

直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と  
岩盤問題への応用に関する研究

Studies on the stress analysis of a crack near the interface in dissimilar  
anisotropic composite materials and its application for rock problems

平成 8 年 1 月

長 瀬 裕 信

直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と  
岩盤問題への応用に関する研究

Studies on the stress analysis of a crack near the interface in dissimilar  
anisotropic composite materials and its application for rock problems

平成 8 年 1 月

長 瀬 裕 信

# 直交異方性弾性体境界面近傍のき裂解析と岩盤問題への応用に関する研究

## Studies on the stress analysis of a crack near the interface in dissimilar anisotropic composite materials and its application for rock problems

### 目 次

	Page
第 1 章 序 論	1
1.1 き裂解析の現状	1
(1) 一様弾性体中のき裂	1
(2) 境界面き裂	4
1.2 土木工学分野における破壊力学の適用の現状	7
1.3 まとめ	11
(1) 解析的研究	11
(2) コンクリートや岩石・岩盤を対象とした実務的研究	12
1.4 本研究の目的とその概要	13
(1) 研究の目的	13
(2) 研究の概要	13
参考文献	16
第 2 章 重み積分法による開口関数と要素関数	21
2.1 はじめに	21
2.2 重み積分法	21
(1) 従来 of 開口関数と重み積分	21
(2) 本研究の開口関数と重み積分	22
2.3 基本開口関数	23
2.4 要素関数	27
2.5 まとめ	28
参考文献	29
第 3 章 直交異方性弾性体間の境界面き裂の基礎式	30
3.1 はじめに	30
3.2 解析モデルと基礎式	30
(1) 解析モデルと定数	30
(2) 直交異方性弾性体の基礎式	31
3.3 応力関数の一般解	33
(1) X Y系の一般式	33
(2) $\xi \eta$ 系の一般解	34
3.4 座標差変換した応力と変位	35
(1) 応力の変換	35
(2) 変位の変換式	36

3.5	まとめ	39
	参考文献	40
第4章	要素関数の組み合わせによる一般解の誘導	41
4.1	はじめに	41
4.2	応力関数	41
4.3	境界条件	42
	(1) 開口部における応力解放の条件	42
	(2) 境界線上における変位と応力の連続条件	43
4.4	一般解 -1 ( $F_1 = f_1$ 、 $F_2 = f_2$ )の誘導	43
	(1) 開口部における応力解放の条件	43
	(2) 境界線上における変位と応力の連続条件	45
4.5	一般解 -2 ( $F_1 = i f_1$ 、 $F_2 = i f_2$ )の誘導	50
4.6	一般解 -3 ( $F_1 = f_3$ 、 $F_2 = f_4$ )の誘導	51
4.7	一般解 -4 ( $F_1 = i f_3$ 、 $F_2 = i f_4$ )の誘導	52
4.8	一般解 -5 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解の誘導	52
4.9	その他の一般解の誘導 (一般解 -6~32)	56
4.10	一般解の分類と図化	58
	(1) 一般解の分類	58
	(2) 一般解の図化	61
4.11	まとめ	70
第5章	直交異方性弾性体境界面の中心き裂近傍の応力解析と岩盤を対象とするその実用面への応用	71
5.1	はじめに	71
5.2	一般解の重ね合わせ	71
	(1) 一般解の重ね合わせの手法	71
	(2) エネルギー解放率 $J_a$ を最小とする方法	72
5.3	せん断をうける異方性岩盤	74
	(1) 解析モデル	74
	(2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数	74
	(3) 主軸角度 $\omega_1=0$ 、 $\omega_2=30$ 度の場合の解析結果	74
	(4) プロセスゾーンの大きさの影響	80
	(5) 主軸の傾きによる影響	80
	(6) 剛性値の違いによる影響	81
5.4	地層中の異方性岩盤境界面のき裂解析	96
	(1) 解析モデルと解析例	96
	(2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数	96
	(3) 解析結果	98
5.5	まとめ	103



	参考文献	104
第 6 章	直交異方性弾性体境界面の外側き裂近傍の応力解析と岩盤を対象とするその実用面への応用	105
6.1	はじめに	105
6.2	一般解の重ね合わせ	105
(1)	一般解の重ね合わせの手法	106
6.3	引張力を受ける鋼材と異方性材料の境界面き裂	106
(1)	解析モデル	106
(2)	一般解の組み合わせと重ね合わせの係数	106
(3)	主軸角度 $\omega_1=0^\circ$ , $\omega_2=25^\circ$ の場合の解析結果	107
6.4	面内曲げを受ける異方性岩盤とコンクリート境界面き裂	113
(1)	解析モデル	113
(2)	一般解の組み合わせと重ね合わせの係数	113
(3)	解析結果	113
6.5	まとめ	118
	参考文献	119
第 7 章	直交異方性弾性板の各種開口関数の構成法と自由辺近傍のき裂解析への適用	120
7.1	はじめに	120
7.2	解析モデルと基礎式	121
(1)	解析モデルと定数	121
(2)	直交異方性弾性体の基礎式	122
(3)	応力関数の一般解	123
7.3	基本開口関数	124
(1)	開口関数の基本形	124
(2)	開口関数の分類	127
7.4	き裂に平行な自由辺の構成法	134
(1)	自由辺上の応力 $\sigma_\xi$ を打ち消す関数 ( $W_1$ )	135
(2)	$\xi = \xi_0$ 上のせん断力打ち消し曲面 ( $W_2$ )	142
7.5	解析例	146
(1)	岩盤内のき裂に内圧 ( $1\text{kg/cm}^2$ ) が作用する場合	146
(2)	ダムのコンソリデーショングラウト施工時の岩盤変形	150
7.6	まとめ	152
	参考文献	153
第 8 章	本研究の解析解と他の解析法との比較検討	155
8.1	はじめに	155
8.2	有限要素法解析のモデル化	155
8.3	解析例	155
8.4	解析結果とその考察	158

8.5	まとめ	162
第 9 章	結 論	163
9.1	総 説	163
9.2	今後の方向	164
本研究に関連する発表論文・口頭発表		166
謝 辞		167

# 第 1 章 序 論

## 1.1 き裂解析の現状

き裂を含む弾性体に外力が作用するとき裂先端に応力集中が発生するが、このような力学問題に関して Griffith<sup>1)</sup>、Westergaard<sup>2)</sup>、Irwin<sup>3)</sup> 以来多くの研究成果が発表されている。最近では複合構造物の研究開発に伴い研究対象が等方性材料から異方性材料へ、2次元から3次元への扱い、等方性弾性体内き裂から異材(等方性、異方性)境界面き裂へと発展してきている。さらに、数値解析の手法や実験の測定方法の改善などが報告されていて依然としてき裂問題は新しいテーマであり、毎年多くの研究報告がなされている。

土木学会の構造工学委員会の報告<sup>4)</sup>は土木工学分野での破壊力学の適用について鋼材からコンクリート、岩石・岩盤、地震断層まで対象になっていることを述べ今後の発展の方向性を示唆している。さらに今後注目されるのは鋼材のき裂や切り欠きの問題をはじめ鉄筋コンクリートや最近注目されている複合構造物のき裂の問題、地盤中の断層の問題、岩盤とその上に打設されたコンクリートとの境界面き裂の問題などがあげられる。

多岐にわたるこれらの諸研究を網羅する事は不可能に近いので、著者の研究に関する異質弾性体間の直線状境界面き裂と境界近傍のき裂に的を絞って簡単にき裂解析の現状を述べる。

### (1) 一様弾性体中のき裂

#### a) 等方性 2次元問題 その1 無限大の応力集中

Griffith<sup>1)</sup>、Westergaard<sup>2)</sup> は図 1.1 に示す 2次元問題に対する y 軸上の  $\sigma_x$  は図 1.2 の曲線①のようにき裂先端で無限大の応力が生じる解を得た。これに対して Irwin は応力拡大係数 K というものを定義して有限板のき裂や自由辺のき裂先端の応力集中を表す方法を提案した。本来無限大の応力度は不合理なものであるが、図 1.1 の無限板のモード I ~ III の K を基準にして他の境界条件を持つ板とき裂の組み合わせに対して応力集中率を K で定義して実験的に値を求めることは、非常に簡便で安全性の評価に有効である。現在に至るまで大半の研究は疲労の問題も合わせていろいろなき裂の先端の応力集中をこの K で評価することを基準にしていることからその意義の大きさがわかる。

き裂の解析における他の 1 つの有用なパラメータは Rice<sup>5)</sup> によるエネルギー解放率 J である。これはき裂先端のひずみや応力度の不明確さを補うものであって、Abeyaratne 等<sup>6)</sup> もエネルギー開放率についての研究をしている。J は多くの実験的研究でも活用されている。

#### b) 等方性 2次元問題 その2 有限応力

き裂先端で無限大の応力度が生じるのは不都合であるから  $\sigma_{ya}$  で打ち切られた図 1.2 の②で示されるような応力分布の関数を Dugdale<sup>7)</sup> が導いた。これは以後の多くの研究に引用されていて合理的な解であることが広く認められている。

き裂先端が有限な曲率を持つ円弧で構成されているならば応力集中は有限となり、この考え方を基本にした円孔、楕円孔に関する研究は多い。土木の分野では長谷部<sup>8)</sup>、9)、10) は半無限板の縁にある三角形き裂、矩形孔について、応力集中部から発生したき裂の応力解

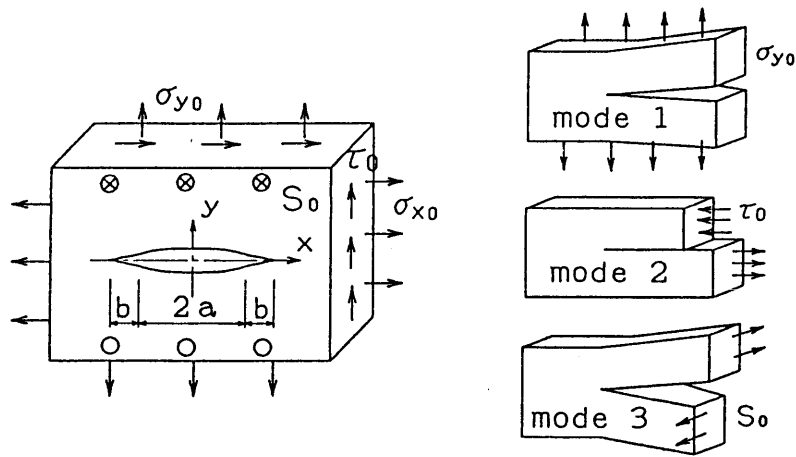


図 1.1 2次元き裂問題

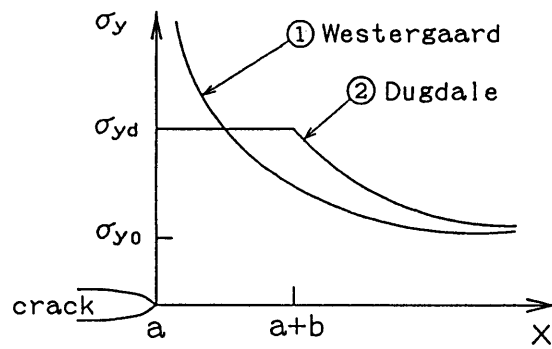


図 1.2 従来なき裂先端の解析的応力

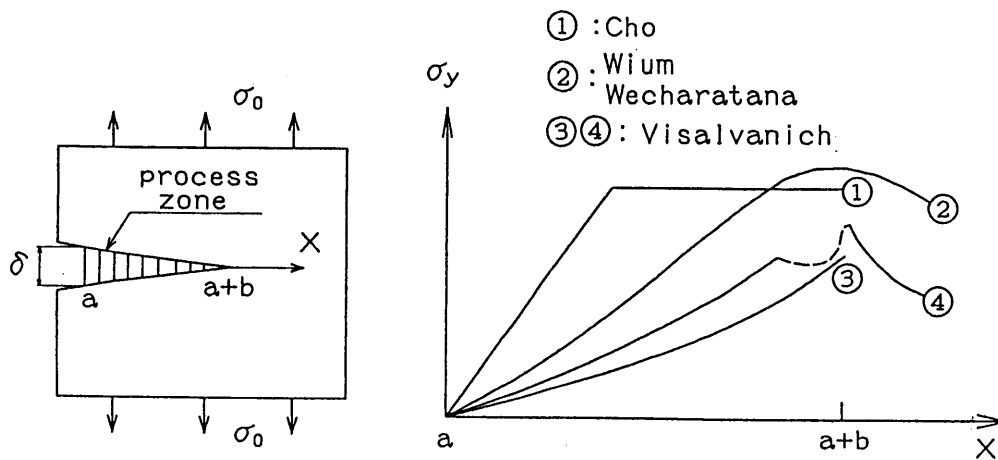


図 1.3 コンクリート、ファイバコンクリートのき裂先端応力

析をおこない応力拡大係数を求めている。

土木工学の分野として特に興味を引く実験的研究は次のようなものである。Cho<sup>11)</sup>はコンクリートの自由辺より生じるき裂部分の応力分布は Dugdale 型の応力分布よりは図 1.3 の①の曲線のような応力分布を仮定すると実験データと有限要素法の結果とはよく一致することを示した。

Wium<sup>12)</sup>はハイブリッド方式という数値解析法を考案して図 1.3 の曲線②のような応力分布形を導いているが、これは特異点とKという従来の概念を大胆に打ち破って実際的に Dugdale に近づいたものとみなされる。

他の一つはファイバーコンクリートのき裂部分の応力に関する実験的な研究であり、Wecharatana<sup>13)</sup>は図 1.3 の曲線②を仮定するのが望ましいことを示し、Visalvanich等<sup>14)</sup>は③と④の形状の耐力分布を実験データとして示している。いずれかの実験データも有限要素法による解析結果と比較されていて、有限要素法の有効性が示されている。これらは共に著者等の理論解の活用にあつては開いたものといえる。

### c) 3次元等方性弾性体中の円盤状き裂

無限弾性体に円盤状のき裂が存在する問題ではき裂面に垂直方向に一様な引張りが作用する場合は厳密解を得ることができる。たとえば宮本<sup>15)</sup>が示している回転楕円座標系で解が得られる。その他 Kassir<sup>16)</sup>、Smith<sup>17)</sup>、Bell<sup>18)</sup>、浪岡<sup>19)</sup>も無限大の応力になる解を級数表示や他の関数を用いて解いてKを得ている。Tsai<sup>20)</sup>は Dugdale 方式のものを解いている。

Barenblatt<sup>21)</sup>は3次元弾性体の円盤状き裂の引張り問題のうち、開口させる限界荷重ということについて研究している。理論式に多少の近似法を導入することによって、き裂表面あるいは弾性体内に対称的な集中力や分布外力を作用させてき裂の開口部分をさらに進展させるための限界荷重を求めている。

他方き裂面に平行方向のせん断力を受ける問題は難解であつて完全な解は得られていなかった。高久田等<sup>22)</sup><sup>23)</sup>は積分方程式の表示という形までは厳密であるが、実際の積分は不可能なために級数展開の第1項のみを示している。その他 Kassir<sup>24)</sup>は三角級数解、Smith<sup>25)</sup>は Bessel 関数解、Krenk<sup>26)</sup>は積分方程式と Bessel 関数とによる解によって近似解をそれぞれ導いている。段、中川等<sup>101)</sup>は周辺に無限大の応力集中が生じる解を回転楕円座標系によって解いた。さらに円盤状空隙の周辺にプロセスゾーンを構成して応力が有限になる解も同時に導いた。

土田等<sup>27)</sup>は有限な円筒状柱内の円盤き裂を扱っている。円盤状き裂に近いものとしては高久田等<sup>28)</sup>はリング状円盤き裂を解いている。その他石田等<sup>29)</sup>は楕円形状の問題を体積力法で解いている。Westmann<sup>30)</sup>は半無限弾性体表面の円形荷重や空隙の問題を解いている。

溶接部分の不接合部分や残留応力の問題を解くために Wu<sup>31)</sup>は厚板の表面近傍の半円形状のき裂問題を実験式と代数式表示とで解いている。

小林等<sup>32)</sup>は半無限弾性体表面の半円盤状き裂の問題を積分方程式で表現して数値計算法によりKを求めている。

土木工学の分野では今後特に今後発展させたいのは高久田等<sup>23)</sup>による3次元の無限2層間の境界面き裂の問題である。これはコンクリートの打継ぎ目、コンクリートと岩盤、地層間のき裂問題として大いに期待される。この研究は厳密な積分が不可能なまま級数展

開で近似解のみが得られている。他の一つは Kasir<sup>24)33)</sup>による長方形板状き裂の問題である。これも断層や破碎帯の力学問題として大いに興味ある問題であるが、積分方程式に基づく数値計算あるいは Bessel 級数展開に頼らざるを得ない。この3次元の問題も基本的には数値計算による近似的なKを求めることに尽きる形式となっている。

#### d) 板の曲げ問題

き裂を持つ板を曲げると引張側は開口しても圧縮側は食い違う負の開口は実際には不可能である。したがって2次元の面内の場合よりは厳しい仮定をおこなうことは止む終えない。長谷部<sup>34)</sup>は切り欠きを持つ板の曲げ問題を解いているが、直線状のき裂ではない。能町<sup>35)</sup>はき裂を持つ無限板の問題をフーリエ積分法で表現しているが、Bodurogle<sup>36)</sup>は有限帯板内に平行な複数のき裂を持つ場合を同様にフーリエ積分法で解いてKと曲げモーメントの分布を示している。Williams<sup>37)</sup>も曲げ問題のKを求めている。Foiao<sup>38)</sup>は長方形の板の曲げを扱って応力度はき裂先端で $1/(r)^{1/2}$ のオーダーとなることを示した。これは Bessel 関数によって解かれたものである。

いずれもき裂先端で曲げモーメントが $1/(r)^{1/2}$ のオーダーの特異点になることを示している。

#### e) 直交異方性2次元問題

丹羽と平島<sup>39)</sup>は無限板に円孔あるいは楕円孔が存在する場合について研究し、長谷部<sup>40)</sup>は切り欠きの問題を扱っているが、共に楕円が直線状のき裂になると応力集中が無限大になる。直線状のき裂を研究した例は Ang と Williams<sup>41)</sup>によるものであるが、モード I、II の場合共に無限板を対象にしてフーリエ積分に基づく積分方程式法であらわされている。この解ではき裂先端の応力集中は等方性の場合と同じオーダーになることが示されている。

Krenk<sup>42)</sup>は一直線上に多くのき裂が並ぶ場合を複素関数で解き等方性の場合のKで表現している。Wang、Yau 等<sup>43)</sup>は長方形板が斜めのき裂を持つ場合を対象にして、J 積分を数値積分で求めてKも求める方法を採用している。

直交異方性板の場合に対して Dugdale 方式の解を得た一つの例は Keya、Erdogan<sup>44)</sup>によるものである。

## (2) 境界面き裂

近年、複合材料の研究開発が進むにつれて弾性定数の異なる材料の接合面に生じている空隙やき裂の応力解析がますます重要になってきている。いわゆるインターフェイスクラック問題であるが土木工学の分野ではこの種の問題が多く、たとえばコンクリートダムの基礎岩盤とその上に打設されたコンクリートとの接合面部あるいは LNG 備蓄地下空洞の覆工コンクリートと周辺岩盤との接合部の空隙周辺の応力集中問題、ダム吐き出し部の洗掘部に補修用のファイバーコンクリートを打ち足した場合の接触面不良部分あるいは温度応力によるき裂進展問題などが挙げられよう。

#### a) 等方性弾性体の境界面き裂

弾性定数が異なる2種類の等方性材料の境界面き裂の問題は多くの研究者たとえば、Williams<sup>45)</sup>、RiceとSih<sup>46)</sup>、England<sup>47)</sup>、Erdogan<sup>48)</sup>などにより研究報告されている。

剛さの異なる2つの半無限弾性板がy軸上で接合された面内問題を対象にして理論的に一応解かれている。また、境界面に沿って複数のき裂が等間隔で存在する場合の解析解も得られているがそれらの解には内在する課題も多い。

最も大きな問題は、図 1.4に示すようなき裂先端で応力が急激に振動する特異性が現れて変位のめり込みが生じるという工学的には不合理な現象であろう。

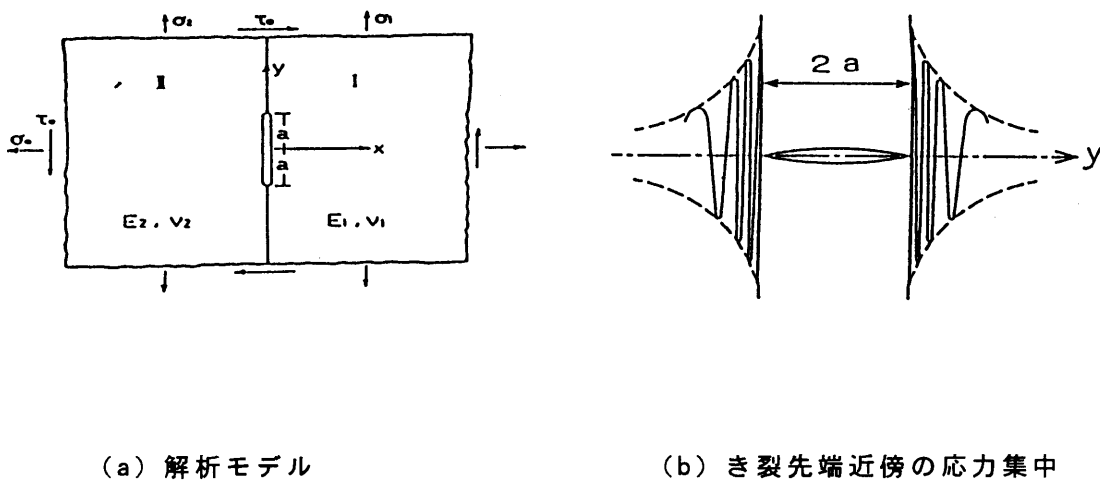


図 1.4 Williams 等の解析モデル

これらの特異性を回避するために Comninou等<sup>49)~53)</sup>は、き裂先端にコンタクトゾーンという部分を想定することを提案した。この部分ではせん断抵抗はないが、モードIの引張りでありながらも圧縮応力が生じて開口はしないと仮定するのである。コンタクトゾーンを想定したモデルを導入して上記の不合理性を一応回避しているが、この理論によると応力が振動するコンタクトゾーンの長さが分子レベルのオーダー( $10^{-4}\text{cm}$ )以下になるという結果が導かれるので、実際にはこれらの結果は工学上現実的でないとも評価されている。

工学的に望まれる異方性体の境界面き裂の解はファイバーコンクリートや繊維強化プラスチックなどの複合材料のみならず、自然の地盤、岩盤などのようにきめの荒い不均一性と異方性を示す材料に対して適用可能なものでなければならず、 $10^{-4}\text{cm}$ のオーダーの周期変化を生じるようなものは望ましくない。

Atkinson<sup>54)</sup>もこのような不合理な点を解消するために接合面に等方性の薄い中間層を想定して、き裂はこの薄い層の中で生ずるものとして仮定して Westergaard の解を適用することを提案している。さらに、薄い中間層が左右の半無限弾性体の間にあり、その両側の弾性定数を直線的に連結するような直交異方性弾性体であるとする解析法も示したがこれらは中間層を想定したものであるから仮想的な解である。

Gautesen、Dundurs<sup>55)</sup>は Comninou の積分方程式を理論的に解くことに成功して同様な結果を示している。Atkinson<sup>56)~57)</sup>は contact zone のモデルを Comninou とは異なる Mellin変換を用いて誘導している。

Mak、Keer、Chen、Lewis等<sup>58)</sup>は Comninou の contact zoneではせん断力が生じて相対変位を生じないとする no-slip モデルを設定して、フーリエ変換で応力関数を定義する

手法で集積特異点を解消して Westergaard の解に相当するものを得ている。

伊藤<sup>59)</sup>は contact zone を設けない接合面のき裂の問題をフーリエ変換で解析しているが、開口変位を直交関数で展開することにより応力の集積特異点を回避した解である。

長谷部等<sup>60)61)</sup>は有限部で接合された異種材料接合面問題を考え、有理写像関数を利用して接合端からき裂が発生あるいは剥離が進展する条件を求めている。

## b) 直交異方性弾性体の境界面き裂

他方、工学的応用が期待される直交異方性弾性体境界面き裂の問題は重要な課題であるにもかかわらずあまり論じられていない。応力拡大係数自体の定義さえも不明確な状態で、等方性異質材料間に定義される bi-elastic constant 相当のパラメータも数式で表現し難い。なぜならば、等方性異質弾性体境界面き裂問題と同様にき裂近傍の応力が集積特異点状になること、異方性主軸の傾きにより引張り・せん断モードと共に伸縮、面内曲げのモードも同時に混在してその挙動がさらに複雑になるからである。

現在までの直交異方性弾性体境界面き裂に関する研究には、Wang 等の研究<sup>62)63)64)</sup>、結城等の研究<sup>65)66)</sup>、中川等のフーリエ積分を用いた解析的研究<sup>67)68)69)70)</sup>、実験的研究<sup>71)72)</sup>などがあるが、その数は少ない。Wang 等<sup>63)</sup>は Lekhnitskii の応力ポテンシャルと直交異方性理論に基づいて直交異方性弾性体境界面き裂の問題を検討した。しかし、得られた解は問題としている応力の振動特異性を含んでいたため、さらに直交異方性弾性体間に摩擦力のない接触部分を持つような部分的に閉じたモデルも提案した。これらのモデルはき裂先端で  $1/(r)^{1/2}$  のオーダーの特異性を示すものである。

結城等<sup>65)66)</sup>は、Williams、England、Erdogan が指摘したき裂先端の応力振動や変位のオーバーラップ問題に対して振動応力は十分小さく無視できうらという立場で等方性異質弾性体境界面き裂の研究をおこなっている。厳密解として従来より与えられている無限板の境界面き裂を引用して振動応力の生じるき裂先端を避けて、き裂先端から離れたところの安定解を採用し、境界要素法により境界上の応力分布を求め外挿法により応力拡大係数を求めている。さらに、直交異方性弾性体境界面き裂の応力拡大係数を定義し直して、同様な方法で直交異方性弾性体境界面き裂の応力拡大係数を求めている。具体的な解は振動特異性の強さを示す係数  $\varepsilon$  (bi-materials 定数) を含んでいることやせん断を受けるときの変位のオーバーラップ問題を取り扱い得ていない。また、佐藤、結城等<sup>73)</sup>は実用的な解析例として LSI(大規模集積回路)パッケージ内の金属とシリコンとの剥離を対象とする境界面き裂問題を取り上げ解いている。その中で、境界面の変位オーバーラップの問題を避けるために接触を考慮した境界要素熱伝導・熱弾性解析法を適用している。この方法は境界要素法により数値解析をして、境界面き裂の応力拡大係数を外挿法で求めているが、これらは基本的にはき裂先端で応力が無限大を是認するものである。

中川等<sup>67)68)69)70)</sup>はフーリエ積分を用いて直交異方性弾性体境界面き裂問題を解いて報告している。この方法は応力関数がフーリエ積分で表された重調和関数であるとみなし開口変位をフーリエ級数の有限項で示されると仮定して開口部の応力や変位の連続条件によりフーリエ係数を決定している。その結果、き裂先端において不合理な集積特異点を消滅させて有限で滑らかな応力集中を表現できた。さらに任意の主軸方向と任意の剛性比を持つ直交異方性弾性体境界面き裂の応力集中の分布を求めその有用性を示した。しかし、この解法の限界は境界線上の応力と変位しか得られないこととプロセスゾーンが小さくなると級数解の収束性が低下することである。



異方性材料の境界面き裂を対象とした実験的アプローチは見受けられない。異方性材料の試験体作成が難しいことがその主たる理由のようである。山崎等<sup>71)</sup>は異種のエポキシ樹脂を接着した異材界面き裂の光弾性実験をおこない、疲労強度や疲労き裂進展について検討している。また、池田等<sup>72)</sup>も同様にアクリルとエポキシ樹脂を用いた異材界面き裂の引張試験をおこない、応力拡大係数による破壊基準について検討している。

### c) 境界面近傍のき裂

Lu等<sup>74)</sup>は境界面に垂直なき裂やT型のき裂の応力拡大係数を特異積分法で求めている。笠野等<sup>75)</sup>も直交異方性半無限板の境界面に垂直なき裂について、特異積分方程式により定式化してき裂先端の特異応力場に及ぼす境界面や異方性の影響について応力拡大係数を求めている。陳等<sup>76)</sup>も等方性、異方性の境界面に垂直なき裂先端の応力について検討している。

Hutchinson等<sup>77)</sup>は異質弾性体に平行なき裂を考え、き裂の長さに比較して境界面とき裂までの距離が小さい場合はき裂モードI、IIや複素応力拡大係数との間には簡単な関係があることを示している。近藤<sup>78)</sup>も異方性半無限体の境界面を挟んで片側に1つのき裂がある場合の縦せん断問題を解き、応力拡大係数に及ぼす因子の影響について検討している。H. Lu等<sup>79)</sup>も境界面に平行で境界面付近のき裂問題を特異積分方程式で定式化し、これを数値解析して解いている。き裂が半平面の境界面に近くなると応力拡大係数とエネルギー解放率は境界面とき裂との距離の関数によって与えられることを示している。

以上の解析は、いずれもき裂先端の応力が特異性を示し無限大になることを前提としている。境界面が自由辺であり、自由辺近傍にき裂があるようなモデルの解析研究は見あたらない。

## 1.2 土木工学分野における破壊力学の適用の現状

機械系の応用力学・材料力学として発展してきた破壊力学は主に金属材料の脆性破壊、疲労破壊などに関して応用されかなりの研究成果が発表されている。最近では、その適用範囲も岩石、コンクリート、セラミックと金属、高分子材料の複合材料まで広範囲に広がっている。

土木工学分野における破壊力学の適用は主に橋梁、海洋構造物、圧力構造物などの鋼構造物のき裂発生や溶接部の疲労き裂破壊などの問題、コンクリートの引張破壊への線形破壊力学の適用、岩石の破壊メカニズムの解明などがあげられる。これらの詳細については土木学会構造工学委員会の委員会報告<sup>4)</sup>や日本コンクリート工学協会の「破壊力学の応用研究委員会報告書」<sup>80)</sup>などを参考にされたい。

土木工学が対象としているコンクリート、岩石や岩盤などの材料は金属材料と比較して粒子の粗い材料であるためき裂先端での応力分布は、き裂先端で有限で滑らかな応力集中状況を示すものとする方が現実的である。コンクリート材料における実験からも高い応力レベルではき裂先端に無数の微少なき裂が発生し、小規模な進行性破壊領域(プロセスゾーン)が形成されその結果応力が緩和されるといわれている。プロセスゾーンの範囲は大塚等<sup>81)</sup>のX線造影法や堀井等<sup>82)</sup>のレーザースペックル法などによる計測結果およびOparau等<sup>83)</sup>の実験結果などから骨材の種類、大きさや試験載荷速度などにより影響されるが大まかに数cm~数十cm程度であろうと推定されている。したがって、き裂先端の応力

を直接測り得ないので不明であるが、プロセスゾーンの範囲内で応力は無限大になるのではなく有限で滑らかなものになっていると考えるのが妥当であろう。

本研究では直交異方性弾性体を対象としているので具体的に岩盤や異方性の材料に関するき裂研究の現状や発展可能性を以下に述べるものとする。表 1.1 に岩盤などを対象とした破壊力学の適用、可能性の概略を示す。その中で特に今後の適用が期待される分野について詳述し、本研究との関わりを述べる。

### (1) コンクリート構造物の静的破砕材による破壊

市街地や重要な構造物に近接したコンクリート構造物を解体する場合、従来の発破などでは振動や騒音が発生するため静的破砕材を利用した工法が採用されることが多い。小柳等<sup>84)</sup>は破砕材の効果を確認するために、供試体の大きさ、削孔の形状配置などを変えて実験をおこなっている。原田等<sup>85)</sup>は膨張圧の推定方法や膨張圧による破壊メカニズムが明確でないため実施工の経験に頼らざるを得ない現状から、膨張圧の測定方法、膨張圧特性や破壊のメカニズムを実験的なアプローチで検討している。また、既設のRC構造物の解体に際して、アブレーシブジェット工法で表面に近い主鉄筋を切断したのち静的破砕材により直方体状に切り出し河床ブロックに再利用した例<sup>86)87)</sup>などコンクリート構造物の解体に静的破砕材を使用した実績は多い。き裂の進展や破壊のメカニズムをさらに究明するには破壊力学の適用が望まれる分野である。

### (2) トンネルの無発破工法

最近、市街地のトンネル工事が増加してきているため、中硬岩トンネルを無発破工法で施工するケースが多くなってきている。この工法の代表的なものには特殊削孔機械により切羽の岩盤内に溝状の削孔スリットを円周に施工し自由境界面を積極的につくりだすことによりブレーカー等による岩盤掘削を容易にする方法<sup>88)89)</sup>や削孔内に静的破砕材を詰めて膨張圧によりき裂を入れ岩盤掘削を容易にする方法などがある。

いずれも効果的な削孔径、配置、薬量などを決定し合理的な設計・施工するために破壊力学は有力な手段となろう。

### (3) トンネル発破設計法

従来の発破理論では破壊時に生じるき裂の進展挙動を十分考慮することができない。青木等<sup>90)</sup>は合理的な発破設計技術を確立するために破壊力学的考えを導入し、検討を加えている。岩石コアの破壊靱性試験を実施するとともに、発破による余掘量の低減や発破面の平滑化形成を目的として削孔径、間隔、配置、爆薬量などを要因として取り上げ、各種岩石を対象とした試験発破を実施している。発破の爆発を静的に置き換え応力拡大係数Kを用いて結果の整理をしている。

### (4) 岩盤の水圧破砕

高温岩体発電<sup>91)</sup>は地下にある高温の岩石に水を注入して熱エネルギーを取り出すものである。そのためには地下岩盤内に複数の人工のき裂をつくる必要があるとあり、き裂の生成確認、き裂の広がりや予測にき裂解析を応用できると考えられる。伊藤等<sup>92)</sup>は水圧破砕地殻応力計測時に横き裂が形成された場合を対象として、水圧とき裂開口挙動のシミュレーションをしている。異分野との境界領域を越えた研究が望まれる。

表 1.1 岩盤などを対象とした破壊力学の適用、可能性

内部き裂	等方性材料	コンクリート	1) コンクリート構造物の静的破砕材による解体 2) 温度応力によるき裂発生 3) 誘発目地によるき裂発生誘導効果の解明 4) 骨材とモルタルの剥離現象メカニズムの解明			
		鋼材	5) 鋼材やコンクリートの内部き裂の進展			
		岩盤	6) 等方性岩盤の水圧破砕 7) 薬液注入による割裂注入のメカニズム			
		異方性材料	岩盤	8) トンネル発破技術、設計法の理論構築 9) <b>異方性岩盤の水圧破砕</b>	第7章	
				10) LNG 地下空洞のき裂進展解析 11) 断層のき裂進展挙動の解明 12) <b>グラウトによる地盤変形解析</b>	第7章	
			境界面き裂	等方性材料	コンクリート	13) コンクリート打ち継ぎ目の不良個所の応力集中 14) ダムコンクリートの嵩上げに伴う問題 15) コンクリート補修材の重ね施工
	鋼材+ コンクリート				16) 鋼材とコンクリートとの未接合部 17) 複合構造物の異種境界面の未接合部 18) 鋼性連壁とRC壁との接合評価 19) モルタルと鋼管杭との周面接合不良部	
	岩盤				20) 等方性岩盤内の境界面き裂	
	異方性材料			岩盤+ コンクリート	21) <b>岩盤に打設されたコンクリートの接合不良</b>	第5章
		22) コンクリート補修用の異方性材料の重ね施工 23) ブロックせん断岩盤試験の岩盤内応力集中 24) <b>地下空洞覆工と岩盤との温度勾配き裂</b>			第6章	
		鋼材+ 異方材		25) <b>鋼材と異方性材料との未接合部</b>	第6章	
			26) 異方性材料の複合材き裂			
岩盤		27) <b>異方性岩盤内の境界面き裂</b>	第5章			
タイル, 岩+ コンクリート	28) 建築物の壁面タイルの剥離現象					

注) 太字は本研究で解析例として採用している

## (5) LPG 地下空洞のき裂進展解析

石塚等<sup>93)</sup>は低温貯蔵式の LPG 地下空洞の周辺に発生する熱応力によるき裂発生の問題をとりあげて破壊力学的考察をしている。すなわち、岩盤内の非定常温度解析および熱応力解析を実施し LPG 岩盤周辺部で発生する引張応力による破壊き裂にたいして J 積分による応力拡大係数を求め、これを破壊靱性値と比較することによりき裂の発生と進展を評価している。破壊力学に基づく解析手法の有効性を示している。

稲田等<sup>94)</sup>も同様な問題について岩盤の引張り破壊を考慮した No-Tention 法および引張破壊要素を離散させる有限要素法応力解析を実施している。いずれも、連続体力学に立脚しているが岩盤の異方性や節理、シーム、断層などの不連続面が卓越する岩盤を取り扱うことが主体となるので、破壊力学的手法による解析法により一層の発展応用が望まれる分野である。

## (6) ダムコンクリートの嵩上げ

最近、既設ダムの老朽化に対して治水安全度の向上を計ることや、各種利水の需要増大に伴う貯水容量の増大対策などが重要な課題となってきている。いわゆる既設ダムの再開発である<sup>95)96)</sup>。このような場合は、重力式ダム堤体下流法面に新しいコンクリートを打設して新旧コンクリートを一体化することが多い。したがって、新旧コンクリートとの打継目の処理を適切に処理しないと新旧コンクリートの荷重分担が偏ったり、貯水位の変動や地震荷重により打継目がずれたり、新コンクリートの硬化熱による温度応力によりき裂が発生するなど問題が生ずる。

実測例<sup>96)97)</sup>によると新旧コンクリートの打継ぎ境界面に発生するせん断応力は約 2 ~ 3 kg/cm<sup>2</sup>、直方向応力は約 4 kg/cm<sup>2</sup>程度と報告されている。接合面に不良個所がある場合はインターフェイス(境界面)問題となり、接合不良個所端部の応力集中により安定性に問題のあるき裂が発生、進展する危険性がある。

## (7) グラウトによる地盤変形

ダムを施工するために基礎岩盤を掘削すると、荷重除荷による応力解放あるいは発破や重機施工の影響による基礎岩盤の節理の開口助長等で、遮水機能や支持機能が低下する。そのため遮水性能の改善および地盤強化を目的としたコンソリデーショングラウトなどの基礎処理がおこなわれる。改良深さが 5 ~ 10 m 程度であるため地表面とグラウト位置間の距離が比較的近くなって、施工時の注入圧力により地盤が隆起したり岩盤が破壊してしまう危険性がある。

上田等<sup>98)</sup>は軟岩あるいはき裂性岩盤を対象として注入時の岩盤挙動を明らかにするために A E エネルギーの発生量と岩盤変位との関係に着目し、A E エネルギーが岩盤の破壊を表現しうるパラメータとして評価できるかどうか検討している。

このようなグラウト注入の岩盤変形の問題は自由辺近傍のき裂にグラウト注入の内圧が作用しているモデルとなる。本文では直交異方性弾性体を対象としたき裂解析の 1 研究テーマとしてこの問題を取り上げ、異方性主軸の傾きや自由辺までの距離などがどのように岩盤変位へ影響するのか明らかにしている<sup>99)</sup>。

## (8) 岩盤試験への適用

重要構造物の基礎岩盤の強度特性を把握するために現位置での各種せん断試験<sup>100)</sup>が実

施される。現位置せん断試験のうちブロックせん断試験は岩盤上に縦60cm×横60cm×高さ30cm程度のコンクリートブロックを打設し、コンクリートブロックを介して直下の岩盤せん断を行うものである。試験結果が岩盤の整形不良やコンクリートの施工不良などの影響を受けやすいなどの問題も内包しているが実務的に多用されている。せん断荷重が作用点で所定の傾斜角を確保できるように試験体の周辺と岩盤との縁切りをするが、この場合は外側き裂のモデルとなり、縁切り部を外側き裂とみなした直交異方性弾性体の境界面問題となる。き裂先端の応力集中状況や異方性岩盤内の応力や変位状況をシミュレートすることは有意義な研究テーマである。

### 1.3 まとめ

以上のように簡単な記述では一連のき裂研究の本質や実際問題への適用について網羅できるものではないが、これらの諸研究はいずれもそれぞれの研究目的とした特定の方向へ向かうものとして優れたものであって異論を挟む余地のないものである。

#### (1) 解析的研究

- a) その第1の方向は図 1.2に示した Westergaard の無限大の応力集中を是認する解である。等方性2次元問題としてのき裂解析は広く研究されているが、2種類の等方性弾性体が接触する面の境界面き裂、直交異方性弾性体や3次元弾性体中のき裂等それぞれ上記の研究の解析的なものの多くはき裂先端に無限大の応力集中を持つ厳密解か、特異項の大きさを級数解で与える精度の高い解などを導き出しているものである。
- b) 第2の方向は Dugdale 方式の解である。き裂先端の開口モード I、II、III に対して特異点を持つ第1の方向の解がすでに得られている場合には次は Dugdale 方式に解を誘導するというのが主流のようである。それぞれ得られたものは所定の目的にかなったものとして有意義であるが、き裂先端より応力度が緩やかに立ち上がるというような解析解は見当たらない。すべて直立している応力分布であって図 1.2 に示したものである。
- c) 第3の方向はき裂先端部分の不確定現象をマクロに、エネルギー扱いで把握しようとする J 積分である。これはややもすると厳密さにおぼれがちな高度な解析解に優るとも劣らない優れた考え方であり、理論的なもの、実験的なものが数多く発表されている。著者の研究の方向は解析解として有限な応力集中を与える関数を導くことと、それを実用面へ適用する可能性を示すことである。したがって、この J 積分に関する研究は浅く確定的なことは述べ得ないが、解析的なものが仮定できない場合に有意義なこの方法は有限な応力集中を導くような解法においてはあまり意味をなさなくなる。
- d) 第4の方向は有限要素法を代表とする数値解析的なものであり、弾塑性解析も可能であるから適用範囲が広い。多くの研究があるがそのほとんどが Dugdale の方式に合わせて直立する応力分布を主体としたものである。有限要素法は弾塑性の応力分布のように緩やかな変化をもつ応力解析に適しているが、特異点のような急変化する応力解析には不適當である。

他方、有限要素法によって Westergaard 方式の応力集中を近似させて、特異点近傍の曲線補間によって特異点としての応力拡大係数を求めるような研究が見受けられる。これは解析の方向としては有効なものとは思われない。実験結果として得られる図 1.3 の曲線を解析することを目的として応力度の緩やかな立ち上がり部分を加味したものを活用し

ているが、塑性域を目的とした有限要素法の解は Dugdale の解そのものである。

e) 第5の方向は応力拡大係数 $K$ の研究である。これは実験を主体とした簡便で有用なものであり、実験結果の整理として広く活用されている。しかしこれは解析解としての Westergaard の特異点を是認して、そのスケールファクタ  $1/(r)^{1/2}$  の特異項の倍率、あるいは幅を設定する研究である。したがって、第1の方向の研究の一部分とみなすことができる。

f) 第6の方向は実験的研究で Westergaard や Dugdale の方向とは全く無関係にき裂の進展現象を正確に把握して解析を試みる方向である。その一例は図 1.3の曲線であるが、これが土木工学や建築関係の研究者に関連の深い事項である。

き裂の研究は機械学会関係で多くの研究がみられる。これらのほとんどは金属材料のように均質でき裂先端部分の応力度の急変化や直立の勾配でも不自然ではないような弾性材料を対象にしたものである。このような材料条件を基にして厳密な解が多岐にわたって研究されているが、コンクリート系材料、複合材料、岩盤、土質材料等における微少き裂や断層部分、破碎帯にまで着目するならば、機械学会系の成果をそのまま適用することは不適當であることは断るまでもない。2層弾性体の境界面き裂はコンクリートの打継ぎ目や基礎岩盤とその上に打設されるコンクリートの接合部の空隙の応力集中問題や地層中の断層の問題など広範囲の研究対象となるが、き裂周辺で無限大の応力が生ずるという解は望ましくない。土木工学系としてのき裂とは、上記したようなコンクリートや岩盤、土質材料を想定した、応力度が緩やかに増加しつつ有限な応力集中となり、同時に開口変位も生じる区間(以後はプロセスゾーン部分と表す)を先端に持つき裂であろう。従来の解析的な研究ではこのような分野が残されていたように思われる。

g) 第7の方向は段、中川の発想によるもので、弾性解でありながらき裂の先端に応力と変位が共存するプロセスゾーン相当部分を構成する解析解を導く手法である。この解による応力分布の特徴は無限大の応力集中を解消し得て、Dugdale のように応力勾配が無限大になることもなく、開口変位も応力分布も滑らかになることである。

## (2) コンクリートや岩石・岩盤を対象とした実務的研究

a) 土木工学の分野で適用されているき裂解析は表 1.1 に示すような分野であり、2・3 実務に応用され始めているが、まだ初歩的な試みの段階であると思われる。コンクリート構造物の解体に静的破碎材を利用した場合のき裂の進展予測や破碎メカニズム解明に採用した事例、市街地や既設構造物の近くで岩盤を掘削する場合に無発破工法を採用した事例トンネル施工の発破設計技術法を確立するために破壊力学的な考えを導入した事例、LPG 地下空洞周辺に発生するき裂解析に適用した事例などがあげられる。

b) しかし、これらの研究は応力拡大係数 $K$ との関連でまとめられていて、基本的にはき裂先端で応力が無限大となることを前提としている。多くの実験からコンクリートや岩石などに発生するき裂先端の応力分布は無限大でなく有限な立ち上がりを示すことが指摘されているので、この事実に対応できる解析方法が望まれる。

c) また、岩盤や地盤のように異方性を示す材料であるにも関わらず等方性と仮定して解析しているため、今後は主軸の任意の傾きや剛性値の変化にも対応できる異方性を考慮した解析方法が望まれる。

d) 今後は、a)で示した応用例ばかりでなく表 1.1 に示したような実務的応用範囲が予測されるので、き裂解析の実務への活用がより広範囲に期待される。

## 1.4 本研究の目的とその概要

### (1) 研究の目的

本研究の目的はつぎのような点にある。表 1.2 に近年のき裂に関する研究の概要と本研究内容との関連を示す。

- a) 従来の境界面き裂解析に関する研究で問題となっているき裂先端部での集積特異点状の応力集中を取り上げ、有限で滑らかな応力と変位を実現する解析解を求める。
- b) 具体的には、重み積分法の手法を用いて応力と開口が共存するプロセスゾーンを設定して応力分布の平滑化を実現する。
- c) 無限遠点で応力状態が同じであっても境界条件が異なる一般解を複数個誘導する。これらの解をその基本的性質により4つの一般解群に分類整理する。
- d) 一般解を複数個重ね合わせて「き裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を形成する」ための最適組み合わせを見つける手法を提案する。
- e) 複合材料や異方性材料を対象として、主軸の傾きや剛性値の異なる直交異方性弾性体間の境界面き裂を解析できる解析解を求める。
- f) 直交異方性弾性体内の各種開口関数を整理し、自由辺近傍にあるき裂の先端部の応力集中を表現できる解析解を求める。
- g) 自由辺近傍のき裂の実務的な研究として具体的な応用例を示す。
- h) 本研究で示す解析法と他の数値解析法との比較検討をおこなう。

### (2) 研究の概要

本論文は直交異方性弾性体境界面およびその近傍のき裂を対象にして、「き裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を形成する」解析解を求め、土木工学分野における岩石・岩盤問題への実務的な応用について詳述したものである。本論は2～9章で構成されている。各章の内容の概略を以下に述べる。

第2章： 従来の解析に最も多く引用されている Westergaard の解は、応力が無限大になる特異点を持つので工学的には不都合である。この特異性を示す 0.5乗のオーダーの無限大は積分可能であることに着目して、指数関数へ変形してその指数部内で重み積分する方法を提案した。重み関数は2次式4次式のを定義して重み積分をおこなっている。さらに本研究で用いる要素関数を定義している。

第3章： 直交異方性弾性体の面内問題の基礎式から一般解を得ている。一般解の変数として従来用いられている  $Z$  ではなく  $z_j = P\xi + i\eta$  という形の変数で解関数を定義して  $\eta$  軸上の連続条件を簡素化している。

第4章： 要素関数を2つずつ重ね合わせて、境界線上における変位と開口の応力解放条件を導入して満足させ、直交異方性弾性体の境界面き裂の一般解を誘導しその曲面を示している。さらに、一般解はその基本的性質により4つの関数に分類できることを明らかにしている。

第5章： これらの単独の一般解の曲面を重ね合わせて、目的としている「き裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を形成する」解析解を得るための手法を4つ提案し、最も妥当な方法を決定している。具体的な中心き裂の解析例として、異方性の岩盤とその上に打設されたコンクリートがせん断応力を受ける場合を想定し、接触不良部の応力集中の状況

を解析している。異方性の主軸の角度による影響、岩盤の剛性値の変化による応力集中の変化、プロセスゾーンの大きさによる影響などについて詳述している。また、地下岩盤内の2層の異方性境界面に有限な大きさのき裂を想定した解析も行っている。

第6章： 外側き裂の解析例として鋼材と接合している異方性材料に引張応力が作用する場合の接触面不良問題を取り上げ異方性の主軸の傾きによる応力集中状態を解析しその影響を明らかにしている。また、岩盤内に建設された低温貯蔵式のLPG地下空洞の温度勾配による覆工コンクリートと周辺岩盤との接触面不良問題を解析している。

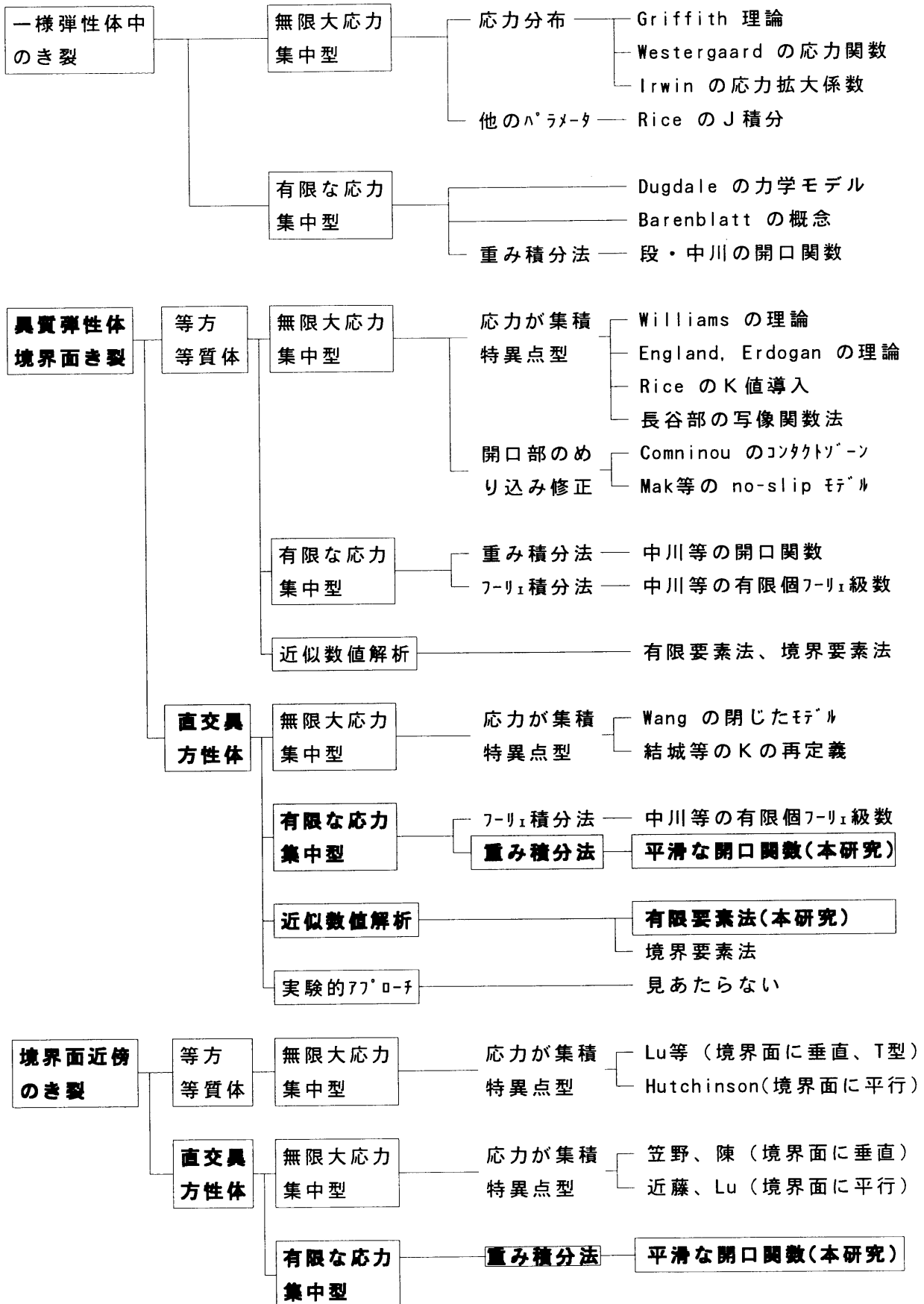
第7章： 自由辺の境界面を持つ直交異方性弾性体の境界面近傍のき裂解析を行っている。内部にき裂を有する直交異方性弾性体を対象とする場合の各種き裂開口関数の一般形を誘導して分類・整理し、これらの開口関数を基にして自由辺近傍のき裂解析に活用し得る特異関数の構成法を導いている。岩盤を対象とする応用例として、ダム基礎岩盤の強化を目的とするコンソリデーショングラウトの施工にともなう岩盤変形問題を取り上げ解析をしている。

第8章： 本研究で提案しているプロセスゾーンで有限な応力集中と開口を表現できる解析解と数値解析法の代表的方法である有限要素法による解析との比較検討をし考察を加えている。

第9章： 本研究の結論と今後の展開について述べている。



表 1.2 き裂研究の全体概要と本研究の位置づけ



注) 太字は本研究内容

## 参考文献

- 1) A. A. Griffith: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol. 221, pp. 163-168, 1920.
- 2) H. M. Westergaard: Bearing Pressure and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, 33, A-49-53, 1939.
- 3) G. R. Irwin : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 24 pp. 361-364, 1957.
- 4) 土木学会構造工学委員会: 土木工学における破壊力学の適用性, 土木学会論文集, 第380号, I-7, pp. 13-26, 1987. 4
- 5) J. R. Rice: A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J. of Applied Mech., Transactions of the ASME, Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- 6) R. Abeyaratne: On the Estimation of Energy Release Rates, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, Vol. 50, pp. 1923, 1983.
- 7) D. S. Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys, Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 8) 長谷部 宣男, 飯田 宇朗: 隅角部に丸みを有する Y 字形板の応力解析と応力集中係数, 日本機械学会論文集(A編)47巻424号, pp. 1347-1353, 1981.
- 9) N. Hasebe and J. Iida: Intensity of Corner and Stress Concentration Factor, J. of Eng. Mech., ASCE, Vol. 109, pp. 346-356, 1983.
- 10) J. Iida: and N. Hasebe and T. Nakamura: Intensity of Corner in Fixed Edge of Thin Plate, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol. 113, pp. 1138-1146, 1987.
- 11) Kyu Zong Cho, et al: Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Eng. Mech. 110, 8, pp. 1174-1184, 1984.
- 12) D. J. W. Wium, et al: Hybrid Model for Discrete Cracks in Concrete, J. of Eng. Mech., 110, 8 pp. 1211-1229, 1984.
- 13) M. Wecharatana and S. P. Shah: A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, Cement and Concrete Research 13, 6, pp. 819-829, 1983.
- 14) K. Visalvanich and A. E. Naaman: Fracture Model for Reinforced Concrete, ACI Journal, Title No. 80-14, pp. 128-138, 1983.
- 15) 宮本 博: 三次元弾性論, 裳華房, 1967.
- 16) M. K. Kassir and G. C. Sih: Three-dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings, J. of Appl. Mech. Transactions of the ASME, Vol. 33, pp. 601-611, 1966.
- 17) F. W. Smith, A. S. Kobayashi and A. F. Emry: Stress Intensity Factors for Penny-shaped Cracks Part 1-Infinite Solid, J. of Appl. Mech. Transactions of the ASME, pp. 947-952, 1967.
- 18) J. C. Bell: Stress from Arbitrary Loads on a Circular Crack, Inter. J. of Fracture, Vol. 1, No. 1, pp. 85-104, 1979.
- 19) 浪岡 宏司, 進藤 裕英, 渥美 光: 接合面にき裂を有する二層複合材の軸対象問題 日本機械学会論文集(A編) 46巻404号, 1980.

- 20) Y. M. Tsai: Ductile Penny-shaped Crack in a Thick Transversely Isotropic Plate, Int. J. Mech. Sci., Vol. 26, No. 4, pp. 245-252, 1984.
- 21) G. I. Barenblatt: The Formulation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture. General Ideas and Hypotheses. Axially-symmetric Cracks, PMM Vol. 23, No. 3, pp. 434-444, 1959.
- 22) 高久田 和夫: 接合面上に円形き裂を有する二層無限体のせん断, 日本機械学会論文集(A編) 45巻397号, pp. 1007-1015, 1979.
- 23) 高久田 和夫, 渋谷 寿一, 小泉 堯: 接合面上に円形き裂を有する二層無限体に関する非軸対称問題, 日本機械学会論文集(A編) 46巻401号, pp. 51-59, 1980.
- 24) M. K. Kassir: Stress-intensity Factor for a Three-dimensional Rectangular Crack, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, Vol. 48, pp. 309-312, 1981.
- 25) R. N. L. Smith: Stress from Arbitrary Loads on a Penny-shaped Crack, Inter. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 20, pp. 2093-2105, 1984.
- 26) S. Krenk: A Circular Crack under Ansymmetric Loads and Some Related Integral Equations, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, Vol. 46, pp. 821-826, 1967.
- 27) 土田 栄一郎, 内山 豊美: 偏平回転楕円体状空隙あるいは円形き裂を有する円柱の引張り, 日本機械学会論文集(A編) 45巻393号, pp. 455-463, 1979.
- 28) 高久田 和夫, 渋谷 寿一, 小泉 堯: 接合面上に円形き裂を有する二層無限体の軸対称応力解析, 日本機械学会論文集(A編) 46巻409号, pp. 957-967, 1980.
- 29) 石田 誠, 野口 博司: だ円板状内部き裂を持つ板の引張り, 日本機械学会論文集(A) 48巻431号, pp. 888-898, 1982.
- 30) R. A. Westmann: A Symmetric Mixed Boundary-value Problems of Elastic Half-space, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, pp. 411-417, 1965.
- 31) X. R. Wu and J. Carlsson: Welding Residual Stress Intensity Factors for Half-elliptical Surface Crack in Thin and Thick Plates, Fract. Mech., 19, 3, pp. 407-426, 1984.
- 32) 小林 昭一, 西村 直志: 積分方程式による表面クラック周辺の応力解析, 土木学会論文報告集, 第288号, pp. 57-65, 1979.
- 33) M. K. Kassir: A Three-dimensional Rectangular Crack Subjected to Shear Loading Int. J. of Solids and Struc., 18, 12, pp. 1075-1082, 1982.
- 34) 長谷部 宣男: 切欠きを有する半無限弾性体の縦せん断応力, 土木学会論文報告集, No. 211, pp. 11-18, 1973.
- 35) 能町 純雄: 平板のクラック周辺の曲げ応力の集中について, 土木学会論文報告集, No. 68, pp. 27-31, 1960.
- 36) H. Boduroglu, F. Erdgan: Internal and Edge Cracks in a Plate of Finite Width under Bending, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, Vol. 50, pp. 612-629, 1983.
- 37) M. L. Williams: The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, pp. 78-82, 1961.
- 38) E. S. Folias: On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, pp. 663-674, 1975.
- 39) 丹羽 義次, 平島 健一: 複数個の円孔ないし楕円孔を有する異方性弾性板内の応力状態, 土木学会論文報告集, No. 196, pp. 9-18, 1971.

- 40) 長谷部 宣男: ある種の直交異方性弾性板の応力集中と応力解析, 土木学会論文報告集, No. 233, pp. 1-11, 1975.
- 41) D. D. Ang, M. L. Williams: Combined Stresses in an Orthotropic Plate Having a Finite Crack, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, pp. 372-378, 1961.
- 42) S. Krenk: The Stress Distribution in an Infinite Anisotropic Plate With Co-linear Crack, Inter. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 449-460, 1975.
- 43) S. S. Wang, J. F. Yau and H. T. Corten: A Mixed-mode Crack Analysis of Rectilinear Anisotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, Int. J. Fracture, 16, 3, pp. 247-259, 1980.
- 44) A. C. Kaya and F. Erdogan: Stress Intensity Factors and COD in an Orthotropic Strip, Int. J. of Fracture 16, 2, pp. 171-190, 1980.
- 45) Williams, M. L.: The Stress Around a Fault of Crack in Dissimilar Media, Bull. of Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
- 46) Rice, J. R. and Sih, G. C.: Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 32, pp. 418-423, 1965.
- 47) England, A. H.: A Crack between Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 400-402, 1965.
- 48) Erdogan, F.: Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 403-410, 1965.
- 49) Comninou, M.: The Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 44, pp. 631-636, 1977.
- 50) Comninou, M.: A Property of Interface Dislocations, Philosophical Magazine, 36, pp. 1281-1283, 1977.
- 51) Comninou, M.: The Interface Crack in a Shear Field, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 45, pp. 287-290, 1978.
- 52) Comninou, M. and Schmueser, D.: The Interface Crack in a Combined Tension Compression and Shear Field, Tras. of the ASME, J. of Appl. Mech., 46, pp. 345-348, 1979.
- 53) Comninou, M. and Dundurs, J.: On the Behavior of Interface Cracks, Res. Mechanics, 1, pp. 249-264, 1980.
- 54) C. Atkinson: On Stress Singularities of and Interfaces in Linear Elastic Fracture Mechanics, Int. J. of Fracture, Vol. 13, pp. 807-820, 1977.
- 55) A. K. Gautesen and J. Dundurs: The Interface Crack in a Tension Field, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 54, pp. 93-98, 1987.
- 56) C. Atkinson: The Interface Crack with a Contact Zone (an Analytical Treatment) Int. J. of Fracture 18, 3, pp. 161-177, 1982.
- 57) C. Atkinson: The Interface Crack with a Contact Zone (the Crack of Finite Length), Int. J. of Fracture Vol. 19, pp. 131-138, 1982.
- 58) A. F. Mak, L. M. Keer, S. H. Chen and J. L. Lewis: A No-Slip Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 47, pp. 347-350, 1980.
- 59) S. Itou: Stresses around an Interface Crack, Eng. Fract. Mech. Vol. 25, NO. 4, pp. 415-420, 1986.

