスゾーン部分を面外方向のばねに置き換えたシェル要素モデルを設定し、FEM解析によるいくつかの計算例で比較検討を行った。その結果ばね常数をき裂先端からプロセスゾーン端部の完全弾性体部まで指数関数的に増加させたモデルにより、変位ならびに符号反転を含めた断面力の値をほぼ一致させることができた。このことは、古典理論に基づく薄板の曲げの微分方程式を基本とした場合には、面外方向のせん断力の符号反転現象は当然の帰結と結論付けられた。
- (4) 直線状き裂に対する強制開口の面内問題と面外問題における応力および断面力集中の特性の違いを、分布荷重の作用幅およびプロセスゾーン長さの変化に対して検討した。その結果、面内問題においてはき裂先端に荷重を集中させることがより大きな応力集中を発生させ、反対に面外問題においては開口部中央に荷重を集中させることがより大きな断面力集中を発生させることが判った。しかしながら、面内問題の荷重作用位置が最大応力に与える影響と比較し、面外問題における荷重分布幅の影響は小さく、開口部中心で分布幅がき裂の半分程度まで広がっても集中荷重作用時に得られる最大断面力の値と大きな差はないことがわかった。プロセスゾーン長さの影響は、面外問題では断面力の符号反転のため正負の大きな応力集中が生じることになり、最大断面力に与える影響は面内問題より大きくなることが判明した。
- (5) 本研究で求めた関数の適用例として、矩形板の解析手法をモルタル供試体を用いた孔内載荷試験結果に適用した。試験の内容は、中央の円孔に内圧をかけ強制的にき裂を発生・進展させ、その時のき裂周辺のひずみをゲージにより観測することにより、き裂発生位置を確認したものである。作用荷重とき裂発生位置より逆推定したプロセスゾーン長さは、ばらつきがあるが約1 cmという結果が得られた。実際には、プロセスゾーン長さも材料の物性や強度も一定ではなくある幅を持って論じられべきものであるが、今回検討した試験結果と計算値では開口変位量および測定点でのひずみ量は共に妥当性のある範囲であった。このことは、ひずみゲージを利用したき裂進展実験と矩形板に対する解析手法が、プロセスゾーンの長さの推定に有効であることを示している。また、本研究の応力関数は、応力拡大係数のような応力度に対するパラメーターとしての扱いではなく、直接材料の破壊強度に相当する応力度を与えることが出来るため、き裂の進展予測に容易に活用可能であるこ

とを示し得た。

- (6) 自由辺を有する半無限板の応力関数を、静的破砕剤工法による岩盤の破砕実験に対して適用した。実験は9個の円孔を持つモデルについて行われたため、解析では応力関数を複数重ね合わせる手法を用い、大変形問題ではあるが実験結果の開口変位量および自由面方向への変位量と近似する値を求めることが出来た。隣接するき裂のプロセスゾーン同士が相互に重なり合うという仮定を用いることにより、本解析関数を塑性力学の分野である大変形問題まで適用可能であることを示した。また、動的な岩盤破砕工法であるくさび貫入工法が岩盤の動弾性係数を用いることにより変形性状を評価することが出来たのに対して、静的破砕剤工法では静弾性係数を用いることが妥当であるということを確認することが出来た。

8.2 今後の課題

本研究の主題であるき裂内部に外力が作用する応力関数は、実際の工学的な問題への適用範囲が広いと考えられる。しかし、実際の問題の多くは有限の広がりを持つ対象物であるため、無限板での応力関数を適用する場合には、その適用範囲を明確にする必要がある。線形弾性破壊力学の分野では、き裂先端の近傍においてのみ線形弾性破壊力学は適用可能と表現されるが、本研究の応力関数は全領域を対象としているため、特にその必要性があると思われる。本文での矩形板および半無限板での試みもその一つと言える。矩形板での閉じ合わせ誤差の結果は必ずしも満足のものではなく、境界条件に対する誤差の縮小を目的に、今後は平滑な級数解を重ね合わせる選点法や補正項などで対処する必要があるだろう。

また、本研究での応力関数を含めた中川等が報告している一連の応力関数（以下応力関数群と総称する）は、最大応力度を計算により求められるため、材料の破壊応力度と直接比較しつつき裂進展の評価を与えることができる。この点が応力拡大係数やJ積分と異なり大きな特徴といえる。もちろん応力関数群は、き裂先端に塑性領域の存在を前提にしているのに対して、応力拡大係数がき裂先端では完全弾性体としてのWestergaardの式を基本としているという基本的な違いはある。しかし、応力関数群は数学的にかなり難解であり、種々の境界条件や荷重条件に対する解を求めることが煩雑である。これに対して、応力拡大係数は既に様々なケースについて発表され、実験結果との対応の報告もなされている。したがって、本研究の応力関数から得られる結果と従来の応力拡大係数の対応を研究することが、本研究の成果をより汎用性の高いものにするものと思われる。

コンクリートのようにき裂先端前方で形成される破壊進行領域が破壊靱性値に与える影響が無視出来ない材料では、塑性領域としてのプロセスゾーンを取り入れた本応力関数群の適用は意義のあるものと思われる。現状においてはプロセスゾーンを含めた破壊進行の評価に対して、有限要素法や境界要素法を活用したアプローチ