- 60) 長谷部 宣男, 奥村 幹也, 中村 卓次: 集中偶を受ける異材半無限板接合端に発生したクラックおよび剥離: 材料, 39巻, pp.1405-1410, 1990.
- 61) 長谷部 宣男, 奥村 幹也, 中村 卓次: 有限部で接合された異材半平面の剥離端からのクラックや隔離の発生条件, 土木学会論文集, No.428/I-15, 1991.
- 62) Wang, S. S. and Choi, I. :The Interface Crack Behavior in Dissimilar Anisotropic Composites Under Mixed-Mode Loading, Trans. of the ASME, J. of Appl. mech., 50, pp. 179-117, 1983.
- 63) Wang, S. S. and Choi, I. :The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 50, pp. 169-178, 1983.
- 64) Wang, S. S. : An Analysis of Delamination in Angle-Ply Fiber-Reinforced Composites, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech. 47, pp. 64-70, 1981.
- 65) 結城 良治, 許 金泉:直交異方性異材界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集(A編), 57巻539号, pp. 78-85, 1991.
- 66) 許 金泉, 結城 良治:直交異方性異材界面き裂の応力拡大係数(界面と主軸が一致しない場合), 日本機械学会論文(A編), 60巻577号, pp. 41-48, 1994. 9.
- 67) 中川 建治: 特性が異なる異方性弾性体の接触面に生じている亀裂の周辺の応力集中の変形の解析, 一般研究 C 課題番号:62550331(昭和62年度~平成元年度)
- 68) Nakagawa, K. , Anma, T. and Duan, S. :A Mathematical Approach of the Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Fract. Mech., Vol 36, pp. 439-449, 1990.
- 69) Fujii, K. , Nakagawa, K. , Anma, T. and Duan, S. :The Stress Concentration Ratio of The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Fract. Mech., Vol 44, pp. 1-19, 1993.
- 70) 安間 朋寿, 段 樹金, 中川 建治:直交異方性体中の境界面亀裂周辺の応力集中に関する研究, 土木学会中部支部学術講演会 I-6, 1988
- 71) 山崎 淳一, 結城 良治, 北川 英夫: エポキシ間異材境界上の疲労伝播特性と接合力の評価, 日本機械学会論文集(A編), 52巻 476号, pp. 963-971. 1986.
- 72) 池田 徹, 宮崎 則幸, 祖田 敏弘, 宗像 健:異種材界面き裂の混合モード破壊基準, 日本機械学会論文集(A編), 58巻 555号, pp. 70-77, 1992.
- 73) 佐藤 満, 結城 良治, 吉岡 純夫: き裂面接触を考慮したLSIパッケージの界面き裂の境界要素熱伝導・熱弾塑性解析, 日本機械学会論文集(A編), 58巻 550号, pp. 859-865, 1992.
- 74) M. C. Lu and F. Erdogan: Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface-1. Analysis, Eng. Fract. Mech., Vol 18, pp. 491-506, 1983.
- 75) 笠野 英秋等: 異相界面を横切るき裂の二次元静弾性解析, 日本機械学会論文集(A), 53巻 485号, pp. 61-69, 1987.
- 76) 陳 代行: 等方性・異方性接合無限板の界面に垂直なき裂先端の応力場, 日本機械学会論文集, 61巻 581号, pp. 52-59, 1995.
- 77) J. W. Hutchinson , M. E. Mear and J. R. Rice : Crack Paralleling an Interface Between Dissimilar Materials, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech. 54, pp. 828-832, 1987.

- 78) 近藤 俊美: 2個のき裂を有する複合異方弾性体の縦せん断, 日本機械学会論文集, 55巻, 513号, 1989.
- 79) H. Lu and T. J. Lardner: Mechanics of Subinterface Cracks in Layered Material, Int. J. Solids Structures, Vol. 29, No. 6, pp. 669-688, 1992.
- 80) 日本コンクリート工学協会: 破壊力学の応用研究委員会報告書, 1993. 10
- 81) 大塚 浩司, 勝部 宏明: コンクリートの破壊進行領域の性状に及ぼす骨材寸法の影響, 土木学会論文集, No. 473, V-21, pp. 109-116, 1993.
- 82) 堀井 秀之, 一宮 利通: レーザースペックル法によるフラクチャープロセスゾーンの計測, 土木学構造工学論文集, Vol. 36A, 1993.
- 83) N. Krstulovic-Oparau: Fracture Process Zone Reseance and Behavior in Mortar Specimens, ACI Materials Journal., November-December, pp. 618-627, 1993.
- 84) 小柳 洽, 六郷 恵哲他: 静的破壊剤によるコンクリートの破壊, セメント技術年報 36, 1982
- 85) 原田 哲夫他: 静的破壊剤の膨張圧測定法と膨張圧の諸性質, 土木学会論文集, No. 478号 V-21, pp. 91-100, 1993. 11
- 86) 長野県土木部編: 釜口水門工事誌, pp. 506-526, 1993. 3
- 87) 株式会社 熊谷組: 釜口水門施工計画書, 1992.
- 88) 萩森 健治他: スロット削孔機とブレーカを用いた硬岩トンネルの無発破掘削工法に関する研究, 土木学会論文集, No. 415号 IV-12, pp. 99-108, 1990. 3
- 89) 有賀 義明他: 秋葉ダムの堤体穴あけ施工, 大ダム, No. 139, pp. 55-59, 1992. 3
- 90) 青木 謙治, 村川 浩一, 腰塚 憲一: トンネル発破設計法への破壊力学の適用性, 鹿島技術研究所年報, 第39号, pp. 189-194, 1991. 10.
- 91) 堀 義直: 「焼け石に水」で発電, 土木学会誌, pp. 10-13, 1995. 6
- 92) 伊藤 高敏他: 水圧破砕地殻応力計測における横き裂開口挙動の解析, 機械学会論文集(A編), 59巻561号, pp. 103-107, 1993. 5
- 93) 石塚 与志雄, 木下 直人: 破壊力学を用いたLPG岩盤内貯蔵空洞の亀裂進展解析に関する研究, 土木学会論文集 第388号 III-8, pp. 171-178, 1987. 12.
- 94) 稲田 善紀, 北村 聖一, 岡田 明浩: LNGの地下岩盤貯蔵における空洞の安定性の検討, 土木学会論文集 第343号, pp. 35-44, 1984.
- 95) 則松 秀晴: わが国におけるコンクリートダムの再開発技術, 大ダム, No. 148, pp. 12-29, 1994. 6
- 96) 江川 顕一郎他: 建設後70年余年を経た老化ダムの補強と洪水吐のゲートレス化, 大ダム No. 150, pp. 62-70, 1994. 12
- 97) 中部電力株式会社: 奥矢作第一、二発電所建設工事報告書, pp. 62-74, 1982. 9
- 98) 上田 貴夫他: 岩盤基礎グラウト注入特性のAEエネルギーによる評価, 土木学会論文集, No. 493号 III-27, pp. 1-10, 1994. 6
- 99) 長瀬 裕信, 土居 亮太, 中川 建治: 直交異方性板の各種開口関数の構成法と自由辺近傍の亀裂解析への適用, 土木学会論文集投稿中(1995. 3投稿)
- 100) 土木学会: 現位置岩盤の変形およびせん断試験の指針 - 解説と設計への適用 -, pp. 17-31, 1987. 7
- 101) 段 樹金, 中川 建治: せん断を受ける円盤状亀裂周辺で有限な応力集中を与える弾性解, 土質工学会論文報告集. Vol. 38, No. 1, pp. 153-160, 1988. 3

## 第 2 章 重み積分法による開口関数と要素関数

### 2.1 はじめに

従来き裂の解析あるいはき裂やノッチの実験的データの整理として最も広く引用されるのは Westergaard<sup>1)</sup>の解である。しかし、この解は応力集中が無限大となることが工学的に不合理な場合があるので Dugdale<sup>2)</sup>はき裂先端で  $\sigma_{\max} = \sigma_{yd}$  という一定応力分布が実現する解を導いた。

これとは別に中川、段<sup>3)4)</sup>は Westergaard の応力集中の特性は 0.5 乗のオーダの無限大であることに着目して、重み積分法によって応力集中を有限化することを提唱した。

重み積分法の 1 つは、Westergaard の解をき裂の長さを表すパラメータ  $a$  に関して重み関数  $\rho(a)$  を定義して  $a$  について積分する方法である。

他の 1 つは、き裂の開口関数を指数関数で定義して、その指数部において重み積分を行って開口形状を平滑化する方法である。

### 2.2 重み積分法

#### (1) 従来の開口関数と重み積分

$y$  軸に直線状の一つのき裂がある弾性無限板が無遠点で一様な引張応力  $\sigma_0$  を受けている場合の 2 次元問題としての応力関数は Westergaard<sup>1)</sup> により次のように与えられている。

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0 \quad (2.1)$$

$$W = \bar{z} \psi + \phi \quad (2.2)$$

$$\psi = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2} \quad (2.3)$$

$$\phi = -\frac{\sigma_0}{2} a^2 \log(z + \sqrt{z^2 + a^2}) \quad (2.4)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \quad (2.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \quad (2.6)$$

$$\tau_{xy} = -\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \quad (2.7)$$

この式において  $y = \pm a$  で特異性を示すのは  $z / \sqrt{z^2 + a^2}$  項である。中川等<sup>3)4)</sup>はこの関数によって生じる応力集中の無限大は積分可能な無限大であることに着目して重み積分により関数解を誘導し多くの研究成果を発表している。これは集中荷重によって載荷点近傍に生じる無限大応力集中は集中荷重を積分して線荷重にすることによって有限な応力度になるということに対応している。中川等の方法は応力関数を直接その

まま重み積分する方法を採用している。本研究の内第7章の自由辺境界面近傍のき裂解析ではこの方法を採用している。

このように従来 of 応力関数を直接重み積分する解は代数関数から対数関数へ変換することになるが、プロセスゾーン相当部分を代数分岐によって構成するものとなる。重み関数の形状によって多くの応力関数を導き得るが、これらはすべて一種類の弾性体(等方性体あるいは直交異方性体)中のき裂問題に対する解となり得るが、異種弾性体間の境界面き裂の問題を表す解とはなり得ない。そこで、第4章の直交異方性弾性体境界面き裂の重み積分では指数関数へ変形して重み積分をする方式を採用する。

本章では直交異方性弾性体の境界面き裂を対象とした重み積分法を詳述し、自由辺境界面近傍のき裂解析を対象とする重み積分法については第7章で紹介するものとする。

説明に先立ち表 2.1 に2法の重み積分法の用語を定義する。

表 2.1 重み積分法 of 用語 of 定義

重み積分法	境界面き裂	指数関数方式	基本開口関数	要素関数	一般解	最適解
		$H_0$	$H()$	$f_1()$ $f_2()$ $f_3()$ $f_4()$	$W_1()$ $W_2()$ $W_3()$ ⋮	$W()$
	自由辺近傍のき裂	直接方式	基本開口関数	一般解	打ち消し解	自由辺近傍の解
			$f_1()$ $f_2()$ $f_3()$ $f_4()$	$W()$	$W_1()$ $W_2()$	$W()$

(2)本研究の開口関数と重み積分

本研究では特異性を与えるこの項をさらに式 (2.8) に示すように指数関数へ変形して、この関数を重み積分する方法を採用する。この方法は積分などの式の誘導が簡便で取り扱い易いという利点がある。

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z+ia}{z-ia}} + \sqrt{\frac{z-ia}{z+ia}} \right) = \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \right\} \tag{2.8}$$

ここで 
$$h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \tag{2.9}$$



とおくと、実数部  $\text{Re}\{h(z, a)\}$  は  $y$  軸上の  $\pm a$  で  $\pm \infty$  に発散し、虚数部は  $0$  から  $\pi/2$  または  $\pi/2$  から  $0$  へと急激に変化する性質がある。

ここに導いた関数  $h(z, a)$  は指数関数の指数部であるが、この  $h(z, a)$  をパラメータ  $a$  を積分変数として重み積分することによって  $h(z, a)$  による開口を平滑化することを考えるのである。いわば、分岐を持つ関数  $z/\sqrt{z^2+a^2}$  を直接重み積分をするのではなく、これを指数表示して指数部内で重み積分するという従来にない発想である。しかし、これによって応力関数としての(等方性体の場合に対しては重調和)特性が失われるわけではない。本研究で対象とする直交異方性体の場合にも応力関数として何の不都合も生じない。

さて、このようにして得られる応力関数は指数関数表示であるために異種弾性体間の境界面き裂の問題を表現するには合理的なものとなる( bi-elastic constant は指数関数で定義される)。なお、一種類の弾性体(等方性、異方性を問わず)中のき裂の問題もこの方式による関数で表現し得る。

### 2.3 基本開口関数

複素変数  $z=x+iy$  の関数で  $y$  軸上の区間  $(-t < y < t)$  で虚数曲面が開口を構成する関数  $h(z, t)$  の代表例は

$$h(z, t) = \frac{1}{2} \log \frac{z + it}{z - it} \quad (2.10)$$

である。この関数の虚数部は  $y$  軸上の点  $\pm t$  で  $\pm \pi/2$  の長方形のくい違いを生じさせるので、著者等が提案している重み積分法を用いて開口形状を平滑化する。すなわち区間  $(a < t < a+b)$  で定義される重み関数  $\rho(t)$  を乗じて  $t$  について積分することによって応力と開口変位が共存するプロセスゾーン相当の部分(図 2.1 の  $b$  部)を構成する開口関数  $H(z, a, b)$  を導くことができる。

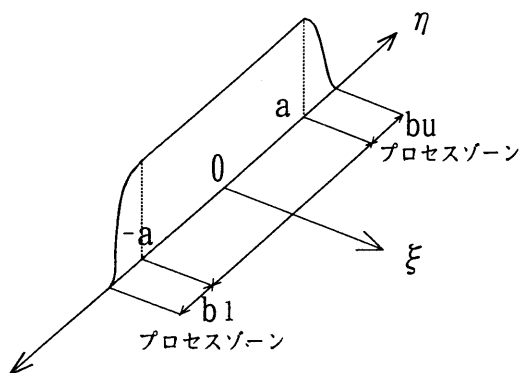


図 2.1 開口形状

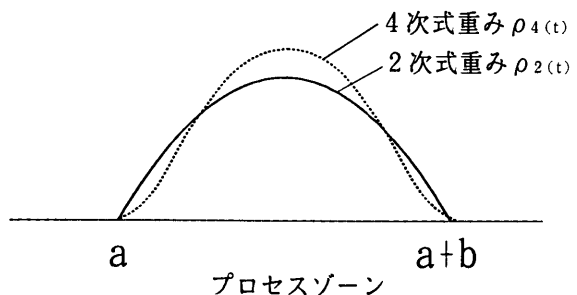


図 2.2 重みの形状

本研究では式(2.10)を平滑化して滑らかなプロセスゾーンを構成するために4次式の重み関数を定義して次のような重み積分をするが、重み関数は面積1の関数なら任意に選び

得る。

$$\rho_4(t) = \begin{cases} C_4(t-a)^2(t-a-b)^2 & a < t < a+b \\ 0 & t < a \text{ or } a+b < t \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} H_0(z, a, b) &= \int_a^{a+b} \rho_4 h(z, t) dt \\ &= \frac{1}{2} C_4 \int_a^{a+b} (t-a)^2(t-a-b)^2 \log \frac{z+it}{z-it} dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

定数  $C_4$  は重みの総和が1になるように定める。なお重み積分の誘導の詳細については文献<sup>5)6)</sup>に直線境界と円形境界との場合が示されている。

本文ではこの応力関数をさらに一般化してき裂両端で長さの異なるプロセスゾーンを構成する解を導く。このためには

$$\begin{aligned} H_0(z, a, b_1, b_2) &= \frac{1}{2} C_1 \int_{-(a+b_1)}^{-a} (t+a+b_1)^2(t+a)^2 \log(z-it) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} C_2 \int_a^{a+b_2} (t-a)^2(t-a-b_2)^2 \log(z-it) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

とすればよい。ここで

$$C_1 \int_{-(a+b_1)}^{-a} (t+a+b_1)^2(t+a)^2 dt = 1 \quad (2.14)$$

$$C_2 \int_a^{a+b_2} (t-a)^2(t-a-b_2)^2 dt = 1 \quad (2.15)$$

が成立するように  $C_1$ 、 $C_2$ を決める。

これらの積分演算は、従来の直線状き裂でプロセスゾーンの長さの等しい場合の演算と基本的には同じものであるから詳細を割愛して結果のみ式(2.16)(2.17)に示す<sup>5)</sup>。図 2.3、2.4 には原点を中心として  $y$ 軸上に界面き裂が存在する場合の式(2.16)の開口関数  $H(z, a, b)$  に対する実数部曲面およびその拡大図、虚数部曲面およびその拡大図を示す。図より実数曲面の無限項が有限化していること、虚数曲面については  $y$ 軸上で0から $\pm \pi/2$ に滑らかに立ち上がることが認識できる。

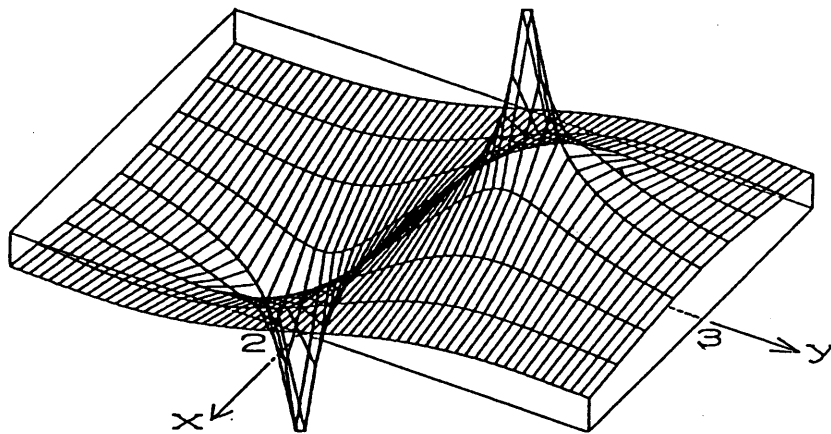
$$H(z, a, b) = H_0(z, a, b) - H_0(z, -a, -b) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
 H_0(z, a, b) = & \frac{i}{2b^5} [ -\{(z+ia+ib)^5 - 5(z+ia)(z+ia+ib)^4 \\
 & + 10(z+ia)^2(z+ia+ib)^3\} \log(z+ia+ib) \\
 & + \{(z+ia)^5 - 5(z+ia)^4(z+ia+ib) \\
 & + 10(z+ia)^3(z+ia+ib)^2\} \log(z+ia) \\
 & + \frac{47}{60} \{(z+ia+ib)^5 - (z+ia)^5\} \\
 & - \frac{15}{12} (z+ia)(z+ia+ib)\{(z+ia+ib)^3 - (z+ia)^3\} \\
 & - \frac{55}{3} ib(z+ia)^2(z+ia+ib)^2 ] \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

同様にして2次式の重みによる重み積分をおこなえば、詳細は省略するが式(2.19)が得られる。<sup>5)</sup>

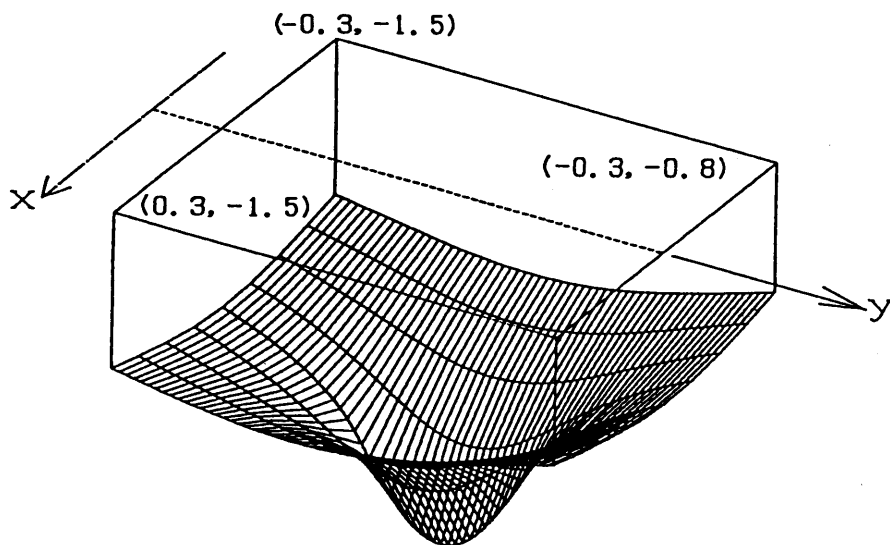
$$\begin{aligned}
 \rho_z(t) = & C_z(t-a)(t-a-b) & a < t < a+b \\
 = & 0 & t < a \text{ or } a+b < t
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
 H_0(z, a, b) = & \frac{i}{b^3} [ \{(z+ia+ib)^2(z+ia - \frac{bi}{2})\} \log(z+ia+ib) \\
 & - \{(z+ia)^2(z+ia + \frac{3bi}{2})\} \log(z+ia) \\
 & - \frac{bi}{3} \{3(z+ia + \frac{bi}{2})^2 + 2b^2\} ] \quad (2.19)
 \end{aligned}$$



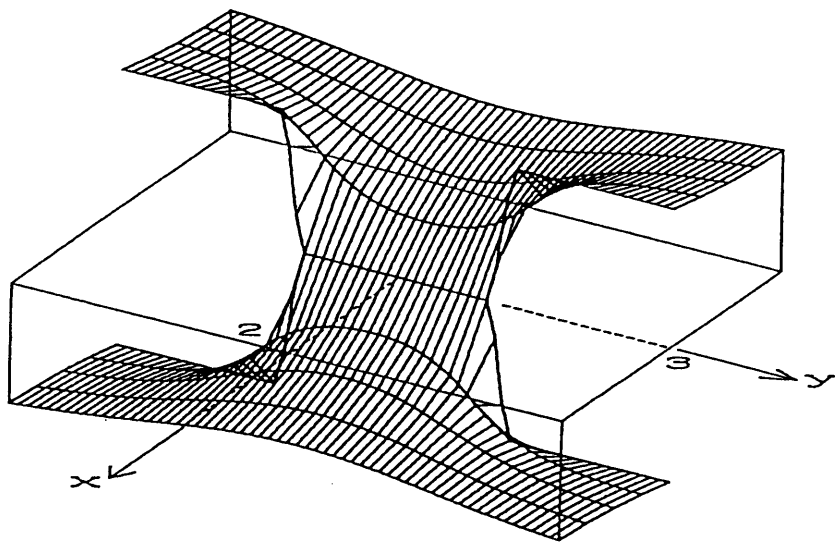
$a=1\text{cm}$ 、 $b=0.3\text{cm}$   
 $|x| < 2$   
 $|y| < 3$

図 2.3(a) 関数  $H(z, a, b)$  の実数曲面  $\text{Re}[H]$



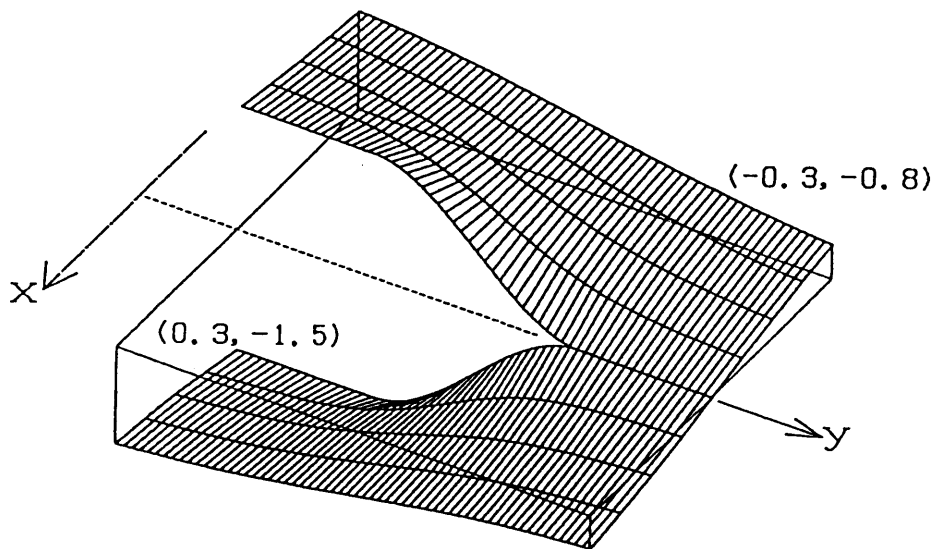
$a=1\text{cm}$ 、 $b=0.3\text{cm}$   
 $-0.3 < x < 0.3$   
 $-1.5 < y < -0.8$

図 2.3(b) 関数  $H(z, a, b)$  の実数曲面拡大図



$a=1\text{cm}$ 、 $b=0.3\text{cm}$   
 $|x| < 2$   
 $|y| < 3$

図 2.4(a) 関数  $H(z, a, b)$  の虚数曲面  $\text{Im}[H]$



$a=1\text{cm}$ 、 $b=0.3\text{cm}$   
 $-0.3 < x < 0.3$   
 $-1.5 < y < -0.8$

図 2.4(b) 関数  $H(z, a, b)$  の虚数曲面拡大図

## 2.4 要素関数

さて、 $H(z, a, b_1, b_2)$ によって異質材料の境界面き裂の応力関数<sup>5)</sup>となり得る関数を数多く定義できるが、それらの基本となる関数を開口関数によって次のように定義して本研究では要素関数と仮称する。これらはすべて滑らかな開口を形成する関数である。

$\eta$  軸上の区間 $(-a, a)$ で完全開口、区間 $(-a-b_1, -a)$ 及び区間 $(a, a+b_2)$ でプロセスゾーンを構成するための開口を与える関数  $H(z, a, b_1, b_2)$ は式(2.16)より改めて

$$H(z, a, b_1, b_2) = H_0(z, -a-b_1, -a) - H_0(z, a, a+b_2) \quad (2.20)$$

とする。さて異質境界面問題の解を構成する要素関数として以下の関数を定義する。

$$f_1(z) = \cosh\{(1+i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} - \cosh\{(1-i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} \\ = 2i \sinh\{H(z, a, b_1, b_2)\} \sin\{\alpha H(z, a, b_1, b_2)\} \quad (2.21)$$

$$f_2(z) = \sinh\{(1+i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} + \sinh\{(1-i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} \\ = 2 \sinh\{H(z, a, b_1, b_2)\} \cos\{\alpha H(z, a, b_1, b_2)\} \quad (2.22)$$

$$f_3(z) = i[\cosh\{(1+i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} + \cosh\{(1-i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\}] \\ = 2i \cosh\{H(z, a, b_1, b_2)\} \cos\{\alpha H(z, a, b_1, b_2)\} \quad (2.23)$$

$$f_4(z) = -i[\sinh\{(1+i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\} - \sinh\{(1-i\alpha)H(z, a, b_1, b_2)\}] \\ = 2 \cosh\{H(z, a, b_1, b_2)\} \sin\{\alpha H(z, a, b_1, b_2)\} \quad (2.24)$$

ここで、 $\alpha$ は境界面の連続条件を満足させるための bi-elastic constant と呼ばれるパラメーターである。

## 2.5 まとめ

(1) き裂周辺の応力解析の研究は、Griffith<sup>7)</sup>に始まり、Westergaard<sup>1)</sup>、Irwin<sup>8)</sup>、Dugdale<sup>2)</sup>、Rice<sup>9)</sup>等により二次元問題としての理論的研究がなされ現在まで多くの研究成果が発表されている。二次元問題の代表的な Westergaard による方法は数学的には簡便であるが、き裂先端で無限大の応力が生ずるのは  $z/\sqrt{z^2+a^2}$  項に起因している。

(2) 従来の境界面き裂の研究<sup>10)-13)</sup>ではき裂近傍で応力分布が集積特異点状となるものであったが、中川等の文献<sup>5)6)</sup>の研究では応力分布が有限で滑らかなものを導き得ることが示された。

(3) 重み積分は特異項を直接重み積分する方法と指数関数方式にして重み積分する方法があるが、本章では後者の方法とした。

(4) 本研究が上記の研究と異なる点は、直交異方性弾性体中のき裂においてもき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設け得たことと、その区間の長さをき裂両端で異なる長さになるように一般化したことである。これはプロセスゾーン相当部分を近似的に表現する区間とも解釈されよう。この区間を実現させた要因は開口関数として著者等<sup>5)6)14)15)</sup>

が等方性弾性体中のき裂の研究で提案している関数  $H(z)$  である。

## 参考文献

- 1) H. M. Westergaard: Bearing Pressure and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, 33, A-49-53, 1939.
- 2) D. S. Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 3) 段 樹金, 児嶋 弘行, 中川 建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No374/I-6, pp. 399-407, 1986. 10.
- 4) 段 樹金, 中川 建治: せん断を受ける円盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える弾性解について, 土質工学会論文報告集, Vol. 28, No. 1, pp. 153-160, 1988.
- 5) 藤井 康寿, 中川 建治: 面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数, 土木学会論文集, No. V-25, PP. 23-32. 1994-11.
- 6) 村瀬 安彦, 中川 建治: 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No483/I-26, pp. 41-49, 1994-1
- 7) A. A. Griffith: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol. 221, pp. 163-168, 1920.
- 8) G. R. Irwin : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, Vol. 24, pp. 361-364, 1957.
- 9) J. R. Rice: A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J. of Applied Mech., Transactions of the ASME, Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- 10) Williams, M. I. : The Stress Around a Fault of Crack in Dissimilar Media, Bull. of Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
- 11) Rice, J. R. and Sih, G. C. : Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 32, pp. 418-423, 1965.
- 12) England, A. H. : A Crack Between Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 400-402, 1965.
- 13) Erdogan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 403-410, 1965.
- 14) Fujii, K., Nakagawa, K., Duan, S. and Kato, Y.: Stress Function With Finite Magnitude of Stress Concentration Around an Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol 47, pp. 881-891, 1994.
- 15) 藤井 康寿, 金 奉烈, 中川 建治 : 異質弾性体の境界面周辺の応力特性について 土木学会第48回年次学術講演概要集第1部, pp. 1352-1353, 1993.

# 第 3 章 直交異方性弾性体間の境界面き裂の基礎式

## 3.1 はじめに

直交異方性弾性体に関する面内力問題の基礎式に基づいて直交異方性弾性体間の境界面に生じているき裂の周辺で振動特異性を持たない有限で滑らかな応力分布を与える一般解を導く<sup>1)2)</sup>。本研究の特徴はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定した点である。これによって従来の研究では界面き裂周辺の応力が振動特異性を示すという不自然な点を解消して、任意の主軸傾きに対してプロセスゾーンで滑らかな連続した応力と変位の曲面を表現できる多くの一般解を誘導することが可能となった。この一般解を複数重ね合わせるにより、複合材料や異方性の岩盤を対象とした境界面き裂の解析を行うことが可能になった。

## 3.2 解析モデルと基礎式

### (1) 解析モデルと定数

弾性特性がそれぞれ異なる 2 種類の直交異方性弾性体の半無限板(厚さ一定)が 図 3.1 に示すように直交座標系( $\xi, \eta$ )の  $\eta$  軸( $\xi=0$ )を境界面として接合され、原点を中心にし、インターフェイスクラックが  $2a$  の範囲で存在するものとする。それぞれの弾性定数と主軸を以下のように定義する。ここで添字  $j=1, 2$  はそれぞれ左半平面、右半平面を表す。 $b$  は応力と開口変位が共存するプロセスゾーン相当部分とする。

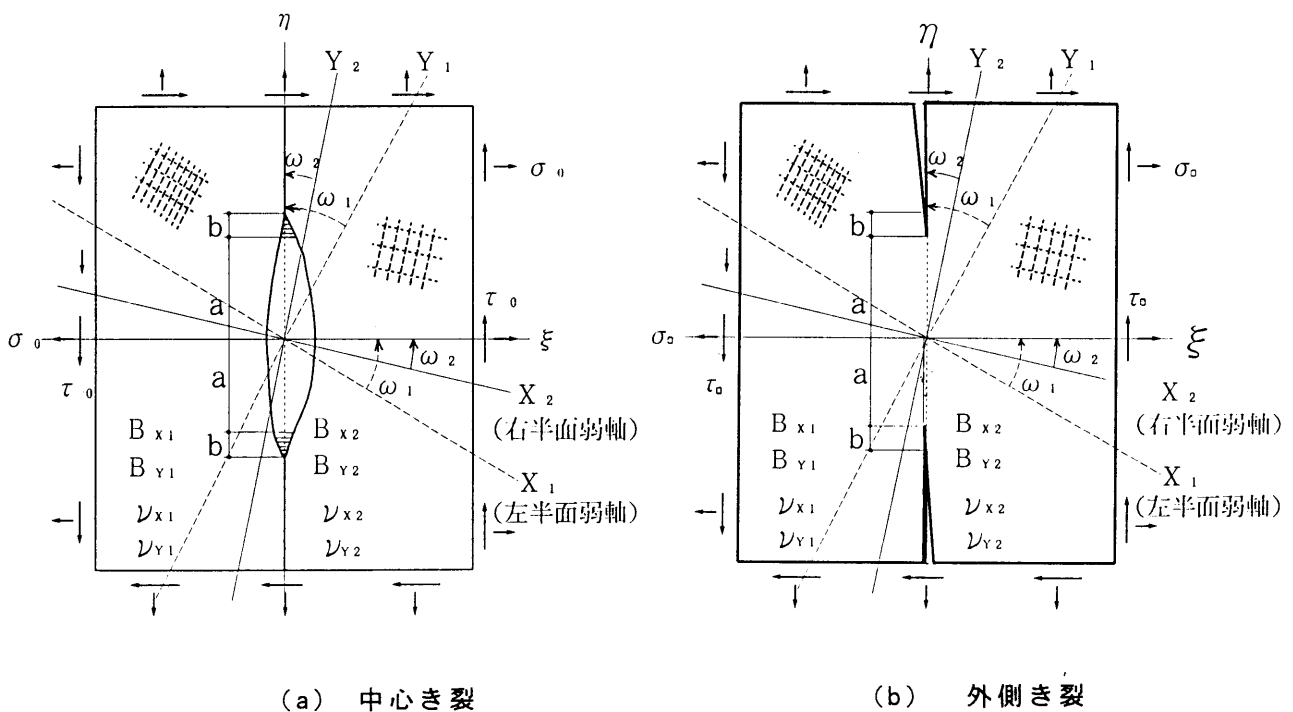


図 3.1 直交異方性弾性体界面き裂の解析モデル



j半平面

$\omega_j$  : 最弱( $X_j$ )軸より反時計方向で $\xi$ 正軸へ向かう角度

$X_j$  : j平面の弱軸 (剛さ  $B_{xj}$ )

$Y_j$  : " 強軸 (剛さ  $B_{yj}$ )

無限遠点では一様引張応力  $\sigma_0$  と一様せん断応力  $\tau_0$  が作用しているものとする。剛性とポアソン比とねじれ定数については  $B_0$  を基準剛性として次の関係が成立しているものとする。

$$\left. \begin{aligned} B_{xj} &= \beta_{xj}^4 B_0 & B_{yj} &= \beta_{yj}^4 B_0 \\ \nu_{yj} B_{xj} &= \nu_{xj} B_{yj} \\ 2\kappa_j &= \sqrt{B_{xj} B_{yj} / G_{xyj}} - 2\nu_{yj} \sqrt{B_{xj} / B_{yj}} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

$G_{xyj}$ : せん断弾性定数  
 $\kappa_j$ : ねじり定数  
 $\nu_{xj}, \nu_{yj}$ : ポアソン比

## (2) 直交異方性弾性体の基礎式

主軸座標( $X_j, Y_j$ )に関して、応力  $\sigma_{xj}, \sigma_{yj}, \tau_{xyj}$ 、変位  $U_j, V_j$ 、ひずみ  $\varepsilon_{xj}, \varepsilon_{yj}, \gamma_{xyj}$  と応力関数  $W(X_j, Y_j)$  に関する周知の関係式を以下に示す。

### a) ひずみと応力

ひずみと応力の関係は式(3.2)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xj} &= \frac{\partial U_j}{\partial X_j} = \frac{\sigma_{xj}}{B_{xj}} - \nu_{yj} \frac{\sigma_{yj}}{B_{yj}} \\ \varepsilon_{yj} &= \frac{\partial V_j}{\partial Y_j} = \frac{\sigma_{yj}}{B_{yj}} - \nu_{xj} \frac{\sigma_{xj}}{B_{xj}} \\ \gamma_{xyj} &= \frac{\partial V_j}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial Y_j} = \frac{\tau_{xyj}}{G_{xyj}} \end{aligned} \right\} (3.2)$$

### b) 平面板の面内釣り合い

X方向、Y方向の釣り合いは式(3.3)で表される。

$$\left. \begin{aligned} X\text{方向} \quad \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial X_j} + \frac{\partial \tau_{xyj}}{\partial Y_j} &= 0 \\ Y\text{方向} \quad \frac{\partial \tau_{xyj}}{\partial X_j} + \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial Y_j} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

ここで、応力  $\sigma_{xj}, \sigma_{yj}, \tau_{xyj}$  は応力関数  $W(X, Y)$  によって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xj} &= \frac{\partial^2 W}{\partial Y_j^2} \\ \sigma_{yj} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial X_j^2} \\ \tau_{xyj} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial X_j \partial Y_j} \end{aligned} \right\} (3.4)$$

と表されるものとする。

**C) 変形適合条件式**

X方向変位  $U(X_j, Y_j)$  と Y方向変位  $V(X_j, Y_j)$  とひずみ  $\varepsilon_{x_j}$ 、 $\varepsilon_{y_j}$ 、 $\gamma_{xy_j}$  とは式(3.2)で関係づけられているので、 $\varepsilon_{x_j}$ 、 $\varepsilon_{y_j}$ 、 $\gamma_{xy_j}$  は独立ではない。

同様に  $U(X_j, Y_j)$  と  $V(X_j, Y_j)$  も任意に定める訳にはいかない。お互いに拘束されている。

式(3.2)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial Y_j^2} \varepsilon_{x_j} &= \frac{\partial^3 U_j}{\partial^2 Y_j \partial X_j} \\ \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} \varepsilon_{y_j} &= \frac{\partial^3 V_j}{\partial^2 X_j \partial Y_j} \\ \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial Y_j} \gamma_{xy_j} &= \frac{\partial^3 U_j}{\partial^2 Y_j \partial X_j} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial^2 X_j \partial Y_j} \end{aligned} \right\} (3.5)$$

が得られ

$$\frac{\partial^2}{\partial Y_j^2} \varepsilon_{x_j} + \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} \varepsilon_{y_j} - \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial Y_j} \gamma_{xy_j} = 0 \quad (3.6)$$

となって  $\varepsilon_{x_j}$ 、 $\varepsilon_{y_j}$ 、 $\gamma_{xy_j}$  が拘束される変形適合条件式が得られる。

式(3.2)の応力  $\sigma_{x_j}$ 、 $\sigma_{y_j}$ 、 $\tau_{xy_j}$  を式(3.4)の  $W$  で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_j} &= \frac{1}{B_{x_j}} \frac{\partial^2 W}{\partial Y_j^2} - \frac{v_{y_j}}{B_{y_j}} \frac{\partial^2 W}{\partial X_j^2} \\ \varepsilon_{y_j} &= \frac{1}{B_{y_j}} \frac{\partial^2 W}{\partial X_j^2} - \frac{v_{x_j}}{B_{x_j}} \frac{\partial^2 W}{\partial Y_j^2} \\ \gamma_{xy_j} &= - \frac{1}{G_{xy_j}} \frac{\partial^2 W}{\partial X_j \partial Y_j} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

となり、これを適合条件式(3.6)に代入すると次のようになる。

$$\frac{1}{B_{x_j}} \frac{\partial^4 W}{\partial Y_j^4} + \left( \frac{1}{G_{xy_j}} - \frac{v_{y_j}}{B_{y_j}} - \frac{v_{x_j}}{B_{x_j}} \right) + \frac{1}{B_{y_j}} \frac{\partial^4 W}{\partial X_j^4} = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} B_{x_j} \frac{\partial^4 W}{\partial X_j^4} + 2\sqrt{B_{x_j} B_{y_j}} \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{B_{x_j} B_{y_j}}}{G_{xy_j}} - v_{x_j} \sqrt{\frac{B_{y_j}}{B_{x_j}}} - v_{y_j} \sqrt{\frac{B_{x_j}}{B_{y_j}}} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial X_j^2 \partial Y_j^2} \\ + B_{y_j} \frac{\partial^4 W}{\partial Y_j^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで、 $\kappa_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{B_{x_j} B_{y_j}}}{G_{xy_j}} - v_{x_j} \sqrt{\frac{B_{y_j}}{B_{x_j}}} - v_{y_j} \sqrt{\frac{B_{x_j}}{B_{y_j}}} \right)$  とすると

$$B_{x_j} \frac{\partial^4 W}{\partial X_j^4} + 2\kappa_j \sqrt{B_{x_j} B_{y_j}} \frac{\partial^4 W}{\partial X_j^2 \partial Y_j^2} + B_{y_j} \frac{\partial^4 W}{\partial Y_j^4} = 0 \quad (3.10)$$

となる。これが直交異方性板の面内力問題の基礎式である。<sup>3)4)</sup>

### 3.3 応力関数の一般解

#### (1) XY系の一般式

一般解を導くについてまず変数変換を行なって、 $X_j = \beta_{x_j} \cdot x_j$ 、 $Y_j = \beta_{y_j} \cdot y_j$  と定義してさらに

$B_{x_j} = \beta_{x_j}^4 B_0$ 、 $B_{y_j} = \beta_{y_j}^4 B_0$  とすると式(3.10)は

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x_j^4} + 2\kappa_j \frac{\partial^4 W}{\partial x_j^2 \partial y_j^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y_j^4} = 0 \quad (3.11)$$

と基準化される。ここで微分演算子を導入してさらに因数分解する。

$$\zeta_j^2 - 2\kappa_j \zeta_j + 1 = 0 \quad (3.12)$$

$$\zeta_j = \kappa_j + i\sqrt{1 - \kappa_j^2} \quad \bar{\zeta}_j = \kappa_j - i\sqrt{1 - \kappa_j^2} \quad (3.13)$$

$$\sqrt{\zeta_j} = \sqrt{\frac{1 + \kappa_j}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \kappa_j}{2}} \quad (3.14)$$

とすると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial x_j^4} + 2\kappa_j \frac{\partial^4 W}{\partial x_j^2 \partial y_j^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y_j^4} \\ &= \frac{1}{\zeta_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} + i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} - i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) W = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。この解は  $f(Z)$  を任意の関数として

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) W = 0 \quad \text{の解は } f(\sqrt{\zeta_j} x_j + i y_j) \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) W = 0 \quad \text{の解は } f(\sqrt{\zeta_j} x_j - i y_j) \\ & \left( \frac{\partial}{\partial y_j} + i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) W = 0 \quad \text{の解は } f(\sqrt{\zeta_j} y_j + i x_j) \\ & \left( \frac{\partial}{\partial y_j} - i\sqrt{\zeta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) W = 0 \quad \text{の解は } f(\sqrt{\zeta_j} y_j - i x_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

となる。

一般解は任意関数  $f_1(Z) \sim f_4(Z)$  によって

$$W(x_j, y_j) = f_1(Z_{j1}) + f_2(Z_{j2}) + f_3(Z_{j3}) + f_4(Z_{j4}) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Z_{j1} &= \sqrt{\zeta_j} x_j + i y_j & Z_{j2} &= \sqrt{\zeta_j} x_j - i y_j \\ Z_{j3} &= \sqrt{\zeta_j} y_j + i x_j & Z_{j4} &= \sqrt{\zeta_j} y_j - i x_j \end{aligned} \quad (3.18)$$

と表されることになる。<sup>5)</sup>

## (2) $\xi \eta$ 系の一般解

主軸座標軸系  $(X_j, Y_j)$  より境界面座標軸  $(\xi, \eta)$  へ変換する行列は、 $C_j = \cos \omega_j$ 、 $S_j = \sin \omega_j$  と略記して  
図 3.2 を参考にすると

$$\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_j & -\sin \omega_j \\ \sin \omega_j & \cos \omega_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_j & -S_j \\ S_j & C_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

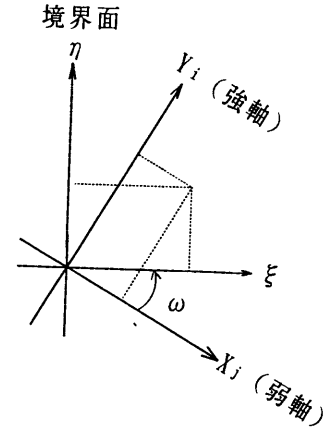


図 3.2 座標軸の関係

となる。ここに  $X_j, Y_j$  は左右の弾性体に対して別個に設定されるが、 $(\xi, \eta)$ 系は両者に共通としてよい。式 (3.18)を $(\xi, \eta)$ 系で表すと

$$\begin{aligned} Z_{j1} &= \left( \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right) \frac{X_j}{\beta_{xj}} \pm i \frac{Y_j}{\beta_{yj}} \\ &= \left( \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right) \left( \frac{C_j \xi - S_j \eta}{\beta_{xj}} \right) \pm i \frac{1}{\beta_{yj}} (S_j \xi + C_j \eta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

となるが、ここで境界条件を導入し易い一般解を導くために  $Z_{j1}$  を複素定数で割った変数  $z_{j1}$  を定義する。この点が本研究の1つの特徴である。

$$\begin{aligned} Z_{j1} &= \left[ \left( \pm \frac{C_j}{\beta_{yj}} - \frac{S_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right) + i \frac{S_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} \right] \cdot (P_{j1} \xi + i \eta) \\ &= (A_j + i B_j) z_{j1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} A_j &= \pm \frac{C_j}{\beta_{yj}} - \frac{S_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} & B_j &= \frac{S_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} \\ D_j &= \frac{C_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} & E_j &= \frac{C_j}{\beta_{xj}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \pm \frac{S_j}{\beta_{yj}} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$P_{j1} = \frac{D_j + i E_j}{A_j + i B_j} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{j1} &= (P_{j1R} + iP_{j1I}) & z_{j1} &= P_{j1} \xi + i \eta \\ P_{j3} &= (P_{j3R} + iP_{j3I}) & z_{j3} &= P_{j3} \xi + i \eta \end{aligned} \right\} (3.24)$$

添字 R、I は複素数の実数部分、虚数部分を表す。

すなわち、一般解を  $z_{j1}$  の任意の関数であるという定義の代わりにこれと同等な

$$z_{j1} = P_{j1} \xi + i \eta = (P_{j1R} + iP_{j1I}) \xi + i \eta \quad (3.25)$$

$$z_{j2} = P_{j2} \xi + i \eta = (P_{j2R} + iP_{j2I}) \xi + i \eta \quad (3.26)$$

による任意関数として定義して解を導くのであるが、この方が境界条件を導入する場合に表現が簡単になる。たとえば、 $j=1$ (左側)でも  $j=2$ (右側)でも  $\xi \rightarrow \pm 0$  で  $z_{11} = z_{12}$ 、 $f(z_{11}) = f(z_{12}) = f(i\eta)$  となるので  $\eta$  軸上の連続条件が簡単になる。この点が他の研究にはない工夫した点であり、以後の解析解を得る過程で極めて有効な手段であることが判明した。

### 3.4 座標変換した応力と変位

#### (1) 応力の変換

力の釣合式を基にして、XY系の応力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  と  $\xi\eta$ 系の応力  $\sigma_\xi$ 、 $\sigma_\eta$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  との変換をおこなう。

$$X \text{ 方向釣合} \quad \sigma_\xi \cos \omega_j \cdot ds - \tau_{\xi\eta} \sin \omega_j \cdot ds = \sigma_x \cdot dY + \tau_{xy} \cdot dX \quad (3.27)$$

$$Y \text{ 方向釣合} \quad \sigma_\xi \sin \omega_j \cdot ds + \tau_{\xi\eta} \cos \omega_j \cdot ds = \sigma_y \cdot dX + \tau_{xy} \cdot dY \quad (3.28)$$

ここで、 $dX = ds \cdot \sin \omega_j$ 、 $dY = ds \cdot \cos \omega_j$  として解くと

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \omega_j + \sigma_y \sin^2 \omega_j + 2\tau_{xy} \sin \omega_j \cos \omega_j \\ \sigma_\eta &= \sigma_x \sin^2 \omega_j + \sigma_y \cos^2 \omega_j - 2\tau_{xy} \cos \omega_j \sin \omega_j \\ \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \omega_j \cos \omega_j + \tau_{xy} (\cos^2 \omega_j - \sin^2 \omega_j) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & 2SC \\ S^2 & C^2 & -2SC \\ -SC & SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

が得られる。これを逆に解くと

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & -2SC \\ S^2 & C^2 & 2SC \\ SC & -SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

となり、さらに微分の変数変換により応力変換の式を導くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C^2 & S^2 & -2SC \\ S^2 & C^2 & 2SC \\ SC & -SC & C^2-S^2 \end{Bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} \\ \\ T_B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

**(2) 変位の変換式**

XY系の変位を UV、 $\xi \eta$ 系の変位を uvとすると両者の変換行列は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \cos \omega_j & \sin \omega_j \\ -\sin \omega_j & \cos \omega_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}_j \tag{3.33}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} u \\ iv \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \cos \omega_j & -i \sin \omega_j \\ -i \sin \omega_j & \cos \omega_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ iV \end{pmatrix}_j \tag{3.34}$$

$$\text{これより } (u-iv) = e^{i\omega}U - e^{-i\omega}(iV) = e^{i\omega}(U-iV) \tag{3.35}$$

が得られる。

変位と応力の関係は式(3.2)より

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_j} \\ \epsilon_{y_j} \\ \gamma_{xy_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_j}{\partial X_j} \\ \frac{\partial V_j}{\partial Y_j} \\ \frac{\partial V_j}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial Y_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{B_x} & -\frac{v_y}{B_y} & 0 \\ \frac{v_y}{B_y} & \frac{1}{B_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} \\ \\ T_D \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \end{Bmatrix} W_j \tag{3.36}
\end{aligned}$$

と表されるが、変位は境界面( $\eta$ 軸)上で $\xi$   $\eta$ 系の $u$ 、 $v$ で扱い剛性は弾性主軸  $XY$ 系の  $B_x$ 、 $B_y$ 、 $G_{xy}$ で扱う必要がある。したがって、次の以下ような変換式を導く。

式(3.33)より

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_j} &= \frac{\partial U_j}{\partial X_j} = \left( \cos \omega_j \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \omega_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (u \cdot \cos \omega_j - v \cdot \sin \omega_j) \\ &= C^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + S^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} - SC \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = C^2 \varepsilon_{\xi} + S^2 \varepsilon_{\eta} - SC \gamma_{\xi \eta}\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y_j} &= \frac{\partial V_j}{\partial X_j} = \left( \sin \omega_j \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \omega_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (u \cdot \sin \omega_j + v \cdot \cos \omega_j) \\ &= S^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + SC \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = S^2 \varepsilon_{\xi} + C^2 \varepsilon_{\eta} + SC \gamma_{\xi \eta}\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy_j} &= \frac{\partial V_j}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial Y_j} = \left( \sin \omega_j \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \omega_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (u \cdot \cos \omega_j - v \cdot \sin \omega_j) \\ &\quad + \left( \cos \omega_j \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \omega_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (u \cdot \sin \omega_j + v \cdot \cos \omega_j) \\ &= 2SC \varepsilon_{\xi} - 2SC \varepsilon_{\eta} + (C^2 - S^2) \gamma_{\xi \eta}\end{aligned}\quad (3.39)$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x_j} \\ \varepsilon_{y_j} \\ \gamma_{xy_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & -SC \\ S^2 & C^2 & SC \\ 2SC & -2SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi_j} \\ \varepsilon_{\eta_j} \\ \gamma_{\xi \eta_j} \end{pmatrix}\quad (3.40)$$

が得られる。これを逆に解いて式(3.41)を得る。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi_j} \\ \varepsilon_{\eta_j} \\ \gamma_{\xi \eta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_j} \\ \varepsilon_{y_j} \\ \gamma_{xy_j} \end{pmatrix} = \left[ T_c \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_j} \\ \varepsilon_{y_j} \\ \gamma_{xy_j} \end{pmatrix}\quad (3.41)$$

他方、式(3.36)を代入すると、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi_j} \\ \varepsilon_{\eta_j} \\ \gamma_{\xi \eta_j} \end{pmatrix} = \left[ T_c \right] \left[ T_D \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \end{array} \right\} W_j\quad (3.42)$$

となる。さらに式(3.32)を代入して、 $XY$ 系の微分を $\xi$   $\eta$ 系の微分で表わすと

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi j} \\ \varepsilon_{\eta j} \\ \gamma_{\xi \eta j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_C \\ T_D \\ T_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} W_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{pmatrix} T_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_C \\ T_D \\ T_B \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

となるので整理すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} W_j \quad (3.45)$$

となり、 $\xi \eta$ 系の変位  $uv$ を導く公式が得られることになる。

さて、一般解としての応力関数  $W_j$ は、 $z_{j1}=P_{j1}\xi+i\eta$ と $z_{j2}=P_{j2}\xi+i\eta$ と $\bar{z}_{j1}$ 、 $\bar{z}_{j2}$ の任意関数  $f_{j1}(z_{j1}) \sim f_{j2}(z_{j2})$ で形成されているので、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} W_j = \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j1}^2 \\ -iP_{j1} \end{pmatrix} f_{j1}''(z_{j1}) + \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j2}^2 \\ -iP_{j2} \end{pmatrix} f_{j1}''(z_{j2}) \\ + \begin{pmatrix} -1 \\ \bar{P}_{j1}^2 \\ i\bar{P}_{j1} \end{pmatrix} f_{j3}''(\bar{z}_{j1}) + \begin{pmatrix} -1 \\ \bar{P}_{j2}^2 \\ i\bar{P}_{j2} \end{pmatrix} f_{j4}''(\bar{z}_{j2}) \quad (3.46)$$

と表される。もし  $W_j = f(z_{j1})$ 、 $z_{j1}=P_{j1}\xi+i\eta$  のみとすると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j1}^2 \\ -iP_{j1} \end{pmatrix} f_{j1}''(P_{j1}\xi+i\eta) \quad (3.47)$$

となる。



$z_{j1} = P_{j1} \xi + i\eta$      $dz_{j1} = P_{j1} d\xi + i d\eta$     であるから

$$\int f''(z_{j1}) d\xi = \frac{1}{P_{j1}} \int f''(z_{j1}) dz_{j1} = \frac{1}{P_{j1}} f'(z_{j1}) + \text{定数項(積分定数)} \quad (3.48)$$

$$\int f''(z_{j1}) d\eta = -i \int f''(z_{j1}) dz_{j1} = -i f'(z_{j1}) + \text{定数項(積分定数)} \quad (3.49)$$

となる。これより

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{P_{j1}} & 0 \\ 0 & -i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_E \text{の第1行} \\ T_E \text{の第2行} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ P_{j1}^2 \\ -iP_{j1} \end{Bmatrix} f'(z_{j1}) + \text{定数項(積分定数)} \quad (3.50)$$

が得られる。

### 3.5 まとめ

本章で得られた結果を異質弾性体界面き裂に関する従来の研究と比較してまとめるとつぎのようになる。

(1) 基本的に従来の研究と異なる点はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定したことである。これはプロセスゾーン相当部分を近似的に表現する区間とも解釈される。この区間を実現させた要因は開口関数として著者等が等方性弾性体中のき裂の研究で提案している関数  $H(z)$  である。

(2) しかし一般解の変数として従来から用いられている  $Z_j$  ではなく  $z_j = P_j \xi + i\eta$  という形の変数で解関数を定義して  $\eta$  軸上の連続条件を簡素化した点が本研究の特徴である。

## 参考文献

- 1) 長瀬 裕信, 中川 建治:直交異方性体間の境界面亀裂周辺の応力集中解析, 土木学中部支部研究発表会, I-6, 1994. 3.
- 2) 長瀬 裕信, 中川 建治:直交異方性弾性体間の界面き裂周辺の応力解析に関する基礎的な研究, 土木学会論文集, No. 507. I-30, PP. 53-63, 1995. 1
- 3) S. A. アムバルツキソ, 大橋 義夫監修, 神谷 紀生訳:異方性板の理論, 森北出版, 1975. 3
- 4) 伊藤 学:構造力学, 森北出版, pp. 218-222, 1971. 5.
- 5) 林 毅(編):軽構造の理論とその応用(上), (財)日本科学技術連盟, pp. 124-129, 1966. 9

## 第 4 章 要素関数の組み合わせによる一般解の誘導

### 4.1 はじめに

第 2 章で定義した要素関数  $f_1 \sim f_4$  を組み合わせる一般的な応力関数を構成する手法を述べる。一般解は関数の特性より一群となって次の 4 つの問題の応力関数すなわち、無限遠方で引張応力、せん断応力、X 軸曲げ、Y 軸曲げがそれぞれ単独に作用している応力状態を表現できるものである。一般解は境界線上における変位と応力の連続条件と開口部の応力解放条件を満足しているので、これらを任意に複数個重ね合わせることができる。したがって、直交異方性弾性体間の境界面き裂の混合モードの場合でも解析可能な応力関数が得られる。本章ではその誘導を詳述する。

### 4.2 応力関数

式(3.46)で導入した材料  $j=1, 2$  (左半分と右半分領域) に対する応力関数  $W_j$  を用いると変位と応力とは式(3.30)、式(3.32)、式(3.50)より最終的に次のように表される。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} R_{jik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_j'(z_{j1}) \\ W_j'(z_{j2}) \\ W_j'(z_{j3}) \\ W_j'(z_{j4}) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_\epsilon \\ \sigma_n \\ \tau_{\epsilon n} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} T_{jik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_j''(z_{j1}) \\ W_j''(z_{j2}) \\ W_j''(z_{j3}) \\ W_j''(z_{j4}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

この関係より直接  $W_j$  は必要でなく、 $W_j'$ 、 $W_j''$  のみを変位、応力に関係するので一般解  $F_j$  と複素定数  $(D_j + i d_j)$  の組み合わせで  $W_j'$  を定義して

$$W_j' = W_{j1}' + W_{j2}' \quad (4.3)$$

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11}) F_1(z_{j1}) + (D_{j12} + i d_{j12}) F_1(z_{j2}) \quad (4.4)$$

$$W_{j2}' = (D_{j21} + i d_{j21}) F_2(z_{j1}) + (D_{j22} + i d_{j22}) F_2(z_{j2}) \quad (4.5)$$

とする。

ここに  $F_k(\cdot)$  は式(2.21)~(2.24)で定義した要素関数  $f_k(\cdot)$  を組み合わせる表 4.1 に示すような  $F_1(\cdot)$ 、 $F_2(\cdot)$  の一群の組を設定すると、 $W_j'$  はすべて本研究が目的としている直交異方性弾性体間の境界面き裂の一般解となり得る。ただし、 $n \leq 2$  では無限遠点で応力が発散しない解となり、 $n \geq 3$  の解の中には個別には発散するものの重ね合わせによって無限遠点の応力が有限化する組み合わせも現われる。

式(4.3)~(4.5)中の未定係数は 1 組の一般解に対して左右で  $j=1, 2$  となるので、 $D_{j11}$ 、 $d_{j11}$ 、 $D_{j12}$ 、 $d_{j12}$ 、 $D_{j21}$ 、 $d_{j21}$ 、 $D_{j22}$ 、 $d_{j22}$  からなる 16 個である。

表 4.1 一般解  $W_j'$

	$F_1(\ )$	$F_2(\ )$
解-1	$f_1(\ )$	$f_2(\ )$
解-2	$if_1(\ )$	$if_2(\ )$
解-3	$f_3(\ )$	$f_4(\ )$
解-4	$if_3(\ )$	$if_4(\ )$
⋮	⋮	⋮
高 次 の 解	$z^n f_1(\ )$	$z^n f_2(\ )$
	$z^n f_3(\ )$	$z^n f_4(\ )$
	$iz^n f_1(\ )$	$iz^n f_2(\ )$
	$iz^n f_3(\ )$	$iz^n f_4(\ )$

### 4.3 境界条件

16個の未定係数とbi-elastic constant  $\alpha$ とを決定するための境界条件を導入する。式(3.21)の変数 $z_{j1}$ 、 $z_{j2}$ と式(2.16)に示した関数  $H(z_{jk})$ はこの段階でも煩雑な表現となっている。さらに、応力と変位は式(4.1)、(4.2)のように一般解  $W_j$ の1次と2次導関数を含むので、もしすべての代入演算を行って、応力と変位の関係式を導くとしたならば、いたずらに複雑で冗長な式を扱うことになり不可能に近い。実際にこれだけ複雑な複素関数式をコンピュータで処理するには各段階における関係式(変数変換行列、関数形、その導関数あるいは逆行列、固有値、逆関数という関係すなわち、本文の式(3.1)~(4.5))を個別に明示して複素演算を基本にしたサブルーチン処理をする手法を用いるのである。

したがって本文でも敢えてこの手法に合わせて各段階で境界条件を個別に明示することとどめて煩雑さを回避することにする。したがって以下に現れる係数  $T_{jkir}$ 、 $T_{jkil}$ 、 $R_{jkir}$ 、 $R_{jkil}$ 等はコンピュータのサブルーチン処理で現れる中間データであって、詳しく説明し得ない煩雑なパラメータであるから説明は省かざるを得ない。

#### (1) 開口部における応力解放の条件

##### a) 中心き裂の場合

$$\xi=0, |\eta| < a \text{ において } F_1(z_1) \text{ と } F_1(z_2) \text{ による } \sigma_\xi=0, \tau_{\xi\eta}=0$$

$$F_2(z_1) \text{ と } F_2(z_2) \text{ による } \sigma_\xi=0, \tau_{\xi\eta}=0$$

ここで、式(4.2)における  $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ は複素数であるから、

$$\text{Re}[\sigma_\xi]=0, \text{Re}[\tau_{\xi\eta}]=0$$

とする。虚数部には、制限を付けない。

##### b) 外側き裂の場合

$$\xi=0, |\eta| > a+b \text{ において } F_1(z_1) \text{ と } F_1(z_2) \text{ による } \sigma_\xi=0, \tau_{\xi\eta}=0$$

$$F_2(z_1) \text{ と } F_2(z_2) \text{ による } \sigma_\xi=0, \tau_{\xi\eta}=0$$

ここで、式(4.2)における  $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ は複素数であるから、

$$\operatorname{Re}[\sigma_\xi] = 0, \operatorname{Re}[\tau_{\xi\eta}] = 0$$

とする。虚数部には、制限を付けない。

## (2) 境界線上における変位と応力の連続条件

### a) 中心き裂の場合

$\eta$  軸上 ( $\xi=0$ ) の  $|\eta| > a+b$  で変位  $u_j(\eta)$  と  $v_j(\eta)$  が左右で連続していなければならない。かつ応力  $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  もそれぞれ連続していなければならない。

### b) 外側き裂の場合

$\eta$  軸上 ( $\xi=0$ ) の  $|\eta| < a$  で変位  $u_j(\eta)$  と  $v_j(\eta)$  が左右で連続していなければならない。かつ応力  $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  もそれぞれ連続していなければならない。

## 4.4 一般解 -1 ( $F_1=f_1$ 、 $F_2=f_2$ ) の誘導

具体的に一般解 -1 で中心き裂の場合を例にとり条件式の整理をする。

### (1) 開口部における応力解放の条件

$\eta$  軸 ( $\xi=0$ ) 上で  $|\eta| < a$  のとき  $F_1(z_{j1})$  と  $F_1(z_{j2})$  及び、 $F_2(z_{j1})$  と  $F_2(z_{j2})$  に関して  $\sigma_\xi=0$ 、 $\tau_{\xi\eta}=0$  の関係から 8 個の条件式が以下の手順で求められる。

$\eta$  軸上で  $F_1'(z_1)=F_1'(z_2)$  であるから

$$W_{j1}'' = (D_{j11} + i d_{j11}) F_1'(z_{j1}) + (D_{j12} + i d_{j12}) F_1'(z_{j2}) \quad (4.6)$$

による応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_j &= \begin{pmatrix} (T_{j11R} + i T_{j11I}), (T_{j12R} + i T_{j12I}) \\ (T_{j31R} + i T_{j31I}), (T_{j32R} + i T_{j32I}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D_{j11} + i d_{j11}) F_1'(z_{j1}) \\ (D_{j12} + i d_{j12}) F_1'(z_{j2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (T_{j11R} D_{j11} - T_{j11I} d_{j11} + T_{j12R} D_{j12} - T_{j12I} d_{j12}) \\ + i (T_{j11I} D_{j11} + T_{j11R} d_{j11} + T_{j12I} D_{j12} + T_{j12R} d_{j12}) \\ (T_{j31R} D_{j11} - T_{j31I} d_{j11} + T_{j32R} D_{j12} - T_{j32I} d_{j12}) \\ + i (T_{j31I} D_{j11} + T_{j31R} d_{j11} + T_{j32I} D_{j12} + T_{j32R} d_{j12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1'(z_{j1}) \\ F_1'(z_{j2}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここでもし  $F_1'(z_{j1})|_{\xi=0} = F'_{1R}(i\eta) + i F'_{1I}(i\eta)$  が  $\eta$  軸上の  $|\eta| < a$  で実数なら、 $F_1(z_{j1})$ 、 $F_1(z_{j2})$  による  $\sigma_\xi=0$ 、 $\tau_{\xi\eta}=0$  であるためには式(4.7)内の実数部 = 0 でなければならない。すなわち

$$\begin{pmatrix} T_{j11R}, -T_{j11I}, T_{j12R}, -T_{j12I} \\ T_{j31R}, -T_{j31I}, T_{j32R}, -T_{j32I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \\ D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{j12R}, -T_{j12I} \\ T_{j32R}, -T_{j32I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{j11R}, -T_{j11I} \\ T_{j31R}, -T_{j31I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

もし、 $\eta$  軸上の  $|\eta| < a$  で  $F_1(z_{j1})$  が虚数なら式(4.7)内の虚数部 = 0 でなければいけない。すなわち

$$\begin{pmatrix} T_{j11I} & T_{j11R} & T_{j12I} & T_{j12R} \\ T_{j31I} & T_{j31R} & T_{j32I} & T_{j32R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \\ D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{j12I} & T_{j12R} \\ T_{j32I} & T_{j32R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{j11I} & T_{j11R} \\ T_{j31I} & T_{j31R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

である。

$F_1(z_{j1})$  が  $\eta$  軸上の  $|\eta| < a$  において実数ならば式(4.9)、虚数なら式(4.11)を用いて  $D_{j12}$ 、 $d_{j12}$  を消去するのであるが、

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21})} \begin{pmatrix} e_{22} & -e_{12} \\ -e_{21} & e_{11} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} &= \frac{1}{(e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21})} \begin{pmatrix} (e_{22}q_{11} - e_{12}q_{21}) & (e_{22}q_{12} - e_{12}q_{11}) \\ (e_{11}q_{21} - e_{21}q_{11}) & (e_{11}q_{22} - e_{21}q_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。

同様にして

$$W_{j2}'' = (D_{j21} + i d_{j21}) F_2'(z_{j1}) + (D_{j22} + i d_{j22}) F_2'(z_{j2}) \quad (4.15)$$

による応力の  $\eta$  軸上の  $|\eta| < a$  における値について次のような条件を設ける。

実は係数  $T_{jki}$  ( $W''$  より  $\sigma_{\xi\eta}$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  を得る係数) はすべて同じ値となるので、 $F_2(z_{j1})$  が  $\eta$  軸上の  $|\eta| < a$  で実数なら

$$\begin{pmatrix} T_{j11R} & -T_{j11I} & T_{j12R} & -T_{j12I} \\ T_{j31R} & -T_{j31I} & T_{j32R} & -T_{j32I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j21} \\ d_{j21} \\ D_{j22} \\ d_{j22} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.16)$$

となって、式(4.9)と同じものとなる。

$$\begin{pmatrix} D_{j22} \\ d_{j22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{j12R} & -T_{j12I} \\ T_{j32R} & -T_{j32I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{j11R} & -T_{j11I} \\ T_{j31R} & -T_{j31I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j21} \\ d_{j21} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$F_2(z_{j1})$ が $\eta$ 軸上の $|\eta| < a$ で虚数なら、式(4.10)と式(4.11)と同じ関係となり

$$\begin{Bmatrix} D_{j22} \\ d_{j22} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} T_{j12I} & T_{j12R} \\ T_{j32I} & T_{j32R} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} T_{j11I} & T_{j11R} \\ T_{j31I} & T_{j31R} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{j21} \\ d_{j21} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

が成立する。

## (2) 境界線上における変位と応力の連続条件

境界線上の変位と応力の連続条件から、 $\eta$ 軸上( $\xi=0$ )の $|\eta| > a+b$ で変位 $u_j(\eta)$ と $v_j(\eta)$ と応力 $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ が連続していなければならない。ここで、第2章2.4の要素関数を引用して、

$$\begin{aligned} F_{j1} = f_1(z) &= \cosh\{(1+i\alpha)H(z)\} - \cosh\{(1-i\alpha)H(z)\} \\ &= i2\sinh H(z)\sin\{\alpha H(z)\} \\ F_{j2} = f_2(z) &= \sinh\{(1+i\alpha)H(z)\} + \sinh\{(1-i\alpha)H(z)\} \\ &= 2\sinh\{H(z)\}\cos\{\alpha H(z)\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

とすると、 $\eta$ 軸上の $|\eta| > a+b$ で、 $u_{jR}$ 、 $v_{jR}$ 、 $\sigma_{\xi R}$ 、 $\tau_{\xi\eta R}$ は式(2.21)~(2.24)より式(4.20)~(4.23)となる。

$$\begin{aligned} u_{jR} &= 2\cosh(H_R)\sin(\alpha H_R)\{\pm\cosh(\alpha\pi/2) \\ &\quad \cdot (R_{j11R}D_{j11} - R_{j11I}d_{j11} + R_{j12R}D_{j12} - R_{j12I}d_{j12}) \\ &\quad + \sinh(\alpha\pi/2)(R_{j11R}D_{j21} - R_{j11I}d_{j21} + R_{j12R}D_{j22} - R_{j12I}d_{j22})\} \\ &\quad + 2\cosh(H_R)\cos(\alpha H_R)\{\sinh(\alpha\pi/2) \\ &\quad \cdot (R_{j11I}D_{j11} + R_{j11R}d_{j11} + R_{j12I}D_{j12} + R_{j12R}d_{j12}) \\ &\quad \pm \cosh(\alpha\pi/2)(-R_{j11I}D_{j21} - R_{j11R}d_{j21} - R_{j12I}D_{j22} - R_{j12R}d_{j22})\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} v_{jR} &= -2\cosh(H_R)\sin(\alpha H_R)\{\pm\cosh(\alpha\pi/2) \\ &\quad \cdot (R_{j21R}D_{j11} - R_{j21I}d_{j11} + R_{j22R}D_{j12} - R_{j22I}d_{j12}) \\ &\quad - \sinh(\alpha\pi/2)(R_{j21R}D_{j21} - R_{j21I}d_{j21} + R_{j22R}D_{j22} - R_{j22I}d_{j22})\} \\ &\quad + 2\cosh(H_R)\cos(\alpha H_R)\{\sinh(\alpha\pi/2) \\ &\quad \cdot (R_{j21I}D_{j11} + R_{j21R}d_{j11} + R_{j22I}D_{j12} + R_{j22R}d_{j12}) \\ &\quad \pm \cosh(\alpha\pi/2)(-R_{j21I}D_{j21} - R_{j21R}d_{j21} - R_{j22I}D_{j22} - R_{j22R}d_{j22})\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi jR} &= -2H_R' \{ \alpha \cosh(H_R)\sin(\alpha H_R) - \sinh(H_R)\cos(\alpha H_R) \} \\ &\quad \{ -\sinh(\alpha\pi/2)(T_{j11R}D_{j11} - T_{j11I}d_{j11} + T_{j12R}D_{j12} - T_{j12I}d_{j12}) \\ &\quad \pm \cosh(\alpha\pi/2)(T_{j11R}D_{j21} - T_{j11I}d_{j21} + T_{j12R}D_{j22} - T_{j12I}d_{j22}) \} \\ &\quad - 2H_R' \{ \alpha \cosh(H_R)\cos(\alpha H_R) + \sinh(H_R)\sin(\alpha H_R) \} \\ &\quad \{ \pm \cosh(\alpha\pi/2)(T_{j11I}D_{j11} + T_{j11R}d_{j11} + T_{j12I}D_{j12} + T_{j12R}d_{j12}) \\ &\quad - \sinh(\alpha\pi/2)(T_{j11I}D_{j21} + T_{j11R}d_{j21} + T_{j12I}D_{j22} + T_{j12R}d_{j22}) \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
T_{\varepsilon_{\eta}R} = & -2H_R' \{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \\
& \{ -\sinh(a \pi/2) (T_{j31R} D_{j11} - T_{j31I} d_{j11} + T_{j32R} D_{j12} - T_{j32I} d_{j12}) \\
& \pm \cosh(a \pi/2) (T_{j31R} D_{j21} - T_{j31I} d_{j21} + T_{j32R} D_{j22} - T_{j32I} d_{j22}) \} \\
& -2H_R' \{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \\
& \{ \pm \cosh(a \pi/2) (T_{j31I} D_{j11} + T_{j31R} d_{j11} + T_{j32I} D_{j12} + T_{j32R} d_{j12}) \} \\
& -\sinh(a \pi/2) (T_{j31I} D_{j21} + T_{j31R} d_{j21} + T_{j32I} D_{j22} + T_{j32R} d_{j22}) \}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

と表される。上段符号は左側半平面、下段符号は右側半平面を示す。ここに現れる複素定数  $R_{jik}$  も  $T_{jik}$  と同様にサブルーチン処理(代入演算)によって中間的に現われる定数であり、詳細を数式で表し得るようなものではない。

さて、連続条件は  $\eta$  軸上の  $|\eta| > a + b$  で

$$\text{右側変位} - \text{左側変位} = 0$$

$$\text{右側応力} - \text{左側応力} = 0$$

であるから、変位の連続条件から式(4.24)~(4.27)を得る。

$$\begin{aligned}
\text{a) } & u_{2R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \sin(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - u_{1R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \sin(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & u_{2R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \cos(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - u_{1R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \cos(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } & v_{2R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \sin(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - v_{1R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \sin(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } & v_{2R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \cos(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - v_{1R} \text{ の } 2 \cosh(H_R) \cos(a H_R) \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

同様にして応力の連続条件式から式(4.28)~(4.31)を得る。

$$\begin{aligned}
\text{e) } & \sigma_{\varepsilon 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - \sigma_{\varepsilon 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } & \sigma_{\varepsilon 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - \sigma_{\varepsilon 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } & T_{\varepsilon_{\eta} 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - T_{\varepsilon_{\eta} 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } & T_{\varepsilon_{\eta} 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} \\
& - T_{\varepsilon_{\eta} 2R} \text{ の } 2H_R' \{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \text{ 項の } \{ \text{内} \} = 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

以上条件式は8個で、未知量は  $D_{111}$ 、 $d_{111}$ 、 $D_{121}$ 、 $d_{121}$ 、 $D_{211}$ 、 $d_{211}$ 、 $D_{221}$ 、 $d_{221}$ 、 $D_{112}$ 、 $d_{112}$ 、 $D_{122}$ 、 $d_{122}$ 、 $D_{212}$ 、 $d_{212}$ 、 $D_{222}$ 、 $d_{222}$  の16個である。これよりマトリックス表示をして式(4.32)を得る。



$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{111R}C & R_{111I}C & -R_{111RS} & R_{111IS} & -R_{211RC} & R_{211IC} & R_{211RS} & -R_{211IS} \\ -R_{111IS} & -R_{111RS} & -R_{111IC} & -R_{111RC} & R_{211IS} & R_{211RS} & -R_{211IC} & -R_{211RC} \\ -R_{121RC} & R_{121IC} & -R_{121RS} & R_{121IS} & -R_{221RC} & R_{221IC} & R_{221RS} & -R_{221IS} \\ -R_{121IS} & -R_{121RS} & -R_{121IC} & -R_{121RC} & R_{221IS} & R_{221RS} & -R_{221IC} & -R_{221RC} \\ -T_{111RS} & T_{111IS} & -T_{111RC} & T_{111IC} & T_{211RS} & -T_{211IS} & -T_{211RC} & T_{211IC} \\ -T_{111IC} & -T_{111RC} & -T_{111IS} & -T_{111RS} & -T_{211IC} & -T_{211RC} & T_{211IS} & T_{211RS} \\ -T_{131RS} & T_{131IS} & -T_{131RC} & T_{131IC} & T_{231RS} & -T_{231IS} & -T_{231RC} & T_{231IC} \\ -T_{131IC} & -T_{131RC} & -T_{131IS} & -T_{131RS} & -T_{231IC} & -T_{231RC} & T_{231IS} & T_{231RS} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{112RC} & R_{112IC} & -R_{112RS} & R_{112IS} & -R_{212RC} & R_{212IC} & R_{212RS} & -R_{212IS} \\ -R_{112IS} & -R_{112RS} & -R_{112IC} & -R_{112RC} & R_{212IS} & R_{212RS} & -R_{212IC} & -R_{212RC} \\ -R_{122RC} & R_{122IC} & -R_{122RS} & R_{122IS} & -R_{222RC} & R_{222IC} & R_{222RS} & -R_{222IS} \\ -R_{122IS} & -R_{122RS} & -R_{122IC} & -R_{122RC} & R_{222IS} & R_{222RS} & -R_{222IC} & -R_{222RC} \\ -T_{112RS} & T_{112IS} & -T_{112RC} & T_{112IC} & T_{212RS} & -T_{212IS} & -T_{212RC} & T_{212IC} \\ -T_{111IC} & -T_{112RC} & -T_{112IS} & -T_{112RS} & -T_{212IC} & -T_{212RC} & T_{212IS} & T_{212RS} \\ -T_{132RS} & T_{132IS} & -T_{132RC} & T_{132IC} & T_{232RS} & -T_{232IS} & -T_{232RC} & T_{232IC} \\ -T_{132IC} & -T_{132RC} & -T_{132IS} & -T_{132RS} & -T_{232IC} & -T_{232RC} & T_{232IS} & T_{232RS} \end{array} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{221} \\ d_{221} \\ D_{112} \\ d_{112} \\ D_{122} \\ d_{122} \\ D_{212} \\ d_{212} \\ D_{222} \\ d_{222} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.32)$$

ここで  $C = \cosh(\alpha \pi/2)$ 、 $S = \sinh(\alpha \pi/2)$  とする。式(4.32)を配列変換によってSとCのブロック化を計ると次のようになる。

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{111RC} & R_{111iC} & -R_{211RC} & R_{211iC} & -R_{111RS} & R_{111iS} & R_{211RS} & -R_{211iS} \\ -R_{121RC} & R_{121iC} & -R_{221RC} & R_{221iC} & -R_{121RS} & R_{121iS} & R_{221RS} & -R_{221iS} \\ -T_{111iC} & -T_{111RC} & -T_{211iC} & -T_{211RC} & -T_{111iS} & -T_{111RS} & T_{211iS} & T_{211RS} \\ -T_{131iC} & -T_{131RC} & -T_{231iC} & -T_{231RC} & -T_{131iS} & -T_{131RS} & T_{231iS} & T_{231RS} \\ -R_{111iS} & -R_{111RS} & R_{211iS} & R_{211RS} & -R_{111iC} & -R_{111RC} & -R_{211iC} & -R_{211RC} \\ -R_{121iS} & -R_{121RS} & R_{221iS} & R_{221RS} & -R_{121iC} & -R_{121RC} & -R_{221iC} & -R_{221RC} \\ -T_{111RS} & T_{111iS} & T_{211RS} & -T_{211iS} & -T_{111RC} & T_{111iC} & -T_{211RC} & T_{211iC} \\ -T_{131RS} & T_{131iS} & T_{231RS} & -T_{231iS} & -T_{131RC} & T_{131iC} & -T_{231RC} & T_{231iC} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{112RC} & R_{112iC} & -R_{212RC} & R_{212iC} & -R_{112RS} & R_{112iS} & R_{212RS} & -R_{212iS} \\ -R_{122RC} & R_{122iC} & -R_{222RC} & R_{222iC} & -R_{122RS} & R_{122iS} & R_{222RS} & -R_{222iS} \\ -T_{112iC} & -T_{112RC} & -T_{212iC} & -T_{212RC} & -T_{112iS} & -T_{112RS} & T_{212iS} & T_{212RS} \\ -T_{132iC} & -T_{132RC} & -T_{232iC} & -T_{232RC} & -T_{132iS} & -T_{132RS} & T_{232iS} & T_{232RS} \\ -R_{112iS} & -R_{112RS} & R_{212iS} & R_{212RS} & -R_{112iC} & -R_{112RC} & -R_{212iC} & -R_{212RC} \\ -R_{122iS} & -R_{122RS} & R_{222iS} & R_{222RS} & -R_{122iC} & -R_{122RC} & -R_{222iC} & -R_{222RC} \\ -T_{112RS} & T_{112iS} & T_{212RS} & -T_{212iS} & -T_{112RC} & T_{112iC} & -T_{212RC} & T_{212iC} \\ -T_{132RS} & T_{132iS} & T_{232RS} & -T_{232iS} & -T_{132RC} & T_{132iC} & -T_{232RC} & T_{232iC} \end{array} \right]$$

$$\cdot \left[ \begin{array}{c} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \\ D_{112} \\ d_{112} \\ D_{212} \\ d_{212} \\ D_{122} \\ d_{122} \\ D_{222} \\ d_{222} \end{array} \right] = 0 \quad (4.33)$$

境界条件式(1)の開口部に沿う応力解放の条件により、 $(D_{112}, d_{112}, D_{212}, d_{212})$ と $(D_{122}, d_{122}, D_{222}, d_{222})$ を消去する。残るのは $(D_{111}, d_{111}, D_{211}, d_{211})$ と $(D_{121}, d_{121}, D_{221}, d_{221})$ の8個の未知量に関する8条件式となる。

実際には、式を表現しないでコンピュータによる代入処理をするのであるが、連続条件式(4.33)は配列変換によりCの項とSの項に分離させることができる。

結局、 $4 \times 4$ の小行列 $[h_{11}]$ 、 $[h_{12}]$ 、 $[h_{21}]$ 、 $[h_{22}]$ によって式(4.33)は式(4.34)のように集約される。

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \text{C}[h_{11}] & \text{S}[h_{12}] & & \\ & & & \\ \text{S}[h_{21}] & \text{C}[h_{22}] & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

さて、未定のパラメータ  $\alpha$  を決定しなければならないが、

$$\lambda = \frac{\sinh(\alpha \pi / 2)}{\cosh(\alpha \pi / 2)} = \tanh(\alpha \pi / 2)$$

として、式(4.32)の全体をCで除すると、

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ [h_{11}] & \lambda[h_{12}] & & \\ & & & \\ \lambda[h_{21}] & [h_{22}] & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.35)$$

となる。これは  $\lambda$  を固有値、D、d をベクトルとする固有値問題に帰することを意味している。等方性弾性体の場合の  $\alpha$  の条件に比較して直交異方性弾性体の場合の連続条件は式(4.34)の  $8 \times 8$  行列のように高次の固有値問題となるのである。

さらに式(4.35)の上4行に  $[h_{11}]^{-1}$  を乗じ、下4行に  $[h_{22}]^{-1}$  を乗じて式(4.36)を得る。

$$\begin{pmatrix} E & & & \lambda[h_{11}]^{-1}[h_{12}] \\ & & & \\ \lambda[h_{22}]^{-1}[h_{21}] & & & E \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ \\ \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

さらに、上4行に  $\lambda[h_{11}]^{-1}[h_{12}]$  を乗じつつ下4行から差し引くと三角大行列となる。

$$\begin{pmatrix} E & & & \lambda[h_{11}]^{-1}[h_{12}] \\ & & & \\ 0 & E - \lambda^2[h_{22}]^{-1}[h_{21}][h_{11}]^{-1}[h_{12}] & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ \\ \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

8個の未知数が0以外の解を持つためには式(4.37)の行列式  $\det=0$  でなければならない。すなわち、

$$[B_{11}] = [h_{22}]^{-1}[h_{21}][h_{11}]^{-1}[h_{12}] \text{ として、}$$

$$\det[E - \lambda^2 B] = 0 \quad (4.38)$$

$$[B_{ij}] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

という固有値問題となる。固有値  $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\tanh^2(\alpha \pi/2)}$  より  $\alpha$  を求めるとベクトル  $\{\delta_2\} = (D_{121}, d_{121}, D_{221}, d_{221})$  も決定される。さらに、 $\{\delta_1\} = (D_{111}, d_{111}, D_{211}, d_{211})$  は式(4.40)で求められる。

$$E\{\delta_1\} + \lambda [h_{11}]^{-1} [h_{12}]\{\delta_2\} = 0 \quad (4.40)$$

また、 $(D_{112}, d_{112}, D_{212}, d_{212})$  と  $(D_{122}, d_{122}, D_{222}, d_{222})$  は式(4.9)(4.11)および式(4.17)(4.18)から求められ、本研究で求める応力関数が式(4.6)(4.15)から決定できる。

$[B_{ij}]$  の最大固有値を求めて、 $\lambda = \tanh(\alpha \pi/2)$  から  $\alpha$  を求めると直交異方性弾性体間の bi-elastic constant となる。

1つの  $\alpha$  は左右の弾性係数の交換、主軸角  $\omega_1, \omega_2$  の反転  $-\omega_1, -\omega_2$  のそれぞれ(合計4例)に対して同値となるので、式(4.34)あるいは式(4.38)(4.39)の固有値問題は等方性の場合の4倍の次数になるのは当然であり、等方性体に近づくと固有値は重根となる。この場合これらの解析法は演算処理不能になるが、式(4.36)~(4.40)の煩雑な固有値問題も解消して等方性弾性体中の界面き裂問題の単一固有値( $\alpha$ , bi-elastic constant)問題となる。

さて表 4.1 に示した一般解を複数组重ね合わせれば、無限遠方で一様引張り応力、せん断応力が作用している直交異方性弾性体間の境界面き裂周辺の応力集中を表現し得る。この最適解はき裂近傍の応力の振動特異性もなく、プロセスゾーンで滑らかな連続した曲面を表現しているので異質弾性体間の境界面き裂の解析にも適用できることは断るまでもない。

## 4.5 一般解-2 ( $F_1 = i f_1, F_2 = i f_2$ ) の誘導

### (1) 応力関数

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11}) i f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) i f_1(z_2) + (D_{j21} + i d_{j21}) i f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) i f_2(z_2) \quad (4.41)$$

とする。(j=1 右側半平面、j=2 左側半平面)これは応力関数の虚数部を活用する解法である。式(4.42)のように考えると

$$W_{j1}' = (-d_{j11} + i D_{j11}) f_1(z_1) + (-d_{j12} + i D_{j12}) f_1(z_2) + (-d_{j21} + i D_{j21}) f_2(z_1) + (-d_{j22} + i D_{j22}) f_2(z_2) \quad (4.42)$$

$D_{jki}$  と  $d_{jki}$  はそれぞれ一般解-1の  $-d_{jki}$  と  $D_{jki}$  に対応する。

### (2) 条件式

$\eta$  軸上の開口部  $|\eta| < a$  で応力が  $\sigma_{\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$  となる条件は、 $f'(\cdot)_{\xi=0}$  と  $if(\cdot)'_{\xi=0}$  とでは実数虚数の対応が反転するので、 $D_{jk1}$ 、 $d_{jk1}$  によって  $D_{jk2}$ 、 $d_{jk2}$  を消去する条件式(4.9)と式(4.11)の採用を反対にすればよい。

#### 4.6 一般解-3 ( $F_1 = f_3$ 、 $F_2 = f_4$ )の誘導

##### (1) 応力関数

ここで第2章2.4で示した以下の要素関数を引用すると

$$\begin{aligned} f_3(\cdot) &= i[\cosh\{(1+i a)H\} + \cosh\{(1-i a)H\}] \\ &= i2\cosh\{H(z)\}\cos\{aH(z)\} \\ f_4(\cdot) &= -i[\sinh\{(1+i a)H\} - \sinh\{(1-i a)H\}] \\ &= 2\cosh\{H(z)\}\sin\{aH(z)\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

により、

$$\begin{aligned} W_{j1}' &= (D_{j11} + i d_{j11}) f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) f_3(z_2) \\ &\quad + (D_{j21} + i d_{j21}) f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) f_4(z_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

とする。

##### (2) 条件式

$\eta$  軸上の開口部  $|\eta| < a$  では、 $(f_3, f_3', f_3'', f_4, f_4', f_4'')$  と  $(f_1, f_1', f_1'', f_2, f_2', f_2'')$  とは実数、虚数の関係が全く等しいので式(4.7)~(4.18)に示した  $D_{jk1}$ 、 $d_{jk1}$  によって  $D_{jk2}$ 、 $d_{jk2}$  を消去する関係はそのまま採用できる。式(4.33)に対応する条件マトリックスを以下に示す。

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{111R}C & R_{111i}C & -R_{211R}C & R_{211i}C & R_{111R}S & -R_{111i}S & -R_{211R}S & R_{211i}S \\ -R_{121R}C & R_{121i}C & -R_{221R}C & R_{221i}C & R_{121R}S & R_{121i}S & -R_{221R}S & -R_{221i}S \\ T_{111i}C & T_{111R}C & T_{211i}C & T_{211R}C & -T_{111i}S & -T_{111R}S & T_{211i}S & T_{211R}S \\ T_{131i}C & T_{131R}C & T_{231i}C & T_{231R}C & -T_{131i}S & -T_{131R}S & T_{231i}S & T_{231R}S \\ R_{111i}S & R_{111R}S & -R_{211i}S & -R_{211R}S & -R_{111i}C & -R_{111R}C & -R_{211i}C & -R_{211R}C \\ R_{121i}S & R_{121R}S & -R_{221i}S & -R_{221R}S & -R_{121i}C & -R_{121R}C & -R_{221i}C & -R_{221R}C \\ -T_{111R}S & T_{111i}S & T_{211R}S & -T_{211i}S & T_{111R}C & -T_{111i}C & T_{211R}C & -T_{211i}C \\ -T_{131R}S & T_{131i}S & T_{231R}S & -T_{231i}S & T_{131R}C & -T_{131i}C & T_{231R}C & -T_{231i}C \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} -R_{112R}C & R_{112i}C & -R_{212R}C & R_{212i}C & R_{112R}S & -R_{112i}S & -R_{212R}S & R_{212i}S \\ -R_{122R}C & R_{122i}C & -R_{222R}C & R_{222i}C & R_{122R}S & R_{122i}S & -R_{222R}S & -R_{222i}S \\ T_{112i}C & T_{112R}C & T_{212i}C & T_{212R}C & -T_{112i}S & -T_{112R}S & T_{212i}S & T_{212R}S \\ T_{132i}C & T_{132R}C & T_{232i}C & T_{232R}C & -T_{132i}S & -T_{132R}S & T_{232i}S & T_{232R}S \\ R_{112i}S & R_{112R}S & -R_{212i}S & -R_{212R}S & -R_{112i}C & -R_{112R}C & -R_{212i}C & -R_{212R}C \\ R_{122i}S & R_{122R}S & -R_{222i}S & -R_{222R}S & -R_{122i}C & -R_{122R}C & -R_{222i}C & -R_{222R}C \\ -T_{112R}S & T_{112i}S & T_{212R}S & -T_{212i}S & T_{112R}C & -T_{112i}C & T_{212R}C & -T_{212i}C \\ -T_{132R}S & T_{132i}S & T_{232R}S & -T_{232i}S & T_{132R}C & -T_{132i}C & T_{232R}C & -T_{232i}C \end{array} \right]$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \\ D_{112} \\ d_{112} \\ D_{212} \\ d_{212} \\ D_{122} \\ d_{122} \\ D_{222} \\ d_{222} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

#### 4.7 一般解-4 ( $F_1=if_3$ 、 $F_2=if_4$ )の誘導

##### (1) 応力関数

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11}) i f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) i f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) i f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) i f_4(z_2) \quad (4.46)$$

とする。これは、一般解-1と一般解-2との対応と同じであって虚数部を活用する解法であり、

$$W_{j1}' = (-d_{j11} + i D_{j11}) f_3(z_1) + (-d_{j12} + i D_{j12}) f_3(z_2) \\ + (-d_{j21} + i D_{j21}) f_4(z_1) + (-d_{j22} + i D_{j22}) f_4(z_2) \quad (4.47)$$

となる。これは、一般解-3の $D_{jk1}$ と $d_{jk1}$ を $-d_{jk1}$ と $D_{jk1}$ に変換すればよい。

##### (2) 条件式

$D_{jk1}$ 、 $d_{jk1}$ によって $D_{jk2}$ 、 $d_{jk2}$ を消去するためには条件式(4.9)と式(4.11)の採用を反対にすればよい。

#### 4.8 一般解-5 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解の誘導

##### (1) 応力関数

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) f_2(z_2) \quad (4.48)$$

とする。これは、一般解-1～一般解-4が $W'$ を定義したものより1次オーダー低いも

のである。

$$W_{J1}' = (D_{J11} + i d_{J11}) f_1'(z_1) + (D_{J12} + i d_{J12}) f_1'(z_2) \\ + (D_{J21} + i d_{J21}) f_2'(z_1) + (D_{J22} + i d_{J22}) f_2'(z_2) \quad (4.49)$$

## (2) 開口部における応力解放の条件

a)  $\eta$  軸上の開口部  $|\eta| < a$  で  $f_1(\ )$  による応力  $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$  になる条件は式(4.50)で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_J = \begin{pmatrix} (T_{J11R} + i T_{J11I}), (T_{J12R} + i T_{J12I}) \\ (T_{J31R} + i T_{J31I}), (T_{J32R} + i T_{J32I}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D_{J11} + i d_{J11}) f_1''(z_1) \\ (D_{J12} + i d_{J12}) f_1''(z_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

$f_1''(z_1)|_{\xi=0} = f_1''(z_2)|_{\xi=0}$  であって純虚数である。したがって式(4.11)より

$$\begin{Bmatrix} D_{J12} \\ d_{J12} \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{J12I}, & T_{J12R} \\ T_{J32I}, & T_{J32R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{J11I}, & T_{J11R} \\ T_{J31I}, & T_{J31R} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_{J11} \\ d_{J11} \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

を用いる。

b)  $\eta$  軸上の開口部  $|\eta| < a$  で  $f_2(\ )$  による応力が  $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$  になる条件は式(4.52)で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_J = \begin{pmatrix} (T_{J11R} + i T_{J11I}), (T_{J12R} + i T_{J12I}) \\ (T_{J31R} + i T_{J31I}), (T_{J32R} + i T_{J32I}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D_{J21} + i d_{J21}) f_2''(z_1) \\ (D_{J22} + i d_{J22}) f_2''(z_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.52)$$

となるが、 $\eta$  軸上の開口部  $|\eta| < a$  で

$f_2''(z_1)|_{\xi=0} = f_2''(z_2)|_{\xi=0}$  であって実数となる。したがって式(4.9)より

$$\begin{Bmatrix} D_{J12} \\ d_{J12} \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{J12R}, & -T_{J12I} \\ T_{J32R}, & -T_{J32I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{J11R}, & -T_{J11I} \\ T_{J31R}, & -T_{J31I} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_{J11} \\ d_{J11} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

を用いる。

## (3) 境界線上における変位と応力の連続条件

$\eta$  軸上 ( $\xi=0$ ) の  $|\eta| > a + b$  で変位  $u_j(\eta)$  と  $v_j(\eta)$  と応力  $\sigma_\xi$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  が連続していなければならない。表現の簡素化を計るため、

$$\chi_A = 2\{ a \cosh(H_R) \sin(a H_R) - \sinh(H_R) \cos(a H_R) \} \\ \chi_B = 2\{ a \cosh(H_R) \cos(a H_R) + \sinh(H_R) \sin(a H_R) \} \quad (4.54)$$

とすると、 $|\eta| > a + b$  で

$$f_1'(\ ) = \sinh(a\pi/2) H'_{RV} \cdot \chi_A + i \cosh(a\pi/2) H'_{RV} \cdot \chi_B = f'_{1R} + i f'_{1I} \quad (4.55)$$

$f_2'(\zeta) = -\cosh(\alpha \pi/2) H'_{RY} \cdot \chi_A - i \sinh(\alpha \pi/2) H'_{RY} \cdot \chi_B = f'_{2R} + i f'_{2I}$   
 となる。

$$\begin{aligned} U_{JR} = & f_{1R}' \{ (R_{J11R} D_{J11} - R_{J11I} d_{J11}) + (R_{J12R} D_{J12} - R_{J12I} d_{J12}) \} \\ & - f_{1I}' \{ (R_{J11I} D_{J11} + R_{J11R} d_{J11}) + (R_{J12I} D_{J12} + R_{J12R} d_{J12}) \} \\ & + f_{2R}' \{ (R_{J11R} D_{J21} - R_{J11I} d_{J21}) + (R_{J12R} D_{J22} - R_{J12I} d_{J22}) \} \\ & - f_{2I}' \{ (R_{J11I} D_{J21} + R_{J11R} d_{J21}) + (R_{J12I} D_{J22} + R_{J12R} d_{J22}) \} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} V_{JR} = & f_{1R}' \{ (R_{J21R} D_{J11} - R_{J21I} d_{J11}) + (R_{J22R} D_{J12} - R_{J22I} d_{J12}) \} \\ & - f_{1I}' \{ (R_{J21I} D_{J11} + R_{J21R} d_{J11}) + (R_{J22I} D_{J12} + R_{J22R} d_{J12}) \} \\ & + f_{2R}' \{ (R_{J21R} D_{J21} - R_{J21I} d_{J21}) + (R_{J22R} D_{J22} - R_{J22I} d_{J22}) \} \\ & - f_{2I}' \{ (R_{J21I} D_{J21} + R_{J21R} d_{J21}) + (R_{J22I} D_{J22} + R_{J22R} d_{J22}) \} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$f_1'(\zeta)$ 、 $f_2'(\zeta)$ を代入すると、 $U_{JR}$ 、 $V_{JR}$ は $\chi_A$ 、 $\chi_B$ 項別にまとめられる。

$$\begin{aligned} U_{JR} = & H_{RY}' \cdot \chi_A \{ \sinh(\alpha \pi/2) (R_{J11R} D_{J11} - R_{J11I} d_{J11} + R_{J12R} D_{J12} - R_{J12I} d_{J12}) \\ & - \cosh(\alpha \pi/2) (R_{J11I} D_{J21} - R_{J11R} d_{J21} + R_{J12R} D_{J22} - R_{J12I} d_{J22}) \} \\ & - H_{RY}' \cdot \chi_B \{ \pm \cosh(\alpha \pi/2) (R_{J11I} D_{J11} + R_{J11R} d_{J11} + R_{J12I} D_{J12} + R_{J12R} d_{J12}) \} \\ & - \sinh(\alpha \pi/2) (R_{J11I} D_{J21} + R_{J11R} d_{J21} + R_{J12I} D_{J22} + R_{J12R} d_{J22}) \} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} V_{JR} = & H_{RY}' \cdot \chi_A \{ \sinh(\alpha \pi/2) (R_{J21R} D_{J11} - R_{J21I} d_{J11} + R_{J22R} D_{J12} - R_{J22I} d_{J12}) \\ & - \cosh(\alpha \pi/2) (R_{J21R} D_{J21} - R_{J21I} d_{J21} + R_{J22R} D_{J22} - R_{J22I} d_{J22}) \} \\ & - H_{RY}' \cdot \chi_B \{ \pm \cosh(\alpha \pi/2) (R_{J21I} D_{J11} + R_{J21R} d_{J11} + R_{J22I} D_{J12} + R_{J22R} d_{J12}) \} \\ & - \sinh(\alpha \pi/2) (R_{J21I} D_{J21} + R_{J21R} d_{J21} + R_{J22I} D_{J22} + R_{J22R} d_{J22}) \} \end{aligned} \quad (4.59)$$

同様にして、応力 $\sigma_{\xi}$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ の連続条件から

$$\begin{aligned} \chi_C = & 2\{ (1 - \alpha^2) \cosh(H_R) \sin(\alpha H_R) + 2\alpha \sinh(H_R) \cos(\alpha H_R) \} \\ \chi_D = & 2\{ (1 - \alpha^2) \cosh(H_R) \cos(\alpha H_R) - 2\alpha \sinh(H_R) \sin(\alpha H_R) \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

とすると、 $|\eta| > a + b$ では

$$\begin{aligned} f_1''(\zeta) = & f_{1R}'' + i f_{1I}'' \\ = & \pm \cosh(\alpha \pi/2) (H_{RY}'' \cdot \chi_B + H_{RY}'^2 \cdot \chi_C) \\ & + i \sinh(\alpha \pi/2) (-H_{RY}'' \cdot \chi_A + H_{RY}'^2 \cdot \chi_D) \\ = & \pm \cosh(\alpha \pi/2) \cdot \chi_E + i \sinh(\alpha \pi/2) \cdot \chi_F \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} f_2''(\zeta) = & f_{2R}'' + i f_{2I}'' \\ = & -\sinh(\alpha \pi/2) (H_{RY}'' \cdot \chi_B + H_{RY}'^2 \cdot \chi_C) \\ & \pm i \cosh(\alpha \pi/2) (H_{RY}'' \cdot \chi_A - H_{RY}'^2 \cdot \chi_D) \\ = & -\sinh(\alpha \pi/2) \cdot \chi_E \pm i \cosh(\alpha \pi/2) \cdot \chi_F \end{aligned} \quad (4.62)$$

となり、求める連続条件式(4.63)(4.64)を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi JR} = & \chi_E \{ \pm i \cosh(\alpha \pi/2) (T_{J11R} D_{J11} - T_{J11I} d_{J11} + T_{J12R} D_{J12} - T_{J12I} d_{J12}) \\ & + \sinh(\alpha \pi/2) (-T_{J11R} D_{J21} + T_{J11I} d_{J21} - T_{J12R} D_{J22} + T_{J12I} d_{J22}) \} \\ & + \chi_F \{ \sinh(\alpha \pi/2) (-T_{J11I} D_{J11} - T_{J11R} d_{J11} - T_{J12I} D_{J12} - T_{J12R} d_{J12}) \\ & \pm \cosh(\alpha \pi/2) (T_{J11I} D_{J21} + T_{J11R} d_{J21} + T_{J12I} D_{J22} + T_{J12R} d_{J22}) \} \end{aligned} \quad (4.63)$$



$$\begin{aligned}
T_{\epsilon_{njR}} = & \chi_E \{ \pm \cosh(a\pi/2) (T_{j31R} D_{j11} - T_{j31I} d_{j11} + T_{j32R} D_{j12} - T_{j32I} d_{j12}) \\
& + \sinh(a\pi/2) (-T_{j31R} D_{j21} + T_{j31I} d_{j21} - T_{j32R} D_{j22} + T_{j32I} d_{j22}) \} \\
& + \chi_F \{ \sinh(a\pi/2) (-T_{j31I} D_{j11} - T_{j31R} d_{j11} - T_{j32I} D_{j12} - T_{j32R} d_{j12}) \\
& \pm \cosh(a\pi/2) (T_{j31I} D_{j21} + T_{j31R} d_{j21} + T_{j32I} D_{j22} + T_{j32R} d_{j22}) \}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

これらの条件をマトリックス表示して式(4.65)を得る。

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cccccccc}
-R_{111I}C & -R_{111R}C & -R_{211I}C & -R_{211R}C & -R_{111I}S & -R_{111R}S & R_{211I}S & R_{211R}S \\
-R_{121I}C & -R_{121R}C & -R_{221I}C & -R_{221R}C & -R_{121I}S & -R_{121R}S & R_{221I}S & R_{221R}S \\
T_{111R}C & -T_{111I}C & T_{211R}C & -T_{211I}C & T_{211R}S & -T_{111I}S & -T_{211R}S & T_{211I}S \\
T_{131R}C & -T_{131I}C & T_{231R}C & -T_{231I}C & T_{131R}S & -T_{131I}S & -T_{231R}S & T_{231I}S \\
-R_{111R}S & R_{111I}S & R_{211R}S & -R_{211I}S & -R_{111R}C & R_{111I}C & -R_{211R}C & R_{211I}C \\
-R_{121R}S & R_{121I}S & R_{221R}S & -R_{221I}S & -R_{121R}C & R_{121I}C & -R_{221R}C & R_{221I}C \\
T_{111I}S & T_{111R}S & -T_{211I}S & -T_{211R}S & T_{111I}C & T_{111R}C & T_{211I}C & T_{211R}C \\
T_{131I}S & T_{131R}S & -T_{231I}S & -T_{231R}S & T_{131I}C & T_{131R}C & T_{231I}C & T_{231R}C
\end{array} \right. \\
& \left[ \begin{array}{cccccccc}
-R_{112I}C & -R_{112R}C & -R_{212I}C & -R_{212R}C & -R_{112I}S & -R_{112R}S & R_{212I}S & R_{212R}S \\
-R_{122I}C & -R_{122R}C & -R_{222I}C & -R_{222R}C & -R_{122I}S & -R_{122R}S & R_{221R}R & R_{222R}S \\
T_{112R}C & -T_{112I}C & T_{212R}C & -T_{212I}C & T_{112R}S & -T_{112I}S & -T_{212R}S & T_{212I}S \\
T_{132R}C & -T_{132I}C & T_{232R}C & -T_{232I}C & T_{132R}S & -T_{132I}S & -T_{232R}S & T_{232I}S \\
-R_{112R}S & R_{112I}S & R_{212R}S & -R_{212I}S & -R_{112R}C & R_{112I}C & -R_{212R}C & R_{212I}C \\
-R_{122R}S & R_{122I}S & R_{222R}S & -R_{222I}S & -R_{122R}C & R_{122I}C & -R_{222R}C & R_{222I}C \\
T_{112I}S & T_{112R}S & -T_{212I}S & -T_{212R}S & T_{112I}C & T_{112R}C & T_{212I}C & T_{212R}C \\
T_{132I}S & T_{132R}S & -T_{232I}S & -T_{232R}S & T_{132I}C & T_{132R}C & T_{232I}C & T_{232R}C
\end{array} \right] \\
& \cdot \left[ \begin{array}{c}
D_{111} \\
d_{111} \\
D_{211} \\
d_{211} \\
D_{121} \\
d_{121} \\
D_{221} \\
d_{221} \\
D_{112} \\
d_{112} \\
D_{212} \\
d_{212} \\
D_{122} \\
d_{122} \\
D_{222} \\
d_{222}
\end{array} \right] = 0 \tag{4.65}
\end{aligned}$$

## 4.9 その他の一般解の誘導

同様にして、複数個の一般解が誘導できるがその詳細は割愛し応力関数の形のみを以下に示す。

### (1) 一般解-6 $if_1(z)$ と $if_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + id_{j11})if_1(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})if_1(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})if_2(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})if_2(z_2) \quad (4.66)$$

### (2) 一般解-7 $f_3(z)$ と $f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + id_{j11})f_3(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})f_4(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})f_4(z_2) \quad (4.67)$$

### (3) 一般解-8 $if_3(z)$ と $if_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + id_{j11})if_3(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})if_3(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})if_4(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})if_4(z_2) \quad (4.68)$$

### (4) 一般解-9 $zf_1(z)$ と $zf_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})z_1f_1(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})z_2f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})z_1f_2(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})z_2f_2(z_2) \quad (4.69)$$

### (5) 一般解-10 $izf_1(z)$ と $izf_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})iz_1f_1(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})iz_2f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})iz_1f_2(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})iz_2f_2(z_2) \quad (4.70)$$

### (6) 一般解-11 $zf_3(z)$ と $zf_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})z_1f_3(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})z_2f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})z_1f_4(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})z_2f_4(z_2) \quad (4.71)$$

### (7) 一般解-12 $izf_3(z)$ と $izf_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})iz_1f_3(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})iz_2f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})iz_1f_4(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})iz_2f_4(z_2) \quad (4.72)$$

### (8) 一般解-13 $z^2f_1(z)$ と $z^2f_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})z_1^2f_1(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})z_2^2f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})z_1^2f_2(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})z_2^2f_2(z_2) \quad (4.73)$$

### (9) 一般解-14 $iz^2f_1(z)$ と $iz^2f_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + id_{j11})iz_1^2f_1(z_1) + (D_{j12} + id_{j12})iz_2^2f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + id_{j21})iz_1^2f_2(z_1) + (D_{j22} + id_{j22})iz_2^2f_2(z_2) \quad (4.74)$$

(10) 一般解- 15  $z^2 f_3(z)$ と $z^2 f_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})z_1^2 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})z_2^2 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})z_1^2 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})z_2^2 f_4(z_2) \quad (4.75)$$

(11) 一般解- 16  $iz^2 f_3(z)$ と $iz^2 f_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})iz_1^2 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})iz_2^2 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})iz_1^2 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})iz_2^2 f_4(z_2) \quad (4.76)$$

(12) 一般解 - 17  $z^3 f_1(z)$ と $z^3 f_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})z_1^3 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})z_2^3 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})z_1^3 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})z_2^3 f_2(z_2) \quad (4.77)$$

(13) 一般解 - 18  $iz^3 f_1(z)$ と $iz^3 f_2(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})iz_1^3 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})iz_2^3 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})iz_1^3 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})iz_2^3 f_2(z_2) \quad (4.78)$$

(14) 一般解- 19  $z^3 f_3(z)$ と $z^3 f_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})z_1^3 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})z_2^3 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})z_1^3 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})z_2^3 f_4(z_2) \quad (4.79)$$

(15) 一般解- 20  $iz^3 f_3(z)$ と $iz^3 f_4(z)$ を $W'(z)$ として活用する解

$$W_{j1}' = (D_{j11} + i d_{j11})iz_1^3 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})iz_2^3 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})iz_1^3 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})iz_2^3 f_4(z_2) \quad (4.80)$$

(16) 一般解- 21  $z f_1(z)$ と $z f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11})z f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})z f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})z f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})z f_2(z_2) \quad (4.81)$$

(17) 一般解- 22  $iz f_1(z)$ と $iz f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11})iz f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})iz f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})iz f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})iz f_2(z_2) \quad (4.82)$$

(18) 一般解- 23  $z f_3(z)$ と $z f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11})z f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})z f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})z f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})z f_4(z_2) \quad (4.83)$$

(19) 一般解- 24  $iz f_3(z)$ と $iz f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11})iz f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12})iz f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21})iz f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22})iz f_4(z_2) \quad (4.84)$$

(20) 一般解- 25  $z^2 f_1(z)$ と $z^2 f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) z_1^2 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) z_2^2 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) z_1^2 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) z_2^2 f_2(z_2) \quad (4.85)$$

(21) 一般解-26  $iz^2 f_1(z)$ と $iz^2 f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) iz_1^2 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) iz_2^2 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) iz_1^2 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) iz_2^2 f_2(z_2) \quad (4.86)$$

(22) 一般解-27  $z^2 f_3(z)$ と $z^2 f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) z_1^2 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) z_2^2 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) z_1^2 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) z_2^2 f_4(z_2) \quad (4.87)$$

(23) 一般解-28  $iz^2 f_3(z)$ と $iz^2 f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) iz_1^2 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) iz_2^2 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) iz_1^2 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) iz_2^2 f_4(z_2) \quad (4.88)$$

(24) 一般解-29  $z^3 f_1(z)$ と $z^3 f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) z_1^3 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) z_2^3 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) z_1^3 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) z_2^3 f_2(z_2) \quad (4.89)$$

(25) 一般解-30  $iz^3 f_1(z)$ と $iz^3 f_2(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) iz_1^3 f_1(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) iz_2^3 f_1(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) iz_1^3 f_2(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) iz_2^3 f_2(z_2) \quad (4.90)$$

(26) 一般解-31  $z^3 f_3(z)$ と $z^3 f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) z_1^3 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) z_2^3 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) z_1^3 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) z_2^3 f_4(z_2) \quad (4.91)$$

(27) 一般解-32  $iz^3 f_3(z)$ と $iz^3 f_4(z)$ を $W(z)$ として活用する解

$$W_{j1} = (D_{j11} + i d_{j11}) iz_1^3 f_3(z_1) + (D_{j12} + i d_{j12}) iz_2^3 f_3(z_2) \\ + (D_{j21} + i d_{j21}) iz_1^3 f_4(z_1) + (D_{j22} + i d_{j22}) iz_2^3 f_4(z_2) \quad (4.92)$$

## 4.10 一般解の分類と図化

### (1) 一般解の分類

以上で誘導された直交異方性弾性体間の境界面き裂の一般解はその基本的な性質により $\xi$ 軸及び $\eta$ 軸で対称、逆対称であるか否かで4つの解析解すなわち無限遠方で引張り応力、せん断応力、 $\xi$ 軸曲げ、 $\eta$ 軸曲げがそれぞれ単独に作用している応力状態を表現できるものに分類できる。中心き裂を表す一般解の分類結果を表4.1に示す。同様にして外側き裂の一般解の分類を表4.2に示す。

表 4.1 中心き裂の一般解の分類

	Wの構成	W'の構成	応力状態	無限遠方の応力 $\sigma_{\infty}$ $\tau_{\infty}$	
一般解 1	—	$f_1 + f_2$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 2	—	$i(f_1 + f_2)$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 3	—	$f_3 + f_4$	引張応力	0	0
" 4	—	$i(f_3 + f_4)$	せん断応力	0	0
" 5	$f_1 + f_2$	$f_1' + f_2'$	引張応力	0	0
" 6	$i(f_1 + f_2)$	$i(f_1' + f_2')$	せん断応力	0	0
" 7	$f_3 + f_4$	$f_3' + f_4'$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 8	$i(f_3 + f_4)$	$i(f_3' + f_4')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 9	—	$z(f_1 + f_2)$	引張応力	有限	有限
" 10	—	$iz(f_1 + f_2)$	せん断応力	有限	有限
" 11	—	$z(f_3 + f_4)$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 12	—	$iz(f_3 + f_4)$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 13	—	$z^2(f_1 + f_2)$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 14	—	$iz^2(f_1 + f_2)$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 15	—	$z^2(f_3 + f_4)$	引張応力	有限	有限
" 16	—	$iz^3(f_3 + f_4)$	せん断応力	有限	有限
" 17	—	$z^3(f_1 + f_2)$	引張応力	$\infty$	$\infty$
" 18	—	$iz^3(f_1 + f_2)$	せん断応力	$\infty$	$\infty$
" 19	—	$z^3(f_3 + f_4)$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 20	—	$iz^3(f_3 + f_4)$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 21	$z(f_1 + f_2)$	$(f_1 + f_2) + z(f_1' + f_2')$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 22	$iz(f_1 + f_2)$	$i(f_1 + f_2) + iz(f_1' + f_2')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 23	$z(f_3 + f_4)$	$(f_3 + f_4) + z(f_3' + f_4')$	引張応力	0	0
" 24	$iz(f_3 + f_4)$	$i(f_3 + f_4) + iz(f_3' + f_4')$	せん断応力	0	0
" 25	$z^2(f_1 + f_2)$	$2z(f_1 + f_2) + z^2(f_1' + f_2')$	引張応力	有限	有限
" 26	$iz^2(f_1 + f_2)$	$i2z(f_1 + f_2) + iz^2(f_1' + f_2')$	せん断応力	有限	有限
" 27	$z^2(f_3 + f_4)$	$2z(f_3 + f_4) + z^2(f_3' + f_4')$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 28	$iz^2(f_3 + f_4)$	$i2z(f_3 + f_4) + iz^2(f_3' + f_4')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 29	$z^3(f_1 + f_2)$	$3z^2(f_1 + f_2) + z^3(f_1' + f_2')$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 30	$iz^3(f_1 + f_2)$	$i3z^2(f_1 + f_2) + iz^3(f_1' + f_2')$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 31	$z^3(f_3 + f_4)$	$3z^2(f_3 + f_4) + z^3(f_3' + f_4')$	引張応力	有限	有限
" 32	$iz^3(f_3 + f_4)$	$i3z^2(f_3 + f_4) + iz^3(f_3' + f_4')$	せん断応力	有限	有限

表 4.2 外側き裂の一般解の分類

	Wの構成	W'の構成	応力状態	無限遠方の応力 $\sigma_{\infty}$ $\tau_{\infty}$	
一般解 1	—	$f_1 + f_2$	引張応力	0	0
" 2	—	$i(f_1 + f_2)$	せん断応力	0	0
" 3	—	$f_3 + f_4$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 4	—	$i(f_3 + f_4)$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 5	$f_1 + f_2$	$f_1' + f_2'$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 6	$i(f_1 + f_2)$	$i(f_1' + f_2')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 7	$f_3 + f_4$	$f_3' + f_4'$	引張応力	0	0
" 8	$i(f_3 + f_4)$	$i(f_3' + f_4')$	せん断応力	0	0
" 9	—	$z(f_1 + f_2)$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 10	—	$iz(f_1 + f_2)$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 11	—	$z(f_3 + f_4)$	引張応力	有限	有限
" 12	—	$iz(f_3 + f_4)$	せん断応力	有限	有限
" 13	—	$z^2(f_1 + f_2)$	引張応力	有限	有限
" 14	—	$iz^2(f_1 + f_2)$	せん断応力	有限	有限
" 15	—	$z^2(f_3 + f_4)$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 16	—	$iz^3(f_3 + f_4)$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 17	—	$z^3(f_1 + f_2)$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 18	—	$iz^3(f_1 + f_2)$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 19	—	$z^3(f_3 + f_4)$	引張応力	$\infty$	$\infty$
" 20	—	$iz^3(f_3 + f_4)$	せん断応力	$\infty$	$\infty$
" 21	$z(f_1 + f_2)$	$(f_1 + f_2) + z(f_1' + f_2')$	引張応力	0	0
" 22	$iz(f_1 + f_2)$	$i(f_1 + f_2) + iz(f_1' + f_2')$	せん断応力	0	0
" 23	$z(f_3 + f_4)$	$(f_3 + f_4) + z(f_3' + f_4')$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 24	$iz(f_3 + f_4)$	$i(f_3 + f_4) + iz(f_3' + f_4')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 25	$z^2(f_1 + f_2)$	$2z(f_1 + f_2) + z^2(f_1' + f_2')$	$\eta$ 軸曲げ	0	0
" 26	$iz^2(f_1 + f_2)$	$i2z(f_1 + f_2) + iz^2(f_1' + f_2')$	$\xi$ 軸曲げ	0	0
" 27	$z^2(f_3 + f_4)$	$2z(f_3 + f_4) + z^2(f_3' + f_4')$	引張応力	有限	有限
" 28	$iz^2(f_3 + f_4)$	$i2z(f_3 + f_4) + iz^2(f_3' + f_4')$	せん断応力	有限	有限
" 29	$z^3(f_1 + f_2)$	$3z^2(f_1 + f_2) + z^3(f_1' + f_2')$	引張応力	有限	有限
" 30	$iz^3(f_1 + f_2)$	$i3z^2(f_1 + f_2) + iz^3(f_1' + f_2')$	せん断応力	有限	有限
" 31	$z^3(f_3 + f_4)$	$3z^2(f_3 + f_4) + z^3(f_3' + f_4')$	$\eta$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$
" 32	$iz^3(f_3 + f_4)$	$i3z^2(f_3 + f_4) + iz^3(f_3' + f_4')$	$\xi$ 軸曲げ	$\infty$	$\infty$

**(2) 一般解の図化**

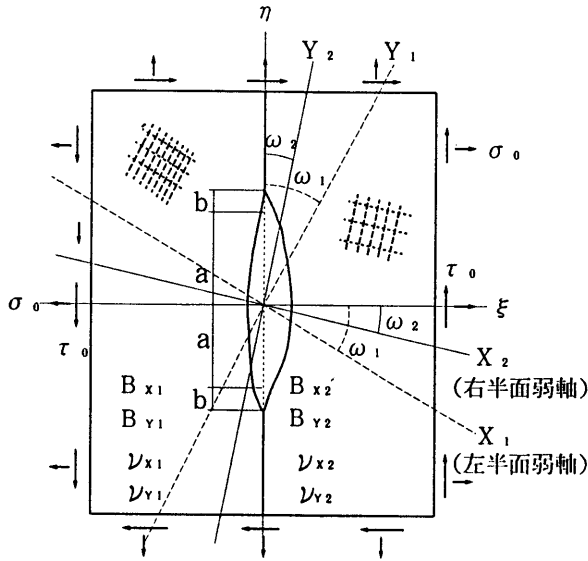
一般解の基本的形状を認識するために、図 4.1 に示す等方性弾性体を対象にした解析モデルの境界面き裂問題を解き変位と応力分布を図化する。(主軸角度  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

1) 中心き裂

中心き裂の一般解 1 ~ 4 の変位と応力を図 4.2 ~ 4.5 に二次元平面として示す。

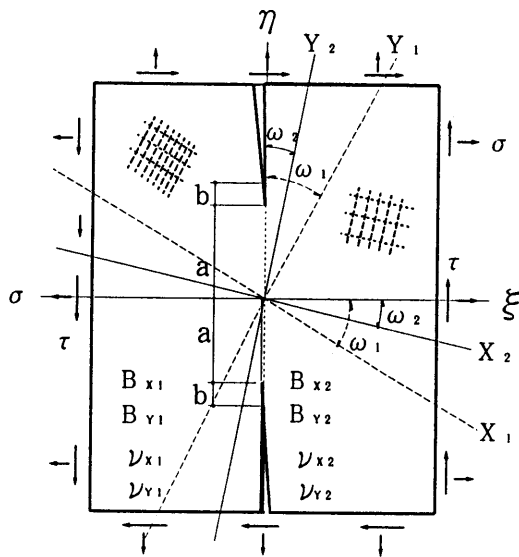
2) 外側き裂

外側き裂の一般解 1 ~ 4 の変位と応力を図 4.6 ~ 4.9 に二次元平面として示す。



$B_{x1} = B_{x2} = 100 \text{ kg/cm}^2$   
 $B_{y1} = B_{y2} = 100 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu_{x1} = \nu_{y1} = 0.3$   
 $\omega_1 = \omega_2 = 0.0$   
 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.99$   
 $a = 1.0 \text{ cm}$   
 $b = 0.3 \text{ cm}$

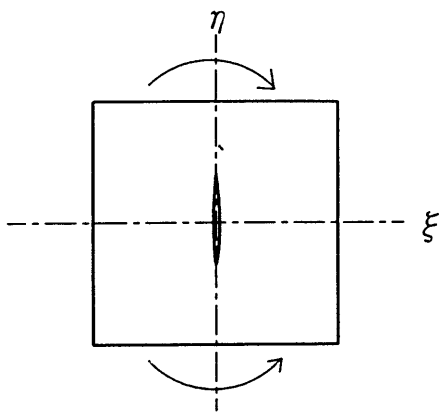
図 4.1 (a) 中心き裂の解析モデル



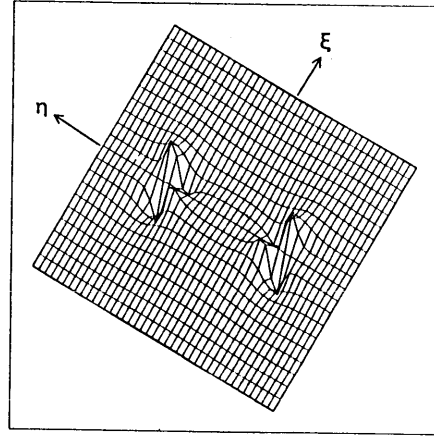
$B_{x1} = B_{x2} = 100 \text{ kg/cm}^2$   
 $B_{y1} = B_{y2} = 100 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu_{x1} = \nu_{y1} = 0.3$   
 $\omega_1 = \omega_2 = 0.0$   
 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.99$   
 $a = 1.0 \text{ cm}$   
 $b = 0.3 \text{ cm}$

図 4.1 (b) 外側き裂の解析モデル

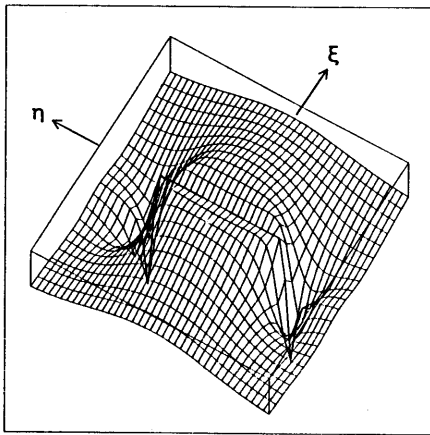
中心き裂  $\eta$  軸曲げ



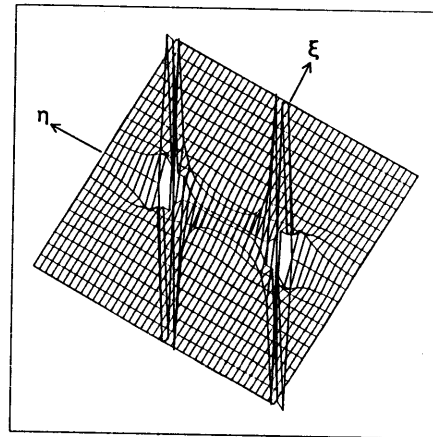
(a) 解析モデル略図



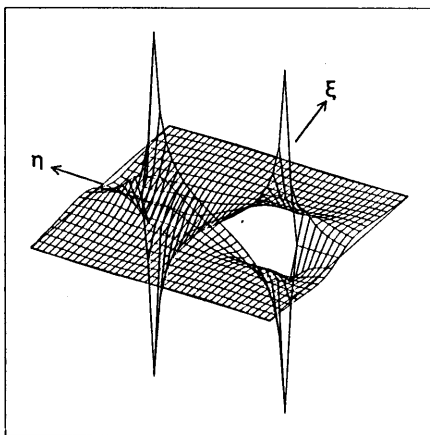
(b) 応力  $\sigma_\xi$



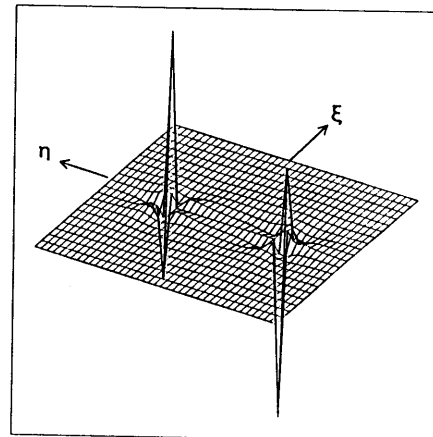
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_\eta$