が数多く研究されているが、引張軟化特性を表現するためバネ要素をどのように設定するかという問題や要素分割数の制約等解析法特有の問題が、詳細な応力集中の追求の支障になりがちである。本応力関数群は、プロセスゾーンをマクロに開口変位として表現し得る応力関数を与えるため、多くの実験結果が報告されているコンクリートの引張軟化曲線と本応力関数で求めたプロセスゾーン内における応力-変位曲線との対応を研究することにより、本応力関数群の工学的な意味付けをより明確化することが可能になるとと思われる。

次に、中川等の一連の研究において課題の一つにあげられているプロセスゾーン長さ b の推定であるが、き裂の進展を側方荷重により制御しながらひずみを測定し、き裂先端位置を判定することから b を逆推定する方法は、かなり精度の良い結果が得られたと考える。しかし、材料の強度を含む物性値、き裂の進展方向など当然ばらつきがあり、その結果得られた b にもばらつきが見られた。破壊進行領域である b の大きさはAE法やX線造影撮影などにより認められてはいるが、その物性も含めた評価方法は現在破壊力学に携わる研究者の中心的な課題の一つである。本応力関数群を使って逆解析により求めたプロセスゾーン長さ b は、第3章でのモルタルでは約1cm、第4章の静的破碎剤工法による岩盤破碎実験では5cm、栖原等¹⁾によるくさび貫入工法による岩盤破碎実験では5.5cmという値が推定された。また他の研究によると、重み関数の関数形が異なるとき裂先端の応力集中の大きさや形状の滑らかさ等に相違が生じるが、エネルギー解放率(J 積分)の視点から考察すると、重み関数による相違は支配的なものではなくなる事が判明している²⁾。したがって、本応力関数群を活用して、実験で計測される変形やひずみ量からプロセスゾーン長さを逆推定することは極めて有効と考える。また有限要素法による比較検討によって、面外問題の解はき裂先端からプロセスゾーン端部の完全弾性体までを強さが指数関数的に増加するばねに置換することとほぼ同等との結果が得られたが、他の問題についても同様の検討を行い系統化するとともにさらに実験等を積み重ね、プロセスゾーンの特性に対する本応力関数群が与える変位と応力の位置づけを明確化していくことが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 栖原秀郎、藤井康寿、中川建治：くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案、土木学会論文集、No. 528、V-29、pp. 167-177、1995.
- 2) 藤井康寿・中川建治：面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数、土木学会論文集、No. 502、V-25、pp. 23-32、1994.

謝 辞

本論文は、著者が平成8年4月に岐阜大学博士後期課程に入学後現在に至るまでの3年間の成果をまとめたものです。

本研究を実施するにあたり、岐阜大学中川建治教授には入学前の半年間も含め3年半の間、終始ご厚情あるご指導、ご鞭撻を賜り心より感謝いたします。本当にお礼の言葉ありません。ありがとうございました。また、中川研究室（現岐阜大学地域共同研究センター所属）の藤井康寿助教授には、多大なるご支援ならびにご助言を頂きました。厚く御礼申し上げます。

またお忙しいなか、副査として著者の論文に目を通しご指導を頂きました森本博昭教授、六郷憲哲教授、ゼミにおいて親切なご指導頂きました八嶋厚教授に厚く御礼申し上げます。

そして、中川研究室の先輩の方々である高木禄朗氏、村瀬安彦氏、栖原秀朗氏、長瀬弘信氏、前田春和氏、朱火江氏には多大なご協力と貴重なご助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

さらに、私の仕事関係のお得意様の方々には、叱咤激励のお言葉を頂くと同時に、私のわがままも聞いて頂きまして本当に有り難うございました。厚く御礼申し上げます。

私の勤務先である日本国土開発株式会社の皆様にも多大なご支援、ご鞭撻を頂きました。今回このような研究機会を与えてくださった辻岡聡宏社長、建築本部長石井富雄副社長、東京支店長坪井修朔専務取締役にも厚く御礼申し上げます。

また、暖かいご指導ご支援を頂きました佐久間彰三専務取締役、投稿論文作成およびデータ整理等多大なるご助力を頂きました二宮康治氏、飛田裕氏、岡千裕氏、幸田麻希さん、豊崎実氏、野々村篤氏には厚く御礼申し上げます。また、終始暖かくご支援頂きました会社の皆様にもお礼申し上げます。

このように、本論文は多くの方々のご指導、ご教示、ご助言、ご協力ならびに激励があって出来上がったものであります。皆様には重ねて厚くお礼申し上げます。

最後に、この3年半の間常に笑顔で励ましてくれた妻 禎子に心より感謝致します。

平成10年11月

本研究に関連する発表論文ならびに参考論文

発表論文

1. 阿部安秀、中川建治、岡千裕：プロセスゾーンを考慮したき裂進展の理論解析と実験的検証、材料、Vol. 47, No. 2, pp. 161-168, 1998.
2. 阿部安秀、村瀬 安彦、藤井 康寿、中川 建治：き裂開口部に面外荷重が作用する無限板のたわみ関数解と FEM 解析との比較（材料学会誌、材料、掲載決定）

参考論文

1. 阿部安秀、藤井康寿、栖原秀郎、中川建治：円孔周辺に放射状クラックを有する無限板の応力関数に関する研究（コンクリート工学論文集、投稿中）