(e) 変位  $v$

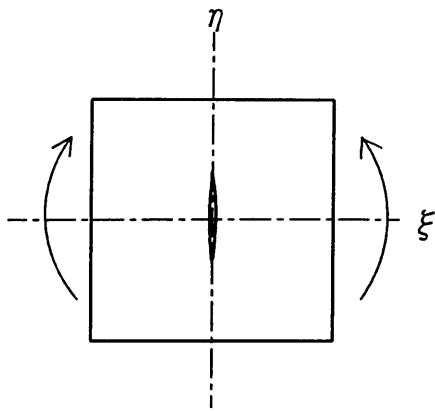


(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

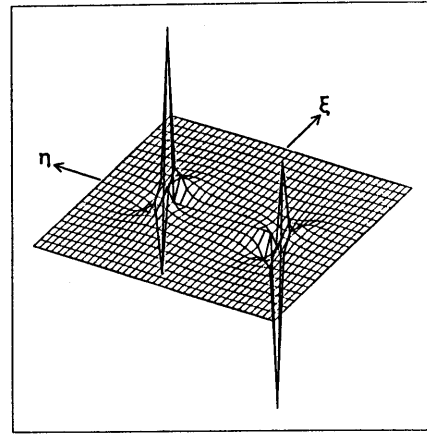
図 4.2 中心き裂 一般解 1 の変位と応力



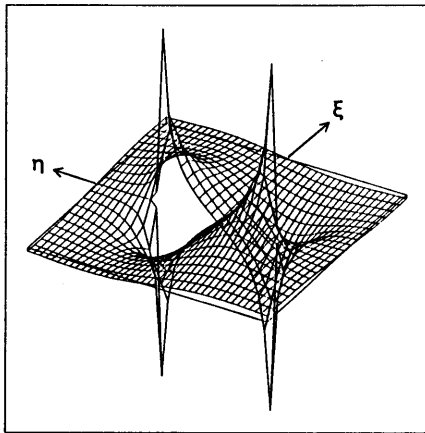
中心き裂  $\xi$  軸曲げ



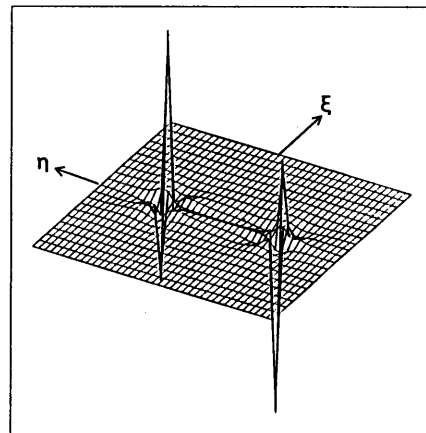
(a) 解析モデル略図



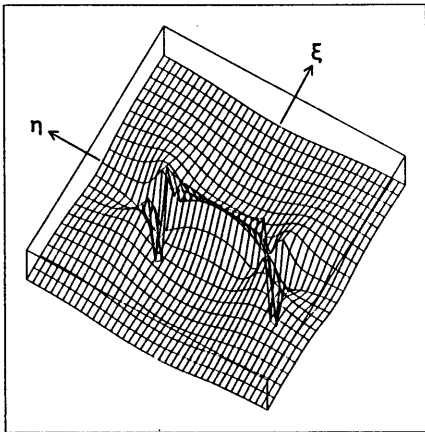
(b) 応力  $\sigma_\xi$



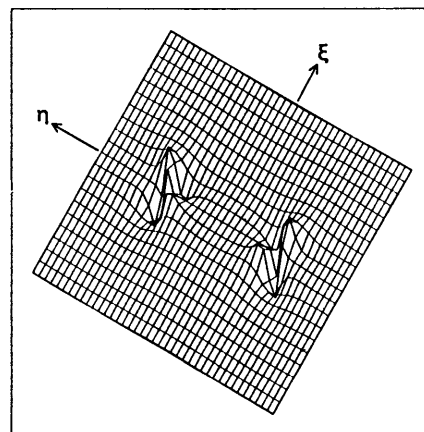
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_\eta$



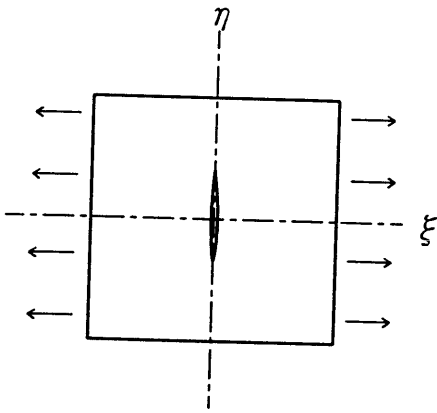
(e) 変位  $v$



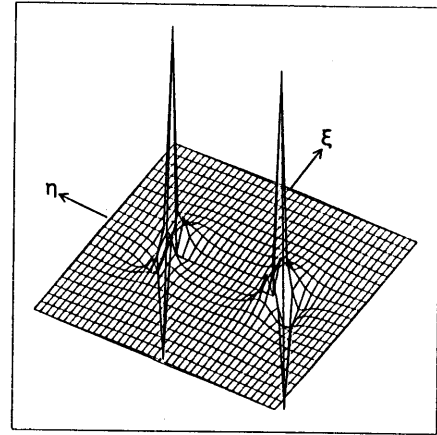
(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

図 4.3 中心き裂 一般解 2 の変位と応力

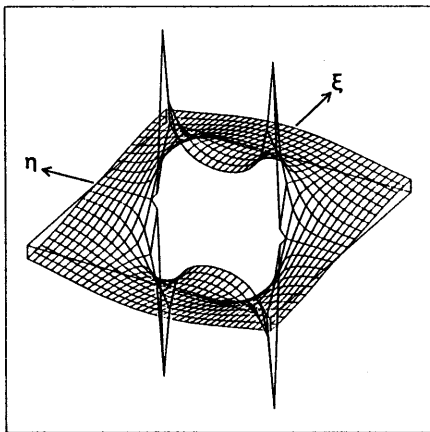
中心き裂 引張



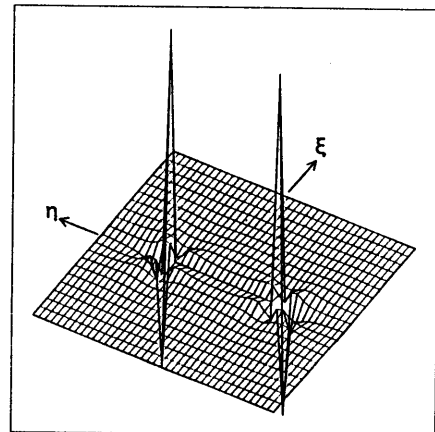
(a) 解析モデル略図



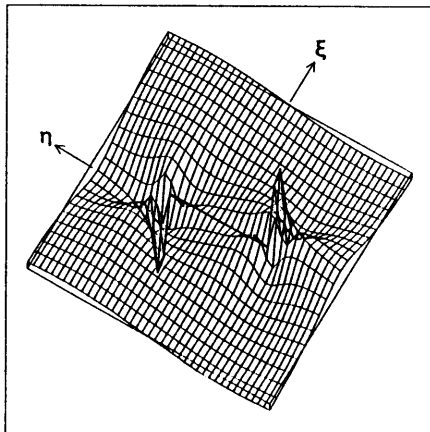
(b) 応力  $\sigma_\xi$



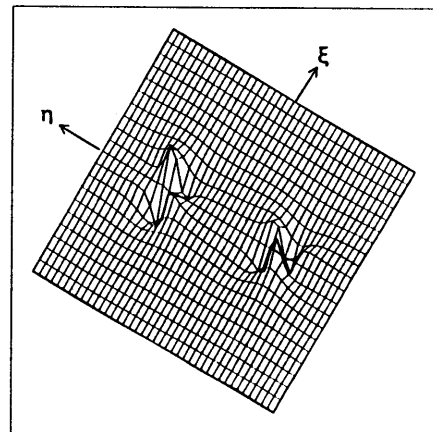
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_\eta$



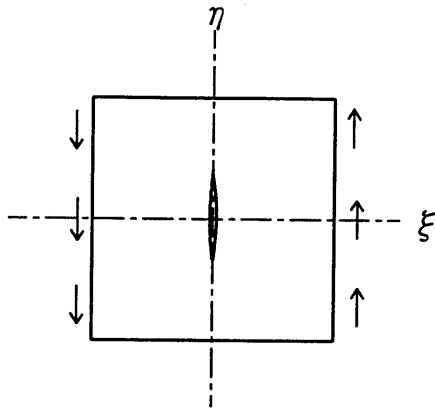
(e) 変位  $v$



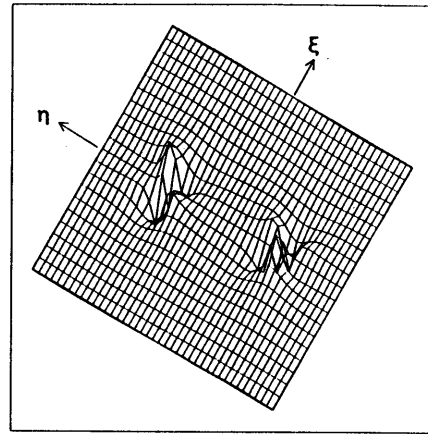
(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

図 4.4 中心き裂 一般解 3 の変位と応力

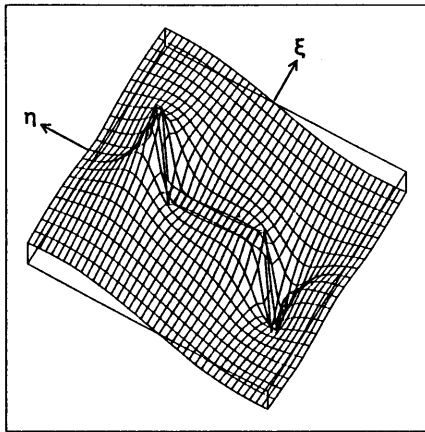
中心き裂 せん断



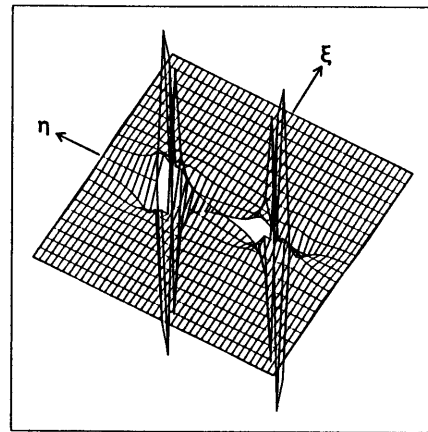
(a) 解析モデル略図



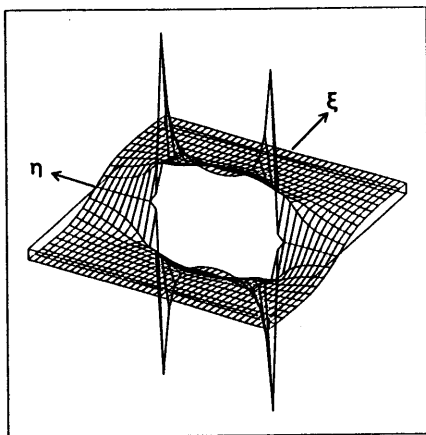
(b) 応力  $\sigma_{\xi}$



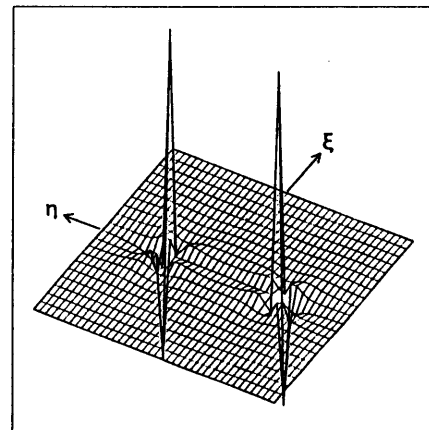
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_n$



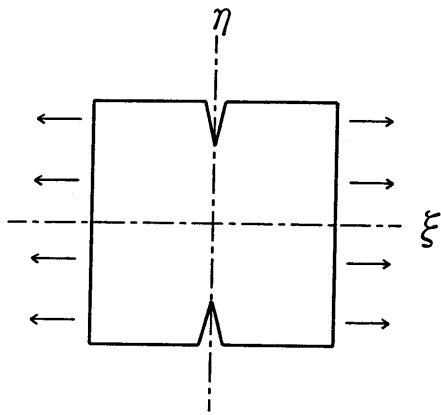
(e) 変位  $v$



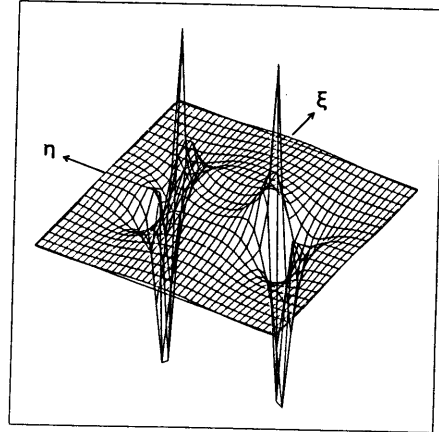
(f) 応力  $\tau_{\xi n}$

図 4.5 中心き裂 一般解 4 の変位と応力

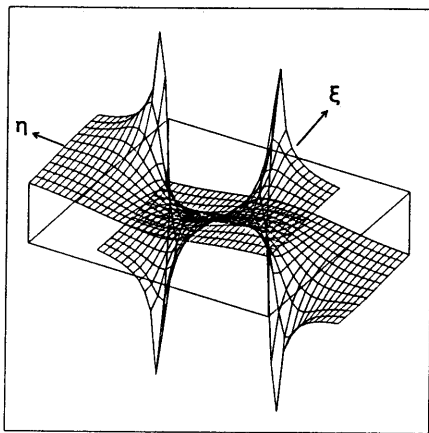
外側き裂 引張



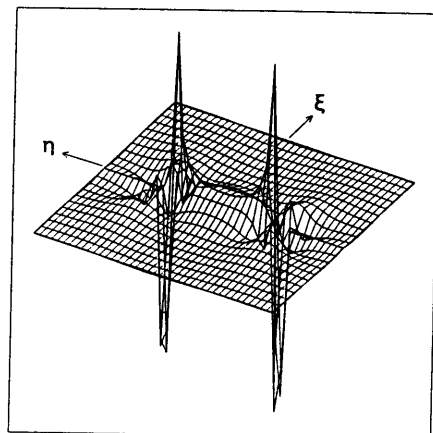
(a) 解析モデル略図



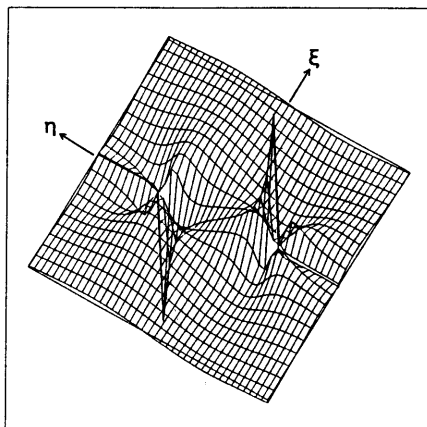
(b) 応力  $\sigma_\xi$



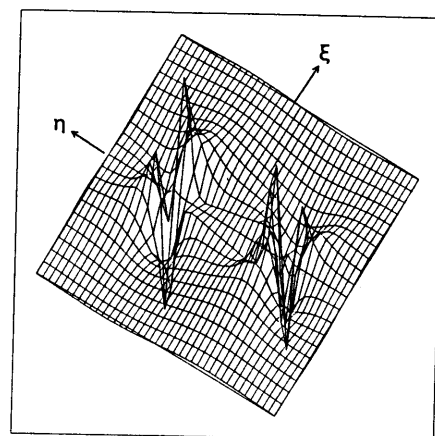
(c) 変位 u



(d) 応力  $\sigma_n$



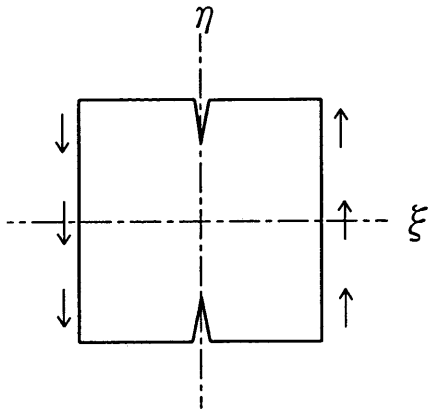
(e) 変位 v



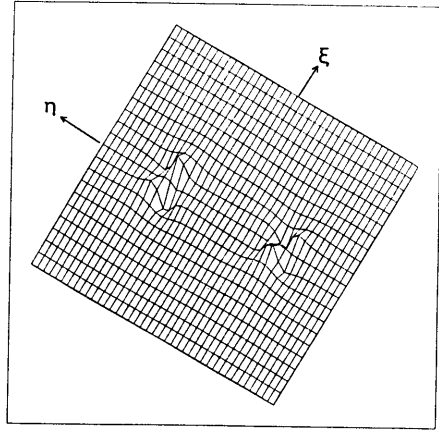
(f) 応力  $\tau_{\xi n}$

図 4.6 外側き裂 一般解 1 の変位と応力

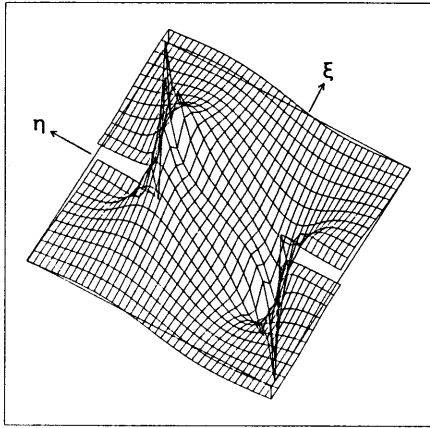
外側き裂 せん断



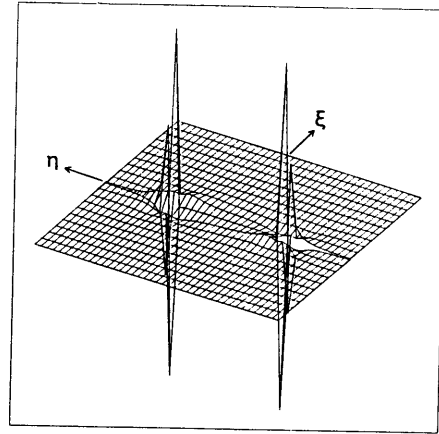
(a) 解析モデル略図



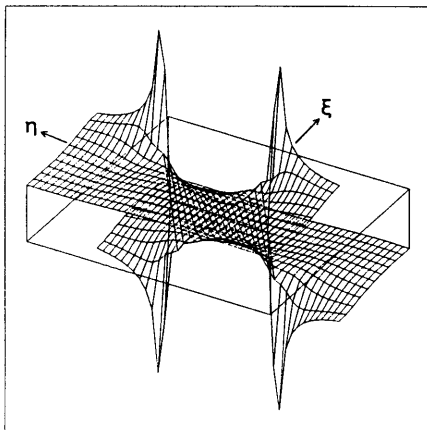
(b) 応力  $\sigma_\xi$



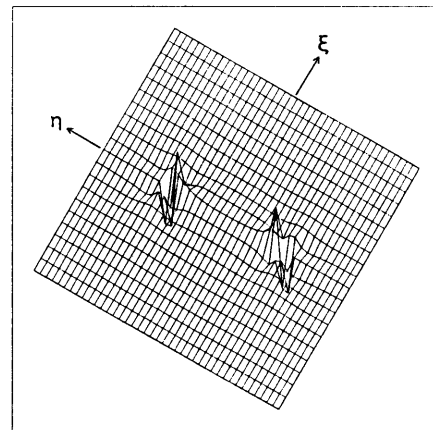
(c) 変位 u



(d) 応力  $\sigma_\eta$



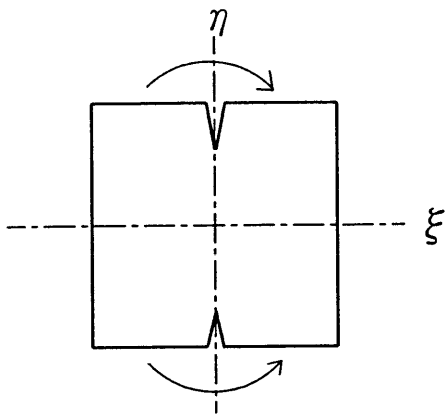
(e) 変位 v



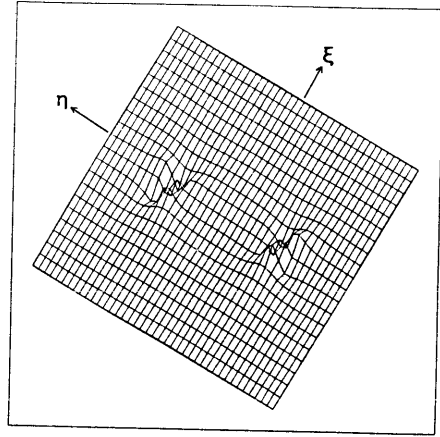
(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

図 4.7 外側き裂 一般解 2 の変位と応力

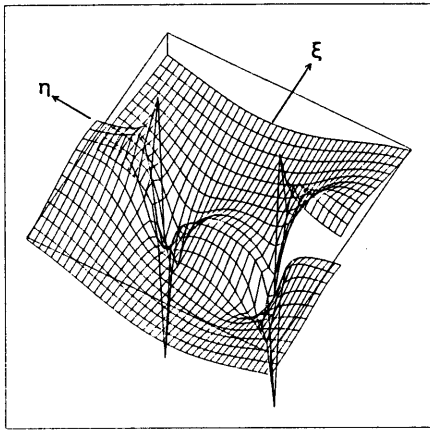
外側き裂  $\eta$  軸曲げ



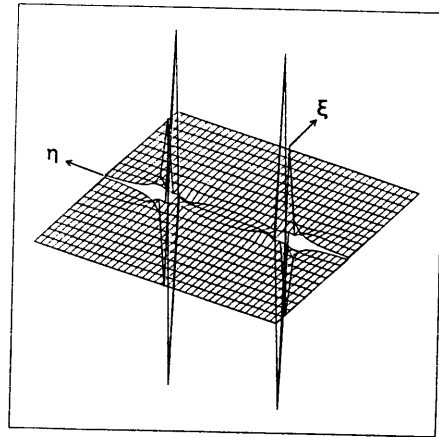
(a) 解析モデル略図



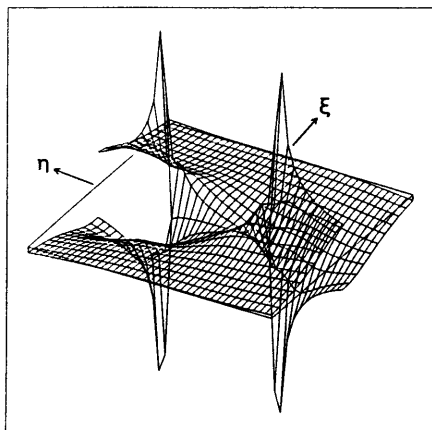
(b) 応力  $\sigma_\xi$



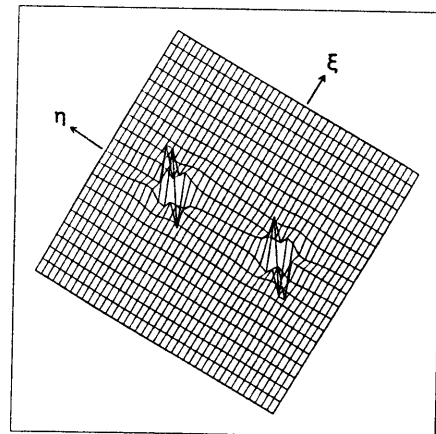
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_\eta$



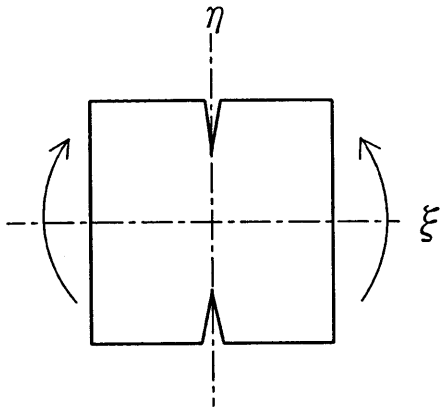
(e) 変位  $v$



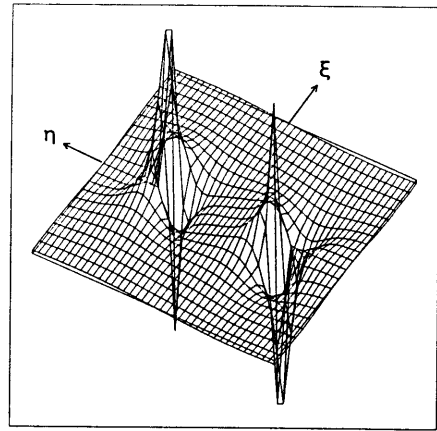
(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

図 4.8 外側き裂 一般解 3 の変位と応力

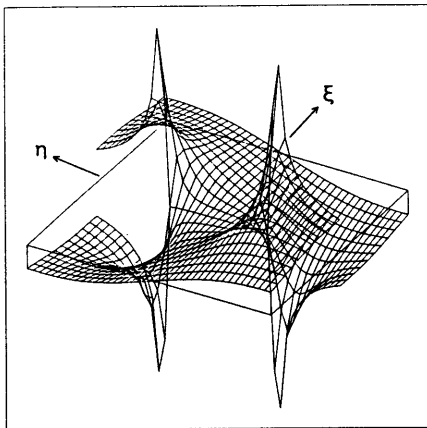
外側き裂  $\xi$  軸曲げ



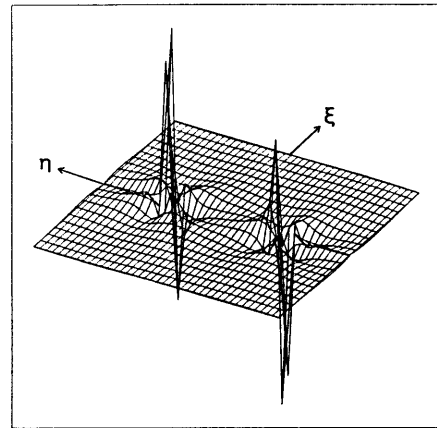
(a) 解析モデル略図



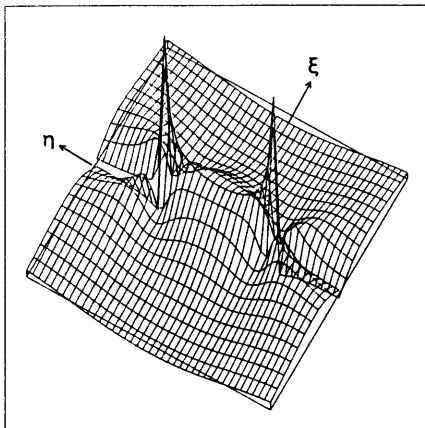
(b) 応力  $\sigma_\xi$



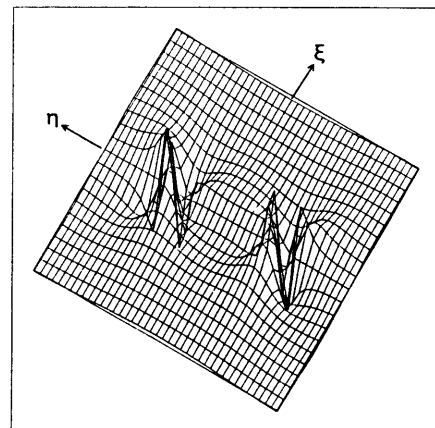
(c) 変位  $u$



(d) 応力  $\sigma_\eta$



(e) 変位  $v$



(f) 応力  $\tau_{\xi\eta}$

図 4.9 外側き裂 一般解 4 の変位と応力

## 4.11 まとめ

(1) 本章では第2章で説明した要素関数を組み合わせて、直交異方性弾性体の境界面き裂（中心き裂、外側き裂）の一般解を誘導した。

(2) これらの一般解はその基本的な性質により  $\xi$  軸及び  $\eta$  軸で対称、逆対称であるかどうかで4つの解析解すなわち無限遠方で引張り応力、せん断応力、 $\xi$  軸曲げ、 $\eta$  軸曲げがそれぞれ単独に作用している応力状態を表現できるものに分類できた。等方性の場合も同様な方法で分類できる。

(3) これらの変位や応力分布の曲面はき裂先端で滑らかな開口形状と有限で滑らかな応力集中状態を構成していて、従来の研究で現れている集積特異点状の応力集中を完全に消滅させ得たことを示している。

しかし、図 4.2～図 4.9を逐次詳細に検討すると、き裂先端で開口変位が正から負へ1回反転してめり込んだり、応力分布に多少不自然な反転が現れている。すなわちこれらの解曲面をそれぞれ単独に応力関数として活用するのではなく、いくつかの解曲面を重ね合わせて工学的に妥当と思われる応力関数を構成すべきであろう。



# 第 5 章 直交異方性弾性体境界面の中心き裂近傍の応力解析と岩盤を対象とする その実用面への応用

## 5.1 はじめに

前章で誘導した直交異方性弾性体間の境界面の一般解を複数個組み合わせてき裂周辺で振動特異性を持たない有限でなめらかな応力分布を誘導する。本研究の特徴はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定した点である。これによって従来の研究で指摘されている界面き裂周辺の応力が振動特異性を示すという不自然な点を解消でき、任意の主軸傾きに対してもプロセスゾーンで滑らかな連続した応力と変位の曲面を表現できるようになった。この解析法は複合材料や異方性の岩盤を対象としたき裂解析に活用できるので、その実例を採りあげることにより実用面への応用性を示す。

近年、複合材料の研究開発が進むにつれて弾性定数の異なる材料の接合面に生じている空隙やき裂の応力解析がますます重要になってきている。いわゆるインターフェイスクラック問題であるが土木工学の分野ではこの種の問題が多く、たとえばコンクリートダムの基礎岩盤とその上に打設されたコンクリートとの接合面あるいは LNG 備蓄地下空洞の覆工コンクリートと周辺岩盤との接合部の空隙周辺の応力集中問題、ダム吐き出し部の洗掘部に補修用のファイバーコンクリートを打ち足した場合の接触面不良部分あるいは最近ますます実績が多くなっている複合構造物<sup>1)2)3)</sup>の接触面不良によるき裂進展問題などが挙げられる。

実務への応用例として、異方性岩盤上に等方性のコンクリートを打設した場合の接触面不良問題を取り上げそのき裂周辺での応力集中状態を解析した。異方性の主軸の傾き、剛性値やプロセスゾーンの大きさを変化させ、その影響を検討し従来の研究にない成果<sup>6)</sup>を得ることができた。さらに、地中の異方性岩盤境界に有限の大きさのき裂（断層などに代表される不連続面やシームなど）がある問題で初期応力として引張やせん断を受けている実務例を示し本解析法の有効性を示し得た。

## 5.2 一般解の重ね合わせ

第 4 章で誘導した一般解は無遠方での応力状態が同じであっても境界条件を満足すれば解析解となり得るため、複数個の一般解が得られている。これらの一般解は基本的に 4 つの応力状態（引張り、せん断、 $\epsilon$  軸曲げ、 $\eta$  軸曲げ）を表す関数であるが、直交異方性弾性体間のき裂解析として単独の関数を活用するのでは本研究が目的としている「き裂先端で滑らかで有限な応力分布と開口を表現する」には多少不自然な点が現れる。図 4.2～4.9 に示したような単独の関数だけによる曲面はプロセスゾーンでの変位のめりこみや応力の符号の 1 回反転など不自然なところがある。したがって応力分布が滑らかで現実的と思われる解析解を得るにはこれらの単独の一般解にある係数を乗じたのち複数個重ね合わせてより合理的な最適解とすべきであろう。

### (1) 一般解の重ね合わせの手法

解に未定係数を乗じて重ね合わせて平滑化する手法として次の4方法を提案し検討した。

- 1) エネルギー解放率  $J_a$  ( $a$ が微小変化)を極値とする方法<sup>7)</sup>
- 2) エネルギー解放率  $J_b$  ( $b$ が微小変化)を極値とする方法
- 3) 応力度の自乗和を極値(最小化)とする方法
- 4) 開口変位の曲率自乗和を極値(最小化)とする方法

以下の数値計算結果からこれらの4方法の内、4) 開口変位の曲率自乗和を最小とする方法で未定係数を決めるのが最も滑らかな応力分布を与えて望ましいと判断された。重ね合わせの具体的な方法を1) エネルギー解放率  $J_a$ を最小とする方法について詳述する。 $J_a$ 、 $J_b$ の詳細は文献<sup>7)</sup>に譲る。

## (2) エネルギー解放率 $J_a$ を最小とする方法

a) 求める変位( $u$ 、 $v$ )及び応力( $\sigma$ 、 $\tau$ )

$\lambda_j$ を一般解 $W_j$ に対する未定係数とする。

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 \cdot (\text{解 1 } u_1) + \lambda_2 \cdot (\text{解 2 } u_2) + \lambda_3 \cdot (\text{解 3 } u_3) + \dots + \lambda_n \cdot (\text{解 } n \text{ } u_n) \\ v &= \lambda_1 \cdot (\text{解 1 } v_1) + \lambda_2 \cdot (\text{解 2 } v_2) + \lambda_3 \cdot (\text{解 3 } v_3) + \dots + \lambda_n \cdot (\text{解 } n \text{ } v_n) \\ \sigma &= \lambda_1 \cdot (\text{解 1 } \sigma_1) + \lambda_2 \cdot (\text{解 2 } \sigma_2) + \lambda_3 \cdot (\text{解 3 } \sigma_3) + \dots + \lambda_n \cdot (\text{解 } n \text{ } \sigma_n) \quad (5.1) \\ \tau &= \lambda_1 \cdot (\text{解 1 } \tau_1) + \lambda_2 \cdot (\text{解 2 } \tau_2) + \lambda_3 \cdot (\text{解 3 } \tau_3) + \dots + \lambda_n \cdot (\text{解 } n \text{ } \tau_n) \end{aligned}$$

b) 外力が一定で開口部が進展したときの仕事量  $\Delta W$

き裂長さ  $a$ 、プロセスゾーン長さ  $b$  がそれぞれ  $a_2$ 、 $b_2$  に、変位と応力も  $u_1$  から  $u_2$ 、 $\sigma_1$  から  $\sigma_2$  へ変化したものとする、き裂線上の外力仕事の変化は式(5.2)となる。

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 \\ &= \sigma_x \text{による仕事分 } \Delta W_1 + \tau_{xy} \text{による仕事分 } \Delta W_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{a_2+b_2} \{ \sigma_1(y) + \sigma_2(y) \} \Delta u(y) dy + \frac{1}{2} \int_a^{a_2+b_2} \{ \tau_1(y) + \tau_2(y) \} \Delta v(y) dy \end{aligned} \quad (5.2)$$

区間( $a$ 、 $a_2+b_2$ )に亘る積分を

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \int_a^{a_2+b_2} \{ \sigma_{j2}(y) + \sigma_{j1}(y) \} \{ u_{j2}(\varepsilon, y) - u_{j1}(\varepsilon, y) - u_{j2}(-\varepsilon, y) + u_{j1}(-\varepsilon, y) \} dy \quad (5.3)$$

$$q_{ij} = \frac{1}{2} \int_a^{a_2+b_2} \{ \tau_{j2}(y) + \tau_{j1}(y) \} \{ v_{j2}(\varepsilon, y) - v_{j1}(\varepsilon, y) - v_{j2}(-\varepsilon, y) + v_{j1}(-\varepsilon, y) \} dy \quad (5.4)$$

とすると、

$$\Delta W = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{31} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ q_{31} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

となる。

c) 係数  $\lambda_j$  の決定

$\Delta W$  を極値にする付帯条件として、係数  $\lambda_j$  の自乗和一定という条件を設定する。

$$\sum_1^n \lambda_j^2 = C_0 \quad (5.6)$$

これによって、極値問題はラグランジェの未定係数を  $\varepsilon$  とした

$$\Gamma = \Delta W + \varepsilon (C_0 - \sum \lambda_j^2) \quad (5.7)$$

の極値問題となる。

$$\Gamma = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} P_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \varepsilon (C_0 - \sum \lambda_j^2) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} P_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

となり、 $\varepsilon$  を固有値、 $\lambda_j$  をベクトルとする行列  $[P_{ij}]$  の固有値問題となる。

以下に示す数値計算の結果から解の重ね合わせはこれらの4方法の内、4) 開口変位の曲率自乗和を最小とする方法が最も応力分布が平滑化すると判断された。

### 5.3 せん断を受ける異方性岩盤<sup>6)</sup>

#### (1) 解析モデル

計算モデルとして、異方性の岩盤とその上に打設されたコンクリート(等方性)との接合不良部の応力集中問題を設定する。(例えば重力式ダムの基礎岩着部などが実例となる)図5.1の右半面を岩盤とみなし弾性係数  $B_{x2}=25,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_{y2}=50,000 \text{ kg/cm}^2$  (岩盤の弾性係数と異方性は実績<sup>4)</sup>から  $B_{y2}/B_{x2}=2$  とする)  $\nu_{y2}=0.25$ 、ねじり定数  $\kappa=0.6$ とし、左半面はコンクリートと想定して  $B_{x1}=B_{y1}=250,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu_{y1}=0.2$ 、ねじり定数  $\kappa=0.95$ とする。き裂長さ  $a=1 \text{ cm}$ 、プロセスゾーン  $b=0.3 \text{ cm}$ とした。コンクリートは等方性とみなして主軸角度  $\omega_1=0$ と固定し、岩盤の主軸角度  $\omega_2$ は $0\sim 90^\circ$ まで変化させ、境界面き裂周辺の応力集中の特性を把握する。

作用応力は無限遠点でせん断応力(静水圧などにより発生する)  $\tau_0=1$  が作用している平面応力問題と考える。

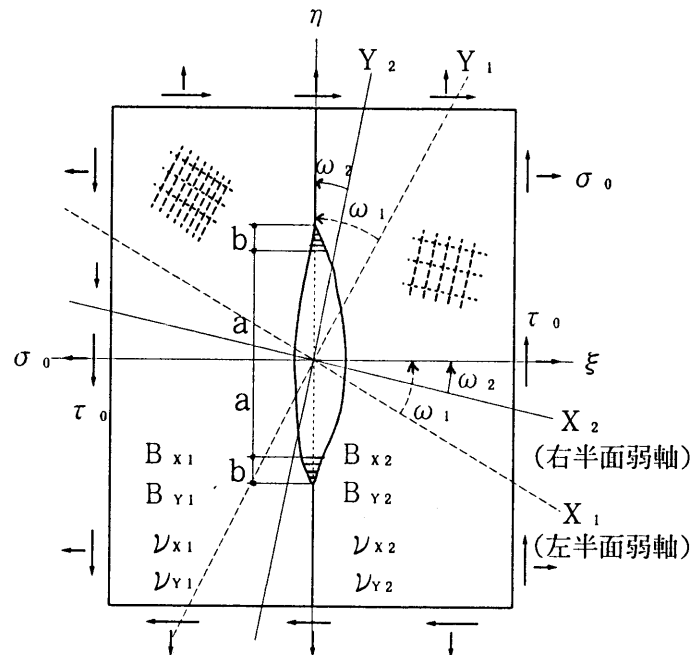


図 5.1 せん断を受ける異方性岩盤解析モデル

#### (2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数

せん断応力が作用する場合は、一般解として求められている表4.1の一般解の中よりせん断を表現できる曲面を中心に引張、 $\xi$ 軸曲げ、 $\eta$ 軸曲げを主体とする曲面を重ね合わせるにより求めることができる。重ね合せの係数は5.2で示した4方法により検討した結果、「開口変位の曲率自乗和を最小とする方法」が最も平滑化された変位と応力分布を表すという見地より最適化された解となった。表5.1に採用した解析解の組み合わせとその重ね合わせの係数を示す。

#### (3) 主軸角度 $\omega_1=0$ 、 $\omega_2=30^\circ$ の場合の解析結果

主軸角度  $\omega_1=0, \omega_2=30^\circ$  の場合の解析結果を図 5.2~5.5 に示す。開口部近傍の長方形領域に対して長方形の格子上で結果を図化しているが、境界線( $\eta$  軸)上については  $\xi = \pm 0.0001$  の2本の線を設定して図化している。したがって、くい違って(開口して)いない部分は連続性を示していることになる。プロセスゾーン領域の変位  $v$  と応力  $\sigma_\xi, \tau_{\xi\eta}$  を拡大したものを図 5.6~5.8 に示す。図 5.9 には  $\eta$  軸上の変位  $v$ 、応力  $\sigma_\xi, \tau_{\xi\eta}$  を  $\omega_1=\omega_2=0$  のときの値との比で示す。寸法を明示していないが、境界面き裂の問題の解として連続性と開口特性を認識し得るものであろう。これらのことから次の考察ができる。

a) 境界上の開口部において応力条件  $\sigma_\xi=0, \tau_{\xi\eta}=0$  は完全に満足され、プロセスゾーンでは従来の研究で現れている工学上不都合な集積特異点は現れず滑らかな応力集中が表現されている。

b) 変位  $u, v$  は滑らかな開口形状を示していることが明白である。さらに剛性の大きい側の変位が小さく、剛性の小さい側は大きな変位となることも明示されている。

c) 中川、藤井等<sup>5)</sup>がフーリエ級数で解析した研究では、境界面上の変位と応力しか求められなかったが、本解析手法では、閉じた解が得られプロセスゾーンの大きさや主軸の傾き、剛性値などを任意に設定でき、2次元領域で滑らかな解曲面が得られる。

表 5.1 採用した解析解の組み合わせと係数  $\lambda_j$

解析解 番号	応力状態	材料の主軸角度 (コンクリート $\omega_1$ , 岩盤 $\omega_2$ )			
		$\omega_1=0^\circ$ $\omega_2=0^\circ$	$\omega_1=0^\circ$ $\omega_2=30^\circ$	$\omega_1=0^\circ$ $\omega_2=60^\circ$	$\omega_1=0^\circ$ $\omega_2=90^\circ$
2	$\xi$ 軸曲げ	-0.00007308	-0.00121896	-0.00112986	0.00071144
8	"	-0.00000018	-0.00002525	-0.00018409	0.00000292
1	$\eta$ 軸曲げ	-0.00000011	-0.00053752	0.00239381	-0.00000519
7	"	-0.00000020	0.00001348	0.00000201	-0.00000763
3	引張	-0.00018987	0.11260500	-0.18554586	0.00594443
9	"	-0.00094344	0.14922262	0.58015827	-0.03319237
4	せん断	-0.14304122	0.34629423	-0.15094144	-0.40391089
6	"	-0.00000242	0.00042218	-0.00079508	0.00007021
10	"	0.00096402	-0.55893619	-0.24505966	-0.04629338
16	"	0.00203515	-0.10049298	-0.46891129	0.06541194

bi-elastic constant  $\alpha=0.22741209$

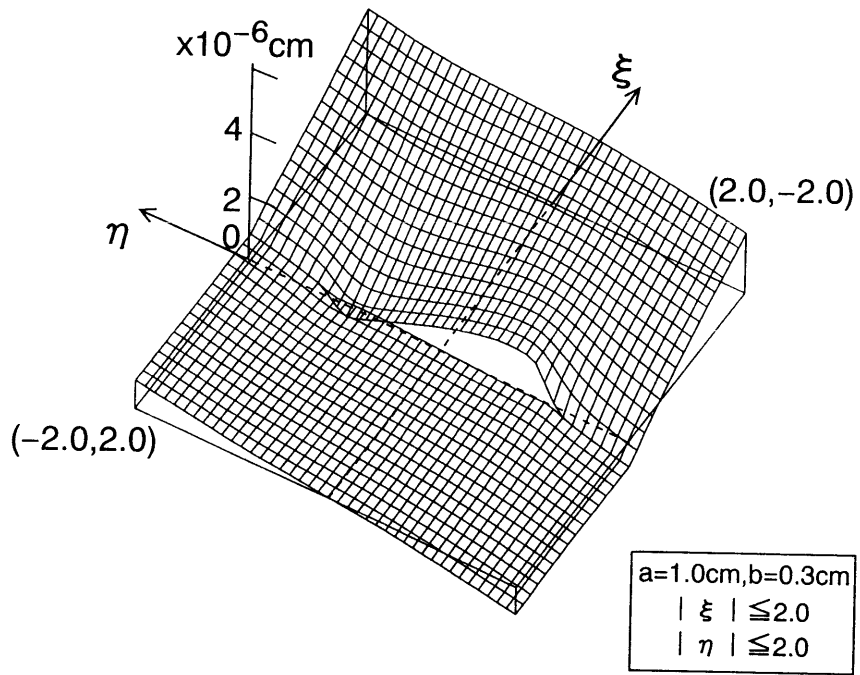


图 5.2 变位  $u$

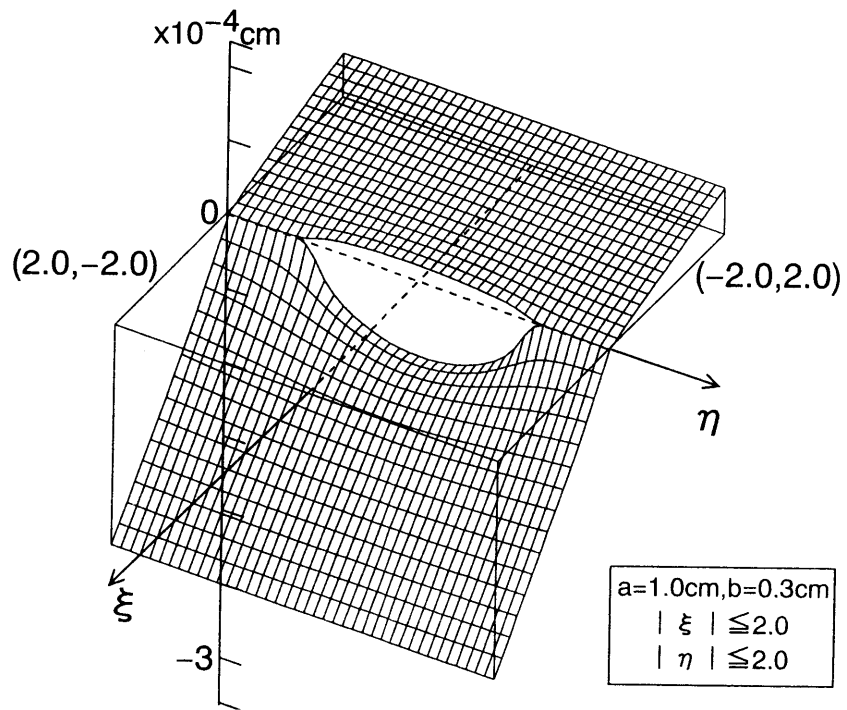


图 5.3 变位  $v$

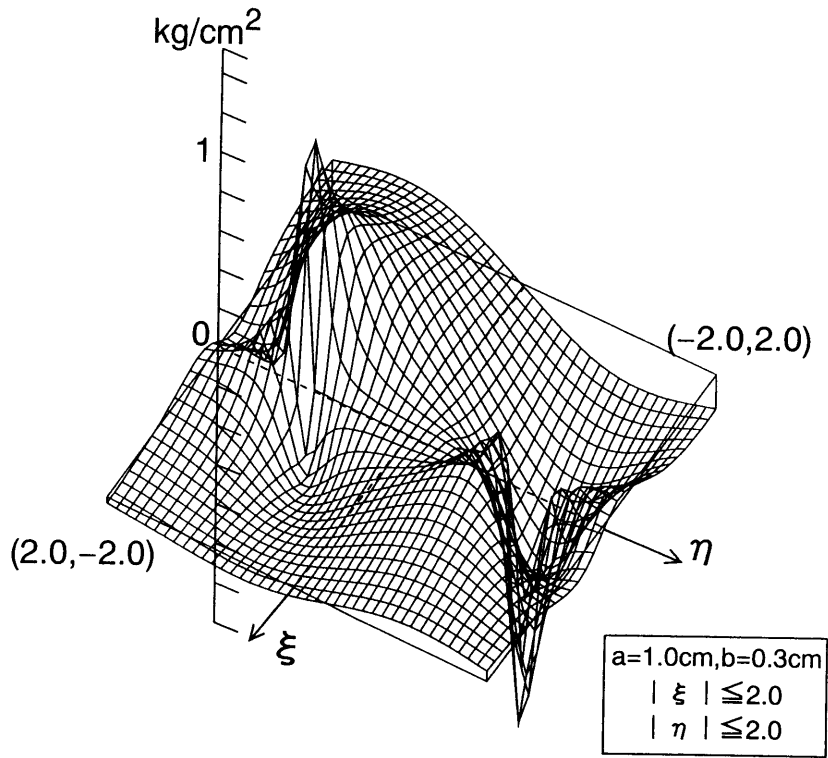


图 5.4 应力  $\sigma_{\xi}$

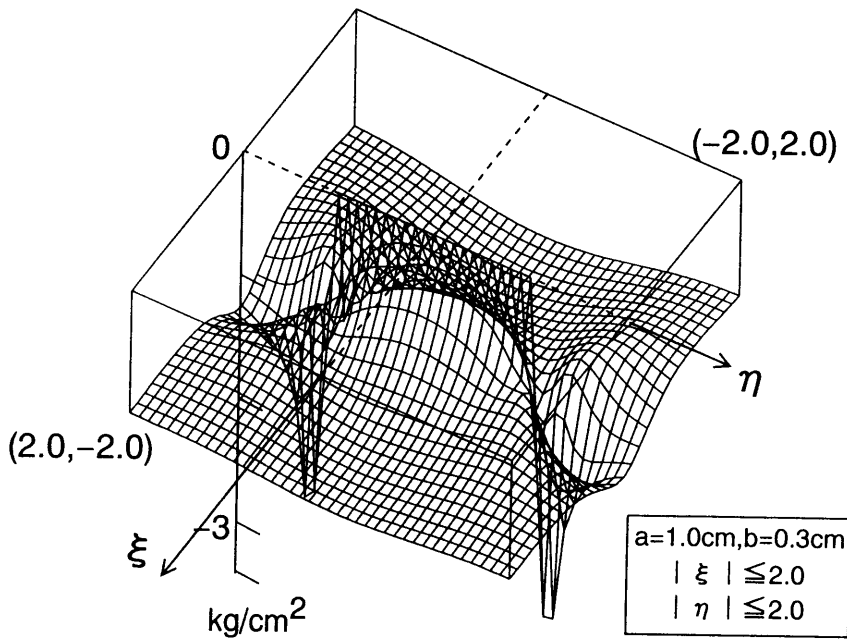


图 5.5 应力  $\tau_{\xi\eta}$

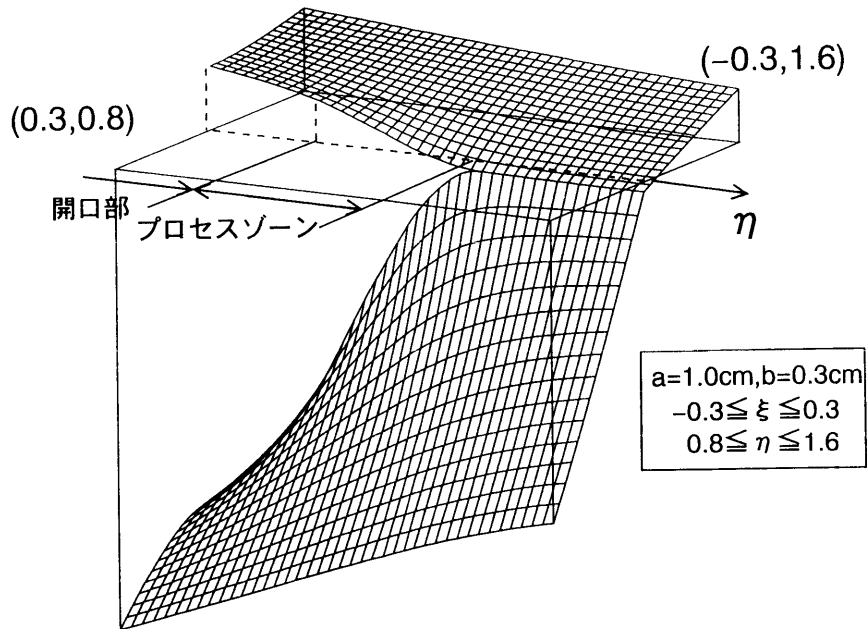


図 5.6 変位  $v$  の拡大図

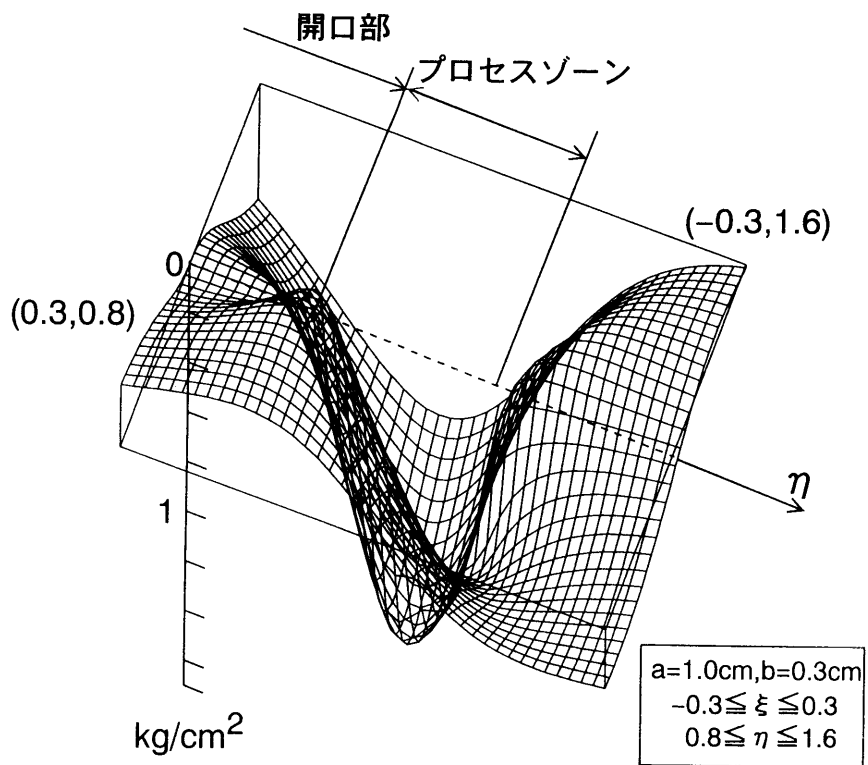


図 5.7 応力  $\sigma_{\xi}$  の拡大図



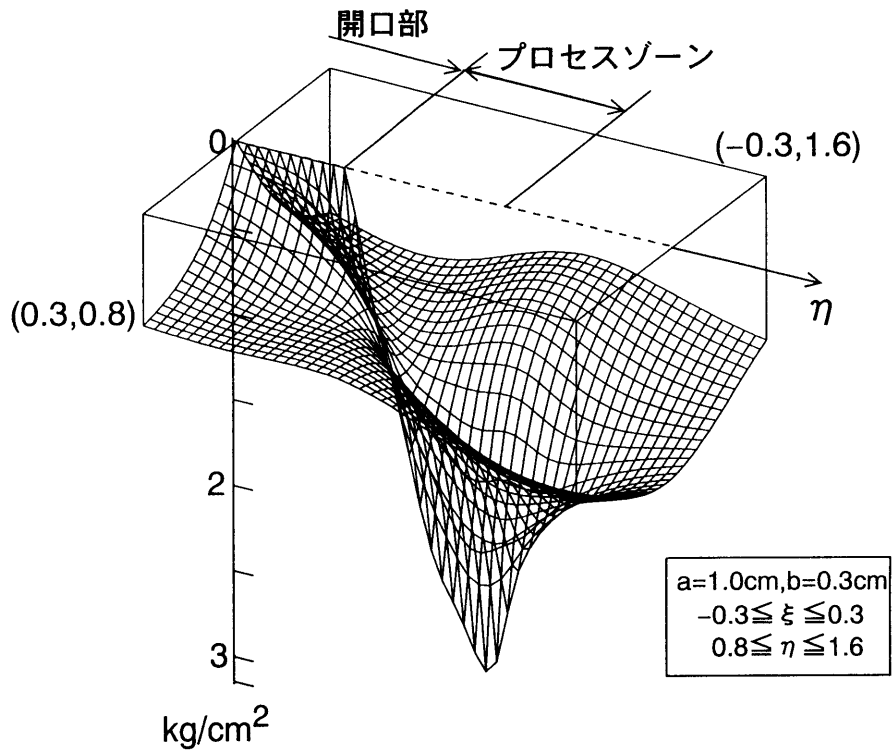


図 5.8 応力  $\tau_{\xi\eta}$  の拡大図

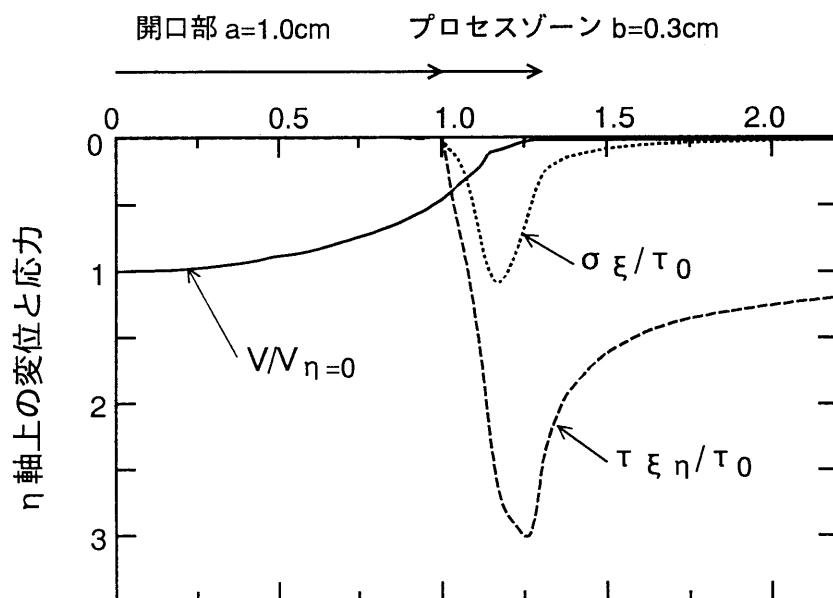


図 5.9  $\eta$  軸上の変位と応力

#### (4) プロセスゾーンの大きさの影響

き裂長さを一定( $a=1$  cm)にしてプロセスゾーンの大きさを $b=0.1, 0.3, 0.5$  cm に変化させた結果を図 5.10~5.14に示す。剛性値は同じとし主軸角度を $\omega_1=\omega_2=0^\circ$  とする。

##### a) 変位 $u$

$\eta$  軸上の変位  $u$  はプロセスゾーンの大きさが大きくなるにつれて最大変位  $u_{max}$  が増加しその形状が滑らかになっている。 $u_{max}$  の絶対値は  $v_{max}$  の20%程度でありその増加率も比較すると小さい。これは、遠点でせん断を受けた応力状態であるから変位  $u$  への影響が小さいためと考えられる。

##### b) 変位 $v$

$\eta$  軸上の変位  $v$  もプロセスゾーンの大きさが大きくなるにつれて最大変位  $v_{max}$  も増加している。

##### c) 応力 $\sigma_\epsilon$

プロセスゾーンの大きさ  $b$  が小さい程ピーク値が大きくかつ尖った形状を示している。 $b$  が0に近づくと  $\sigma_\epsilon$  は限りなく無限大になることは従来の研究から明らかである。 $b=0.1$  と  $b=0.5$  ではその絶対値が50%程度まで減少しているが、 $b=0.1$  の場合でも従来の研究で指摘されている応力の振動もなく有限で滑らかな応力分布形状が得られている。

また、開口部で  $\sigma_\epsilon=0$  が完全に満足されている。

##### d) 応力 $\sigma_n$

$\sigma_\epsilon$  と同様にプロセスゾーンの大きさが小さい程ピーク値が大きく応力の集中度が高く尖った形状を示している。

##### e) 応力 $\tau_{\epsilon n}$

$\sigma_\epsilon$  や  $\sigma_n$  と同様にプロセスゾーンの大きさが小さい程ピーク値が大きく応力の集中度が高く尖った形状を示しているが、き裂遠方に向かって  $\tau_o=1$  に漸近している。開口部では  $\tau_{\epsilon n}=0$  が完全に満足されている。

#### (5) 主軸の傾きによる影響

上記の計算例のデータをそのままにして異方性岩盤の弱軸方向主軸角度  $\omega_2$  だけを0、30、45° に変化させた場合の軸上の変位  $u$ 、 $v$  と応力  $\sigma_\epsilon$ 、 $\sigma_n$ 、 $\tau_{\epsilon n}$  を図 5.10~5.24に示す。

また、同様に主軸角度  $\omega_2$  のみを0~90° に変化させた場合の  $\eta$  軸上の変位  $u$ 、 $v$  の最大値の変化、 $\sigma_\epsilon$ 、 $\sigma_n$  及び  $\tau_{\epsilon n}$  の最大値の変化をそれぞれ図 5.25~5.26に示す。変位は  $\omega_2=0$  の場合の  $v_{max}=v_o$  に対する比率、応力は無限遠点で作用しているせん断応力  $\tau_o=1$  に対する比率として示す。

##### a) $\eta$ 軸上の変位 $u$

主軸の傾きにより左右の形状が非対称となり、傾きの増加にともないその非対称性が強まる。主軸角度  $\omega_2$  が増加するにつれて漸増し、45° で最大(0° のときの1.6倍)となりそれ以降は漸減している。

##### b) $\eta$ 軸上の変位 $v$

主軸の傾きの影響はあまり受けていないが、わずかに左右非対称となっている。主軸角度  $\omega_2$  が増加するにつれて漸増し90° で最大となる。

##### c) $\eta$ 軸上の応力 $\sigma_\epsilon$

プロセスゾーン部での形状は尖っているものの、従来の研究で指摘されている応力の振

動もなく有限で滑らかな応力分布形状が得られている。また、開口部で $\sigma_{\xi}=0$ が完全に満足されている。応力 $\sigma_{\xi}$ は主軸の増加に伴い漸増するが $60^{\circ}$ で最大値( $0^{\circ}$ の時の約2.3倍)となりそれ以降は漸減する。

**d)  $\eta$  軸上の応力  $\sigma_{\eta}$**

応力 $\sigma_{\xi}$ と同様にプロセスゾーン部では応力の振動もなく有限で滑らかな応力分布形状が得られている。また、開口部で $\sigma_{\eta}=0$ が完全に満足されている。応力 $\sigma_{\eta\max}$ は弱軸の主軸角度 $\omega_2$ の増加に伴い漸増し、 $45^{\circ}$ で最大値を示す。せん断を受けているため、 $\eta$  軸上の境界面き裂先端では、一端では引張力他の一端では圧縮力が発生し、せん断と同じオーダーの応力が滑らかに現れている。

**e)  $\eta$  軸上の応力  $\tau_{\xi\eta}$**

プロセスゾーン部における形状は尖っているものの、従来の研究で指摘されている応力の振動もなく有限で滑らかな応力分布形状が得られている。また、開口部で $\tau_{\xi\eta}=0$ が完全に満足されている。応力 $\sigma_{\xi}$ は弱軸の主軸角度の増加に伴い漸増し、 $60^{\circ}$ で最大値を示しそれ以降は漸減する。この傾向は中川等の既往の研究結果<sup>5)</sup>と一致している。

**(6) 剛性値の違いによる影響**

左右の剛性値の比 $B_{x1}/B_{x2}$ を3、5、10に変化( $B_{x2}$ を増加)させた場合の弱軸主軸角度 $\omega_2=0、30^{\circ}$ の計算結果を図 5.27~5.38に示す。

**a) 変位  $u$**

$B_{x1}/B_{x2}=10$ の方が変位 $u$ が大きくなり、主軸の傾きによりその影響を受けて非対称形になってくる。

**b) 変位  $v$**

左右の比 $B_{x1}/B_{x2}$ が近づくとつれて変位量は小さくなるが、主軸の影響による形状の変化(対称形から非対称形になる)はほとんどみられない。

**c) 応力  $\sigma_{\xi}$**

プロセスゾーンにおける応力分布は滑らかな曲線となっている。左右の比 $B_{x1}/B_{x2}$ が10と3の場合では約2倍の差があり、物性値の差が大きくなるにつれて応力の集中も大きくなるといえる。

**d) 応力  $\sigma_{\eta}$**

応力 $\sigma_{\xi}$ と同じようなことが考察できるが、剛性値の差による影響は少ない。

**e)  $\eta$  軸上の応力  $\tau_{\xi\eta}$**

左右の剛性値の比 $B_{x1}/B_{x2}$ が変化してもプロセスゾーン部における $\tau_{\xi\eta\max}/\tau_0$ の変化は少ないといえる。主軸が傾くと左右対称性がくずれ非対称となるがその絶対値の変化は小さい。

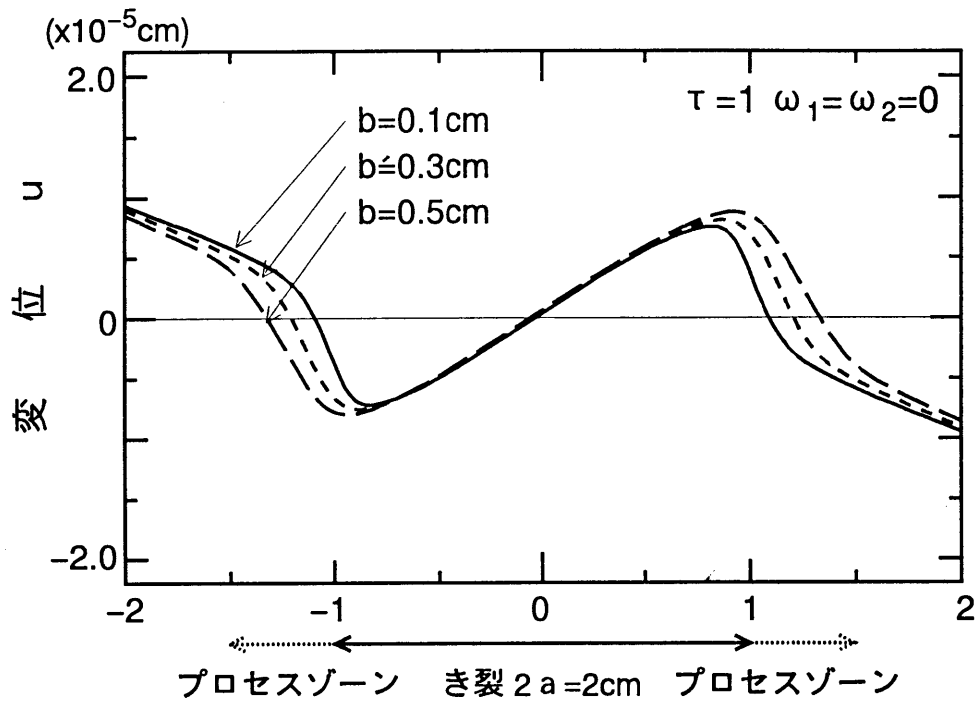


図 5.10 変位  $u$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

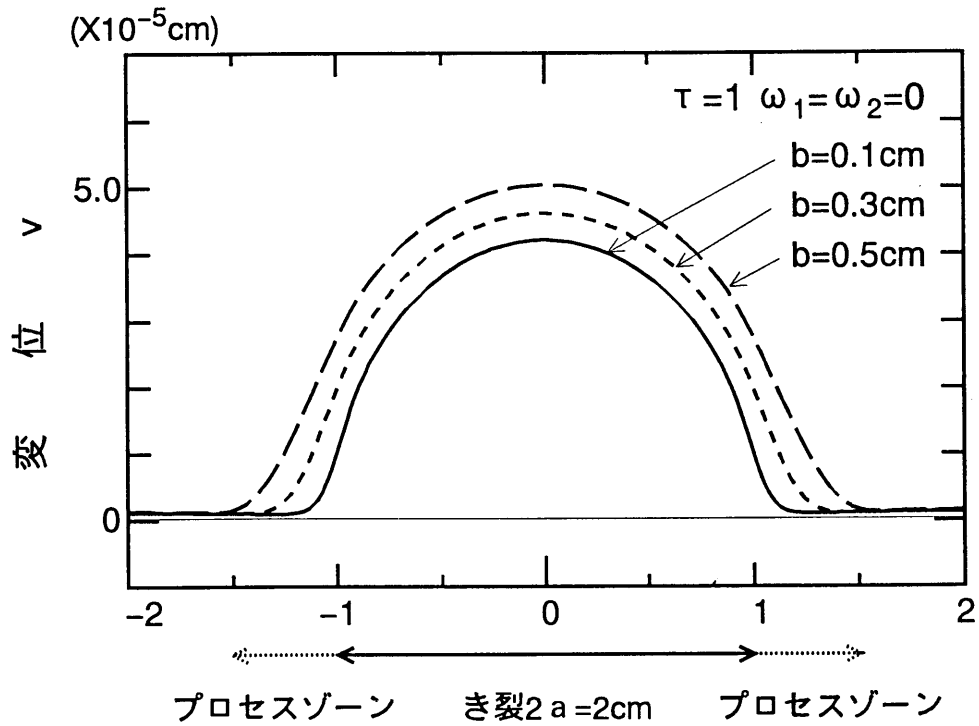


図 5.11 変位  $v$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

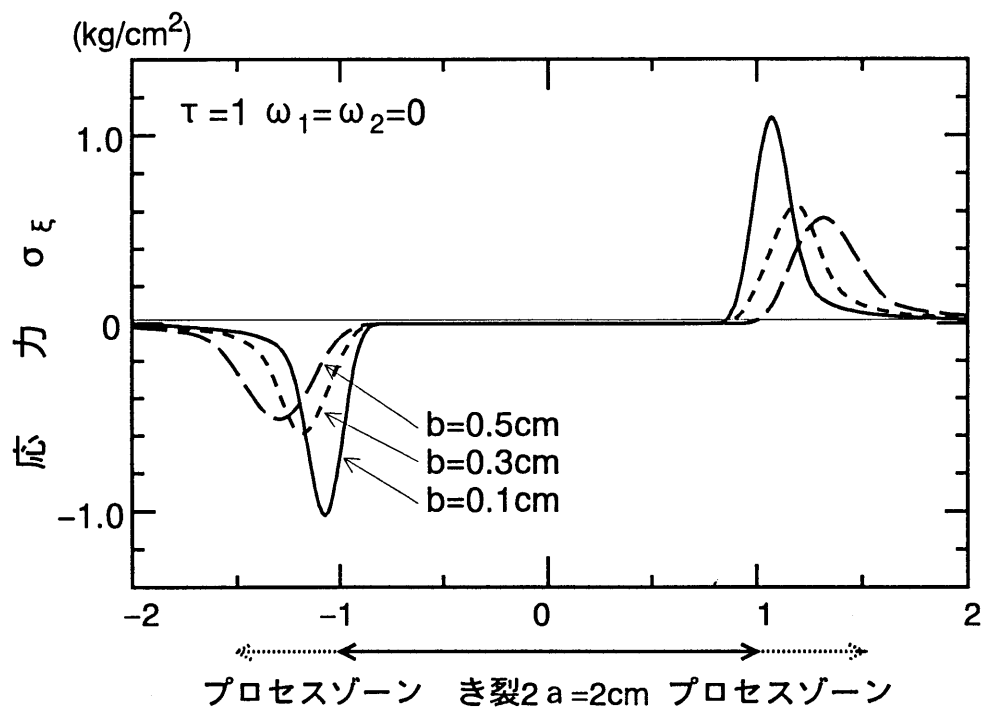


図 5.12 応力  $\sigma_\epsilon$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

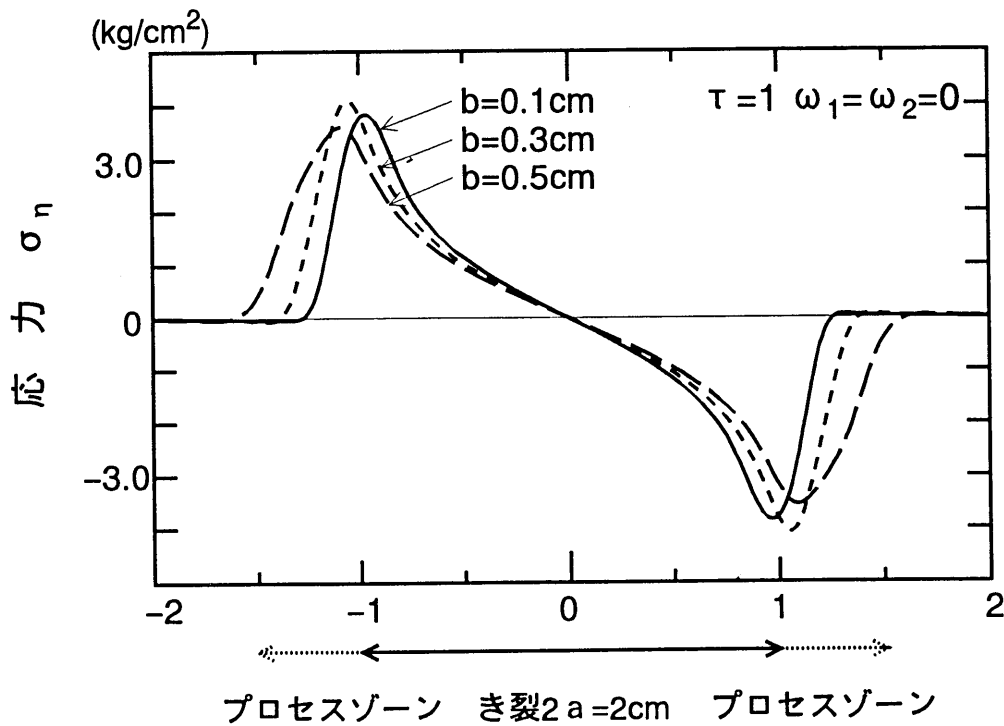


図 5.13 応力  $\sigma_n$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

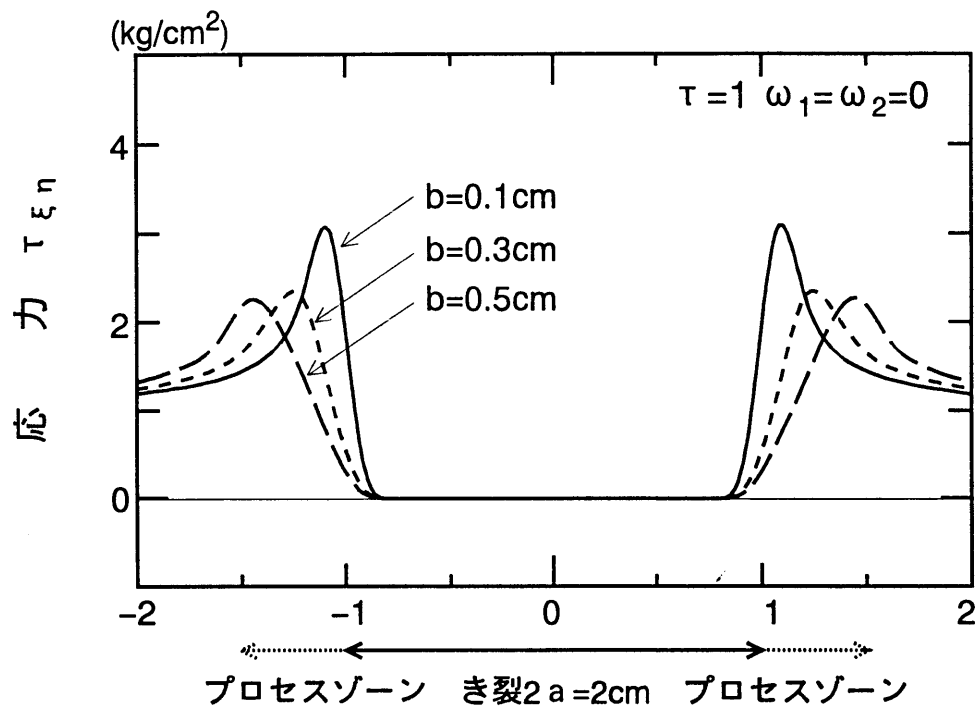


図 5.14 応力  $\tau_{\epsilon n}$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

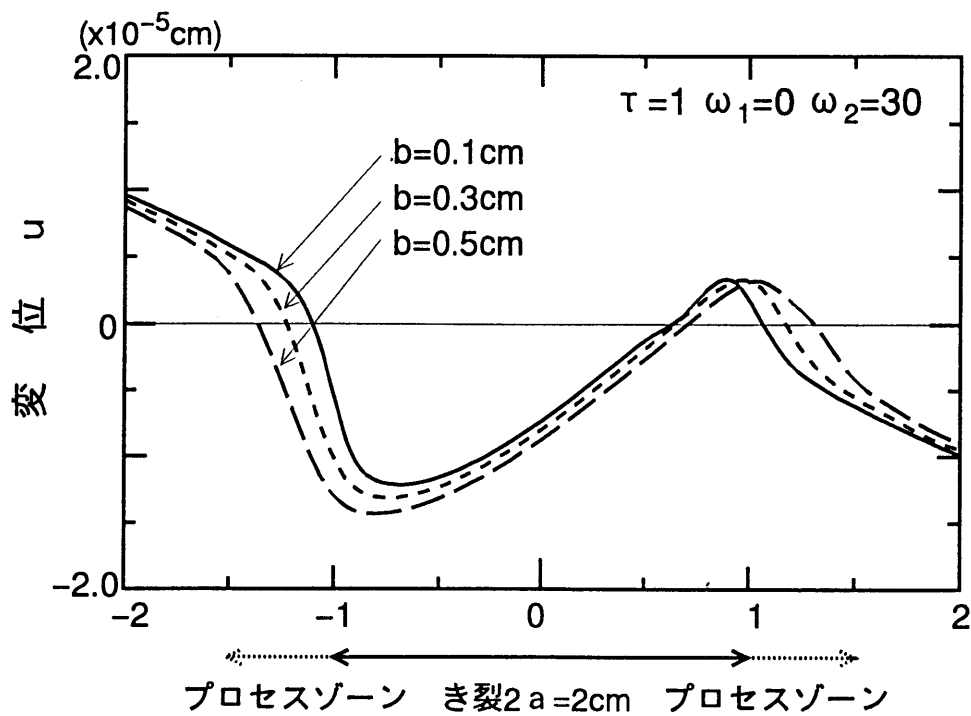


図 5.15 変位  $u$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )

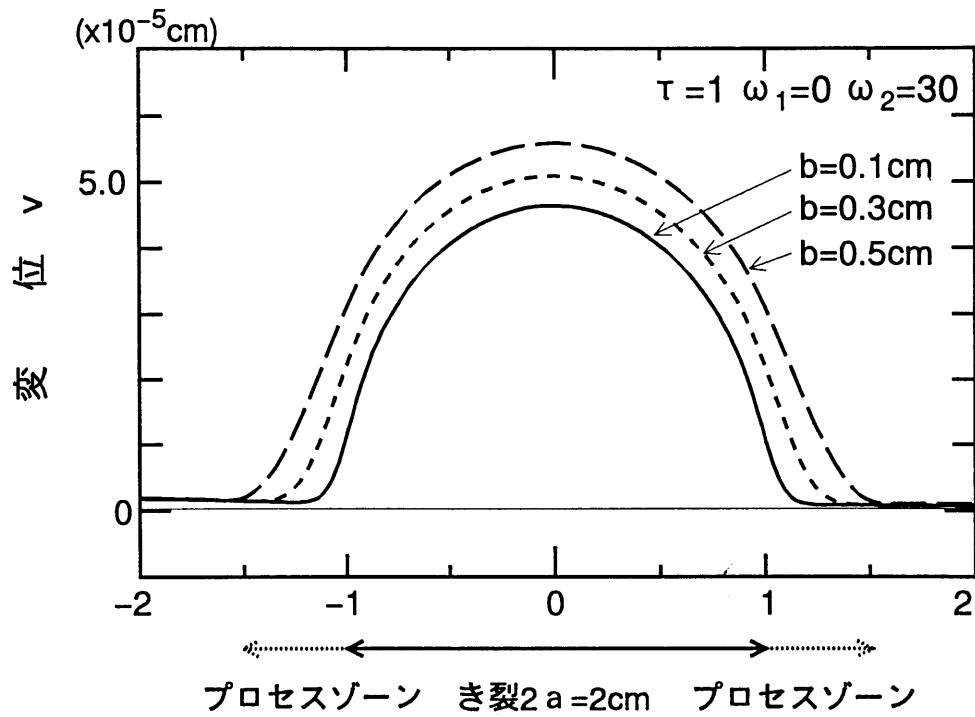


図 5.16 変位  $v$  ( $\omega_1=0, \omega_2=30$ )

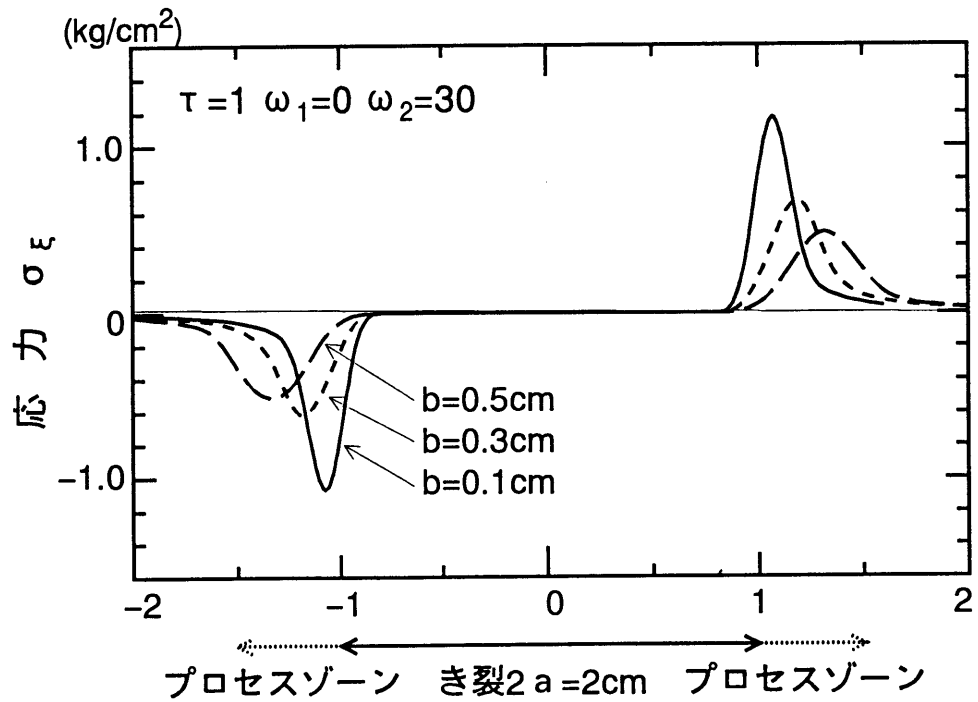


図 5.17 応力  $\sigma_\epsilon$  ( $\omega_1=0, \omega_2=30$ )

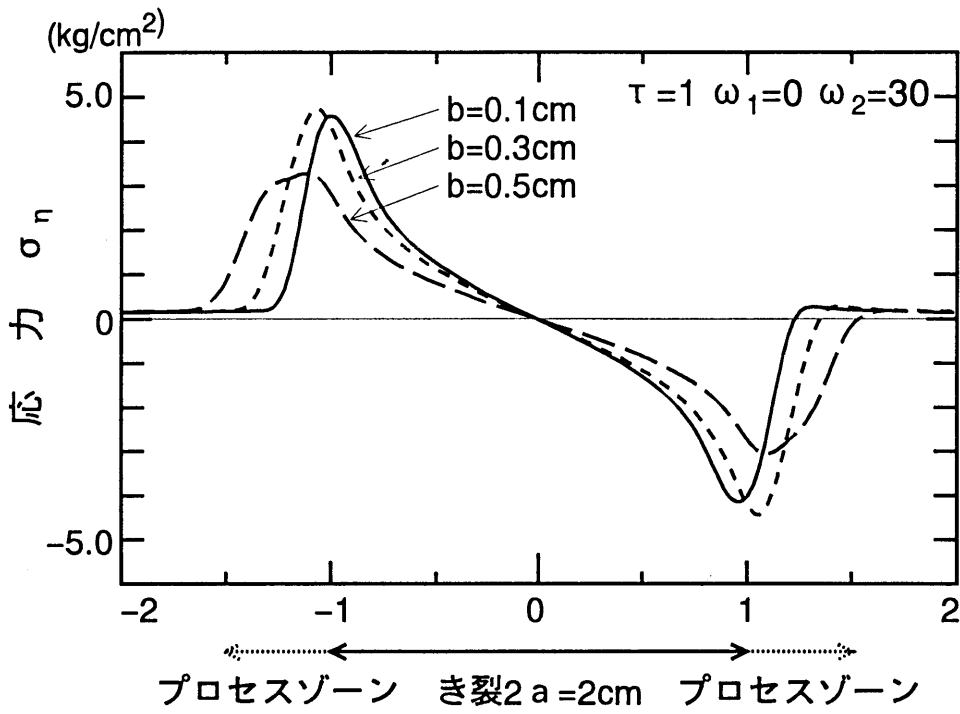


図 5.18 応力  $\sigma_n$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )

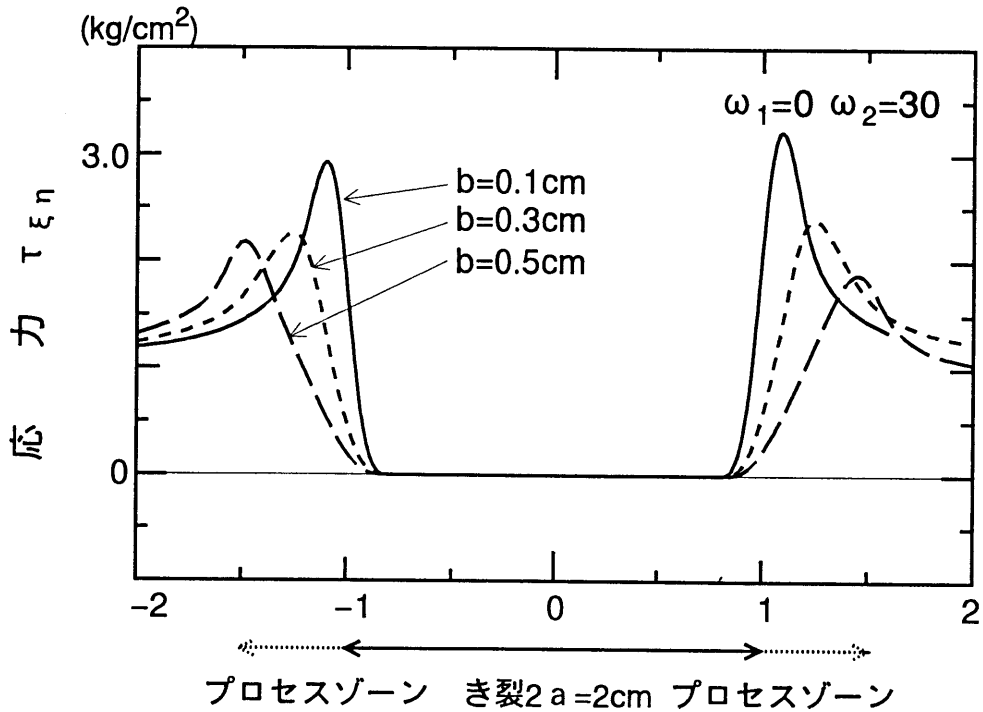


図 5.19 応力  $\tau_{\epsilon_n}$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )



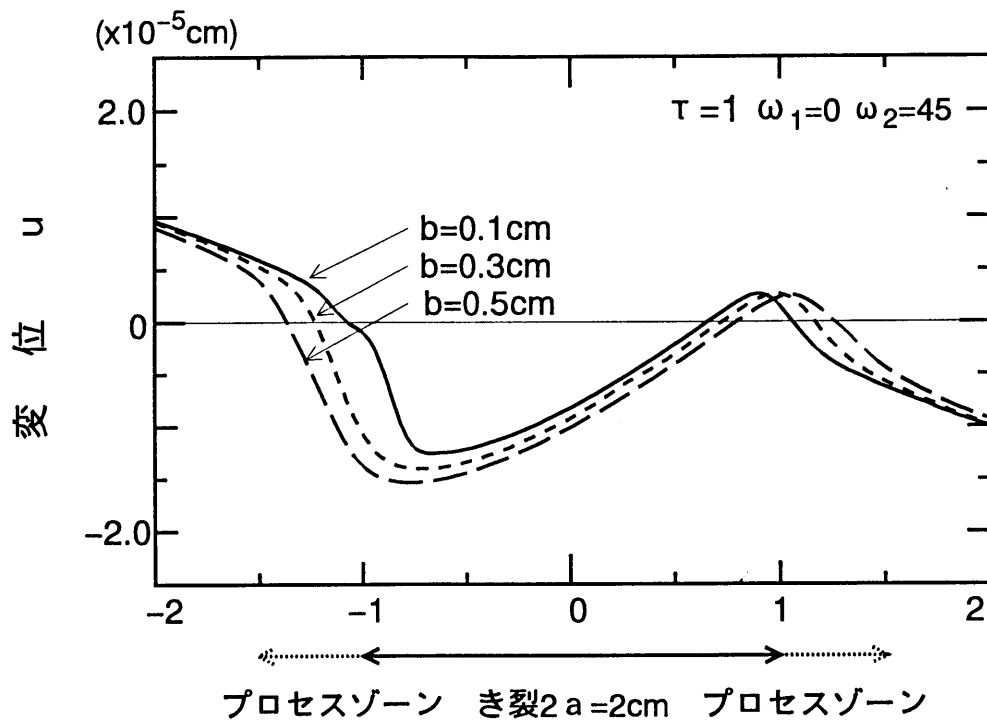


図 5.20 変位  $u$  ( $\omega_1=0, \omega_2=45$ )

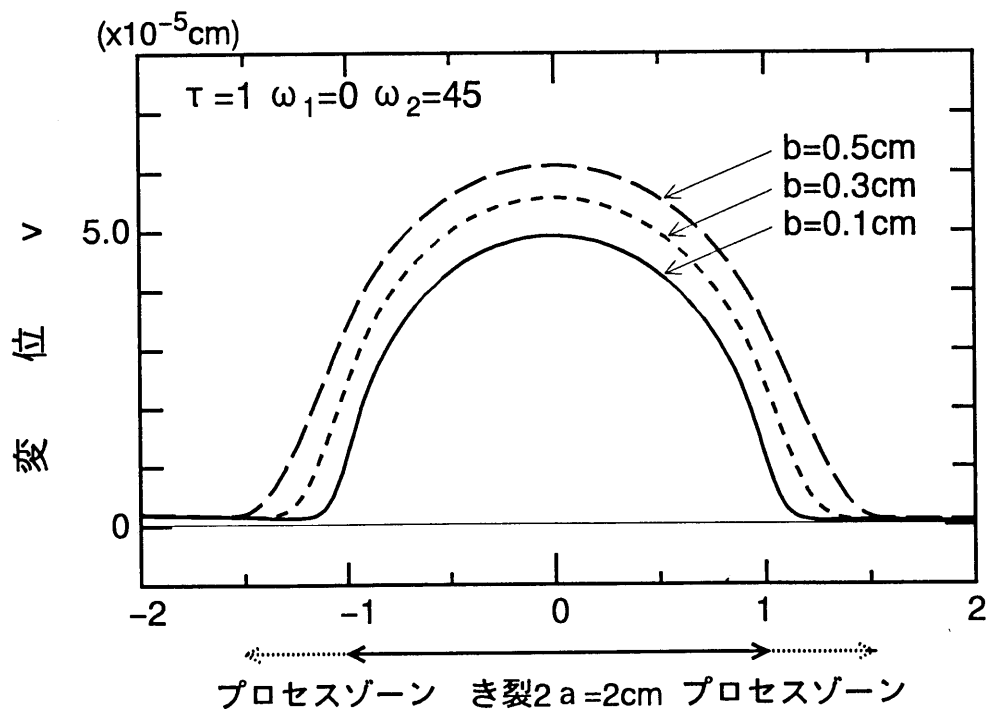


図 5.21 変位  $v$  ( $\omega_1=0, \omega_2=45$ )

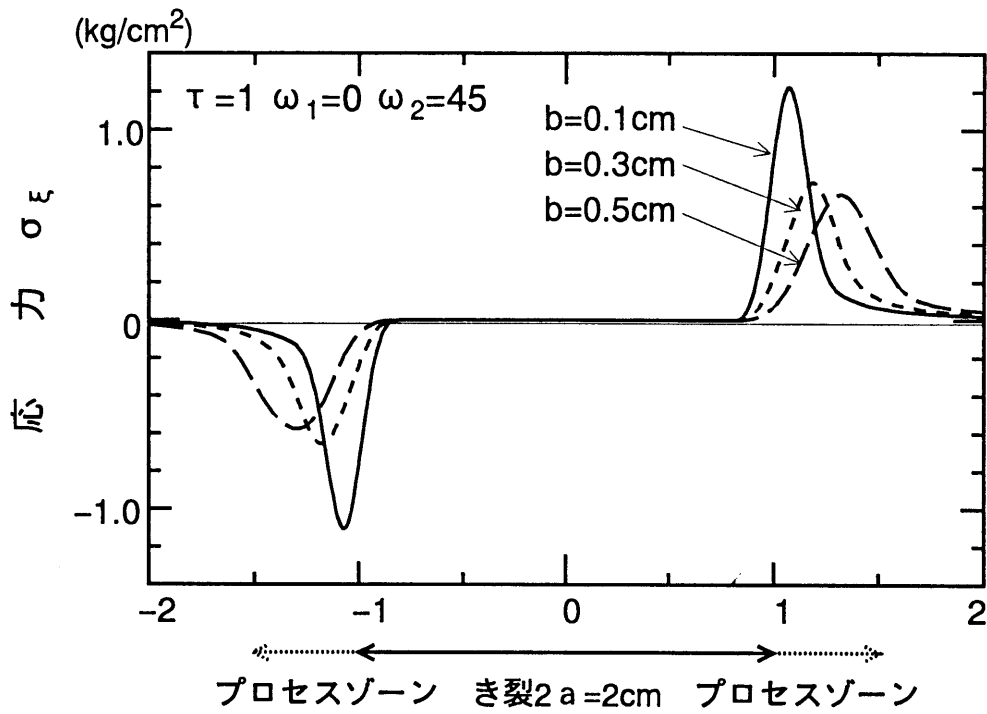


図 5.22 応力  $\sigma_\epsilon$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 45$ )

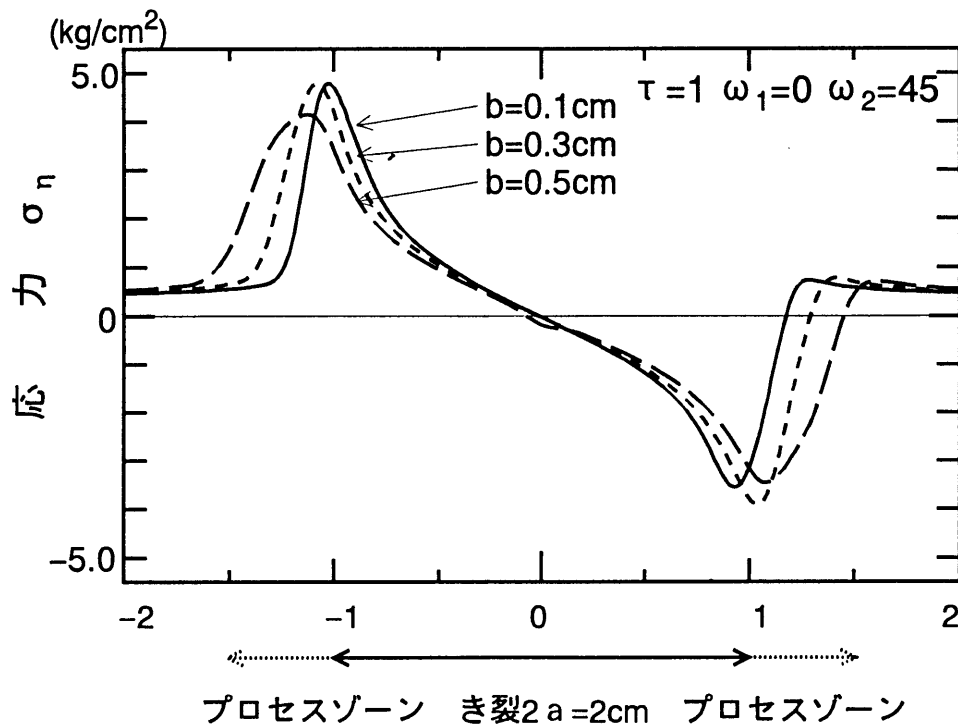


図 5.23 応力  $\sigma_n$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 45$ )

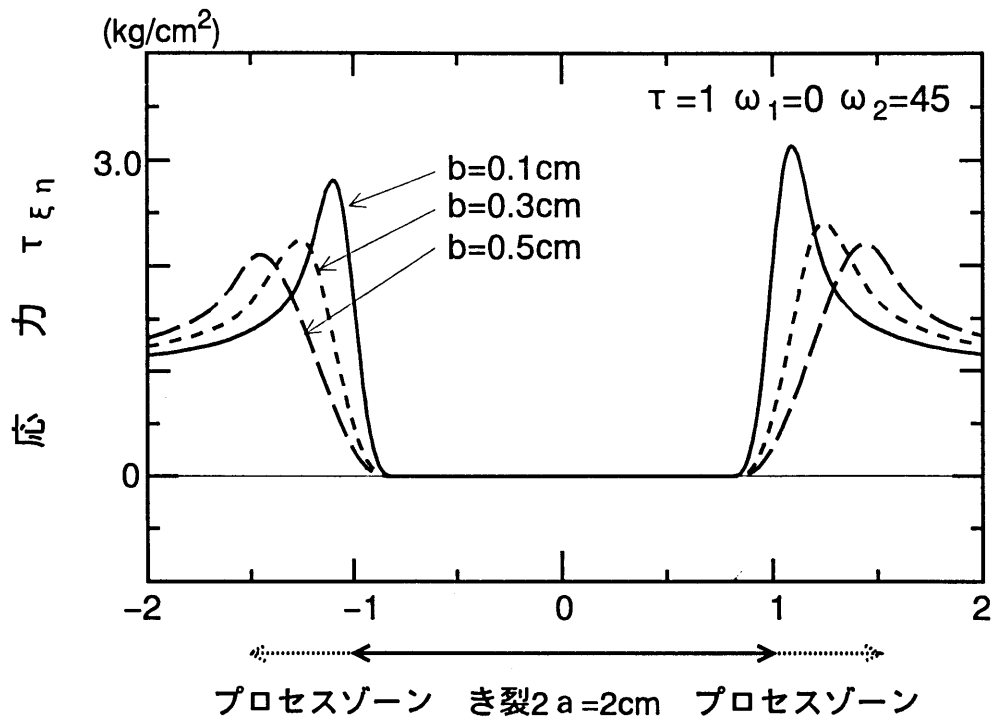


図 5.24 応力  $\tau_{\varepsilon_n}$  ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 45$ )

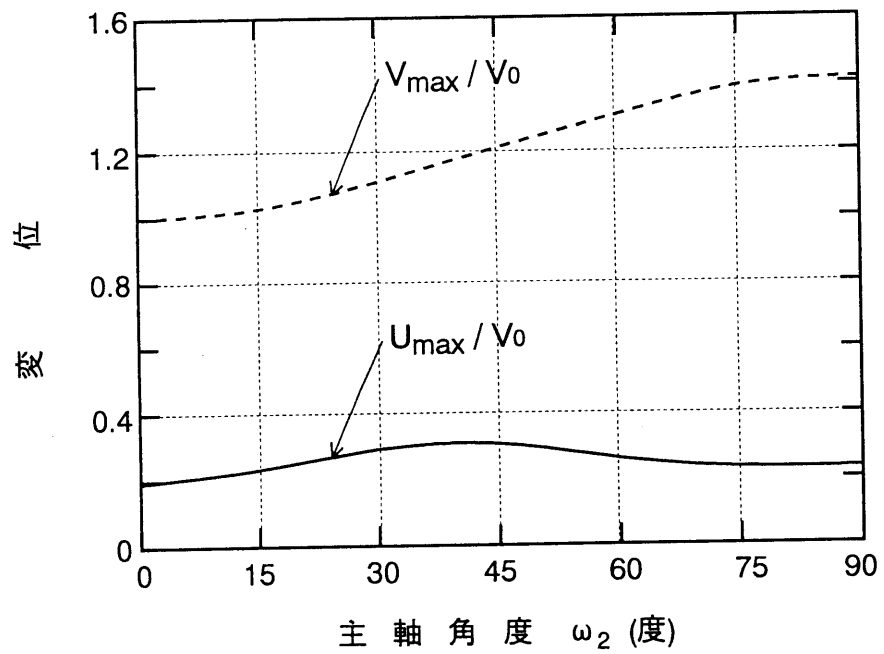


図 5.25 主軸角度  $\omega_2$  と変位

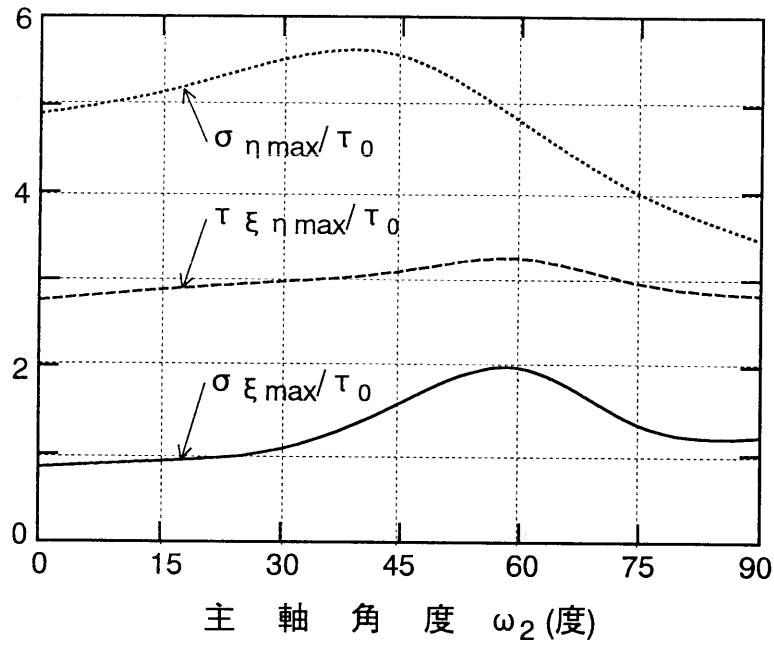


図 5.26 主軸角度  $\omega_2$  と応力

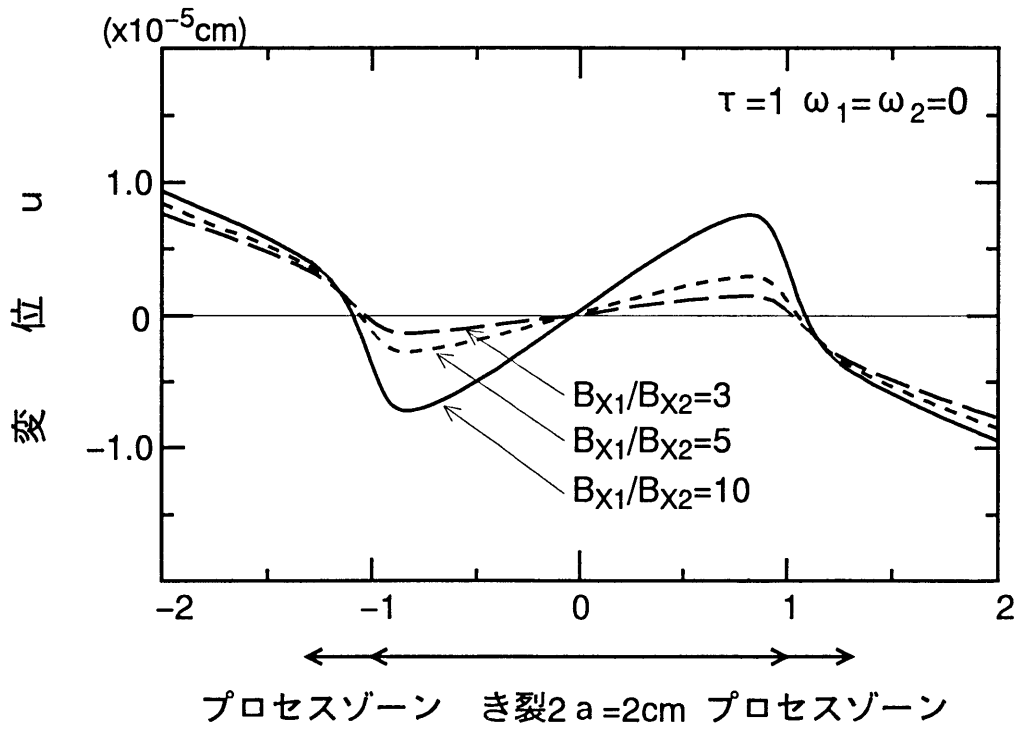


図 5.27 変位  $u$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1=0, \omega_2=0$ )

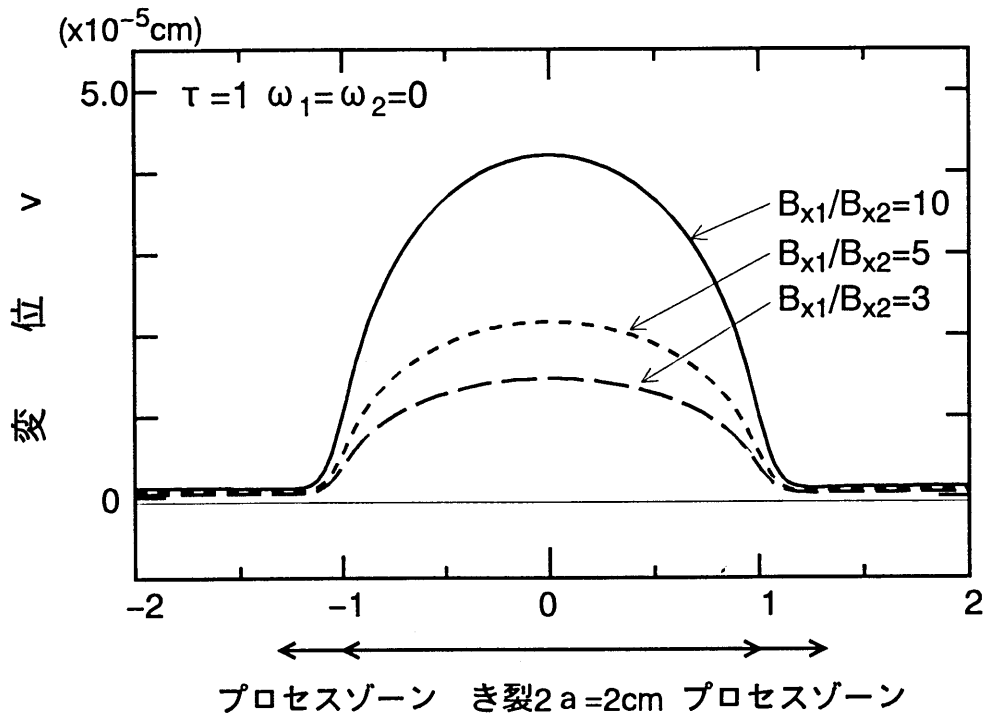


図 5.28 変位  $v$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ )

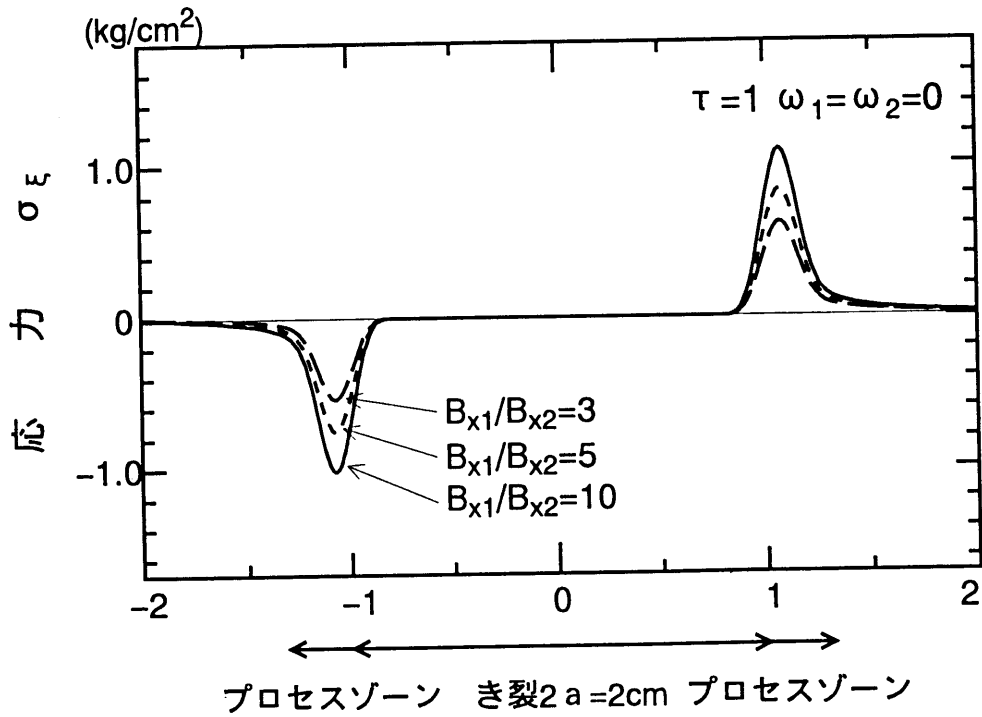


図 5.29 応力  $\sigma_\epsilon$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ )

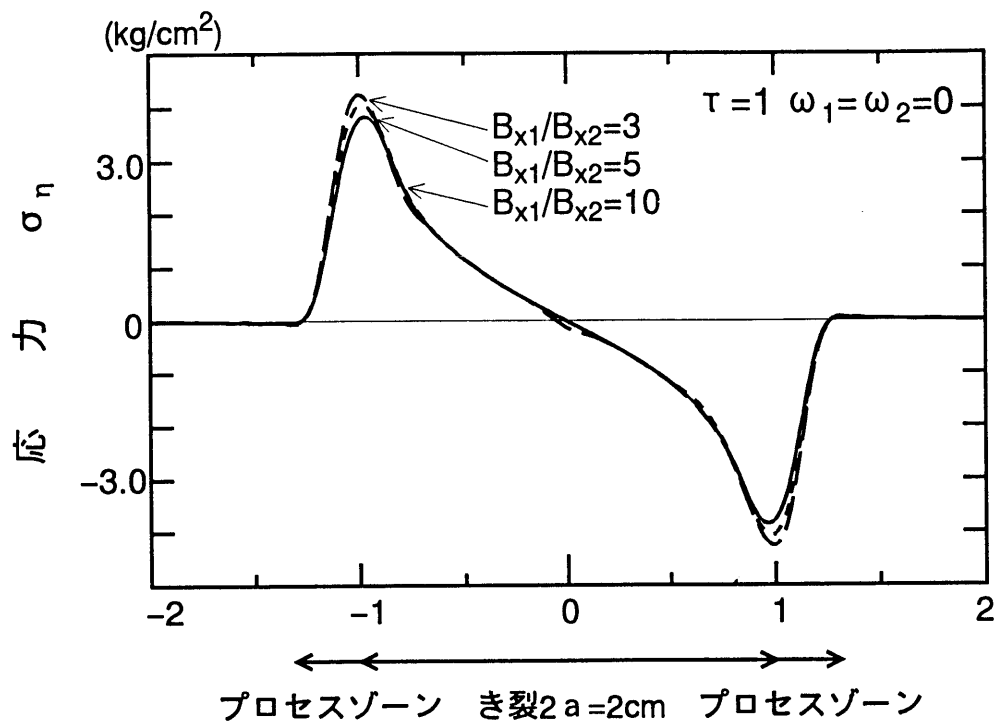


図 5.30 応力  $\sigma_n$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1=0, \omega_2=0$ )

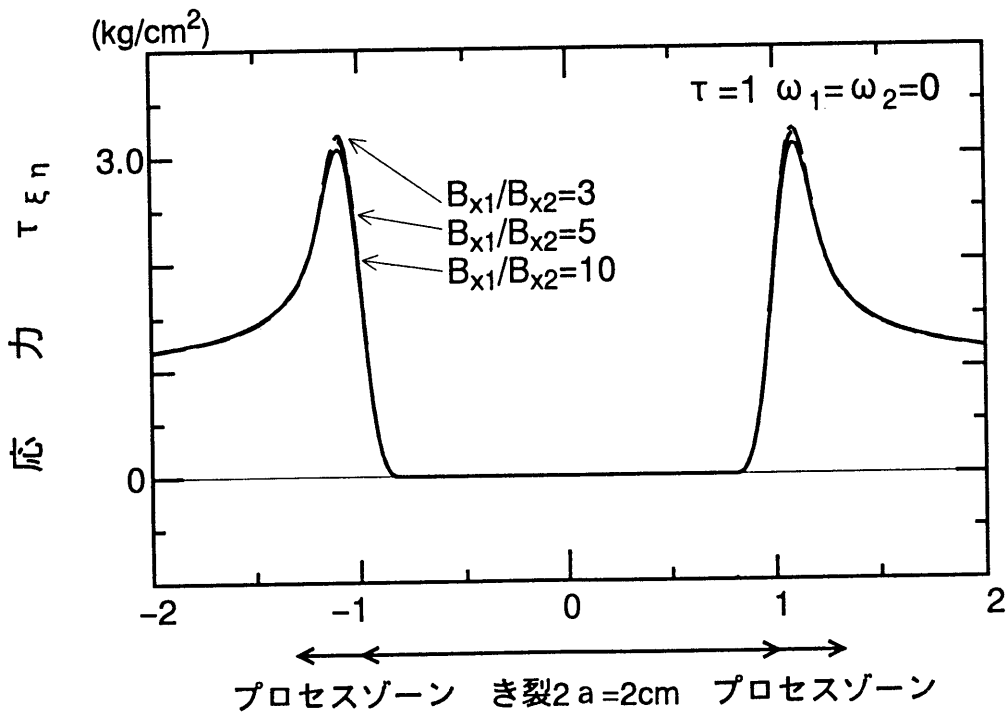


図 5.31 応力  $\tau_{\epsilon_n}$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1=0, \omega_2=0$ )

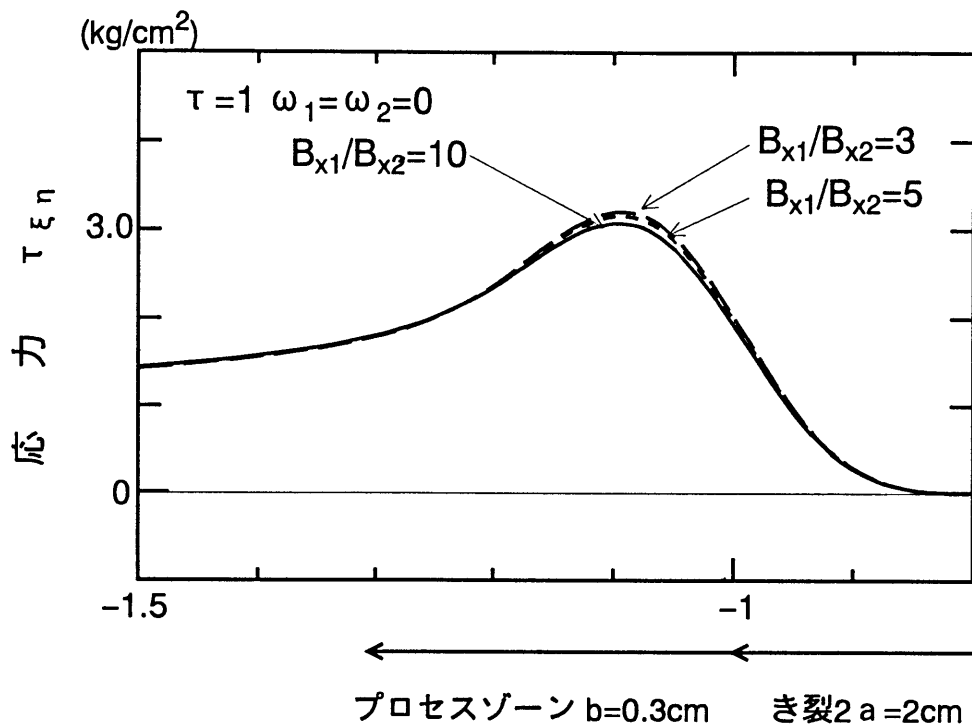


図 5.32 応力  $\tau_{\epsilon_n}$  に対する剛性値の影響 拡大図 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ )

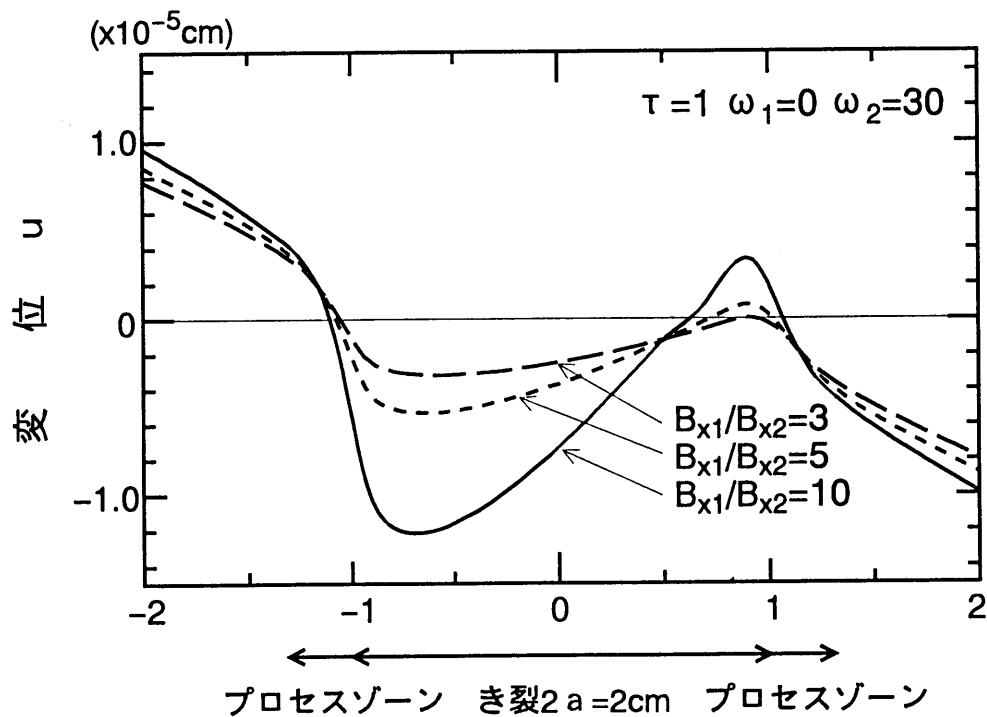


図 5.33 変位  $u$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )

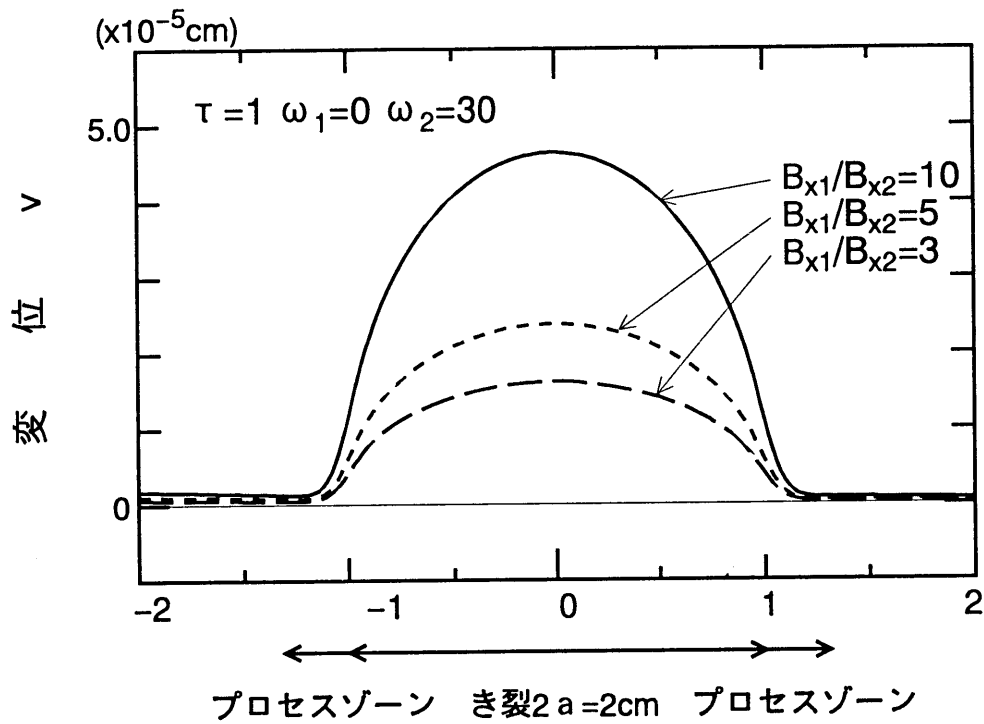


図 5.34 変位  $v$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )

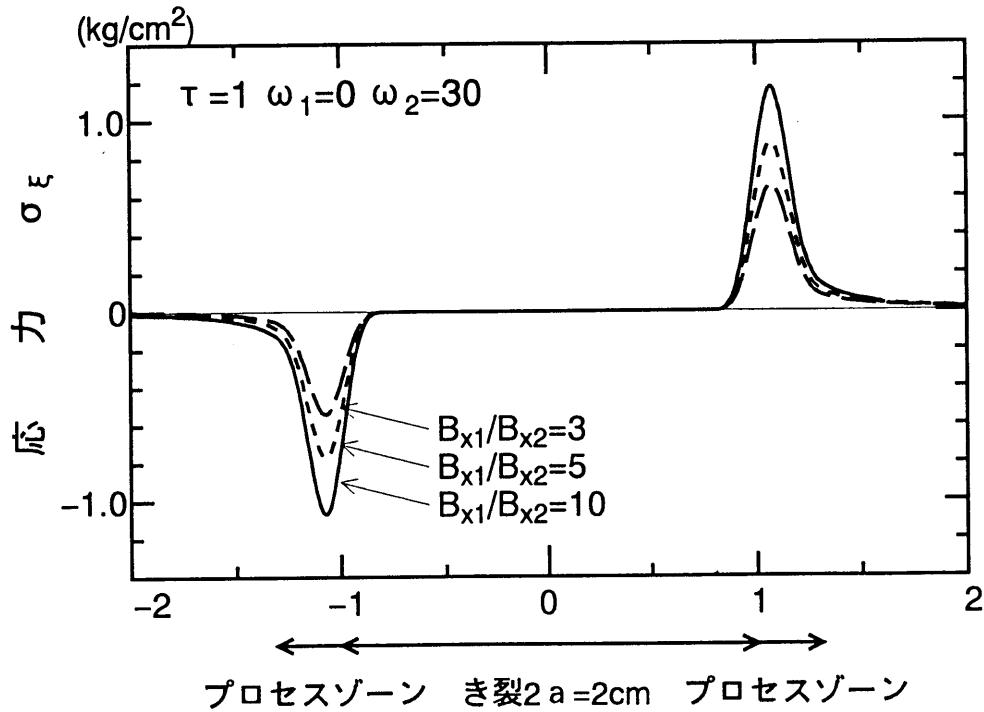


図 5.35 応力  $\sigma_\epsilon$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1 = 0, \omega_2 = 30$ )



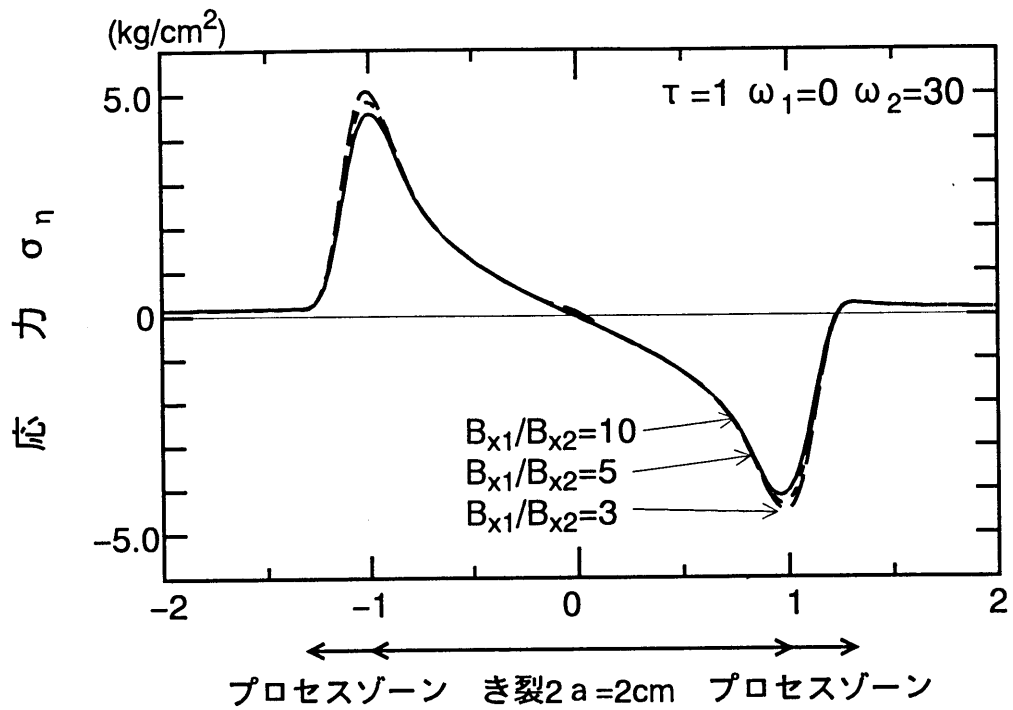


図 5.36 応力  $\sigma_n$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1=0, \omega_2=30$ )

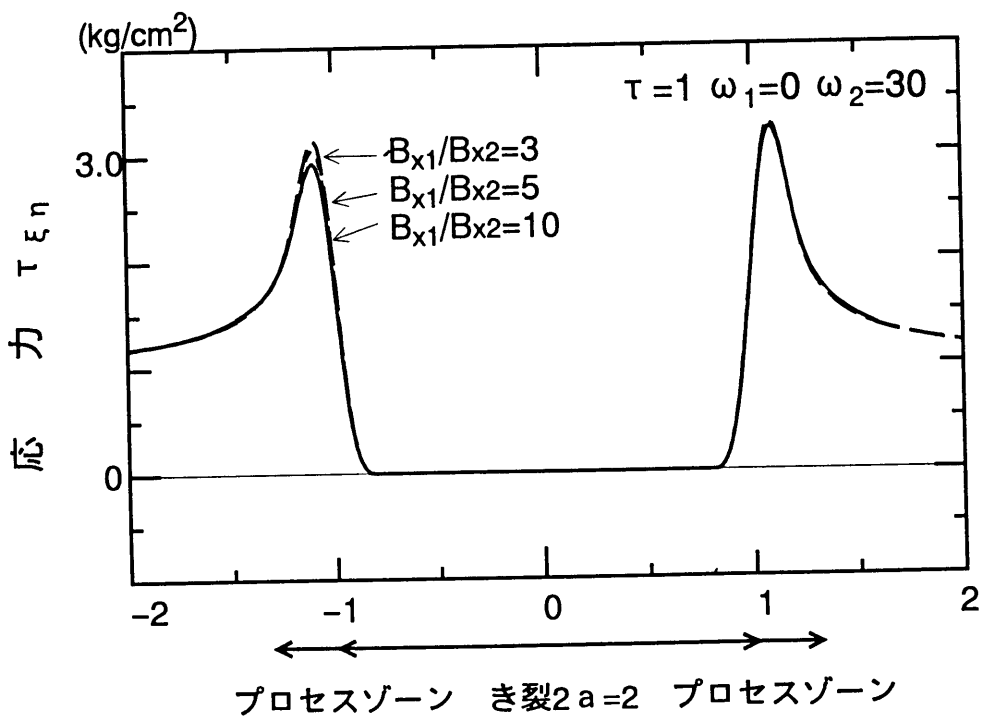


図 5.37 応力  $\tau_{\epsilon_n}$  に対する剛性値の影響 ( $\omega_1=0, \omega_2=30$ )

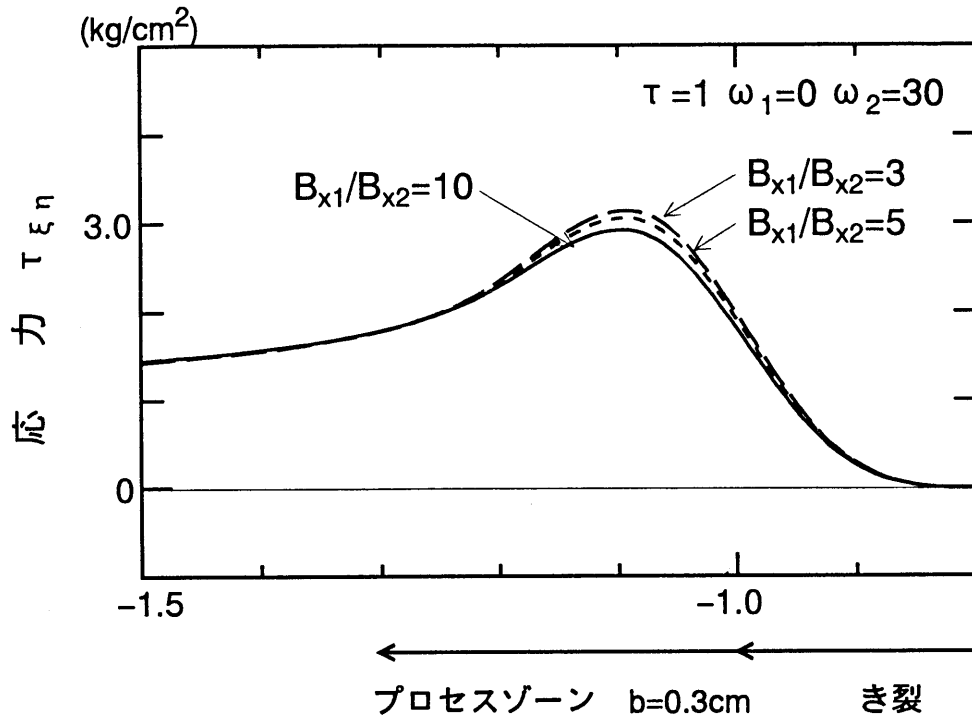


図 5.38 応力  $\tau_{\epsilon n}$  に対する剛性値の影響 拡大図 ( $\omega_1=0, \omega_2=30$ )

## 5.4 地層中の異方性岩盤境界面のき裂解析

### (1) 解析モデルと解析例

地下岩盤内の2層の異方性岩盤境界に有限な大きさの亀裂(断層などによる不連続面やシーム)があり、これに初期地圧応力状態や地下空洞施工、上部斜面掘削などによる外的要因により引張りやせん断力が作用している場合を想定する。

図 5.1 の右半面を異方性の岩盤とみなし弾性係数  $B_{x2}=40,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_{y2}=400,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu_{y2}=0.2$ 、ねじり定数  $\kappa=0.5$  とし、左半面はほぼ等方性の岩盤とし  $B_{x1}=90,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_{y1}=100,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu_{y1}=0.17$ 、ねじり定数  $\kappa=0.90$  とする。き裂長さ  $a=1 \text{ cm}$  プロセスゾーン  $b=0.3 \text{ cm}$  とする。左右の主軸角度を  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  と作用する応力状態を組み合わせることで表 5.2 に示す4例の解析をおこない、き裂周辺の応力集中の特性を把握する。

### (2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数

#### a) 引張が作用する場合

一般解として求められている表 4.1 の中より引張、 $\epsilon$  軸曲げ、せん断を受ける場合の解を主体として選び、その曲面を重ね合わせるにより引張を表現できる解を求めることを試みる。

#### b) せん断応力が作用する場合

一般解として求められている表 4.1 の中より引張、 $\epsilon$  軸曲げ、せん断を主体とする曲

面を重ね合わせるによりせん断を受ける解を求めることができる。

未定係数の決定法は5.2で示した4方法により検討した結果、いずれの場合も重ね合わせの係数は「開口変位の曲率自乗和を最小とする方法」が最も平滑化としては望ましいものとなった。表5.3、5.4に採用した解析解の組み合わせとその重ね合わせの係数をそれぞれ示す。

表 5.2 解析例

		ケース-1	ケース-2	ケース-3	ケース-4
曲げ剛性 (kg/cm <sup>2</sup> )	B <sub>x1</sub>	90000	90000	90000	90000
	B <sub>y1</sub>	100000	100000	100000	100000
	B <sub>x2</sub>	40000	40000	40000	40000
	B <sub>y2</sub>	400000	400000	400000	400000
ポアソン比	v <sub>1</sub>	0.17	0.17	0.17	0.17
	v <sub>2</sub>	0.2	0.2	0.2	0.2
ねじり 定数	K <sub>1</sub>	0.9	0.9	0.9	0.9
	K <sub>2</sub>	0.5	0.5	0.5	0.5
主軸角度 (度)	ω <sub>1</sub>	0	0	45	45
	ω <sub>2</sub>	0	0	45	45
応力状態 (kg/cm <sup>2</sup> )	σ <sub>0</sub>	σ <sub>0</sub> =1	σ <sub>0</sub> =0	σ <sub>0</sub> =1	σ <sub>0</sub> =0
	τ <sub>0</sub>	τ <sub>0</sub> =0	τ <sub>0</sub> =1	τ <sub>0</sub> =0	τ <sub>0</sub> =1

bi-elastic constant α=0.0255933

表 5.3 採用した解析解の組み合わせと係数λ<sub>j</sub>(引張を受ける場合)

採用 解析 番号	応力状態	材料の主軸角度 (岩盤 ω <sub>1</sub> 岩盤 ω <sub>2</sub> )	
		ω <sub>1</sub> =0 ω <sub>2</sub> =0	ω <sub>1</sub> =45 ω <sub>2</sub> =45
2	ξ軸曲げ	-0.02239035	-0.00644719
8	〃	0.00040882	0.00025669
1 2	〃	-0.02536294	-0.00784057
2 2	〃	-0.00014407	-0.00029434
4	せん断	-0.01436136	-1.49096162
6	〃	-0.00004388	-0.00235493
1 0	〃	-0.89670101	0.81637002
3	引張	-1.65642982	0.54326607
9	〃	2.02796229	-0.62308175
1 5	〃	0.96552834	-0.16880914

表 5.4 採用した解析解の組み合わせと係数 $\lambda_j$ (せん断を受ける場合)

採用 解析 番号	応力状態	材料の主軸角度 (岩盤 $\omega_1$ 岩盤 $\omega_2$ )	
		$\omega_1=0$ $\omega_2=0$	$\omega_1=45$ $\omega_2=45$
1	$\xi$ 軸曲げ	0.00080187	0.00061657
7	"	0.00000125	-0.00011055
3	引張	-0.49536665	0.86526634
9	"	0.01454489	-2.17759797
4	せん断	-1.05025420	0.75407417
6	"	-0.00307990	-0.00843748
10	"	1.14158845	-3.66898505
16	"	0.00182625	-3.47938408

### (3) 解析結果

引張を受けるケース1、3の解析結果のうち変位、応力について表5.5に示す。また、ケース3の変位図と応力図をき裂を中心とした長方形領域の2次元図として図5.39~5.42に示す。変位についてはケース1とケース3とを比較すると弱軸が $\eta$ 軸に対して傾くと $\xi$ 軸方向には強軸の剛性が影響してくるため、ケース3の $u_{max}$ の方がやや小さくなる。逆に $\eta$ 軸方向変位 $v$ は大きくなっていく。

表 5.5 引張の場合の結果(ケース 1、3)

	材料の主軸角度 (岩盤 $\omega_1$ 岩盤 $\omega_2$ )	
	ケース 1 $\omega_1=0$ $\omega_2=0$	ケース 3 $\omega_1=45$ $\omega_2=45$
$u_{max}(cm)$ $\eta$ 軸上	$2.438 \times 10^{-5}$	$2.361 \times 10^{-5}$
$v$ (cm) $\eta=2.0$	$1.260 \times 10^{-5}$	$1.297 \times 10^{-5}$
$\sigma_{\xi max}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	3.114	2.845
$\sigma_{\eta max}$ "	2.682	2.575
$\tau_{\xi\eta max}$ "	0.520	0.299

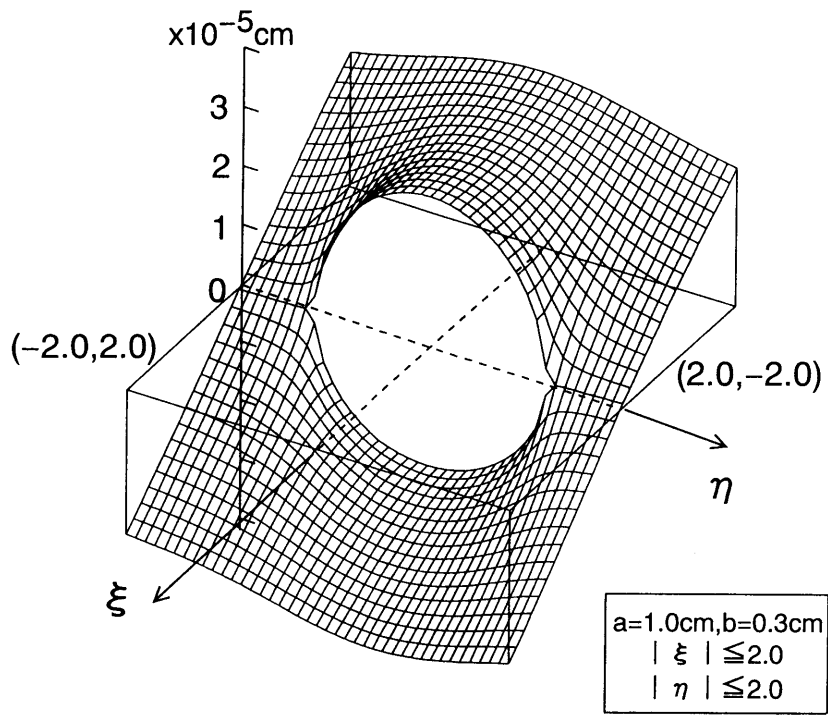


图 5.39 变位  $u$  (引張,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

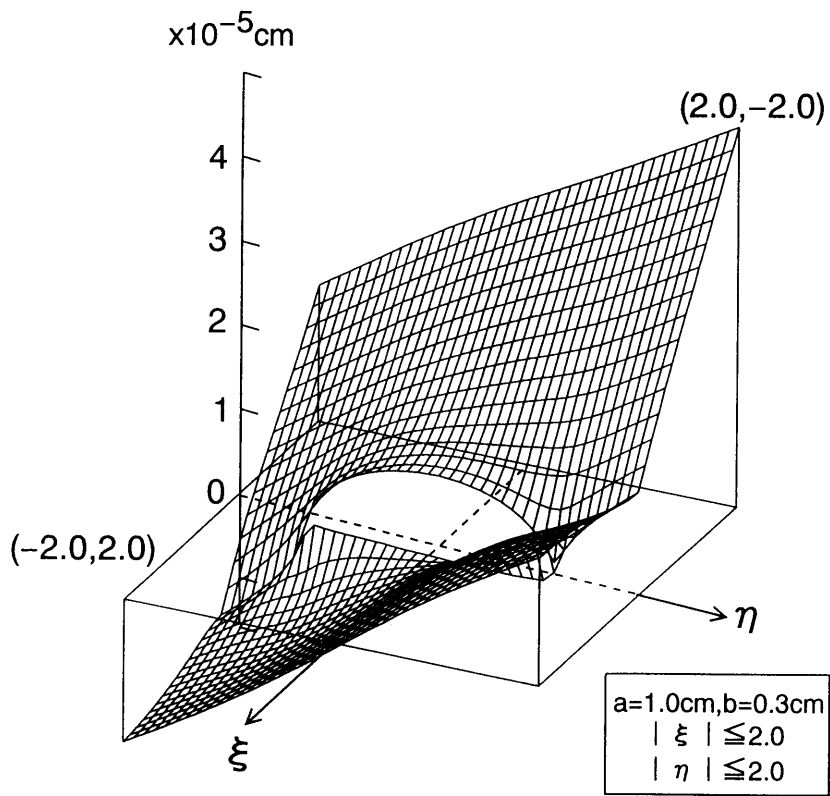


图 5.40 变位  $v$  (引張,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

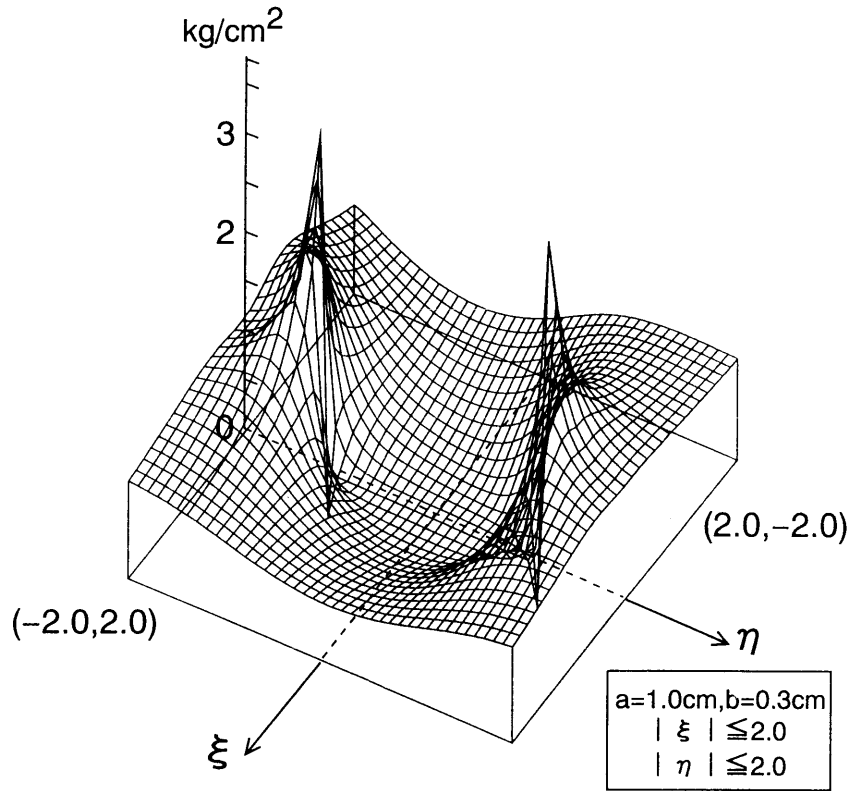


図 5.41 応力  $\sigma_{\xi}$  (引張,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

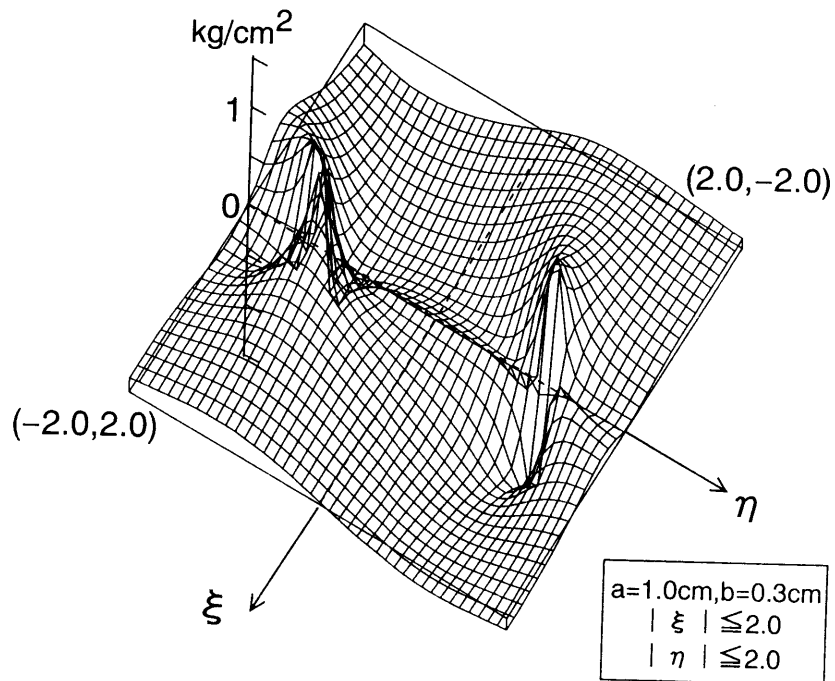


図 5.42 応力  $\tau_{\xi\eta}$  (引張,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

せん断を受けるケース 2、4 の解析結果のうち変位、応力について表 5.6 に示す。また、ケース 4 の変位図と応力図をき裂を中心とした範囲の 2 次元曲面図として図 5.43～5.46 に示す。

せん断を受けるケース 2、4 を比較すると、主軸が  $\eta$  軸に平行の場合と傾いた場合ではせん断を受けているため、主軸が傾いた方が  $\eta$  軸方向の剛性が弱くなり  $\eta$  軸方向変位  $v$  が大きくなっている。

表 5.6 せん断の場合の結果(ケース 2、4)

	材料の主軸角度 (岩盤 $\omega_1$ 岩盤 $\omega_2$ )	
	ケース 2 $\omega_1=0$ $\omega_2=0$	ケース 4 $\omega_1=45$ $\omega_2=45$
$u$ (cm) $\eta=2.0$	$1.329 \times 10^{-5}$	$1.303 \times 10^{-5}$
$v_{max}$ (cm) $\eta$ 軸上	$2.353 \times 10^{-5}$	$2.445 \times 10^{-5}$
$\sigma_{\xi max}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	0.135	0.745
$\sigma_{\eta max}$ "	4.870	5.248
$\tau_{\xi\eta max}$ "	2.605	2.908

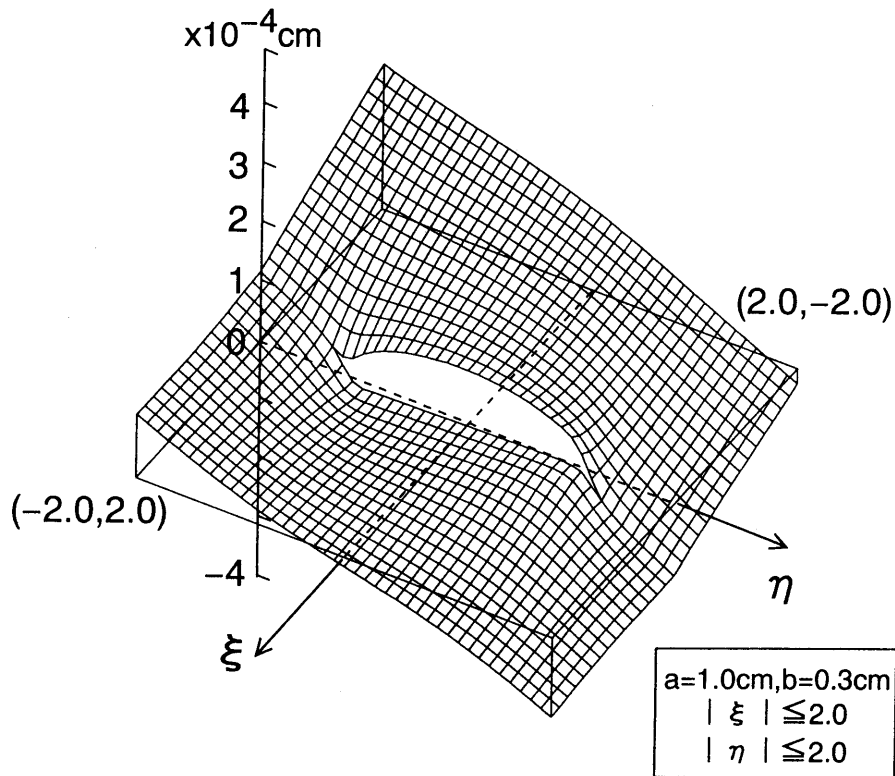


図 5.43 変位  $u$  (せん断,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

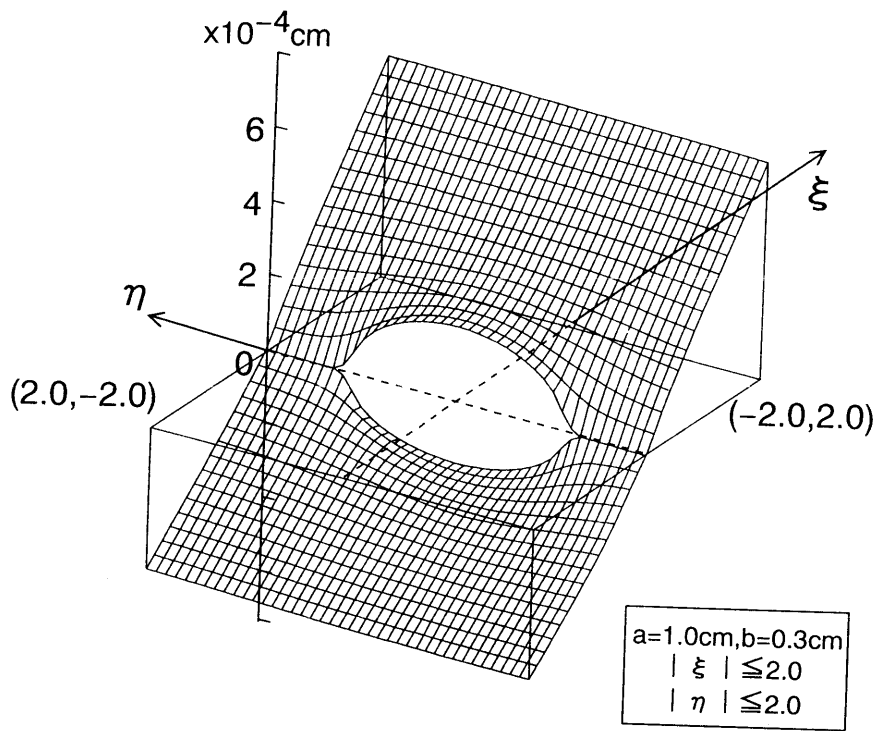


图 5.44 变位  $v$  (せん断,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

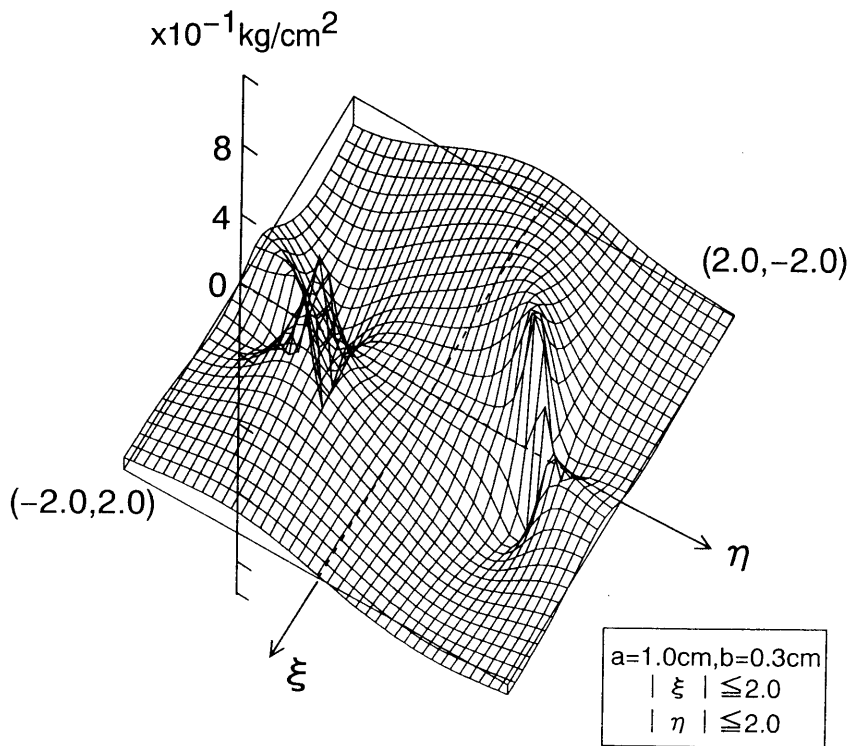


图 5.45 应力  $\sigma_x$  (せん断,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )



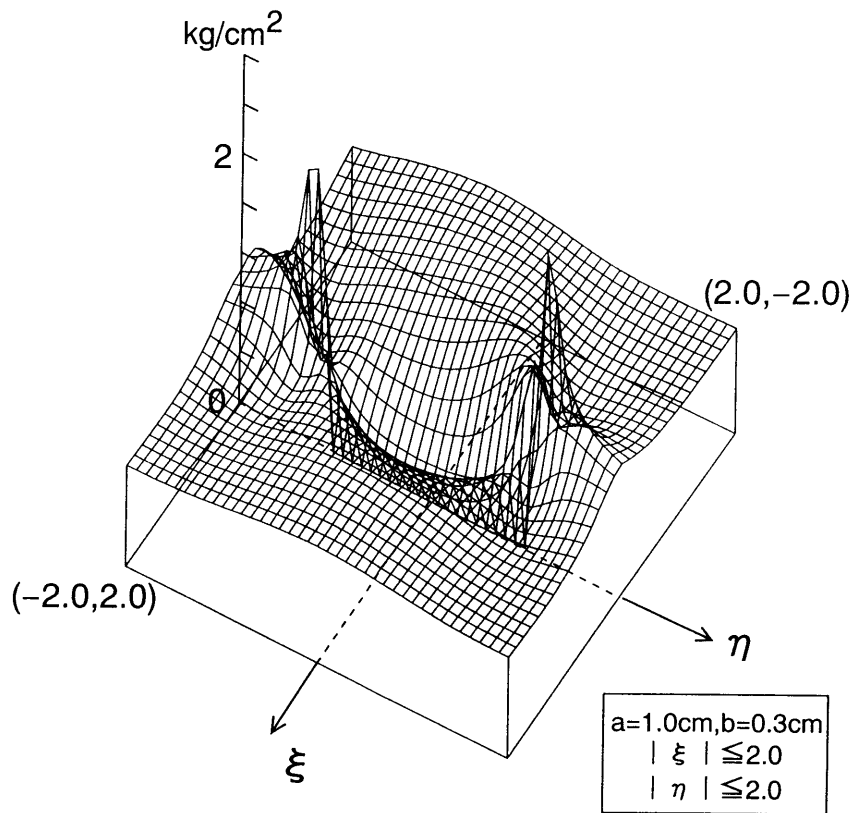


図 5.46 応力  $\tau_{\xi\eta}$  (せん断,  $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

## 5.5 まとめ

本研究の結果を異質弾性体界面き裂に関する従来の研究と比較してまとめるとつぎのようになる。

(1) 第4章で誘導した一般解を複数個組み合わせて直交異方性弾性体境界面き裂の合理的な最適解を導き得た。

(2) 従来の研究ではき裂近傍の応力分布は集積特異点状となるものであったが、本解析方法では応力分布が有限で滑らかなものが得られた。

(3) 基本的に従来の研究と異なる点はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定したことである。これは、プロセスゾーン相当部分を近似的に表現できる区間とも解釈されよう。この区間を実現させた要因は開口関数として著者等が等方性弾性体中のき裂の研究で提案している関数  $H(z)$  である。

(4) さらに一般解の変数として従来から用いられている  $Z_i$  ではなく  $z_i = P\xi + i\eta$  という形の変数で解関数を定義して  $\eta$  軸上の連続条件を簡素化した点と多くの一般解を導いた点が本研究の特徴である。

本研究では応力分布が有限で滑らかなものを導き得ることが示された。

(5) 任意の主軸角に対して bi-elastic constant  $\alpha$  が数値としては定まるが4次の固有値問題となり、等方性弾性体の場合のような簡素な関係式は得られない。

(6) 本研究は有限な応力集中を基本とするので、無限大の応力集中を基本とする応力拡大係数を論じ得るものではない。しかし、本解法でプロセスゾーン相当区間長を小さくすれ

ば応力集中は限りなく大きくなるが振動は生じないことは容易に確認出来る。この点は留意するに値しよう。

(7) 組み合わせの方法はプロセスゾーンで滑らかな最適解を得るための4つの方法を提案したが、「変位の曲率の自乗和を極値にする」方法が最適な組み合わせを与えることが判った。

(8) 計算モデルとして異方性岩盤上にコンクリートを打設した場合の接合面不良問題を取り上げた。岩盤の剛性値、主軸の傾きやプロセスゾーンの大きさを変化させてき裂周辺の応力集中の変化を把握し評価した。

(9) さらに地下岩盤内の異方性岩盤境界に潜在する有限のき裂に、初期応力状態や地下空洞施工あるいは上部斜面掘削などによる外的要因などにより引張りやせん断力が作用する場合を想定した計算例も示した。本解法の工学的な応用はファイバーコンクリートや繊維強化プラスチックなどの複合材料のみならず、不均一性、異方性を強く示す自然の地盤や岩盤を対象にしたき裂解析にも適用可能であることを示し得た。

## 参考文献

- 1) (社)日本鋼構造協会：特集 土木分野の合成構造, JSSC, No10, pp. 1-14, 1993.
- 2) 松井 繁之:土木における合成・複合構造の歩み, コンクリート工学, Vol. 33, No1, pp. 8-12, 1995. 1.
- 3) 吉川 紀:合成・混合構造に見るコンクリート技術の現状と将来 道路橋, コンクリート工学, 55-60, 1995. 1.
- 4) 菊地 宏吉他:土質基礎工学ライブラリ-33, 岩盤挙動の予測と実態, 土質工学会編, pp. 48-87, 269-270, 1988.
- 5) Fujii, K., Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S.:The Stress Concentration Ratio of The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Fract. Mech., Vol 44, pp. 1-19, 1993.
- 6) 長瀬 裕信, 中川 建治:直交異方性弾性体間の境界面き裂周辺の応力集中解析に関する基礎的な研究, 土木学会論文集, No. 507. I-30, pp. 53-63, 1995. 1.
- 7) 藤井 康寿, 中川 建治:面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数, 土木学会論文集, No. V-25, pp. 23-32, 1994. 11

## 第 6 章 直交異方性弾性体境界面の外側き裂近傍の応力解析と岩盤を対象とする その実用面への応用

### 6.1 はじめに

土木工学分野で取り扱うコンクリート、岩盤、岩石などはき裂先端に無限大の応力集中が発生するとは考えにくく、高い応力レベルではき裂先端で無数の微小き裂が発生し小規模な進行性破壊領域(プロセスゾーン)が形成されて、その結果応力が緩和されるものと考えられている。<sup>1)2)</sup>

これらの事実をもとに第4章で誘導した直交異方性弾性体間の一般解を複数組み合わせ、部分接合された外側き裂近傍で振動特異性を持たない有限で滑らかな応力分布を持つ解析例を示す。その特徴は前章の中心き裂の場合と同じである。き裂先端で応力と変位が共存する区間を設定することにより、従来の研究で指摘されている界面き裂近傍における応力の振動特異性を解消して、任意の主軸傾きに対してもプロセスゾーンで滑らかな連続した応力と変位の曲面を表現できることが示される。

本解析法はコンクリートや複合材料のみならず不均一性、異方性を強く示す自然の地盤や岩盤を対象としたき裂解析に活用できるため、その実際の解析例を取り上げて実用面への応用の可能性を示す。

実務面の応用例として、次の2例の解析結果を示す。第1例は鋼材の上に接合された複合材(異方性材料)に引張力が作用する場合の接触面不良問題<sup>3)4)</sup>を取り上げ、異方性の主軸角度の変化によるき裂近傍の応力集中状態を解析しその影響を明らかにする。第2例は異方性の岩盤中に建設された低温貯蔵式のLPG地下空洞周辺の温度勾配によるき裂先端の応力集中問題<sup>5)</sup>を取り上げる。地下空洞周辺の岩盤は急激な温度勾配を受けるため、覆工コンクリートと周辺岩盤の境界面のき裂はき裂まわりの面内曲げモーメントを受ける荷重状態になる。覆工コンクリートと岩盤の境界面は岩発破施工による凹凸が必ずあり、接合面の不良ヶ所が少なからず存在する。また、周辺岩盤内にも既存の節理やシームなどのき裂があるため、この問題を解析することは工学的に意義がある。

### 6.2 一般解の重ね合わせ

第4章で誘導した一般解は無限遠方での応力状態が同じであっても境界条件を満足すれば解析解となり得るために、複数個得られている。これらの解析解は基本的に4つの応力状態(引張、せん断、 $\xi$ 軸曲げ、 $\eta$ 軸曲げ)を表す関数であるが、直交異方性弾性体間のき裂解析には単独の関数のみでは本研究が目的としている「き裂先端で滑らかで有限な応力分布と開口を表現する」ことに対して必ずしも望ましいものとはならない。図4.6~4.9に示したような単独の関数だけによる曲面は集積特異性は解消されているがプロセスゾーンでの変位のめりこみや応力の振動など不自然なところが多少残存する。したがって実用的な解析解を得るにはこれらの単独の解析解にある係数を乗じたのち複数個重ね合わせてより合理的な最適解とすべきであろう。

**(1) 一般解の重ね合わせの手法**

解の重ね合わせは中心き裂の場合と同様に次の4方法を提案し検討した。

- 1) エネルギー解放率  $J_a$  ( $a$ が微小変化)を極値とする方法
- 2) エネルギー解放率  $J_b$  ( $b$ が " )を極値とする方法
- 3) 応力度の自乗和を極値(最小化)とする方法
- 4) 開口変位の曲率自乗和を極値(最小化)とする方法

以下の数値計算結果からこれらの4方法の内、4) 開口変位の曲率自乗和を最小とする方法が応力の平滑化として最も望ましいものと判断された。

**6.3 引張力を受ける鋼材と異方性材料の境界面き裂<sup>3)4)</sup>**

**(1) 解析モデル**

計算モデルとして、鋼材の上に打設された複合材料(異方性)を想定する。接合面( $\xi=0$ )における $\sigma_x$ の総和が一定値 $P$ となる引張力が作用する場合の計算例を示す。図 6.1 に示すモデルの左半面を鋼材と考え弾性係数を  $B_{x1}=B_{y1}=2100,000 \text{ kg/cm}^2$   $\nu_1=0.16$  ねじり定数  $\kappa=0.9$  とし、右半面は複合材料(異方性材料)と考え  $B_{x2}=300,000 \text{ kg/cm}^2$   $B_{y2}=600,000 \text{ kg/cm}^2$   $\nu_2=0.2$  ねじり定数  $\kappa=0.6$  とする。主軸角度  $\omega_1=0^\circ$   $\omega_2=25^\circ$  接合面長さ  $a=1\text{cm}$ 、プロセスゾーン長さ  $b=0.3\text{cm}$ 、無限遠点で総和  $P$  の引張力  $\sigma$  が作用する平面応力問題とする。

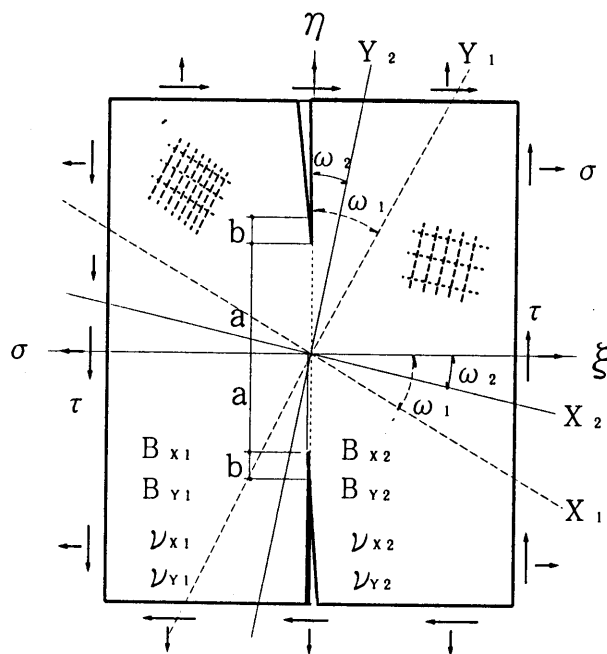


図 6.1 外側き裂解析モデル

**(2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数**

引張力が作用する場合は、一般解として求められている表 4.2 に示す中よりせん断と $\epsilon$ 軸曲げを主体とする曲面を選び係数を乗じつつ重ね合わせるにより求めることができる。重ね合わせの係数は5.2で示した4方法により検討した結果、「開口変位の曲率自

乗和を最小とする方法」が最も適していた。表 6.1 に採用した解析解の組み合わせとその重ね合わせの係数を示す。

表 6.1 採用した一般解の組み合わせと係数

一般解 番号	応力状態	材料の主軸角度 ( コンクリート $\omega_1$ 岩盤 $\omega_2$ )	
		$\omega_1=0$ $\omega_2=0$	$\omega_1=0$ $\omega_2=25$
1	引張	-0.02240135	0.72310980
7	〃	-0.00047444	-0.00003858
1 1	〃	1.93978207	-0.07001663
1 3	〃	0.01247033	-0.41639551
2	せん断	-0.00673365	0.02661504
8	〃	0.00000249	0.00058121
1 2	〃	-0.00878759	-0.46805469
4	$\xi$ 軸曲げ	-0.03023079	-0.00534308
6	〃	0.00000163	0.00015080
1 0	〃	-0.00047612	-0.07454513

$$\alpha = 0.20754878$$

### (3) 主軸角度 $\omega_1=0^\circ$ , $\omega_2=25^\circ$ の場合の解析結果

主軸角度  $\omega_1=0^\circ$  ,  $\omega_2=25^\circ$  の場合の解析結果を図 6.2~6.9 に示す。図 6.10 には主軸角度  $\omega_1=\omega_2=0^\circ$  のときの変位  $u$  を示す。図 6.2 と比較すると主軸の傾きによる影響がよく理解できる。これらの図からつぎのような特性が推察される。

a) 境界上の開口部において応力条件  $\sigma_\xi=0$  ,  $\tau_{\xi\eta}=0$  は完全に満足され、プロセスゾーンでは従来の研究で現れている工学上不都合な集積特異点は現れず滑らかな応力集中が表現されている。

b) 変位  $u$  ,  $v$  についても滑らかな開口形状を示し得ている。

c) 本解析手法では、閉じた解が得られプロセスゾーンの大きさや主軸の傾き、剛性値などを任意に設定でき、2次元領域で滑らかな解曲面が得られる。

d) 主軸角度が変化するにつれて  $\eta > 0$  側の開口変位  $u$  は大きくなるが、逆に  $\eta < 0$  側では接合部分の影響によりむしろ減少していることが判る。

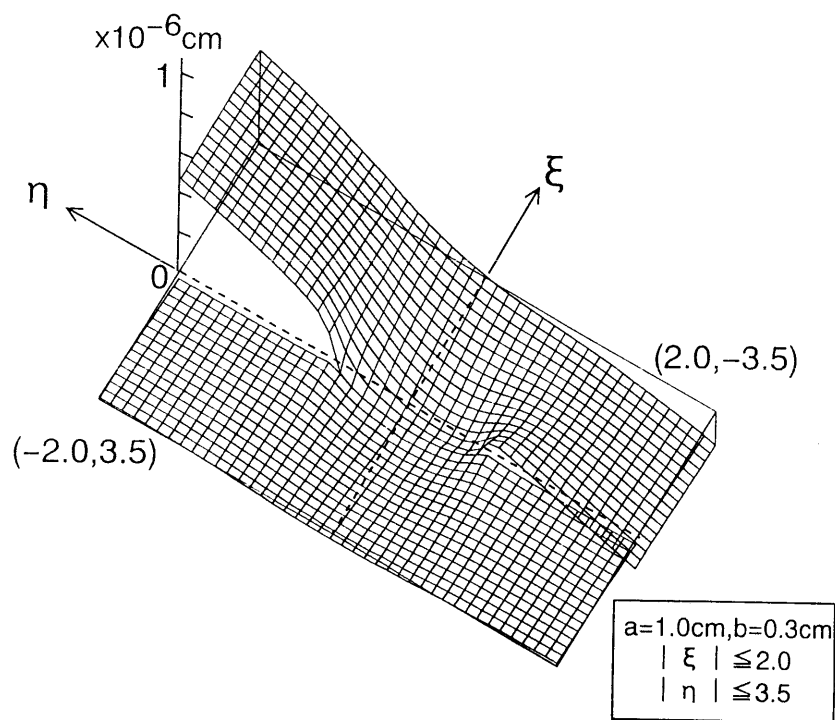


图 6.2 变位  $u$  (引張り)

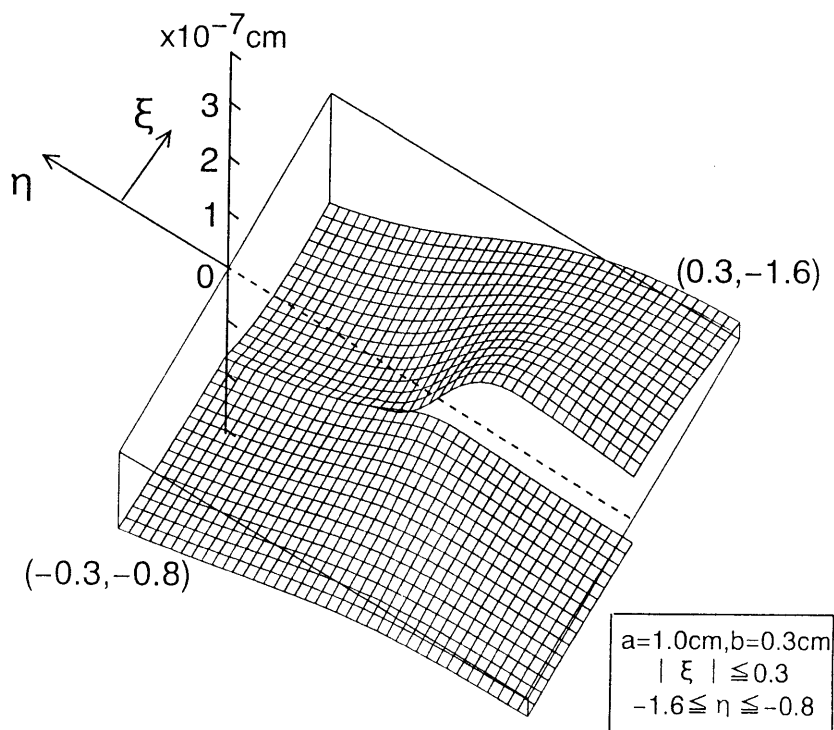


图 6.3 变位  $u$  扩大图

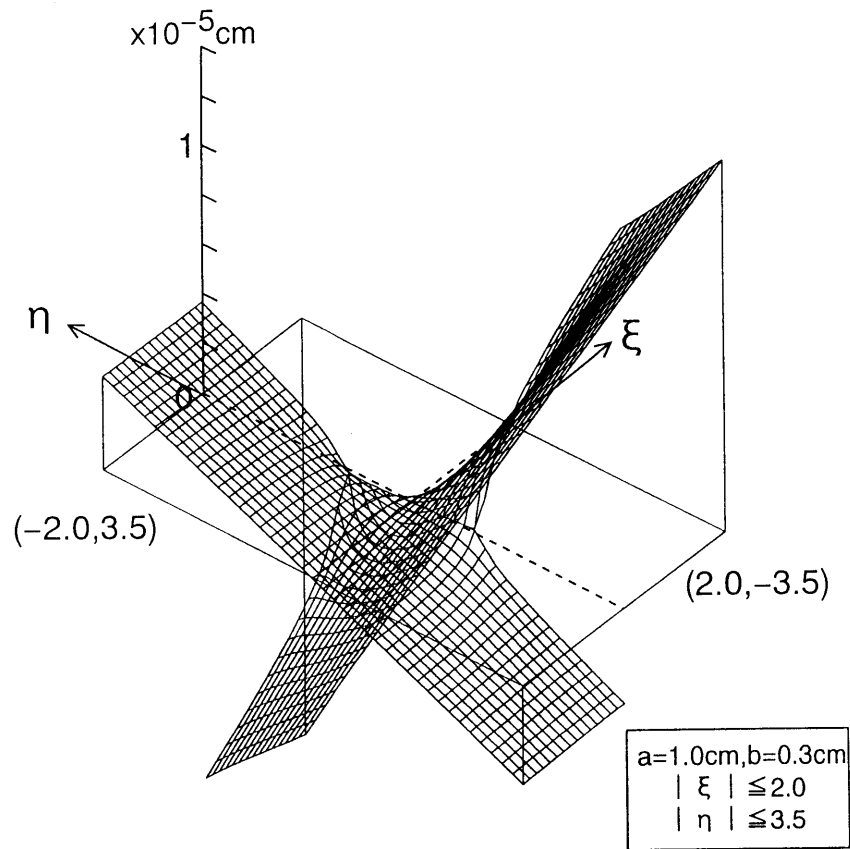


图 6.4 变位  $v$  (引張り)

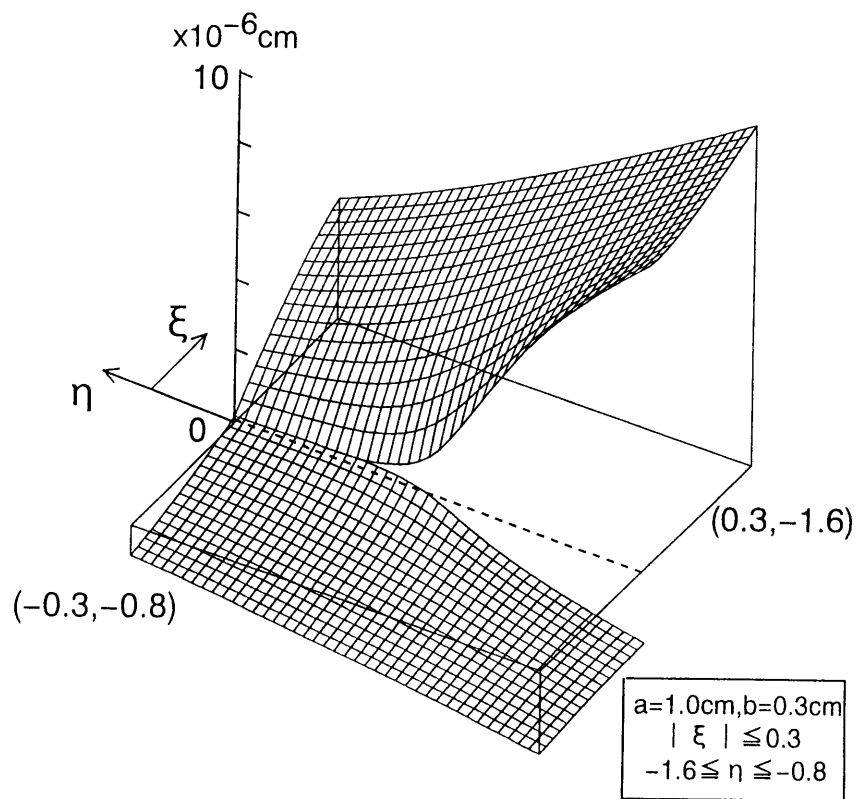


图 6.5 变位  $v$  拡大図

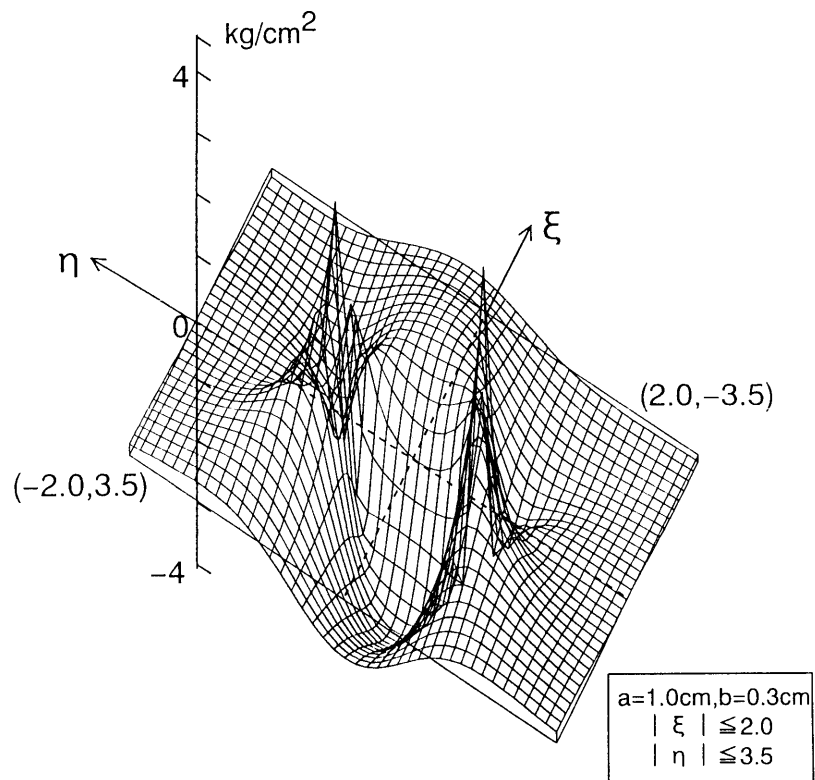


图 6.6 应力  $\sigma_\xi$  (引張り)

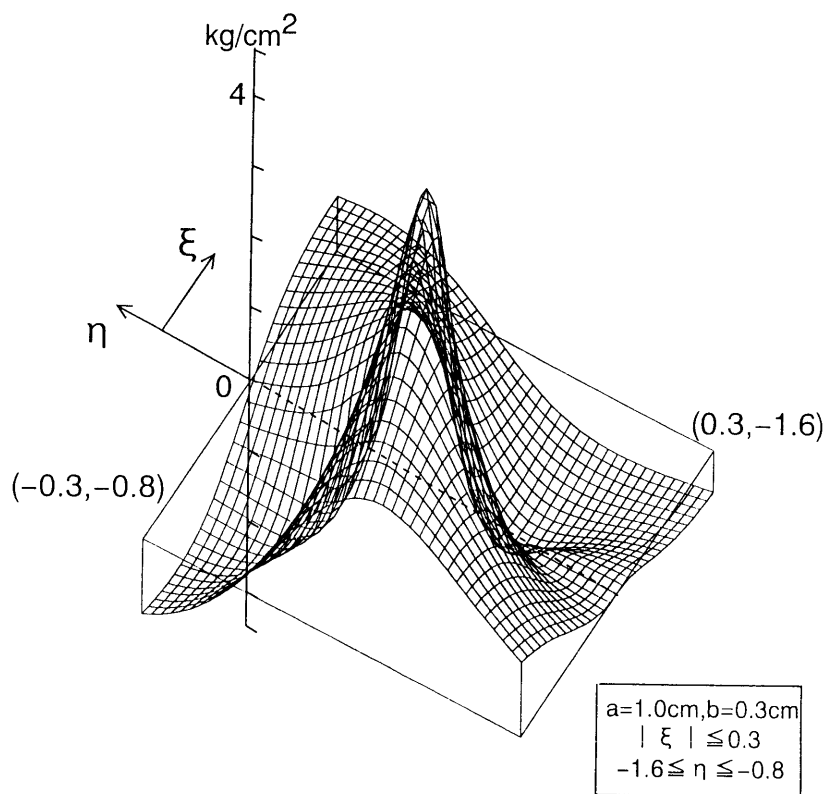


图 6.7 应力  $\sigma_\xi$  拡大図



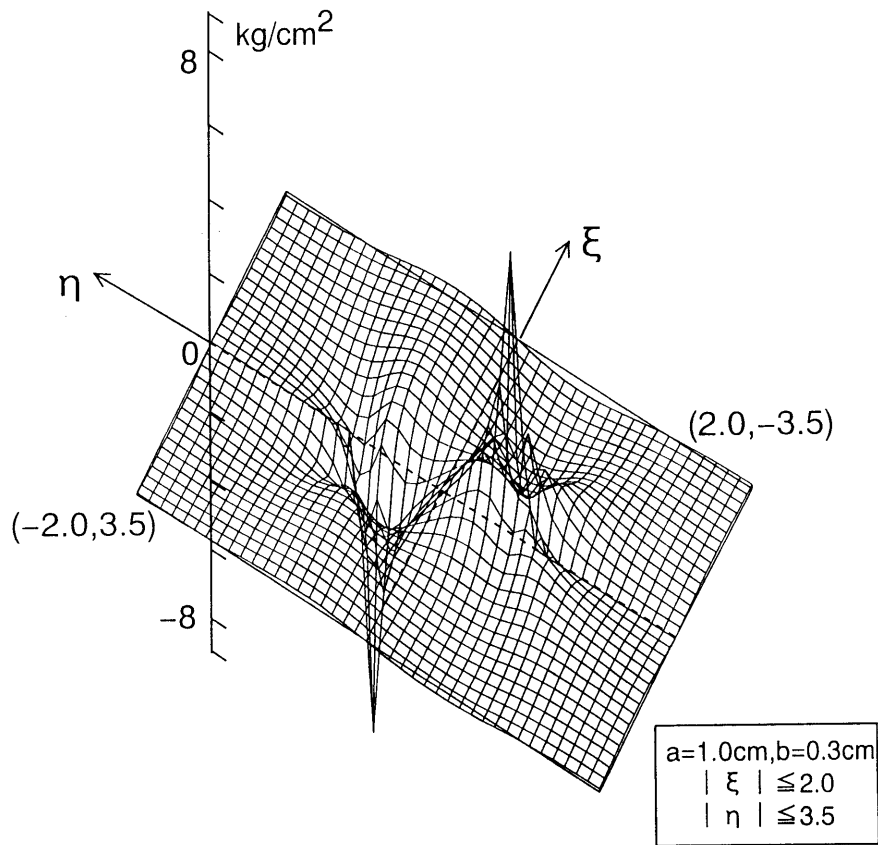


图 6.8 应力  $\tau_{\xi\eta}$  (引張り)

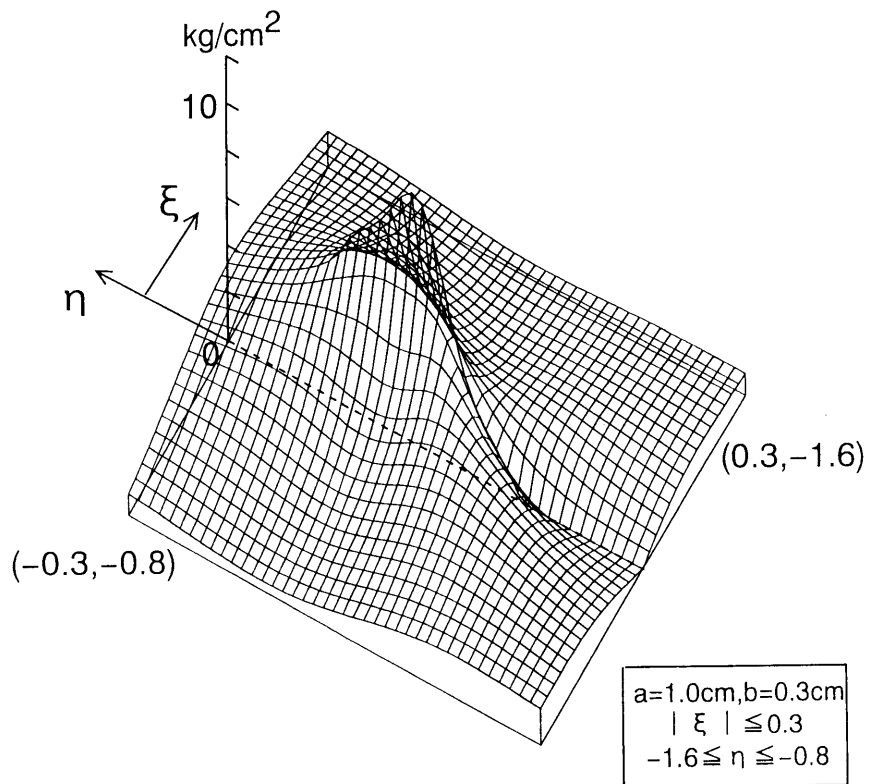


图 6.9 应力  $\tau_{\xi\eta}$  拡大図

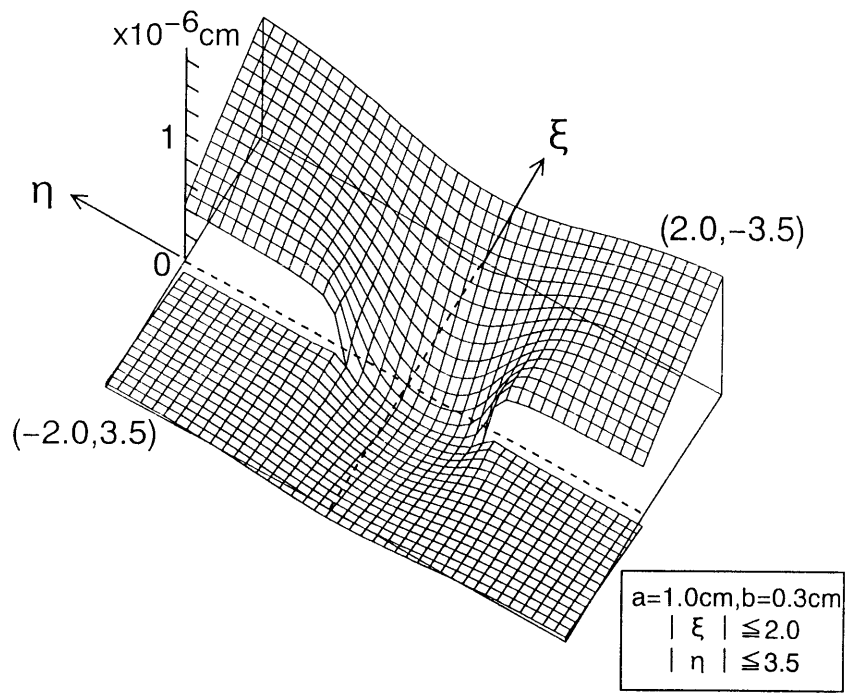


図 6.10 主軸角度  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  の変位  $u$  (引張り)

## 6.4 面内曲げを受ける異方性岩盤とコンクリート境界面き裂<sup>5)</sup>

### (1) 解析モデル

計算モデルとして異方性の岩盤中に建設された低温貯蔵式の LPG 地下空洞の周辺に発生する温度勾配による面内曲げモーメントを受ける場合を取り上げる。異方性の岩盤に密着して打設されたコンクリート(等方性)接合面には曲げモーメントの総和が一定値  $M_0$  となる曲げモーメントが作用しているものとする。図 6.1 の右半面を岩盤とみなし弾性係数  $B_{x2}=25,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_{y2}=50,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.25$ 、ねじり定数  $\kappa=0.6$  とする。左半面はコンクリートとして、 $B_{x1}=B_{y1}=250,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu=0.2$ 、 $\kappa=0.95$  とする。  $a=60 \text{ cm}$ 、 $b=6 \text{ cm}$  とする。

### (2) 一般解の組み合わせと重ね合わせの係数

表 6.2 採用した一般解の組み合わせと係数

一般解 番号	応力状態	材料の主軸角度 ( コンクリート $\omega_1$ 岩盤 $\omega_2$ )			
		$\omega_1=0$ $\omega_2=0$	$\omega_1=0$ $\omega_2=30$	$\omega_1=0$ $\omega_2=60$	$\omega_1=0$ $\omega_2=90$
2	せん断	1.00000900	1.00055100	1.00037200	1.00010100
8	〃	0.01645389	0.00324353	-0.00307860	0.00633637
1 2	〃	-0.02017500	-0.03218866	-0.03188044	-0.02021312
1 4	〃	-0.00003266	-0.00014090	-0.00019058	-0.00011067
4	$\xi$ 軸曲げ	-0.00136946	-0.00320384	-0.00419173	-0.00239013
6	〃	-0.00070403	0.00360383	0.00438890	0.00102400
3	$\eta$ 軸曲げ	-0.00023179	-0.00059641	-0.00829262	-0.00017654
5	〃	-0.00008579	-0.00067331	-0.00005235	-0.00019313
1	引張	0.23261478	0.61197990	0.55976100	0.17511830
7	〃	0.00097779	0.00719768	0.00890664	0.00249784

$$\alpha = 0.245707$$

### (3) 解析結果

主軸角度  $\omega_1=\omega_2=0$  のときの変位と応力を図 6.11~6.18 に示す。さらに岩盤の主軸角度  $\omega_2$  を  $0\sim 90^\circ$  に変化させた場合の  $\eta$  軸上の  $\sigma_\xi$ 、 $\sigma_\eta$ 、 $\tau_{\xi\eta}$  最大値の変化を図 6.19 に示す。

これらの図より、計算例(1)と同様に開口部において滑らかな応力集中が表現できていることや任意の主軸の傾きや物性値に対しても解析可能であるため、本解析手法は異方性のき裂解析に有効であることが理解できよう。

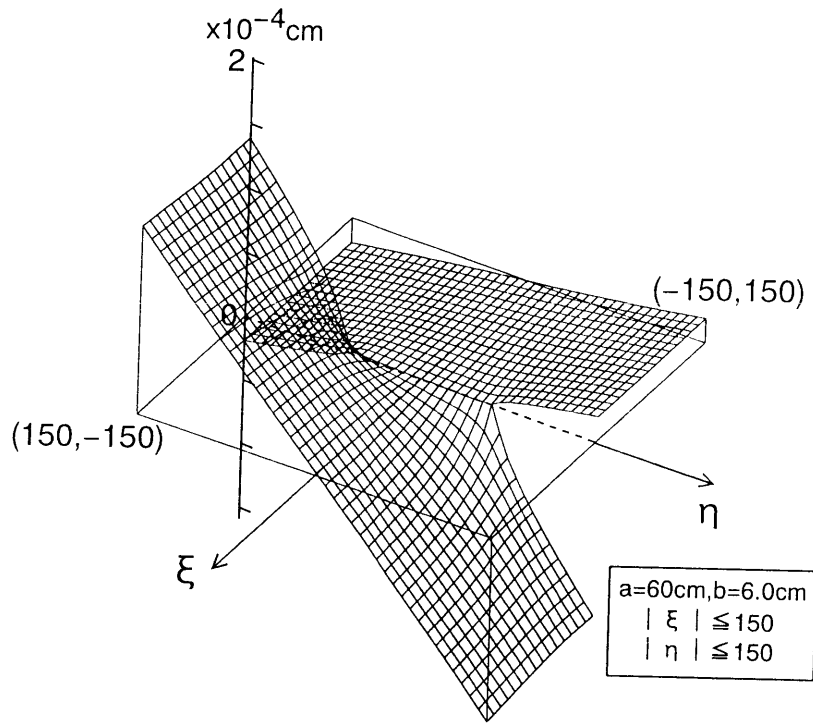


图 6.11 变位  $u$

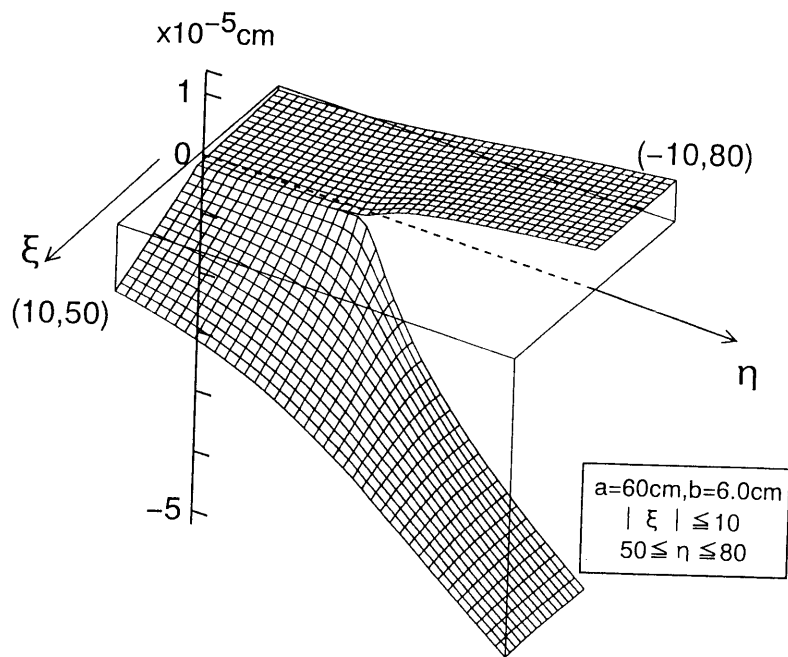


图 6.12 变位  $u$  扩大图

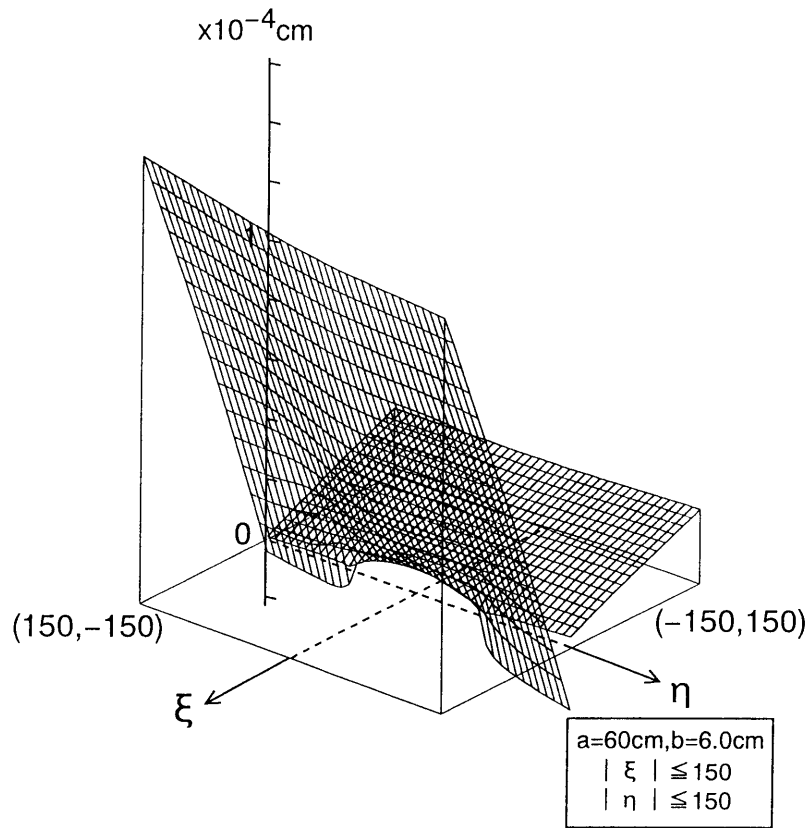


图 6.13 变位  $v$

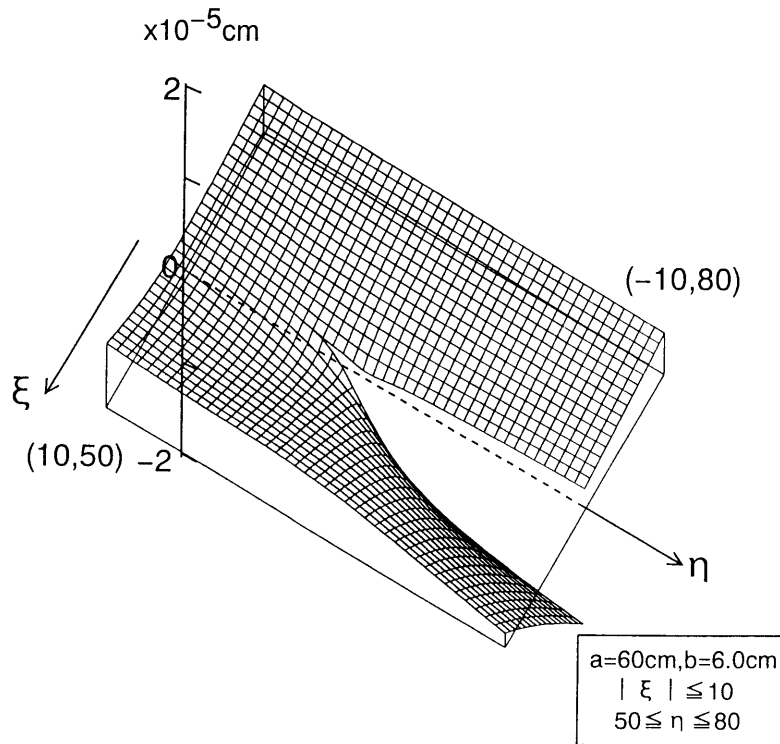


图 6.14 变位  $v$  扩大图

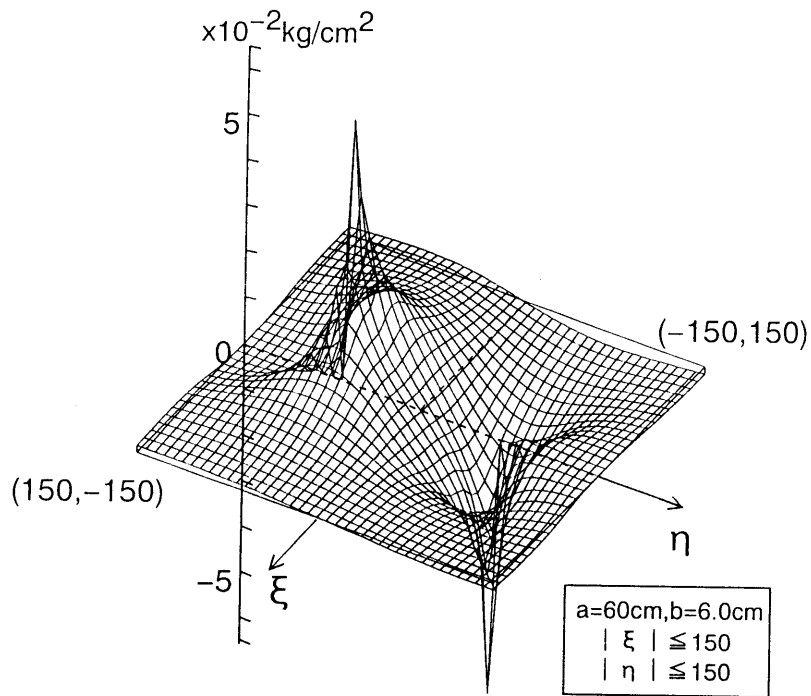


图 6.15 应力  $\sigma_\xi$

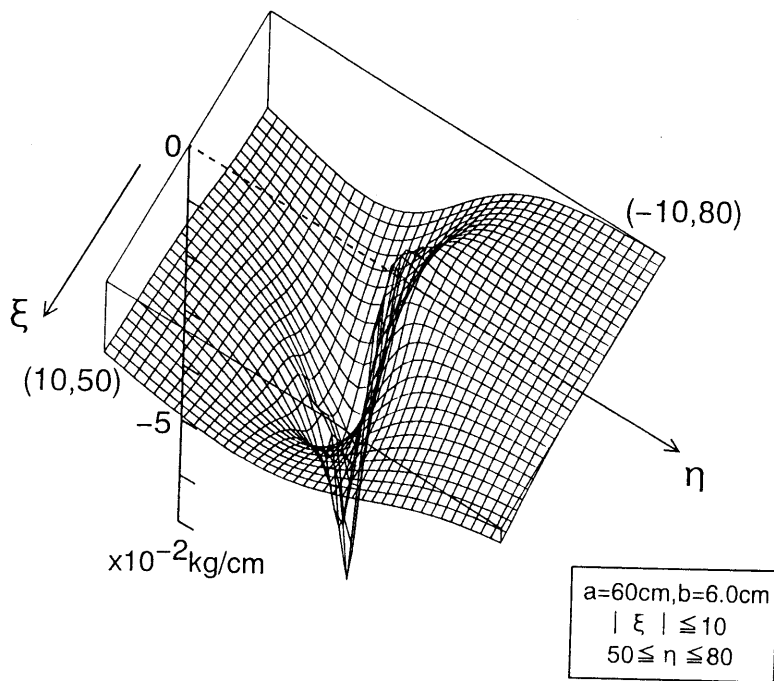


图 6.16 应力  $\sigma_\xi$  扩大图

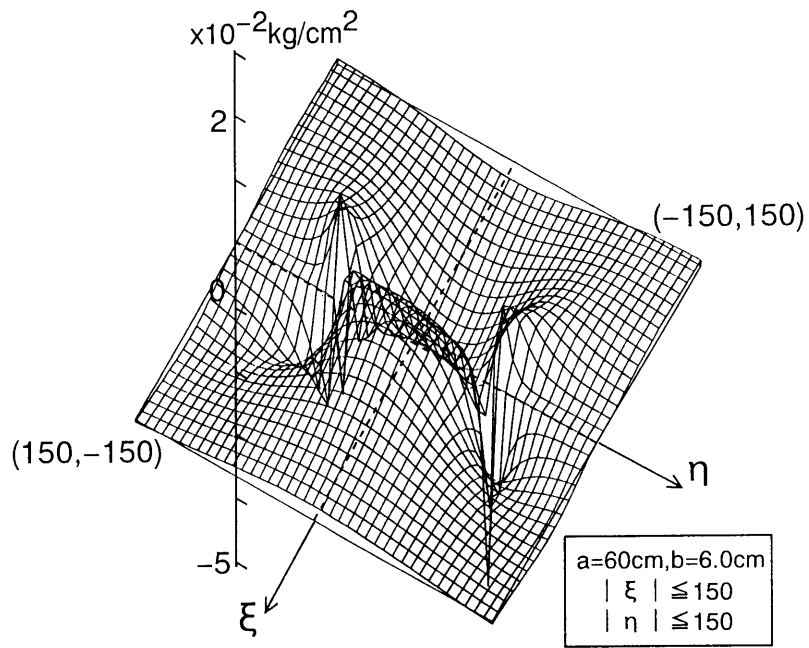


图 6.17 应力  $\tau_{\xi\eta}$

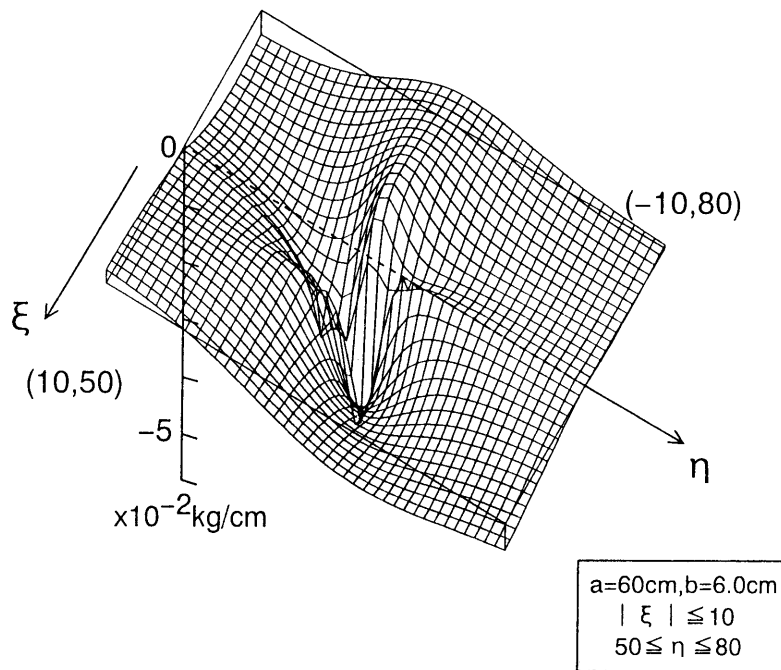


图 6.18 应力  $\tau_{\xi\eta}$  扩大图

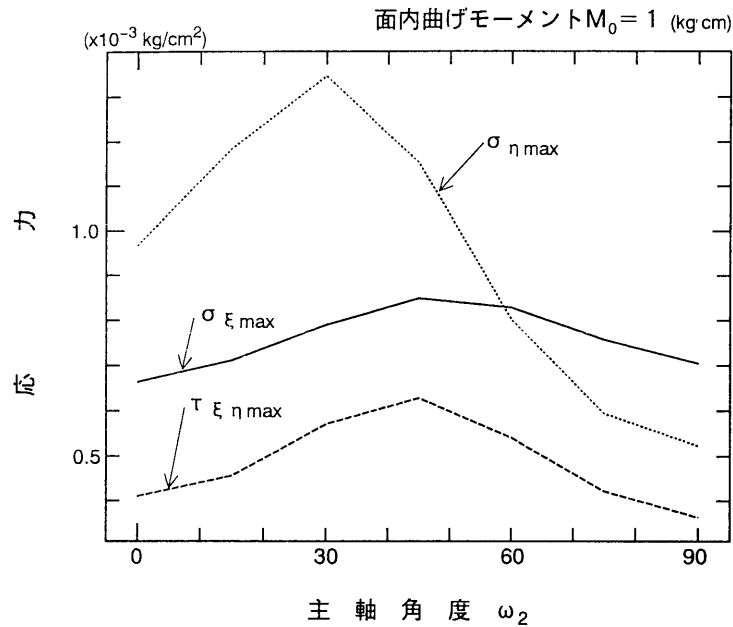


図 6.19 主軸角度  $\omega_2$  による最大応力の変化

## 6.5 まとめ

本研究で得られた結果を以下に示す。

- (1) 異質弾性体(等方性)の境界面き裂問題と同様に直交異方性体の境界面き裂近傍の応力分布も従来の解法に基けば集積特異点状となる。本研究は部分接合された直交異方性体を対象として、その未接合部近傍で振動特異性を持たない有限で滑らかな応力分布を与える解析解を導き得た。
- (2) 従来の研究と異なる点は、未接合部先端(き裂先端)で開口変位と応力が共存する区間を設定したことである。この区間を実現させた要因は開口関数として著者等が等方性体中のき裂の研究で提案している関数  $H(z)$  を採用したことである。
- (3) プロセスゾーン相当区間長さを小さくすれば応力集中の大きさは限りなく大きくなるが、本解法では従来の研究で問題となっている応力の振動は生じないし、級数解のような収束性の問題もない。
- (4) 本解法は実験では直接測り得ていないき裂先端の有限で滑らかな応力状態をシミュレートできる。
- (5) 本解法は主軸の傾き、プロセスゾーンの大きさや剛性値などが任意に考慮できるため、工学的に応用範囲が広く、ファイバーコンクリートや繊維強化プラスチックなどの複合材料のみならず、異方性を強く示す自然の地盤や岩盤を対象にしたき裂解析に適用が可能である。実用的な2つの解析例から本解法の有用性を示し得た。



## 参考文献

- 1) 日本コンクリート工学協会:破壊力学の応用研究委員会報告書, pp. 7-8, 13, 1993. 10
- 2) 土木学会構造工学委員会:土木工学における破壊力学の適用性, 土木学会論文集, 第380号, I-7, pp. 13-26, 1987. 4
- 3) 長瀬 裕信, 中川 建治:部分接合された直交異方性体の接合部近傍の応力集中解析  
土木学会第49回年次学術講演会, I-308, 1994. 9
- 4) H. Nagase, S. J. Duan and K. Nakagawa:Stress analysis aronud interface crack  
partially bonded dissimilar anisotropic composite materials, Eng. Fract. Mech.  
投稿中
- 5) 長瀬 裕信, 土居 亮太, 中川 建治:部分接合された直交異方性弾性体の未接合部  
近傍の応力解析, 土木学会西部支部, 土木構造・材料論文集 第11号, 1995. 11

# 第 7 章 直交異方性弾性板の各種開口関数の構成法と自由辺近傍のき裂解析への適用

## 7.1 はじめに

内部に直線状のき裂を有する直交異方性弾性板を対象とする場合の各種き裂開口関数の一般形を誘導して分類・整理する。この関数はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定することによりき裂近傍で滑らかな応力を表現するものであり、中央き裂のみならず外側き裂の場合に対しても引張り・せん断・ $\xi$ 軸曲げ・ $\eta$ 軸曲げの4種類の面内力問題の解析も可能にするものである。さらにこれらの開口関数をもとにして、自由辺近傍のき裂解析に活用し得る特異関数の構成法を導く。いずれも諸剛性値、主軸角度、自由辺までの距離等を任意に変化させることができる解であるから、異方性を示す岩盤や複合材料のき裂解析などに応用可能である。

解析例として岩盤内のき裂に内圧が作用する場合の計算例<sup>1)2)</sup>を示し、さらに具体的な実用例としてダムの基礎岩盤の強化の目的で施工されるコンソリデーショングラウト施工時の岩盤変形の解析応用例<sup>1)2)</sup>を示し、本解析法の有用性を明らかにする。

近年複合材料の研究開発にともない複合構造物が数多く設計・施工されてきている。これらの複合材料の多くは異方性を示すため、異方性体内部の空隙やき裂に関する問題が重要な研究課題となっている。土木工学の分野の例としては、異方性を示す岩盤に内在するき裂の応力集中、地盤中に薬液注入したときの割裂浸透、注水による岩盤破碎、静的破碎材(セメント系膨張材)による岩盤やコンクリート構造物の破壊・解体等が挙げられる。

工学的な研究が期待されるこれらの問題では解析的方法、実験的方法、数値解析的方法によるアプローチがなされている。従来の解析的方法のほとんどは破壊パラメータとして応力拡大係数を採用しているのでき裂先端で応力が無限大となるなど工学的には不合理な点を伴っている<sup>3)~8)</sup>。実験的研究としては、き裂の進展や荷重変位曲線を計測するために直接コンクリートやモルタル試験体を対象にしたもの、エポキシ材料を接着した試験体を利用した実験等が報告されている<sup>9)~12)</sup>。しかしながら骨材の種類、大きさや載荷条件などの要因に結果が左右されること、直交異方性体の供試体の作成が難しいことなど問題も多い。レーザースペックル法や造影材を使用した実験などの結果からコンクリート材料のプロセスゾーン相当部分の長さは約数cm~数十cmといわれているが<sup>11)13)14)</sup>、き裂先端の応力を直接測り得ないためそのメカニズムを十分説明し得ていないのが実状である。これらの研究によると、き裂先端は有限な応力状態であると推定されているのでプロセスゾーン部での応力状態を解析的にシミュレートし得たなら工学的にも有益なことであろう。

本文では、直線状の一本のき裂を含む直交異方性無限板の面内力問題を表現し得る応力関数(開口関数)の構成法を示す。段、中川等<sup>15)</sup>はせん断・引張りを受ける直交異方性弾性板の中心き裂を構成する解を求め報告をしているが、き裂近傍に自由辺がない無限板を対象にしていることやプロセスゾーンの大きさも変化できないなどきわめて初歩的なものである。また第4章では直交異方性板の境界面き裂の問題についても述べているが、本章とはき裂先端で有限で滑らかな応力集中と開口変位を生じさせてプロセスゾーン相当部分

を構成する基本思想は同じものである。しかし開口用の応力関数の基本型は全く異なる。第4章は境界面き裂を対象としているために等方性板の境界面き裂の問題との関連性より指数関数で応力関数を構成している。

本章では、境界面き裂ではなく種類の直交異方性板内のき裂問題を対象としているので、等方性板のき裂問題の基本となっている Westergaard の代数関数解を基本にして、重み積分法を活用しつつ代数無理関数式で応力関数を構成する解析法を導いた。これによって、引張りせん断・面内曲げ等の4種類の外力に対する解、さらに中心き裂のみならず外側き裂の問題に対してもそれぞれの外力モードに対する解を導く手法を確立した。

本章の他の一つのテーマは、直線状の自由辺を持つ直交異方性半無限板に自由辺と平行な直線状き裂一本が含まれる場合の面内力問題を表現するに便利な特異解を導くことである。この応力関数は、き裂先端の応力集中が有限なことと自由辺で応力が完全に解放されていることが特徴である。ただしこの場合はき裂開口部に滑らかな内圧が作用した状態を表すが、これは次のような問題に関連して極めて有用なものと思われる。

例えばダム基礎のコンソリデーショングラウトによる地盤の持ち上がりの解析や節理が発達した異方性を示す岩盤やコンクリートの解体に静的破碎材を使用した場合などは自由表面近傍の3次元の空隙に内圧を作用させる問題である。しかし、このような問題を2次元に置換して近似的に解析するものとするならば、本文で示すような半無限板の自由辺近傍のき裂と内圧の問題となる。(図7.1参照)

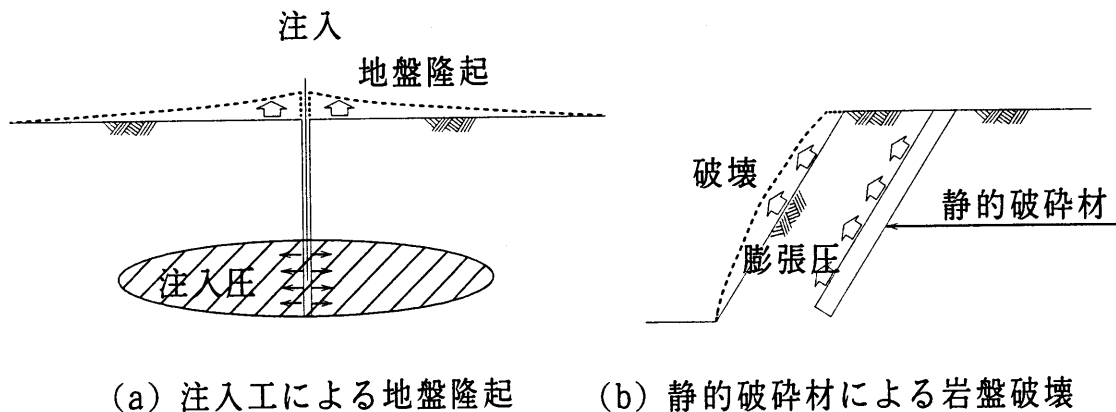


図 7.1 き裂解析応用例

## 7.2 解析モデルと基礎式

### (1) 解析モデルと定数

図 7.2 に示すような直交異方性弾性板内の  $\eta$  軸上に一本のき裂が含まれるモデルを考える。き裂長は  $2a$ 、開口変位と応力が共存するプロセスゾーンを  $b_1$ 、 $b_2$  とする。第3章の記号をそのまま踏襲するが、左右の材質を表わす  $j$  は省くことになる。

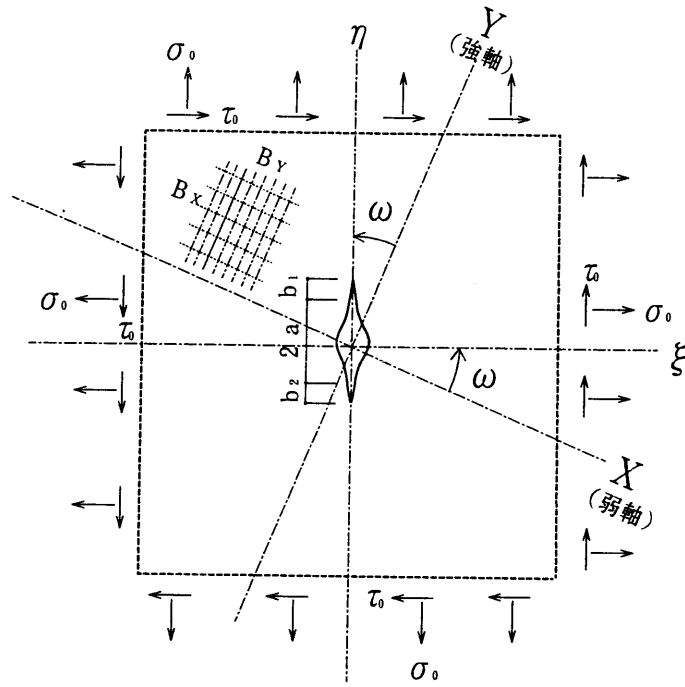


図 7.2 直交異方性弾性板のき裂解析モデル

弾性定数と強さの主軸の角度を以下のように設定する。

X 平面の弱軸 (剛さ  $B_x$ )

Y " 強軸 (剛さ  $B_y$ )

$\omega$ : 最弱 X 軸より反時計方向で  $\xi$  正軸へ向かう角度

剛性とポアソン比とねじれ定数については  $B_0$  を基準剛性として次の関係が成立しているものとする。

$$B_x = \beta_x^4 B_0 \quad B_y = \beta_y^4 B_0 \quad \nu_y B_x = \nu_x B_y$$

$G_{xy}$ : せん断弾性定数

$\kappa$ : ねじり定数

$$2\kappa = \sqrt{B_x B_y / G_{xy}} - 2\nu_y \sqrt{B_x / B_y}$$

## (2) 直交異方性弾性体の基礎式

強さの主軸方向の座標 ( $X, Y$ ) に関して、応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、変位  $U, V$ 、ひずみ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  と応力関数  $W(X, Y)$  に関する周知の関係式を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 W / \partial Y^2 & \sigma_y &= \partial^2 W / \partial X^2 \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 W / \partial X \partial Y \\ \varepsilon_x &= \partial U / \partial X = \sigma_x / B_x - \nu_y \sigma_y / B_y \\ \varepsilon_y &= \partial V / \partial Y = \sigma_y / B_y - \nu_x \sigma_x / B_x \\ \gamma_{xy} &= \partial V / \partial X + \partial U / \partial Y = \tau_{xy} / G_{xy} \end{aligned} \right\} (7.1)$$

$$B_x \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\kappa \sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + B_y \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = 0 \quad (7.2)$$

### (3) 応力関数の一般解

一般解を導くについてまず変数変換を行なって、 $X = \beta_x \cdot x$ 、 $Y = \beta_y \cdot y$  とすると式(7.2)は

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\kappa \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (7.3)$$

と基準化される。ここで微分演算子を因数分解すると

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{(1+\kappa)/2} + i\sqrt{(1-\kappa)/2} \quad \text{によって}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{\zeta} \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\zeta} \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\sqrt{\zeta} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\sqrt{\zeta} \frac{\partial}{\partial x}\right) W = 0 \quad (7.4)$$

と表され、一般解は任意関数  $f_1(Z) \sim f_4(Z)$  によって

$$W(x, y) = f_1(Z_1) + f_2(Z_2) + f_3(Z_3) + f_4(Z_4) \quad (7.5)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{\zeta} x + iy & Z_2 &= \sqrt{\zeta} x - iy \\ Z_3 &= \sqrt{\zeta} y + ix & Z_4 &= \sqrt{\zeta} y - ix \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

と表されることになる。<sup>16)</sup>

さらに、主軸座標軸( $X, Y$ )よりき裂面座標軸( $\xi, \eta$ )へ変換して変数を定義する必要がある。しかし冗長になることと紙面の都合でここでは割愛するが、直交異方性パラメータより変数  $Z_k$  を  $z_k$  で定義する過程の詳細は式(3.20)より式(3.26)と同じ方式である<sup>17)</sup>。

$$\begin{aligned} Z_k &= (A_k + iB_k)(P_k \xi + i\eta) \\ &= (A_k + iB_k)z_k \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \pm \frac{\cos \omega}{\beta_y} - \frac{\sin \omega}{\beta_x} \sqrt{\frac{1-\kappa}{2}} \\ B_k &= \frac{\sin \omega}{\beta_x} \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

すなわち、従来のように一般解を  $Z_1, Z_2$  の任意の関数であるという定義の代わりにこれと同等な独立変数を以下のように定義して一般解を構成する方が取り扱いが容易になる。何故ならばき裂線上( $\xi=0$ )では  $z_1, z_2 = i\eta$  となるためである。

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= P_1 \xi + i \eta = (p_1 + i q_1) \xi + i \eta \\ z_2 &= P_2 \xi + i \eta = (p_2 + i q_2) \xi + i \eta \end{aligned} \right\} (7.9)$$

### 7.3 基本開口関数

#### (1) 開口関数の基本系

直交異方性無限板の原点を中心にして  $\eta$  軸に沿って一本のき裂が存在するものとして、開口関数を導く。き裂近傍で発生する不合理な特異性を消去するため、著者等が提案している重み積分を施した基本開口関数を応力関数  $f_k(z)$  と定義する。これは等方性体のき裂の応力関数(開口関数)  $\bar{z}\psi + \phi$  に対応させて  $\bar{z}\psi$  あるいは  $\phi$  のオーダーのものを直交異方性弾性体の場合の変数  $z_1, z_2$  を用いた応力関数として定義することに相当している。

#### a) 重み積分

$y$  軸上の区間  $(t_1, t_2)$  を開口部とする直線状き裂をもつ無限板のモード I 状態の応力関数  $\bar{z}\psi_0 + \phi_0$  の主要部分は、Westergaard の解によると  $c$  を定数として

$$\psi_0 = c \sqrt{z - it_1} \sqrt{z - it_2} \quad (7.10)$$

であり、この特異項がき裂先端の応力集中を無限大にする要因である。もし  $t_1$  に関して区間  $(a_1 < t_1 < a_1 + b_1)$  で定義された重み関数  $\rho_1(t_1)$  を  $\psi_0$  に乗じて積分して、同様に、 $t_2$  について区間  $(a_2 < t_2 < a_2 + b_2)$  で定義された重み関数  $\rho_2(t_2)$  を乗じて積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{a_1}^{a_1+b_1} \int_{a_2}^{a_2+b_2} \psi_0 \rho_1(t_1) dt_1 \rho_2(t_2) dt_2 \\ &= h(z, a_1, b_1) g(z, a_2, b_2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$h(z, a_1, b_1) = \int_{a_1}^{a_1+b_1} \rho_1(t_1) \sqrt{z - it_1} dt_1 \quad (7.12)$$

$$g(z, a_2, b_2) = \int_{a_2}^{a_2+b_2} \rho_2(t_2) \sqrt{z - it_2} dt_2 \quad (7.13)$$

さて、この重み関数  $\rho_1, \rho_2$  の選び方によっては  $\psi$  は  $z$  の関数として  $y$  軸上の開口関数でありながら  $\psi'$  あるいは  $\psi''$  の  $y$  軸上の極は有限で滑らかなものに変換されることになる<sup>18)</sup>。一つの例として 0 次のオーダーの重み関数は以下のように決定できる。(図 7.3)

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(t_1) &= 1/b_1 & a_1 < t_1 < a_1 + b_1 \\ &= 0 & t_1 < a_1 \text{ or } a_1 + b_1 < t_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_2(t_2) &= 1/b_2 & a_2 < t_2 < a_2 + b_2 \\ &= 0 & t_2 < a_2 \text{ or } a_2 + b_2 < t_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

$$h_1(z_j, a_1, b_1) = \left\{ (z_j + ia_1 + ib_1)^{\frac{3}{2}} - (z_j + ia_1)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (7.16)$$

$$g_1(z_j, a_2, b_2) = \left\{ (z_j - ia_2 - ib_2)^{\frac{3}{2}} - (z_j - ia_2)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (7.17)$$

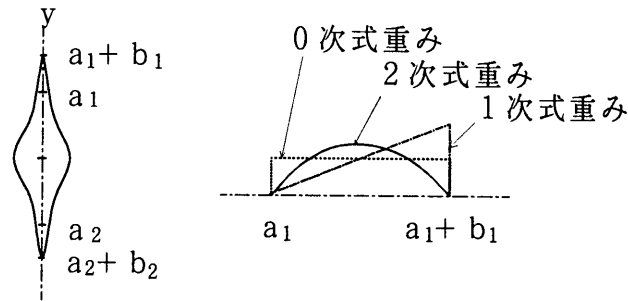


図 7.3 重み関数

この関数  $f(z)$  (あるいは  $f'$ 、 $f''$ ) は  $y$  軸上の区間  $|y| > a_i + b_i$  ( $i=1, 2$ ) で実数、 $|y| < a_i$  で純虚数 (あるいは実数、虚数正反対) であって、区間  $a_i < |y| < a_i + b_i$  では滑らかに虚数から実数へ複素数を経由しつつ変換されるという特性を持つ。これこそが、き裂の開口 (虚数) から変位の一方が 0 の完全連続部 (実数) への変遷というプロセスゾーン相当部分の変位と応力を構成する要因であり、 $b_1$ 、 $b_2$  がそれぞれ両端の長さの異なるプロセスゾーンを実現することになる。

同様にすれば、2 次の重み関数も求められるが、プロセスゾーンがより滑らかなものになるだけで基本的には開口関数として何ら不都合なものとはならない。

#### b) 開口関数

直交異方性板の基本開口関数  $f_k(z)$  は、 $f(z)$  において  $z \rightarrow z_j$  ( $j=1, 2$ ) とすることによって与えられるので ( $y$  軸上で  $z=iy$ 、 $\eta$  軸上で  $z_j=i\eta$ )、き裂上下のプロセスゾーンの長さを  $b_1$ 、 $b_2$  とするものとして以下の関数を考える。 $f_1(z_j, a, b_1, b_2)$  は 0 次の重みを、 $f_2(z_j, a, b_1, b_2)$  は 2 次の重みを適用した開口部で対称の関数である。また、逆対称開口関数の基本系を  $f_3(z_j, a, b_1, b_2)$ 、半無限の片側き裂の開口関数を  $f_4(z_j, a, b_1, b_2)$  と定義する。(図 7.4)

$$f_1(z_j, a, b_1, b_2) = c_1 z_j h_1(z_j, a, b_1) g_1(z_j, a, b_2) \quad (7.18)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1(z_j, a, b_1) &= \left\{ (z_j + ia + ib_1)^{\frac{3}{2}} - (z_j + ia)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ g_1(z_j, a, b_2) &= \left\{ (z_j - ia - ib_2)^{\frac{3}{2}} - (z_j - ia)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ c_1 &= \frac{2\sigma_0}{9b_1b_2} \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

$$f_2(z_j, a, b_1, b_2) = c_2 z_j \{h_1(z_j, a, b_1)g_1(z_j, a, b_2)\} \quad (7.20)$$

$$\left. \begin{aligned} h_2(z_j, a, b_1) &= b_1 \left\{ (z_j + ia + ib_1)^{\frac{5}{2}} + (z_j + ia)^{\frac{5}{2}} \right\} \\ &\quad + \frac{i4}{7} \left\{ (z_j + ia + ib_1)^{\frac{7}{2}} - (z_j + ia)^{\frac{7}{2}} \right\} \\ g_2(z_j, a, b_2) &= b_2 \left\{ (z_j - ia - ib_2)^{\frac{5}{2}} + (z_j - ia)^{\frac{5}{2}} \right\} \\ &\quad - \frac{i4}{7} \left\{ (z_j - ia - ib_2)^{\frac{7}{2}} - (z_j - ia)^{\frac{7}{2}} \right\} \\ c_2 &= \frac{48}{5b_1^3 b_2^3} \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

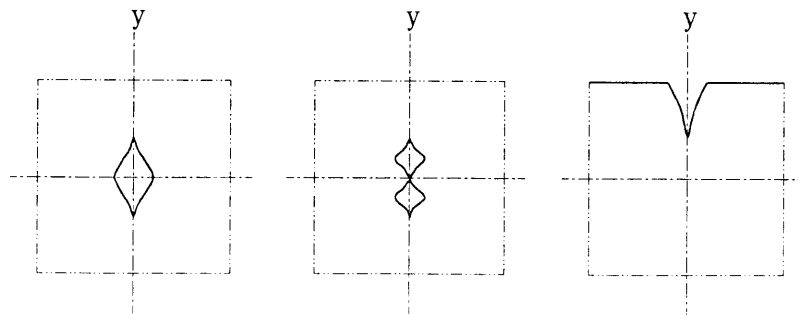
$$f_3(z_j, a, b_1, b_2) = ic_3 z_j^2 \{h_3(z_j, a, b_1)g_3(z_j, a, b_2)\} \quad (7.22)$$

$$\left. \begin{aligned} h_3(z_j, a, b_1) &= \left\{ (z_j + ia + ib_1)^{\frac{3}{2}} - (z_j + ia)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ g_3(z_j, a, b_2) &= \left\{ (z_j - ia - ib_2)^{\frac{3}{2}} - (z_j - ia)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ c_3 &= \frac{2\sigma_0}{9b_1 b_2} = c_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

$$f_4(z_j, a_1, b_1) = c_4 z_j g_4(z_j, a_1, b_1) \quad (7.24)$$

$$\left. \begin{aligned} g_4(z_j, a_1, b_1) &= \frac{i2}{3} \left\{ (a_1 + b_1)(z_j - ia_1 - ib_1)^{\frac{3}{2}} - a(z_j - ia_1)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &\quad + \frac{4}{15} \left\{ (z_j - ia_1 - ib_1)^{\frac{5}{2}} - (z_j - ia_1)^{\frac{5}{2}} \right\} \\ c_4 &= \frac{2e^{i3\pi/4}}{(2a_1 + b_1)b_1} \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

逆対称開口の応力関数は単独使用でなく、対称形のものと同ね合わせて活用することで非対称開口を構成するものとなる。



(a) 対称系  $f_1, f_2$  (b) 逆対称系  $f_3$  (c) 片側き裂  $f_4$

図 7.4 開口関数の基本系



## (2) 開口関数の分類

前節で示した開口関数は図 7.4 のような開口を構成する応力関数の条件を満足するものである。しかし、開口を構成する関数の論理に立脚して少し異なる観点から検討しつつ応力関数の導き方を述べてみよう。

開口形状と応力分布形は  $\eta$  軸上に沿って原点を中心とした対称型と逆対称型のものに区別される。応力関数を  $f(z)$  とすると応力は  $f''(z)$  のオーダーであるから、主として  $f''(z)$  の  $y$  軸上の形状に着目して分類すると次のようになる。

き裂の開口を構成する応力関数  $f(z)$  の一般形は  $y$  軸上で実数区間と純虚数区間を持ち、両区間の隣接部分は滑らかに複素数で連結されるものでなければならない。このような関数より  $y$  軸上で  $f''(z)$  の実数部と虚数部が対称形か逆対称形を示すものを採用して、 $y$  軸上で実数部が対称形のものを

$$f''_s(z) = f''_{sR}(z) + i f''_{sI}(z) \quad (7.26)$$

同様に、逆対称形のものを

$$f''_a(z) = f''_{aR}(z) + i f''_{aI}(z) \quad (7.27)$$

とする。(図 7.5)

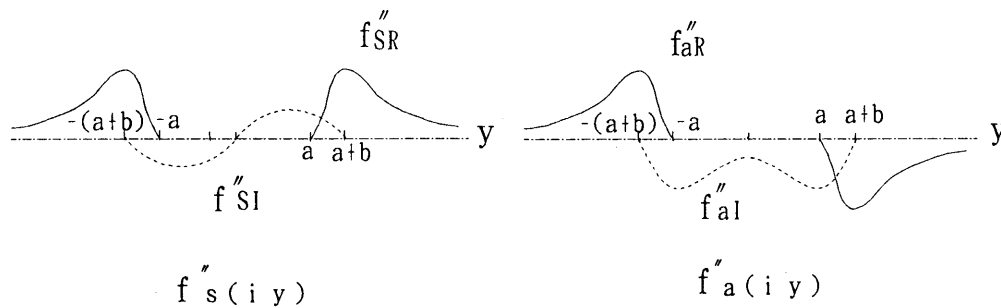


図 7.5 開口関数の形状特性

### a) $f''(z_j)$ ( $j=1$ or $2$ ) が $\eta$ 軸上で対称型

$f(z_j)$  を  $z=x+iy$  の関数とすると  $y$  軸 ( $\eta$  軸) 上では  $f(z_j) = f(z)$  となる。

$$\begin{aligned} f''(z_j) &= f''_s(z_j) = f''_{sR}(z_j) + i f''_{sI}(z_j) \\ &= R_e[f''_s(z_j)] + i I_m[f''_s(z_j)] \end{aligned} \quad (7.28)$$

において 2 階微分の実数部  $f''_{sR}(iy)$  が対称であれば、解析関数の特性より虚部  $f''_{sI}(iy)$  は逆対称型となる。したがって  $z_j = \rho \xi + i \eta$  の関数  $f(z_j)$  においても  $\eta$  軸上では全く同様な特性が現れる。

### b) $f''(z_j)$ ( $j=1$ or $2$ ) が $\eta$ 軸上で逆対称型

$$\begin{aligned} f''(z_j) &= f''_a(z_j) = f''_{aR}(z_j) + i f''_{aI}(z_j) \\ &= R_e[f''_a(z_j)] + i I_m[f''_a(z_j)] \end{aligned} \quad (7.29)$$

2 階微分の実数部  $f''_{aR}(iy)$  が逆対称であれば、同様な理由で虚数部  $f''_{aI}(iy)$  は対称型となる。

$\eta$  軸上で開口変位を実現するには  $f''(z_j)$  が多重連続曲面を構成しなければならない。応力  $\sigma_x$ 、 $\tau_{xy}$  は  $f''(z_j)$  に由来していて最終的に実数部のみが採用されるので、開口部の  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$  は  $f''(i\eta)$  が純虚数になることにより構成されるのである(応力として実部をとるための  $\text{Re}[\ ]$  記号は自明であり、煩雑であるから省略する)。

したがって、 $\eta$  軸上で  $f''(z_j)$  が純虚数より実数へと滑らかに変化することが必要であり、暫変化区間  $a < |\eta| < a+b$  では  $f''(z_j)$  は複素数であって応力と開口変位が共存するプロセスゾーン相当部分を構成することになる。

c)  $\eta$  軸上で  $\sigma_\xi = 0$  となる解 ( $\tau_{xy}$  のみとなる T 型, f 系)

ここで  $D_1$ 、 $D_2$  を複素定数として応力関数  $W$  を

$$W = D_1 f(z_1) + D_2 f(z_2) \quad (7.30)$$

と定義する。

$$D_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad D_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad (7.31)$$

$$D_1 = -D_2 \text{ とすると、}$$

$$\sigma_\xi = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0} = -D_1 \{ f''(z_1) - f''(z_2) \} = 0 \quad (7.32)$$

となって  $\sigma_\xi = 0$  は実現する。 $\eta$  軸上の  $\tau_{\xi\eta}$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= -iP_1 D_1 f''(z_1) + iP_2 D_1 f''(z_2) \\ \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} &= -i(P_1 - P_2) D_1 f''(i\eta) \end{aligned} \right\} (7.33)$$

となる。ここで、 $(P_1 - P_2) D_1$  が実数の場合と虚数の場合とを想定する。 $(P_1 - P_2) D_1$  が実数なら  $\eta$  軸上の  $f''(i\eta)$  の実数部で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  が実現する。すなわち、 $(P_1 - P_2) D_1 = -C_0 = \text{実数のときは}$

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - p_2) \beta_1 + (q_1 - q_2) \alpha_1 &= 0 \\ (p_1 - p_2) \alpha_1 - (q_1 - q_2) \beta_1 &= -C_0 \end{aligned} \right\} (7.34)$$

となり、これはそれぞれ  $f''_{S1} = 0$  のところすなわち実部で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} &= -C_0 f''_{S1}(i\eta) \text{ は外側き裂 } \eta \text{ 軸曲げ} \\ \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} &= -C_0 f''_{a1}(i\eta) \text{ は外側き裂せん断} \end{aligned} \right\}$$

の応力状態を表している。

$(P_1 - P_2) D_1 = iC_0 = \text{虚数のときは}$

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - p_2) \alpha_1 - (q_1 - q_2) \beta_1 &= 0 \\ (p_1 - p_2) \beta_1 + (q_1 - q_2) \alpha_1 &= C_0 \end{aligned} \right\} (7.35)$$

となり、これはそれぞれ  $f''$  の虚数部では  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となり、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} &= C_0 f''_{SR}(i\eta) \text{ は中心き裂せん断} \\ \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} &= C_0 f''_{aR}(i\eta) \text{ は中心き裂 } \eta \text{ 軸曲げ} \end{aligned} \right\}$$

の応力状態を表している。

d)  $\eta$  軸上で  $\sigma_\xi = 0$  となる解 (T 型,  $f$  系)

上記の応力関数で破棄された虚数部を活用するために

$$W = D_1 f(z_1) + D_2 f(z_2) \quad (7.36)$$

と定義する。

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= i f(z) \\ D_1 &= \alpha_1 + i \beta_1 \\ D_1 = -D_2 &= \alpha_1 + i \beta_1 = -(\alpha_2 + i \beta_2) \end{aligned} \right\} (7.37)$$

とすると、

$$\sigma_\xi = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0} = -D_1 \{ f''(z_1) - f''(z_2) \} = 0 \quad (7.38)$$

となって  $\sigma_\xi = 0$  は実現する。 $\eta$  軸上の  $\tau_{\xi\eta}$  を求めると

$$\tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} = -i(P_1 - P_2) D_1 f''(i\eta) \quad (7.39)$$

となる。ここで、 $-i(P_1 - P_2) D_1 = i C_0 =$  虚数のときは

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - p_2) \beta_1 + (q_1 - q_2) \alpha_1 &= 0 \\ (p_1 - p_2) \alpha_1 - (q_1 - q_2) \beta_1 &= -C_0 \end{aligned} \right\} (7.40)$$

となり、これはそれぞれ  $f''$  の実部で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  であって

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} = -C_0 f''_{s1}(i\eta) & \text{は中心き裂せん断} \\ \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} = -C_0 f''_{a1}(i\eta) & \text{は中心き裂} \eta \text{ 軸曲げ} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

$-i(P_1 - P_2) D_1 = C_0 =$  実数のときは

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - p_2) \alpha_1 - (q_1 - q_2) \beta_1 &= 0 \\ (p_1 - p_2) \beta_1 + (q_1 - q_2) \alpha_1 &= C_0 \end{aligned} \right\} (7.41)$$

となり、これはそれぞれ  $f''$  の虚数部で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となり、

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} = C_0 f''_{sR}(i\eta) & \text{は外側き裂} \eta \text{ 軸曲げ} \\ \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=0} = C_0 f''_{aR}(i\eta) & \text{は外側き裂せん断} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

e)  $\eta$  軸上で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となる解 ( $\sigma_x$  が残る N 型,  $f$  系)

$$W = \frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{D_2}{P_2} f(z_2) \quad (7.42)$$

$$D_1 = \alpha_1 + i \beta_1, \quad D_2 = \alpha_2 + i \beta_2, \quad D_1 = -D_2 \quad (7.43)$$

とすると、

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -i D_1 \{ f''(i\eta) - f''(i\eta) \} = 0 \quad (7.44)$$

となって、 $\eta$  軸上で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となる。 $\eta$  軸上の  $\sigma_\xi$  を求めると

$$\sigma_{\xi} = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi=0} = - \left( \frac{D_1}{P_1} - \frac{D_2}{P_2} \right) f''(i\eta) \quad (7.45)$$

となるが、記述の簡略化を計り

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{p_1 + iq_1} = p_{v1} + iq_{v1} \quad \frac{1}{P_2} = \frac{1}{p_2 + iq_2} = p_{v2} + iq_{v2} \quad (7.46)$$

とする。

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} &= -D_1 \{ (p_{v1} - p_{v2}) + i(q_{v1} - q_{v2}) \} f''(i\eta) \\ &= -[ \alpha_1 (p_{v1} - p_{v2}) - \beta_1 (q_{v1} - q_{v2}) + i \{ \beta_1 (p_{v1} \\ &\quad - p_{v2}) + \alpha_1 (q_{v1} - q_{v2}) \} ] f''(i\eta) \end{aligned} \quad (7.47)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) &= C_0 \quad \text{が実数なら} \\ \beta_1 (p_{v1} - p_{v2}) + \alpha_1 (q_{v1} - q_{v2}) &= 0 \\ \alpha_1 (p_{v1} - p_{v2}) - \beta_1 (q_{v1} - q_{v2}) &= C_0 \\ C_0 &= \frac{\alpha_1}{(p_{v1} - p_{v2})} \{ (p_{v1} - p_{v2})^2 + (q_{v1} - q_{v2})^2 \} \end{aligned} \quad (7.48)$$

となって、 $\eta$  軸上で  $f''(i\eta)$  が虚数の区間では  $\tau_{\xi\eta} = \sigma_{\xi} = 0$  が実現する。これはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} &= -C_0 f''_{SR}(i\eta) \text{ は中心き裂引張り} \\ \sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} &= -C_0 f''_{aR}(i\eta) \text{ は中心き裂}\xi\text{軸曲げ} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

$$\begin{aligned} D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) &= i C_0 \quad \text{が虚数なら} \\ \alpha_1 (p_{v1} - p_{v2}) - \beta_1 (q_{v1} - q_{v2}) &= 0 \\ \beta_1 (p_{v1} - p_{v2}) + \alpha_1 (q_{v1} - q_{v2}) &= C_0 \\ C_0 &= \frac{\alpha_1}{(q_{v1} - q_{v2})} \{ (p_{v1} - p_{v2})^2 + (q_{v1} - q_{v2})^2 \} \end{aligned} \quad (7.49)$$

となり、これはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} &= C_0 f''_{s1}(i\eta) \text{ は外側き裂}\xi\text{軸曲げ} \\ \sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} &= C_0 f''_{a1}(i\eta) \text{ は外側き裂引張り} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

f)  $\eta$  軸上で  $\tau_{\xi\eta} = 0$  となる解(N型,  $f$ 系)

$$W = \frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{D_2}{P_2} f(z_2) \quad (7.50)$$

とおくと、同様にして、 $\eta$  軸上で  $\tau_{\xi\eta} = 0$

$$\sigma_{\xi} \Big|_{\xi=0} = \text{Re} \left[ - \left( \frac{D_1}{P_1} - \frac{D_2}{P_2} \right) f''(i\eta) \right] \quad (7.51)$$

となる。ここで、

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = C_0 \quad \text{が実数なら}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(p_{v1}-p_{v2}) + \alpha_1(q_{v1}-q_{v2}) &= 0 \\ \alpha_1(p_{v1}-p_{v2}) - \beta_1(q_{v1}-q_{v2}) &= C_0 \\ C_0 &= \frac{\alpha_1}{(p_{v1}-p_{v2})} \{ (p_{v1}-p_{v2})^2 + (q_{v1}-q_{v2})^2 \} \end{aligned} \right\} (7.52)$$

となり、これはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon|_{\varepsilon=0} &= -C_0 f''_{SR}(i\eta) \text{ は外側き裂 } \xi \text{ 軸曲げ} \\ \sigma_\varepsilon|_{\varepsilon=0} &= -C_0 f''_{aR}(i\eta) \text{ は外側き裂引張り} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = i C_0 \quad \text{が虚数なら}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(p_{v1}-p_{v2}) - \beta_1(q_{v1}-q_{v2}) &= 0 \\ \beta_1(p_{v1}-p_{v2}) + \alpha_1(q_{v1}-q_{v2}) &= C_0 \\ C_0 &= \frac{\alpha_1}{(q_{v1}-q_{v2})} \{ (p_{v1}-p_{v2})^2 + (q_{v1}-q_{v2})^2 \} \end{aligned} \right\} (7.53)$$

となり、これはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon|_{\varepsilon=0} &= C_0 f''_{s1}(i\eta) \text{ は中心き裂引張り} \\ \sigma_\varepsilon|_{\varepsilon=0} &= C_0 f''_{a1}(i\eta) \text{ は中心き裂 } \xi \text{ 軸曲げ} \end{aligned}$$

の応力状態を表している。

以上の結果から無限板のき裂を表現し得る開口関数のうち f 系を分類整理して図 7.6 に示す。図 7.7、7.8 には、開口部長さ  $2a=2\text{cm}$ 、プロセスゾーン長さ  $b=0.3\text{cm}$ 、弾性係数を  $B_x=25,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_y=50,000 \text{ kg/cm}^2$ 、ねじり定数  $\kappa=0.6$  ポアソン比  $\nu=0.25$ 、主軸角度  $\omega=0$  とした場合の中心き裂引張りの開口曲面と応力  $\sigma_\varepsilon$  およびその詳細図(き裂先端部)を示す。これらの図から数値解析では表現し得ないき裂近傍の滑らかな応力集中が得られる。

f系	N型 $\tau_{z,\eta} \equiv 0$		T型 $\sigma_z \equiv 0$	
	$W = \frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{D_2}{P_2} f(z_2)$		$W = D_1 f(z_1) + D_2 f(z_2)$	
関数の実数部曲面を利用	$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = C_0$ 実数型		$(P_1 - P_2) D_1 = -C_0$ 実数型	
	fs系 $\sigma_z = -C_0 f''_{SR}(i\eta)$	fa系 $\sigma_z = -C_0 f''_{AR}(i\eta)$	fs系 $\tau_{z,\eta} = C_0 f''_{SR}(i\eta)$	fa系 $\tau_{z,\eta} = C_0 f''_{AR}(i\eta)$
	中心き裂引張り	中心き裂を軸曲げ	中心き裂せん断	中心き裂を軸曲げ
関数の虚数部曲面を利用	$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = iC_0$ 虚数型		$(P_1 - P_2) D_1 = -iC_0$ 虚数型	
	fs系 $\sigma_z = C_0 f''_{S1}(i\eta)$	fa系 $\sigma_z = C_0 f''_{A1}(i\eta)$	fs系 $\tau_{z,\eta} = -C_0 f''_{S1}(i\eta)$	fa系 $\tau_{z,\eta} = -C_0 f''_{A1}(i\eta)$
	外側き裂を軸曲げ	外側き裂引張り	外側き裂を軸曲げ	外側き裂せん断

図 7.6 開口関数 f の分類

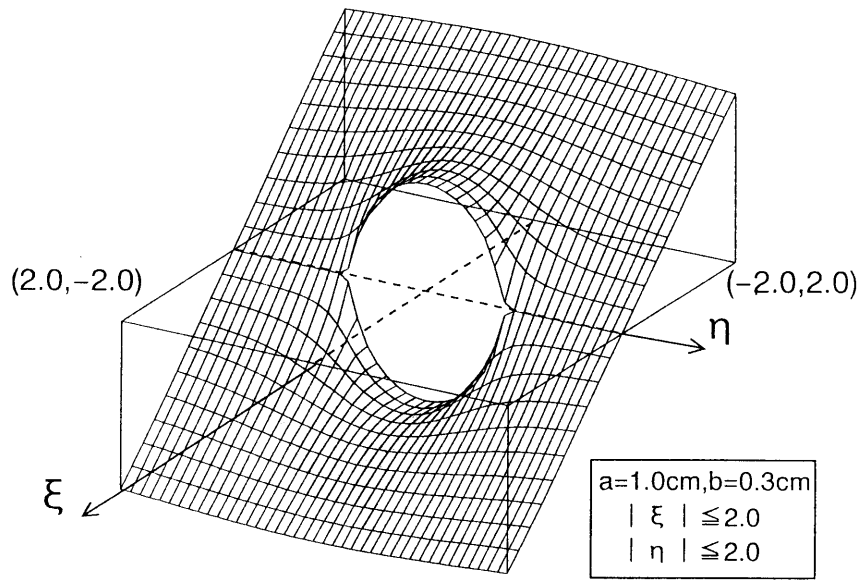


図 7.7 中心き裂の開口曲面

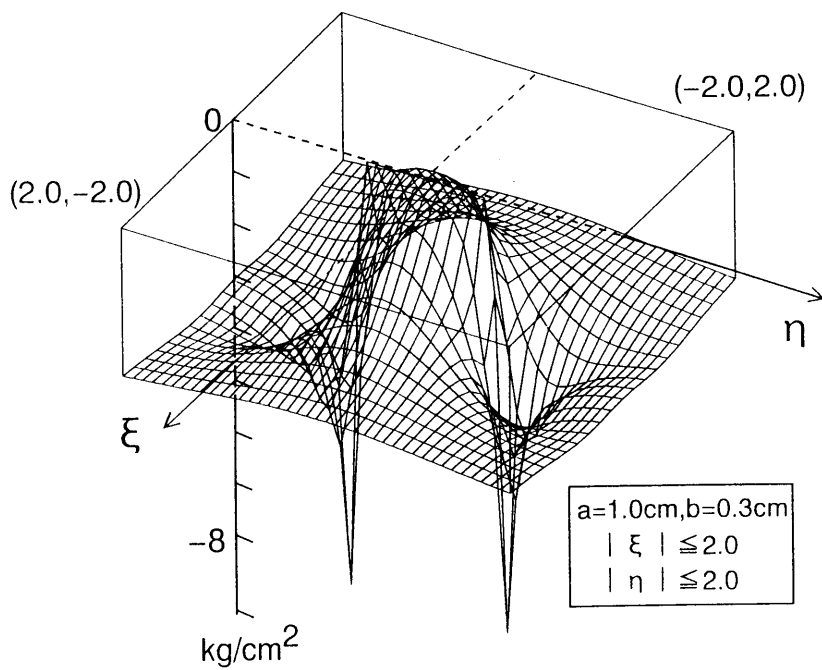


図 7.8 (a) 応力  $\sigma_{\xi}$  曲面

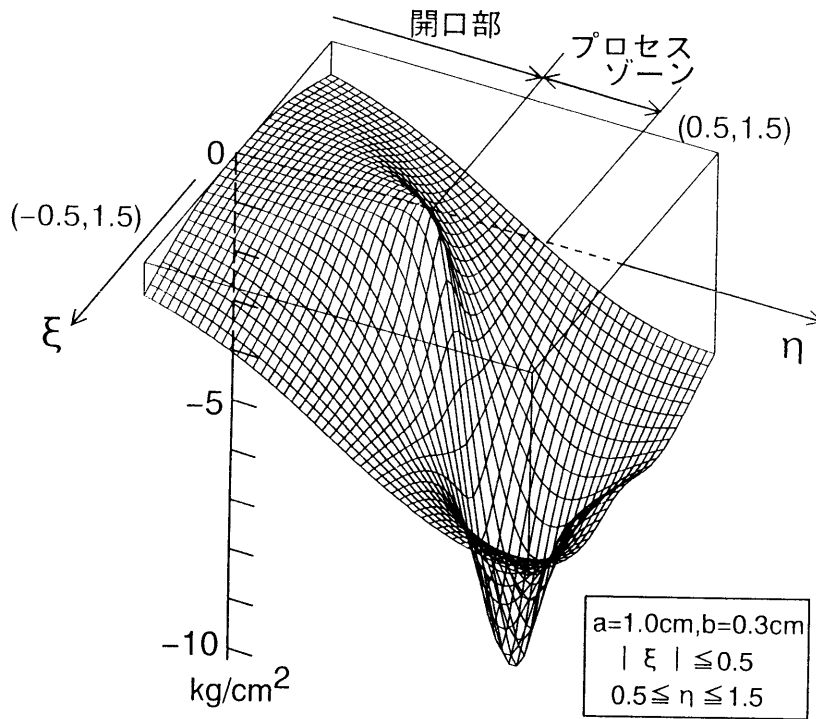


図 7.8 (b) 応力  $\sigma_{\xi}$  曲面詳細図

#### 7.4 き裂に平行な自由辺の構成法

前章で求められた開口関数を活用して、図 7.9 に示すき裂に平行に自由辺のある半無限の直交異方性板の応力集中を表現し得る応力関数を以下の方法で導く。

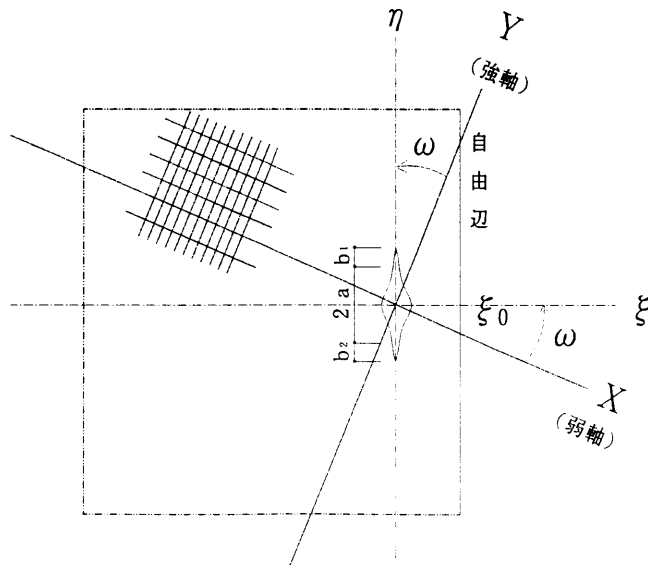


図 7.9 自由辺のあるき裂解析モデル



まず無限板の中央にき裂(あるいは外側き裂)のある解 $W_0$ (式(7.30)~式(7.53)および図7.6に定義したもの)を基にして $\xi = \xi_0$ で $\sigma_\xi = 0$ となる解 $W_1$ を導く。次に $W_0$ と $W_1$ とによって $\xi = \xi_0$ で生じる $\tau_{\xi\eta}$ を消去する解 $W_2$ を導き、これらを重ね合わせることにより $\xi = \xi_0$ を自由辺とする解を求めるものである。(図7.10)

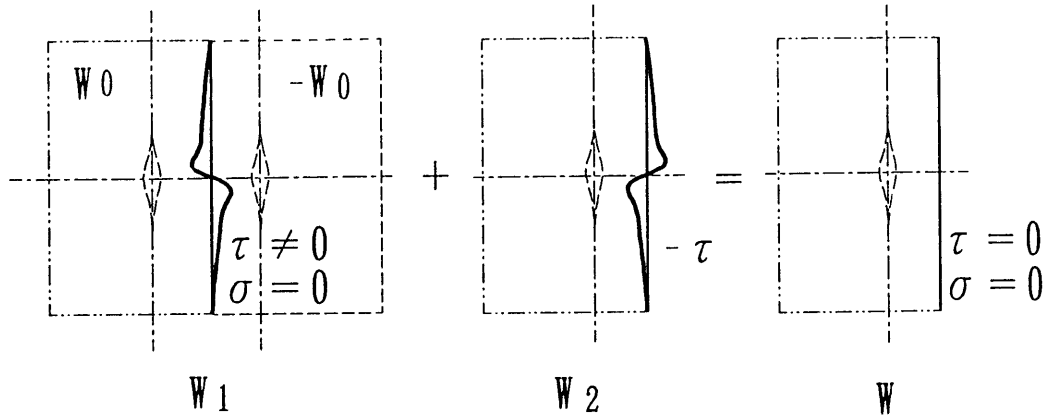


図 7.10 解の重ね合わせによる解析

(1)自由辺上の応力 $\sigma_\xi$ を打消す関数( $W_1$ )

開口関数  $f(z_1)$ 、 $f(z_2)$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= P_1 \xi + i \eta = (p_1 + i q_1) \xi + i \eta \\ z_2 &= P_2 \xi + i \eta = (p_2 + i q_2) \xi + i \eta \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

を代表して、 $f(z_1)$ について述べる。

$$f''(z_1) = f''(p_1 \xi + i(q_1 \xi + \eta)) = f''(X + iY) \quad (7.55)$$

としてみる。ここで変数  $X = p_1 \xi$ 、 $Y = (q_1 \xi + \eta)$ とすると $f''(X + iY)$ は複素関数( $Z = X + iY$ の関数)としてごく一般の形であるから

$$f''(X + iY) = \underbrace{f''_R(X + iY)}_{\text{実数部}} + i \underbrace{f''_I(X + iY)}_{\text{虚数部}} \quad (7.56)$$

と展開されて、 $f''_R(X + iY)$ が $X$ 軸に沿って対称型かつ $Y$ 軸に沿って対称型ならば、 $f''_I(X + iY)$ は軸に沿って逆対称型かつ $Y$ 軸に沿って逆対称型となる。反対に $f''_R(X + iY)$ が $X$ 軸に沿って逆対称型かつ $Y$ 軸に沿って逆対称型ならば、 $f''_I(X + iY)$ は $X$ 軸に沿って対称型かつ $Y$ 軸に沿って対称型となる。

a)  $D_1 f(z_1), D_2 f(z_2)$  に対する  $\sigma_{\xi} = 0$  関数

ここで応力関数を  $X$  軸上に沿って実部対称な関数  $f(z)$  によって

$$\begin{aligned} W &= D_1 f(z_1) + D_2 f(z_2) \\ &= (\alpha_1 + i\beta_1) f(z_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) f(z_2) \end{aligned} \quad (7.57)$$

とする。 $D_1 f(z_1)$  による  $\xi = \xi_0$  上の応力  $\sigma_{\xi}$  を求めると

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \{ D_1 f(z_1) \} \Big|_{\xi = \xi_0} \\ &= -(\alpha_1 + i\beta_1) [ f''_{\mathcal{R}} \{ p_1 \xi_0 + i(q_1 \xi_0 + \eta) \} + \\ &\quad + i f''_{\mathcal{I}} \{ p_1 \xi_0 + i(q_1 \xi_0 + \eta) \} ] \end{aligned} \quad (7.58)$$

となり、実部をとると

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} \Big|_{\xi = \xi_0} &= -\alpha_1 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + \beta_1 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \\ X_0 &= p_1 \xi_0, \quad Y = q_1 \xi_0 + \eta \end{aligned} \quad (7.59)$$

となる。ここで

$$f''_{\mathcal{R}}(X+iY) = f''_{\mathcal{R}}(-X+iY) \quad f''_{\mathcal{I}}(X+iY) = -f''_{\mathcal{I}}(-X+iY)$$

の特性を活用して  $\xi = \xi_0$  線の  $\sigma_{\xi} = 0$  を実現する関数を導くには  $D_1 f(p_1 \xi + i\eta)$  に対して

$-D_1 f\{p_1(\xi - 2\xi_0) + i\eta\}$  として「 $\xi$  軸上を  $2\xi_0$  移動して符号反転」した関数を重ね合わせるだけでは不都合である。なぜならば、

$p_1(\xi - 2\xi_0) = p_1(\xi - 2\xi_0) - i2q_1\xi_0$  となって虚数部  $-i2q_1\xi_0$  が現れて  $i\eta \rightarrow i(-2q_1\xi_0 + \eta)$ 、 $i(q_1\xi + \eta) \rightarrow i(-2q_1\xi_0 + q_1\xi + \eta)$  となって  $\eta$  軸を移動して応力を乱すことになる。したがって  $D_1 f(z_1)$  に対して

$$-\overline{D_1 f\{z_1 - 2p_1 \xi_0 + i2q_1 \xi_0\}} = -\overline{D_1 f\{z_1 - 2p_1 \xi_0\}} \quad (7.60)$$

を重ねるのが良い。

$-\overline{D_1 f\{z_1 - 2p_1 \xi_0\}}$  による  $\xi_0$  線上  $\sigma_{\xi}'$  は

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}' \Big|_{\xi = \xi_0} &= \operatorname{Re} \left[ -\overline{D_1} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f(z_1 - 2p_1 \xi_0) \right]_{\xi = \xi_0} \\ &= \operatorname{Re} [ (\alpha_1 - i\beta_1) f'' \{ p_1(\xi - 2\xi_0) + i(q_1 \xi_0 + \eta) \} ] \\ &= \alpha_1 f''_{\mathcal{R}} \{ -\xi_0 p_1 + i(q_1 \xi_0 + \eta) \} + \\ &\quad \beta_1 f''_{\mathcal{I}} \{ -\xi_0 p_1 + i(q_1 \xi_0 + \eta) \} \\ &= \alpha_1 f''_{\mathcal{R}}(-X_0 + iY) + \beta_1 f''_{\mathcal{I}}(-X_0 + iY) \\ &= \alpha_1 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) - \beta_1 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.61)$$

以上の式(7.59)と式(7.61)より  $D_1 f(z_1) - \overline{D_1 f(z_1 - 2p_1 \xi_0)}$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\sigma_{\xi} = 0$  が実現されることが納得されよう。

同様に、 $D_2 f(z_2) - \overline{D_2 f(z_2 - 2p_2 \xi_0)}$  も  $\xi = \xi_0$  上で  $\sigma_{\xi} = 0$  が実現する。

次に  $D_1 f(z_1) - \overline{D_1 f(z_1 - 2p_1 \xi_0)}$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\tau_{\xi n_1}$  を求める。

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi\eta 1} &= \operatorname{Re}\left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\{D_1 f(z_1) - \overline{D_1} f(z_1 - 2P_1 \xi_0)\}\right]_{\xi=\xi_0} \\
&= -\operatorname{Re}[i D_1 P_1 f''(X_0 + iY) - i \overline{D_1} P_1 f''(-X_0 + iY)] \\
&= -\operatorname{Re}[(-\beta_1 + i\alpha_1)(p_1 + iq_1)\{f''_R(X_0 + iY) + i f''_I(X_0 + iY)\} \\
&\quad - (\beta_1 + i\alpha_1)(p_1 + iq_1)\{f''_R(-X_0 + iY) + i f''_I(-X_0 + iY)\}] \\
&= 2\beta_1 p_1 f''_R(X_0 + iY) + 2\alpha_1 p_1 f''_I(X_0 + iY) \\
&= 2\beta_1 p_1 f''_R(-X_0 + iY) - 2\alpha_1 p_1 f''_I(-X_0 + iY) \tag{7.62}
\end{aligned}$$

同様にして  $D_2 f(z_2) - \overline{D_2} f(z_2 - 2P_2 \xi_0)$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\tau_{\xi\eta 2}$  を求めると

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi\eta 2} \Big|_{\xi=\xi_0} &= 2\beta_2 p_2 f''_R(X_0 + iY) + 2\alpha_2 p_2 f''_I(X_0 + iY) \\
&= 2\beta_2 p_2 f''_R(-X_0 + iY) - 2\alpha_2 p_2 f''_I(-X_0 + iY) \tag{7.63}
\end{aligned}$$

$$X_0 = p_1 \xi_0, Y = q_1 \xi_0 + \eta$$

となる。自由辺上では  $\sigma_\xi = 0$  となるが  $\tau_{\xi\eta}$  は生じていることになる。この曲面が  $W_1$  であり、図 7.11 に示す。  $\xi = \xi_0$  上で  $\sigma_\xi = 0$  となっているが  $\tau_{\xi\eta}$  は残っていることが解る。

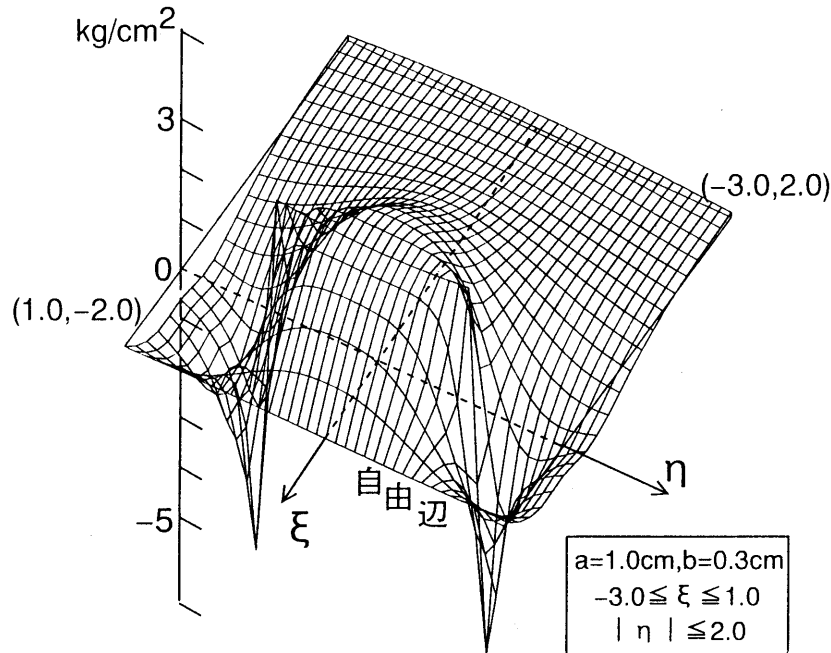


図 7.11 (a)  $W_1$  の応力  $\sigma_\xi$  曲面

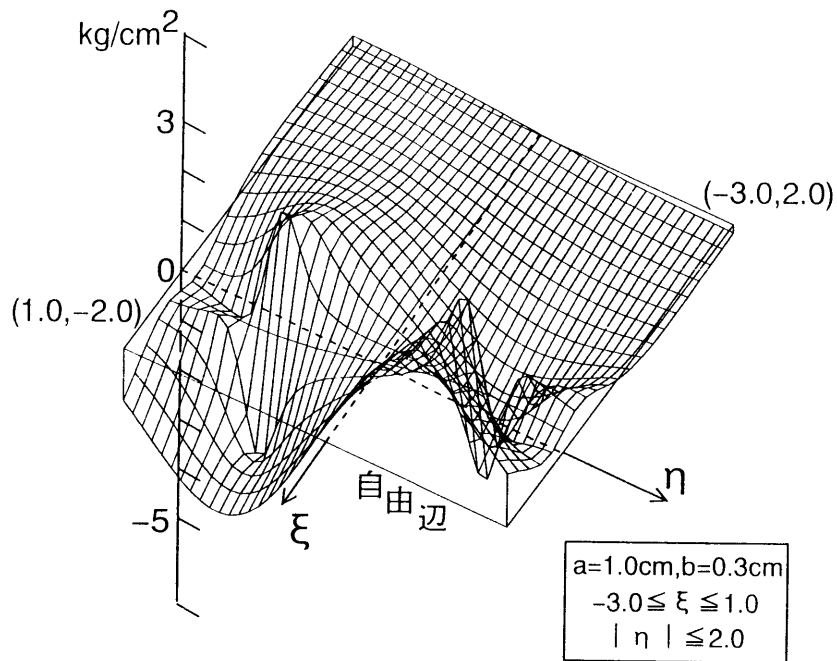


図 7.11 (b)  $W_1$  の応力  $\tau_{\xi\eta}$  曲面

b)  $D_1 f(z_1)$ ,  $D_2 f(z_2)$  に対する  $\sigma_{\xi} \equiv 0$  関数

$D_1 f(z_1) = (\alpha_1 + i\beta_1) i f'(z_1)$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\sigma_{\xi}$  は

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \operatorname{Re}[-(\alpha_1 + i\beta_1) f''(z_1)] \\ &= \operatorname{Re}[-(\alpha_1 + i\beta_1) \{ f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + i f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \}] \\ &= \beta_1 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + \alpha_1 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.64)$$

$X_0 = p_1 \xi_0$ ,  $Y = q_1 \xi_0 + \eta$  となる。

一方  $\overline{D_1 f}(z_1 - 2p_1 \xi_0)$  による  $\xi_0$  線上  $\sigma_{\xi}'$  は

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}' \Big|_{\xi = \xi_0} &= \operatorname{Re}[-(\alpha_1 - i\beta_1) f''(z_1 - 2p_1 \xi_0)] \\ &= \operatorname{Re}[-i(\alpha_1 - i\beta_1) \{ f''_{\mathcal{R}}(-X_0 + iY) + i f''_{\mathcal{I}}(-X_0 + iY) \}] \\ &= -\beta_1 f''_{\mathcal{R}}(-X_0 + iY) + \alpha_1 f''_{\mathcal{I}}(-X_0 + iY) \\ &= -\beta_1 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) - \alpha_1 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.65)$$

となり

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\xi}' = 0 \quad \text{となる。}$$

したがって、 $D_1 f(z_1) + \overline{D_1 f}(z_1 - 2p_1 \xi_0)$

および、

$$D_2 f(z_2) + \overline{D_2 f}(z_2 - 2p_2 \xi_0)$$

の  $\sigma_\xi$  は  $\xi = \xi_0$  上で  $\sigma_\xi = 0$  となる。

次に  $D_1 f(z_1) + \overline{D_1 f(z_1 - 2p_1 \xi_0)}$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\tau_{\xi n_1}$  を求める。

$$\begin{aligned} \tau_{\xi n_1} &= -\operatorname{Re} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \{ D_1 f(z_1) + \overline{D_1 f(z_1 - 2p_1 \xi_0)} \} \right]_{\xi = \xi_0} \\ &= -\operatorname{Re} [i D_1 p_1 i f''(X_0 + iY) + i \overline{D_1 p_1 i f''(-X_0 + iY)}] \\ &= \operatorname{Re} [(\alpha_1 + i\beta_1)(p_1 + iq_1) \{ f''_R(X_0 + iY) + i f''_I(X_0 + iY) \} \\ &\quad + (\alpha_1 - i\beta_1)(p_1 + iq_1) \{ f''_R(-X_0 + iY) + i f''_I(-X_0 + iY) \}] \\ &= 2\alpha_1 p_1 f''_R(X_0 + iY) - 2\beta_1 p_1 f''_I(X_0 + iY) \\ &= 2\alpha_1 p_1 f''_I(X_0 + iY) + 2\beta_1 p_1 f''_R(X_0 + iY) \\ &= 2\alpha_1 p_1 f''_I(-X_0 + iY) - 2\beta_1 p_1 f''_R(-X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.66)$$

同様にして、 $D_2 f(z_2) + \overline{D_2 f(z_2 - 2p_2 \xi_0)}$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\tau_{\xi n_2}$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi n_2} \Big|_{\xi = \xi_0} &= 2\alpha_2 p_2 f''_R(X_0 + iY) - 2\beta_2 p_2 f''_I(X_0 + iY) \\ &= 2\alpha_2 p_2 f''_I(X_0 + iY) + 2\beta_2 p_2 f''_R(X_0 + iY) \\ &= 2\alpha_2 p_2 f''_I(-X_0 + iY) - 2\beta_2 p_2 f''_R(-X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.67)$$

c)  $\frac{D_1}{P_1} f(z_1)$ 、 $\frac{D_2}{P_2} f(z_2)$  に対する  $\sigma_\xi = 0$  関数

$\frac{D_1}{P_1} f(z_1)$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\sigma_\xi$

$\frac{D_1}{P_1} = (a + ib)$  とすると、a) の例  $(\alpha_1 + i\beta_1) f(z_1)$  による応力と同形式となるので、

$$\sigma_\xi \Big|_{\xi = \xi_0} = -a f''_R(X_0 + iY) + b f''_I(X_0 + iY) \quad (7.68)$$

となる。これに対して

$\frac{\overline{D_1}}{P_1} f(z_1 - 2p_1 \xi_0)$  による  $\xi_0$  上の応力は  $\frac{\overline{D_1}}{P_1} = (a - ib)$  となるので、

$(\alpha_1 - i\beta_1) f(z_1 - 2p_1 \xi_0)$  と同型となって

$\sigma_\xi' \Big|_{\xi = \xi_0} = a f''_R(X_0 + iY) - b f''_I(X_0 + iY)$  となって互に  $\xi_0$  上で打ち消すことが判る。

したがって

$\frac{D_1}{P_1} f(z_1) - \frac{\overline{D_1}}{P_1} f(z_1 - 2p_1 \xi_0)$  および  $\frac{D_2}{P_2} f(z_2) - \frac{\overline{D_2}}{P_2} f(z_2 - 2p_2 \xi_0)$  は

$\xi = \xi_0$ 上で  $\sigma_{\xi} \equiv 0$  が実現されることが判る。

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{P_1} f(z_1) - \overline{\frac{D_1}{P_1}} f(z_1 - 2p_1 \xi_0) \text{ による } \xi_0 \text{ 線上の } \tau_{\xi_{n1}} \\ \frac{D_1}{P_1} = \frac{(a_1 + i\beta_1)}{p_1 + iq_1} = (a_1 + i\beta_1)(p_{v1} + iq_{v1}) \\ = (a_1 p_{v1} - \beta_1 q_{v1}) + i(a_1 q_{v1} + \beta_1 p_{v1}) \\ = a_1 + ib_1 \end{aligned} \quad (7.69)$$

とすると a) との相似性より

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_{n1}} &= 2b_1 p_1 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + 2a_1 p_1 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \\ &= 2p_1 (a_1 q_{v1} + \beta_1 p_{v1}) f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + 2p_1 (a_1 p_{v1} - \beta_1 q_{v1}) f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.70)$$

$$\frac{1}{p_1 + iq_1} = \frac{p_1 - iq_1}{p_1^2 + q_1^2}, \quad p_{v1} = \frac{p_1}{p_1^2 + q_1^2}, \quad q_{v1} = \frac{-q_1}{p_1^2 + q_1^2} \quad \text{より}$$

$$\tau_{\xi_{n1}} = 2p_{v1} (p_1 \beta_1 - q_1 a_1) f''_{\mathcal{R}}(-X_0 + iY) - 2p_{v1} (p_1 a_1 + q_1 \beta_1) f''_{\mathcal{I}}(-X_0 + iY) \quad (7.71)$$

とも書ける。

$$\frac{D_2}{P_2} f(z_2) - \overline{\frac{D_2}{P_2}} f(z_2 - 2p_2 \xi_0) \text{ による } \xi_0 \text{ 線上の } \tau_{\xi_{n2}} \text{ は相似性により}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_{n2}} &= 2b_2 p_2 f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + 2a_2 p_2 f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \\ &= 2p_2 (a_2 q_{v2} + \beta_2 p_{v2}) f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + 2p_2 (a_2 p_{v2} - \beta_2 q_{v2}) f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \\ &= 2p_{v2} (p_2 \beta_2 - q_2 a_2) f''_{\mathcal{R}}(-X_0 + iY) - 2p_{v2} (p_2 a_2 + q_2 \beta_2) f''_{\mathcal{I}}(-X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.72)$$

と書ける。

d)  $\frac{D_1}{P_1} f(z_1)$ 、 $\frac{D_2}{P_2} f(z_2)$  に対する  $\sigma_{\xi} \equiv 0$  関数

$\frac{D_1}{P_1} f(z_1)$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\sigma_{\xi}$  を求めるについて、

$\frac{D_1}{P_1} = (a + ib)$  とすると、b) の場合  $(a_1 + i\beta_1) f(z_1)$  と同様になり

$$\sigma_{\xi} \Big|_{\xi = \xi_0} = b f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) + a f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \text{ となる。}$$

$\overline{\frac{D_1}{P_1}} f(z_1 - 2p_1 \xi_0)$  による  $\xi = \xi_0$  上の  $\sigma_{\xi}'$  は

$$\sigma_{\xi}' = -b f''_{\mathcal{R}}(X_0 + iY) - a f''_{\mathcal{I}}(X_0 + iY) \quad (7.73)$$

となって、お互いに打ち消しあう。

よって  $if(z_1)=f(z_1)$   $if(z_2)=f(z_2)$ において

$$\frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{\bar{D}_1}{P_1} f(z_1 - 2p_1 \xi_0) \quad \text{および} \quad \frac{D_2}{P_2} f(z_2) + \frac{\bar{D}_2}{P_2} f(z_2 - 2p_2 \xi_0)$$

は  $\xi = \xi_0$ 上で  $\sigma_\xi = 0$  が実現されることが判る。

$$\frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{\bar{D}_1}{P_1} f(z_1 - 2p_1 \xi_0) \quad \text{による} \quad \xi_0 \text{線上の} \tau_{\xi_{n1}}$$

$$f(z_1) = if(z_1) \quad f(z_2) = if(z_2)$$

$$\frac{D_1}{P_1} = (\alpha_1 + i\beta_1)(p_{v1} + iq_{v1}) = (\alpha_1 + i\beta_1) \quad (7.74)$$

$$\frac{1}{p_1 + iq_1} = p_{v1} + iq_{v1} = \frac{p_1}{p_1^2 + q_1^2} - i \frac{q_1}{p_1^2 + q_1^2}$$

b)との相似性より  $\xi_0$ 線上の  $\tau_{\xi_{n1}}$ は

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_{n1}} &= 2b_1 p_1 f''_R(X_0 + iY) + 2a_1 p_1 f''_I(X_0 + iY) \\ &= 2p_1 (\alpha_1 q_{v1} + \beta_1 p_{v1}) f''_R(X_0 + iY) + 2p_1 (\alpha_1 p_{v1} - \beta_1 q_{v1}) f''_I(X_0 + iY) \\ &= -2p_{v1} (p_1 \beta_1 - q_1 \alpha_1) f''_R(-X_0 + iY) + 2p_{v1} (p_1 \alpha_1 + q_1 \beta_1) f''_I(-X_0 + iY) \end{aligned} \quad (7.75)$$

となる。

$$\frac{D_2}{P_2} f(z_2) + \frac{\bar{D}_2}{P_2} f(z_2 - 2p_2 \xi_0) \quad \text{による} \quad \xi_0 \text{線上の} \tau_{\xi_{n2}}$$

同様にして以下のようなになる。

$$\tau_{\xi_{n2}} = -2p_{v2} (p_2 \beta_2 - q_2 \alpha_2) f''_R(-X_0 + iY) + 2p_{v2} (p_2 \alpha_2 + q_2 \beta_2) f''_I(-X_0 + iY) \quad (7.76)$$

e) 開口と自由辺上の応力  $\sigma_\xi = 0$  ( $\tau_{\xi_n} \neq 0$ ) を構成する曲面のまとめ

開口関数  $f(\ )$ 系

$$f(X+iY) = f_R(X+iY) + if_I(X+iY) \quad (7.77)$$

X軸とそれに平行な線上で  $f''_R(X+iY)$ が対称

$$f_S(X+iY) = f_{SR}(X+iY) + if_{SI}(X+iY) \quad (7.78)$$

Y軸上で  $f''_{SR}(X+iY)$ が対称図形

$$f_a(X+iY) = f_{aR}(X+iY) + if_{aI}(X+iY) \quad (7.79)$$

Y軸上で  $f''_{aR}(X+iY)$ が逆対称図形

開口関数  $f(\ )$ 系

$$\begin{aligned} f(\ ) &= if(X+iY) \\ &= f_R(\ ) + if_I(\ ) = -f_I(\ ) + if_R(\ ) \end{aligned} \quad (7.80)$$

となって、 $f(\ )$ 系とは対称と逆対称性が反対となる。

次にせん断力打ち消し曲面を導く必要がある。

**(2)  $\xi = \xi_0$ 上のせん断力打ち消し曲面 ( $W_2$ )**

前節の  $\xi = 0$  線上では開口、 $\xi = \xi_0$ では  $\sigma_\xi \equiv 0$  という解は  $\xi_0$ 線上で

$\tau_{\xi\eta} = A f''_R(-X_0+iY) + B f''_I(-X_0+iY)$  という形状の  $\tau_{\xi\eta}$ を生じている。この  $\xi_0$ 線上の  $\tau_{\xi\eta}$ を消去するために次のような関数を導く。

- 1)  $\xi < \xi_0$ で特異点を持たないこと
- 2)  $\xi = \xi_0$ 線上で  $\sigma_\xi \equiv 0$
- 3)  $\xi = \xi_0$ 線上の  $\tau_{\xi\eta}$ が  $f''_R(-X_0+iY)$ ,  $f''_I(-X_0+iY)$  の組み合わせで構成されていること

ここで求める関数を以下の式と仮定する。

$$\begin{aligned} W_2 &= C_1 [ f \{ P_1(\xi - \xi_0) - \bar{P}_1 \xi_0 + i\eta \} - f \{ P_2(\xi - \xi_0) - \bar{P}_1 \xi_0 + i\eta \} ] \\ &\quad + C_2 [ f \{ P_2(\xi - \xi_0) - \bar{P}_2 \xi_0 + i\eta \} - f \{ P_1(\xi - \xi_0) - \bar{P}_2 \xi_0 + i\eta \} ] \\ &= C_1 [ f \{ z_1 - (P_1 + \bar{P}_1) \xi_0 \} - f \{ z_2 - (P_2 + \bar{P}_1) \xi_0 \} ] \\ &\quad + C_2 [ f \{ z_2 - (P_2 + \bar{P}_2) \xi_0 \} - f \{ z_1 - (P_1 + \bar{P}_2) \xi_0 \} ] \end{aligned} \quad (7.81)$$

$\xi = \xi_0$ 線上で  $\sigma_\xi$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_\xi \Big|_{\xi=\xi_0} &= \text{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} W_2 \right)_{\xi=\xi_0} \\ &= -\text{Re} [ C_1 f''(-\bar{P}_1 \xi_0 + i\eta) - C_1 f''(-\bar{P}_1 \xi_0 + i\eta) \\ &\quad + C_2 f''(-\bar{P}_2 \xi_0 + i\eta) - C_2 f''(-\bar{P}_2 \xi_0 + i\eta) ] \\ &= -\text{Re} [ C_1 f''(-X_{01} + iY_1) - C_1 f''(-X_0 + iY_1) + C_2 f''(-X_{02} + iY_2) - C_2 f''(-X_0 + iY_2) ] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned} -X_{01} &= -P_1 \xi_0 & Y_1 &= p_1 \xi_0 + Y \\ -X_{02} &= -P_2 \xi_0 & Y_2 &= p_2 \xi_0 + Y \end{aligned} \quad (7.83)$$

であるから  $\sigma_\xi \equiv 0$  は満足されている。

$W_2$ による  $\xi_0$ 線上で  $\tau_{\xi\eta}$ をもとめる。ここで  $C_1 = c_1 + ir_1$ 、 $C_2 = c_2 + ir_2$  とする。

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} \Big|_{\xi=\xi_0} &= \text{Re} \left[ - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} W_2 \right] \\ &= -\text{Re} \left[ i [ P_1 f''(z_1 - 2P_1 \xi_0) - P_2 f''(z_1 - (P_2 + \bar{P}_1) \xi_0) ] C_1 \right. \\ &\quad \left. + i [ P_2 f''(z_2 - 2P_2 \xi_0) - P_1 f''(z_1 - (P_1 + \bar{P}_2) \xi_0) ] C_2 \right]_{\xi_0} \\ &= -\text{Re} [ i C_1 P_1 f''(-X_{01} + iY_1) - i C_1 P_2 f''(-X_{01} + iY_1) \\ &\quad + i C_2 P_2 f''(-X_{02} + iY_2) - i C_2 P_1 f''(-X_{02} + iY_2) ] \\ &= \text{Re} [ (r_1 - ic_1)(p_1 + iq_1) \{ f''_R(-X_{01} + iY_1) + i f''_I(-X_{01} + iY_1) \} \\ &\quad - (r_1 - ic_1)(p_2 + iq_2) \{ f''_R(-X_{01} + iY_1) + i f''_I(-X_{01} + iY_1) \} \\ &\quad + (r_2 - ic_2)(p_2 + iq_2) \{ f''_R(-X_{02} + iY_2) + i f''_I(-X_{02} + iY_2) \} \\ &\quad - (r_2 - ic_2)(p_1 + iq_1) \{ f''_R(-X_{02} + iY_2) + i f''_I(-X_{02} + iY_2) \} ] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +iY_2)+i f''_1(-X_{02}+iY_2)\}}] \\
= & \{c_1(q_1-q_2)+r_1(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{01}+iY_1) \\
& +\{c_1(p_1-p_2)-r_1(q_1-q_2)\} f''_I(-X_{01}+iY_1) \\
& -\{c_2(q_1-q_2)+r_2(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{02}+iY_2) \\
& -\{c_2(p_1-p_2)-r_2(q_1-q_2)\} f''_I(-X_{02}+iY_2)
\end{aligned} \tag{7.84}$$

a) 自由辺上で  $\sigma_\xi \equiv 0$ 、T型の解の  $\tau_{\xi_n}$  打ち消し曲面

$$\begin{aligned}
W_1 = & \overline{D}_1 f(z_1) - D_1 f(z_1 - 2P_1 \xi_0) \\
& - \{D_1 f(z_2) - \overline{D}_1 f(z_2 - 2P_2 \xi_0)\}
\end{aligned} \tag{7.85}$$

この関数の  $\xi_0$  線上(自由辺)上の  $\tau_{\xi_n}$  は

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi_n} = & 2\beta_1 p_1 f''_R(-X_{01}+iY_1) - 2\alpha_1 p_1 f''_I(-X_{01}+iY_1) \\
& + 2\beta_2 p_2 f''_R(-X_{02}+iY_2) - 2\alpha_2 p_2 f''_I(-X_{02}+iY_2)
\end{aligned} \tag{7.86}$$

であり、他方せん断力打ち消し曲面  $W_2$  による  $\xi_0$  線上の  $\tau_{\xi_n}'$  は

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi_n}' = & \{c_1(q_1-q_2)+r_1(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{01}+iY_1) \\
& +\{c_1(q_1-q_2)-r_1(p_1-p_2)\} f''_I(-X_{01}+iY_1) \\
& -\{c_2(q_1-q_2)+r_2(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{02}+iY_2) \\
& -\{c_2(q_1-q_2)-r_2(p_1-p_2)\} f''_I(-X_{02}+iY_2)
\end{aligned} \tag{7.87}$$

である。したがって、 $\tau_{\xi_n} + \tau_{\xi_n}' = 0$  を満足させるには

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ (p_1-p_2) & -(q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = -2P_1 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \tag{7.88}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ (p_1-p_2) & -(q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ r_2 \end{bmatrix} &= -2P_2 \begin{bmatrix} \beta_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix} \\
&= -2P_2 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.89}$$

となればよい。この連立方程式を解いて  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  を求めて  $W_2$  を完成させる。(図 7.12)

b)  $\sigma_\xi \equiv 0$ 、T型、 $f(Z)$ 型の解の  $\tau_{\xi_n}$  打ち消し曲面

$$\begin{aligned}
W_1 = & D_1 f(z_1) + \overline{D}_1 f(z_1 - 2P_1 \xi_0) \\
& + \{D_2 f(z_2) + \overline{D}_2 f(z_2 - 2P_2 \xi_0)\}
\end{aligned} \tag{7.90}$$

この関数の  $\xi_0$  線上(自由辺)上の  $\tau_{\xi_n}$  は

$$\begin{aligned}
\tau_{\xi_n} = & 2\alpha_1 p_1 f''_I(-X_{01}+iY_1) - 2\beta_1 p_1 f''_R(-X_{01}+iY_1) \\
& + 2\alpha_2 p_2 f''_I(-X_{02}+iY_2) - 2\beta_2 p_2 f''_R(-X_{02}+iY_2)
\end{aligned} \tag{7.91}$$

であり、他方せん断力打ち消し曲面 $W_2$ による $\xi_0$ 線上の $\tau_{\xi_n}'$ は

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_n}' = & \{c_1(p_1-p_2)-r_1(q_1-q_2)\} f''_i(-X_{01}+iY_1) \\ & + \{c_1(q_1-q_2)+r_1(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{01}+iY_1) \\ & - \{c_2(p_1-p_2)-r_2(q_1-q_2)\} f''_i(-X_{02}+iY_2) \\ & - \{c_2(q_1-q_2)+r_2(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{02}+iY_2) \end{aligned} \quad (7.92)$$

である。したがって、 $\tau_{\xi_n} + \tau_{\xi_n}' = 0$ を満足させるには

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ -(p_1-p_2) & (q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ r_1 \end{Bmatrix} = +2p_1 \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (7.93)$$

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ (p_1-p_2) & -(q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ r_2 \end{Bmatrix} = -2p_2 \begin{Bmatrix} \beta_2 \\ -\alpha_2 \end{Bmatrix} = +2p_2 \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ -\alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (7.94)$$

**a)**と**b)**は $f(\cdot)$ と $if(\cdot) = f(\cdot)$ であり実数と虚数が交代可能となっている。これはいづれも活用できる。

**c)**  $\tau_{\xi_n} = 0$ 、**N**型の解の $\tau_{\xi_n}$ 打ち消し曲面

$$W = \frac{D_1}{P_1} f(z_1) - \frac{\overline{D_1}}{P_1} f(z_1 - 2p_1 \xi_0) + \left\{ \frac{D_2}{P_2} f(z_2) - \frac{\overline{D_2}}{P_2} f(z_2 - 2p_2 \xi_0) \right\} \quad (7.95)$$

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = C_0 \quad \text{が実数なら} \quad \beta_1 = - \frac{(q_{v1}-q_{v2})}{(p_{v1}-p_{v2})} \alpha_1 \quad \text{系と}$$

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = i C_0 \quad \text{が虚数なら} \quad \beta_1 = \frac{(p_{v1}-p_{v2})}{(q_{v1}-q_{v2})} \alpha_1 \quad \text{系があり、}$$

いづれの場合も $\xi_0$ 線上の $\tau_{\xi_n}$ は次の式となる。

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_n} = & 2p_{v1}(p_1 \beta_1 - q_1 \alpha_1) f''_R(-X_{01}+iY_1) - 2p_{v1}(p_1 \alpha_1 + q_1 \beta_1) f''_i(-X_{01}+iY_1) \\ & + 2p_{v2}(p_2 \beta_2 - q_2 \alpha_2) f''_R(-X_{02}+iY_2) - 2p_{v2}(p_2 \alpha_2 + q_2 \beta_2) f''_i(-X_{02}+iY_2) \end{aligned} \quad (7.96)$$

せん断打ち消し曲面その1による $\xi_0$ 線上の $\tau_{\xi_n}'$ は

$$\begin{aligned} \tau_{\xi_n}' = & \{c_1(q_1-q_2)+r_1(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{01}+iY_1) \\ & + \{c_1(p_1-p_2)-r_1(q_1-q_2)\} f''_i(-X_{01}+iY_1) \\ & - \{c_2(q_1-q_2)+r_2(p_1-p_2)\} f''_R(-X_{02}+iY_2) \\ & - \{c_2(p_1-p_2)-r_2(q_1-q_2)\} f''_i(-X_{02}+iY_2) \end{aligned} \quad (7.97)$$

ここで、 $\tau_{\xi_n} + \tau_{\xi_n}' = 0$ を満足させるには次のように $c_1$ 、 $c_2$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ が条件付けられる。

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ (p_1-p_2) & -(q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ r_1 \end{Bmatrix} = 2p_{v1} \begin{bmatrix} q_1 & -p_1 \\ p_1 & q_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (7.98)$$

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2) & (p_1-p_2) \\ (p_1-p_2) & -(q_1-q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ r_2 \end{Bmatrix} = 2p_{v2} \begin{bmatrix} -q_2 & p_2 \\ -p_2 & -q_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = 2p_{v2} \begin{bmatrix} q_2 & -p_2 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (7.99)$$

この $c_1$ 、 $c_2$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ を $W_2$ に代入すればよい。

d)  $\tau_{\xi_n} = 0$ 、N型の解の $\tau_{\xi_n}$ 打ち消し曲面

$$W = \frac{D_1}{P_1} f(z_1) + \frac{\overline{D_1}}{P_1} f(\overline{z_1 - 2p_1 \xi_0}) + \left\{ \frac{D_2}{P_2} f(z_2) + \frac{\overline{D_2}}{P_2} f(\overline{z_2 - 2p_2 \xi_0}) \right\} \quad (7.100)$$

$$D_1 + D_2 = 0$$

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = C_0 \quad \text{が実数なら} \quad \beta_1 = - \frac{(q_{v1} - q_{v2})}{(p_{v1} - p_{v2})} a_1$$

$$D_1 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right) = i C_0 \quad \text{が虚数なら} \quad \beta_1 = \frac{(p_{v1} - p_{v2})}{(q_{v1} - q_{v2})} a_1$$

このいずれの場合も $\xi$ 上の $\tau_{\xi_n}$ は次の式となる。

$$\tau_{\xi_{n1}} = 2p_{v1}(q_1 a_1 - p_1 \beta_1) f''_R(-X_{01} + iY_1) + 2p_{v1}(p_1 a_1 + q_1 \beta_1) f''_I(-X_{01} + iY_1) \\ + 2p_{v2}(q_2 a_2 - p_2 \beta_2) f''_R(-X_{02} + iY_2) + 2p_{v2}(p_2 a_2 + q_2 \beta_2) f''_I(-X_{02} + iY_2) \quad (7.101)$$

せん断打ち消し曲面 $W_1$ による $\xi_0$ 線上の $\tau_{\xi_n}'$ は

$$\tau_{\xi_n}' = \{c_1'(q_1 - q_2) + r_1'(p_1 - p_2)\} f''_R(-X_{01} + iY_1) \\ + \{c_1'(p_1 - p_2) - r_1'(q_1 - q_2)\} f''_I(-X_{01} + iY_1) \\ - \{c_2'(q_1 - q_2) + r_2'(p_1 - p_2)\} f''_R(-X_{02} + iY_2) \\ - \{c_2'(p_1 - p_2) - r_2'(q_1 - q_2)\} f''_I(-X_{02} + iY_2) \quad (7.102)$$

ここで、 $\tau_{\xi_n} + \tau_{\xi_n}' = 0$ を満足させるには次のように $c_1$ 、 $c_2$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ が条件付けられる。

$$\begin{bmatrix} (q_1 - q_2), & (p_1 - p_2) \\ (p_1 - p_2), & -(q_1 - q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1' \\ r_1' \end{Bmatrix} = -2P_{v1} \begin{bmatrix} q_1, & -p_1 \\ p_1, & -q_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (q_1 - q_2), & (p_1 - p_2) \\ (p_1 - p_2), & -(q_1 - q_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2' \\ r_2' \end{Bmatrix} = 2P_{v2} \begin{bmatrix} q_2, & -p_2 \\ -p_2, & -q_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = -2P_{v2} \begin{bmatrix} q_2, & -p_2 \\ p_2, & q_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (7.103)$$

この $c_1$ 、 $c_2$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ を $W_1$ に代入すればよい。

自由辺に平行なき裂を有する半無限板の応力集中を表現しうる応力関数は、無限板の中央き裂(外側き裂)である解 $W_0$ を利用して $\xi = \xi_0$ で $W_0$ による応力 $\sigma_\xi$ を0とする $W_1$ および $W_1$ によって $\xi = \xi_0$ で生じる $\tau_{\xi_n}$ を消去する解 $W_2$ を重ね合わせるにより求められることを示した。

本論文の方法によれば、自由辺に平行な複数のき裂がある場合にも発展させることが可能である。

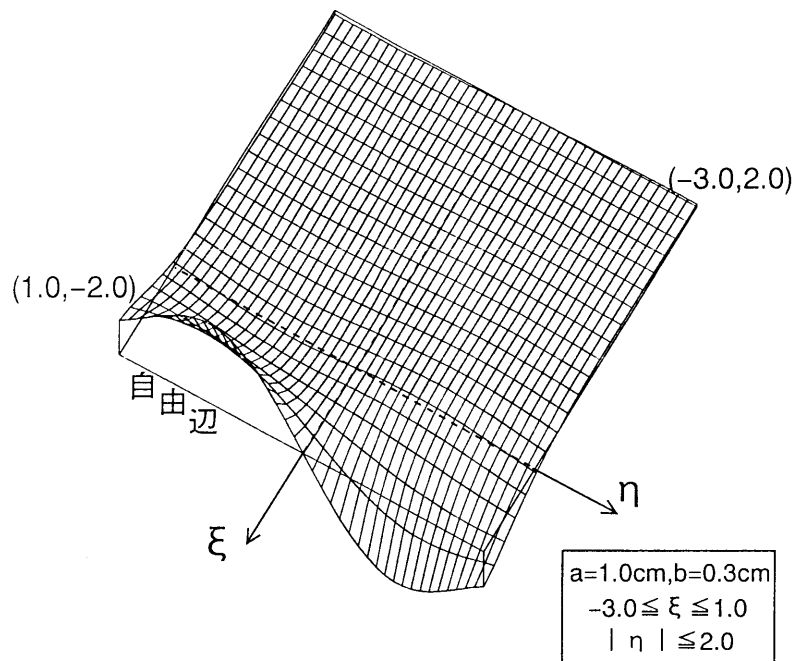


図 7.12 せん断力打ち消し曲面 $W_2$

## 7.5 解析例

異方性の岩盤内に内在するき裂に内圧が作用した場合の解析例と具体的な適応例としてダムのコンソリデーショングラウト工施工による地盤の隆起と変形の解析例を示す。

### (1) 岩盤内のき裂に内圧( $\sigma_0=1.0 \text{ kg/cm}^2$ )が作用する場合

図 7.13に示すように異方性岩盤内の自由表面近傍に開口部長さ $2a=2\text{cm}$ 、プロセスゾーン長さ  $b=0.3\text{cm}$  のき裂があるものとする。弾性係数を  $B_x=25,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_y=50,000 \text{ kg/cm}^2$ 、ねじり定数  $\kappa=0.6$  ポアソン比  $\nu=0.25$  とする。

自由辺までの距離 ( $\xi_0$ )をき裂長さと等しく最弱軸の主軸角度を30度とした場合の計算結果(変位  $u$ ,  $\sigma_\xi$ ,  $\tau_{\xi\eta}$ )を図 7.14~16に示す。この場合の曲面はき裂に内圧( $1 \text{ kg/cm}^2$ )が作用しているものとなっているが、自由辺上の応力は  $\sigma_\xi=0$ 、 $\tau_{\xi\eta}=0$  となり完全に境界条件は満足されている。

図 7.17には自由辺までの距離を変化させた場合の結果を示す。き裂が自由辺に近接するほど応力の集中が大きくなり特に自由辺までの距離( $\xi_0$ )がき裂半長  $a$  より小さくなると集中の程度が急増加することがわかる。

図 7.18には主軸角度の変化に対する応力の変化の関係を表している。図 7.19にはき裂線上の応力  $\sigma_\xi$ を示す。これは完全開口部の内圧分布は完全に一様ではなく多少の不均等性は残存するが開口用の内圧分布としては工学的に許容し得るものであろう。なお、プロセスゾーンで滑らかな応力変化を表現できていることは納得できよう。

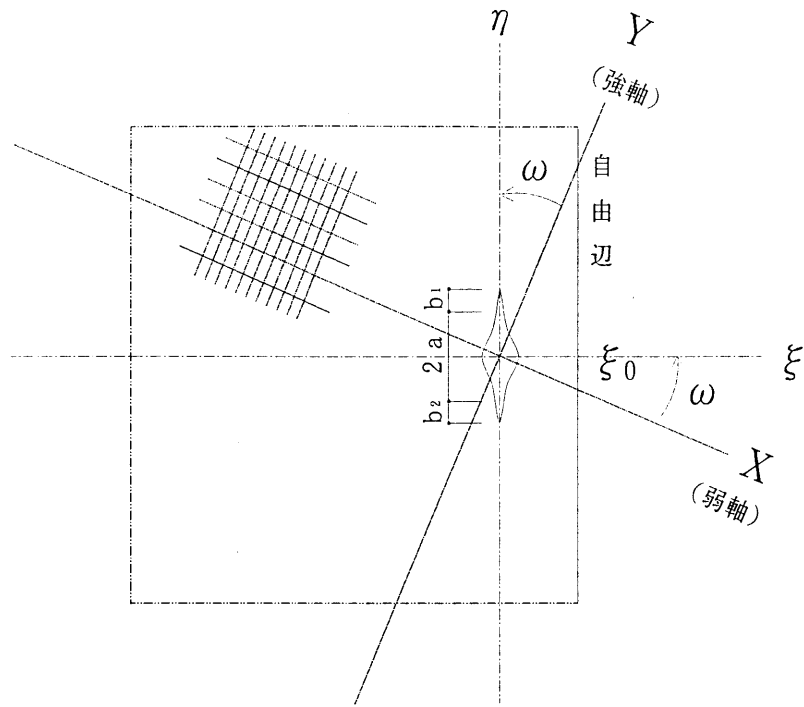


図 7.13 解析モデル

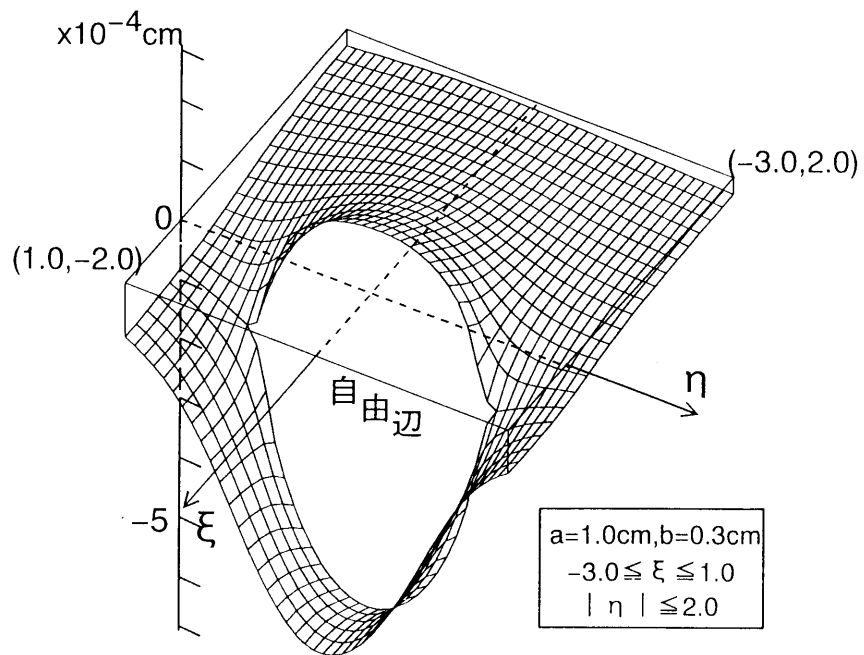


図 7.14 変位  $u$

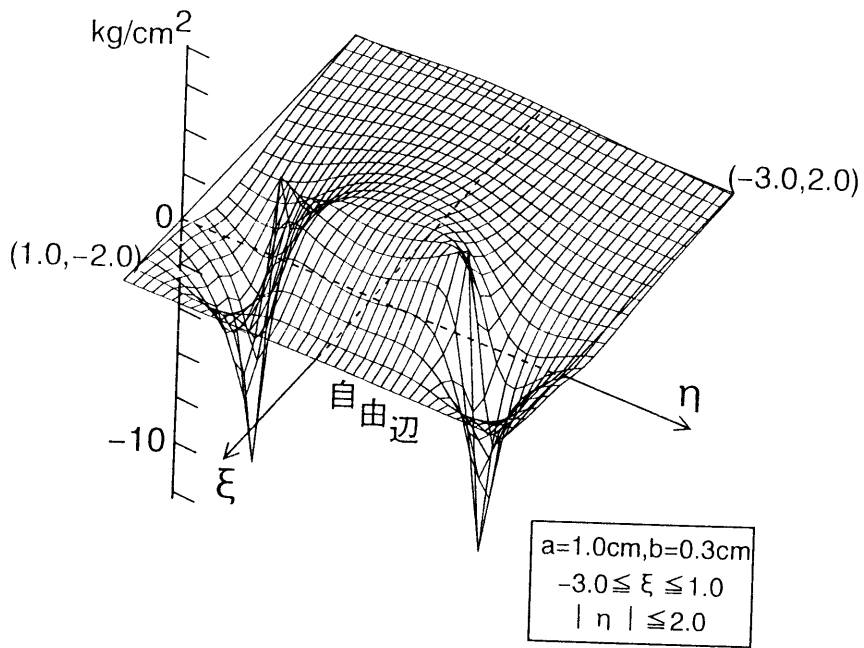


图 7.15 应力  $\sigma_{\xi}$

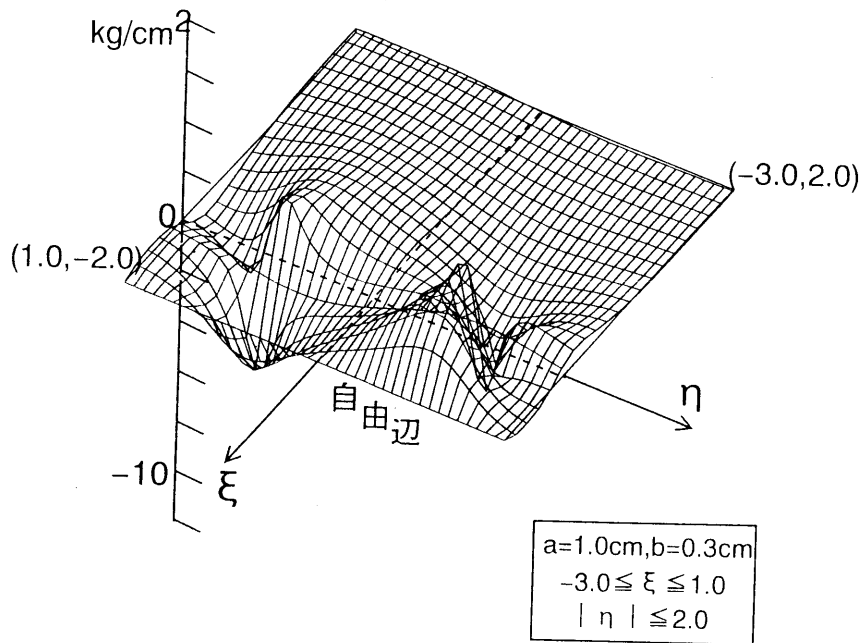
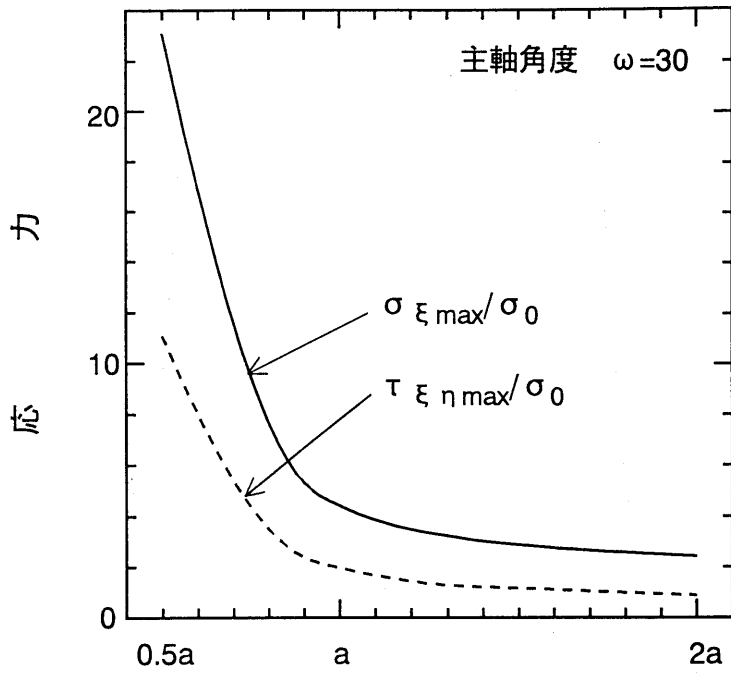


图 7.16 应力  $\tau_{\xi\eta}$



内圧作用位置から自由辺までの距離

図 7.17 自由辺への近接効果

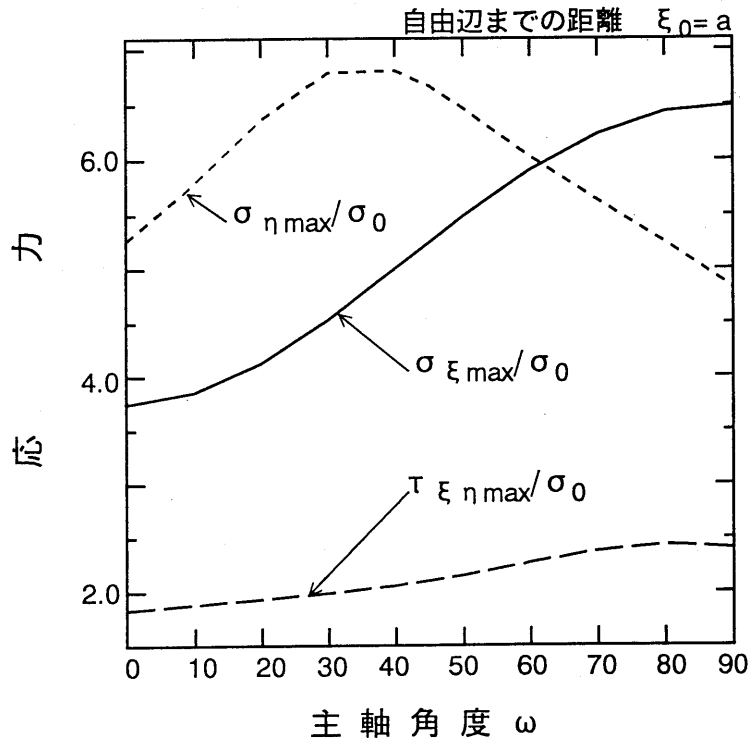


図 7.18 主軸角度と応力

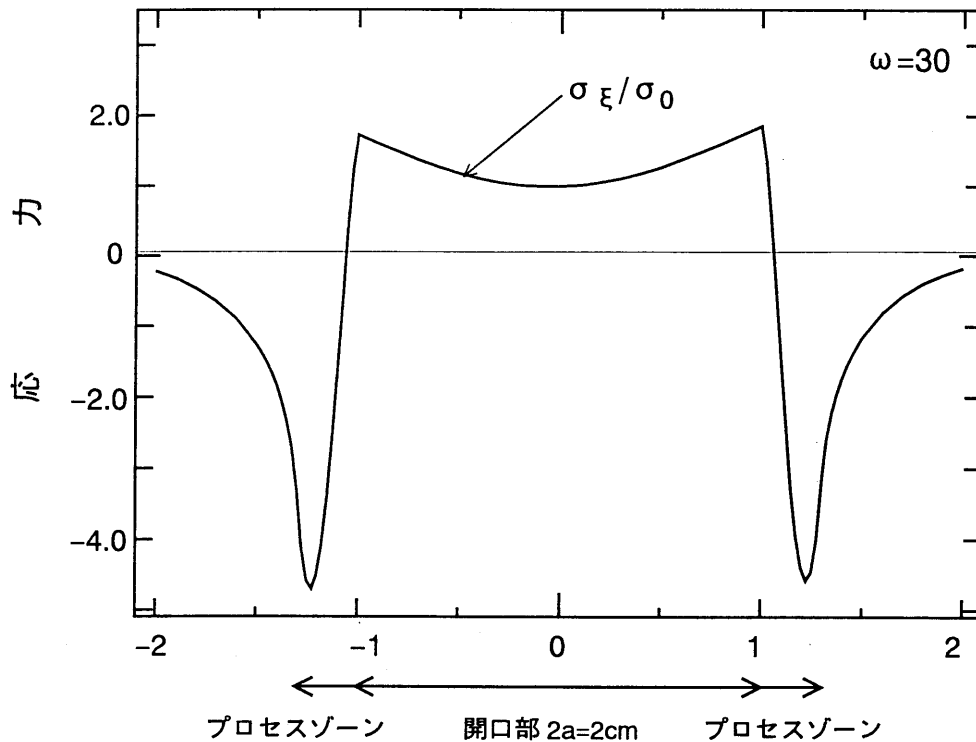


図 7.19  $\eta$  軸上の応力  $\sigma_{\xi}$

## (2) ダム基礎のコンソリデーショングラウト施工時の岩盤変形

ダムを施工するために基礎岩盤を掘削すると、荷重除荷による応力解放や発破・重機振動などの要因により基礎岩盤の節理の開口が助長され基礎地盤の機能が低下する。そのため地盤強化および透水性改良の目的でセメントミルクなどを注入するグラウト工が施工される。コンソリデーショングラウトの場合深度が5～10m程度が多く比較的浅いため注入圧力により岩盤が隆起してしまうことがある。このため施工時にグラウト注入量・圧力の管理の他に岩盤変位計を設置して岩盤の隆起を計測することが行われる。隆起の管理限界値としては基礎岩盤の条件にもよるが実績として注入1ステージあたり0.1～2mm程度が多い<sup>19)</sup>。

一適用例として、異方性岩盤の変形係数を $B_x=5,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $B_y=10,000 \text{ kg/cm}^2$ 、ねじり定数 $\kappa=0.6$ 、ポアソン比 $\nu=0.2$ と仮定する。(図 7.20)注入圧は $5 \text{ kg/cm}^2$ 、き裂長さを注入半径と考え $a=1.25\text{m}$ 、プロセスゾーン長さ $b=0.1\text{m}$ 、注入深さを $5\text{m}$ 、主軸角度 $\omega$ を $0$ 、 $15$ 、 $30$ 度とした場合の岩盤地表面変位を図 7.21に示す。あるダムのグラウト注入試験(主軸傾斜角度は地質調査から約 $15$ 度と推定)では注入孔から $1.8\text{m}$ 離れた位置での隆起が $0.16\text{mm} \sim 0.96\text{mm}$ 程度の計測結果を得ており、これを図中に併記する<sup>20)</sup>。3次元問題を2次元で扱うので厳密さを欠くが、本解析例としては比較的よく一致しているとみなしてよいと思われる。

弱軸角度が変化するとその影響で岩盤地表面変位(自由面)が大きくなりその形状が $\xi$ 軸に対して非対称形となることが判る。



図 7.22 は上記データのもとで注入半径を一定として、プロセスゾーンの長さを変化させたときの岩盤地表面変位の結果を示したものである。プロセスゾーンの長さが大きくなると岩盤地表面変位も増加することがわかる。本解析方法によれば諸剛性値や主軸角、自由辺までの距離等も考慮できるためこれらの実務的な問題に活用できる。

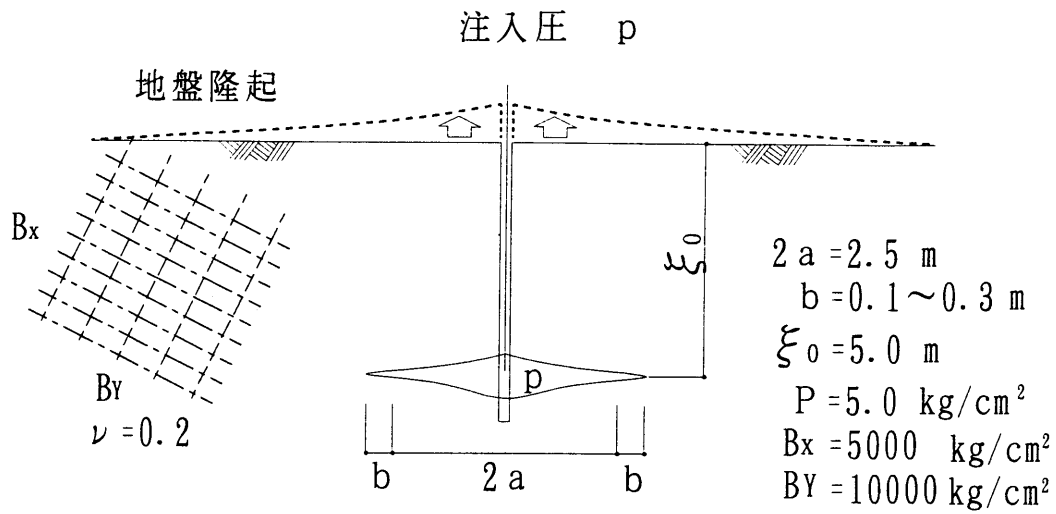


図 7.20 グラウト工による地盤隆起解析

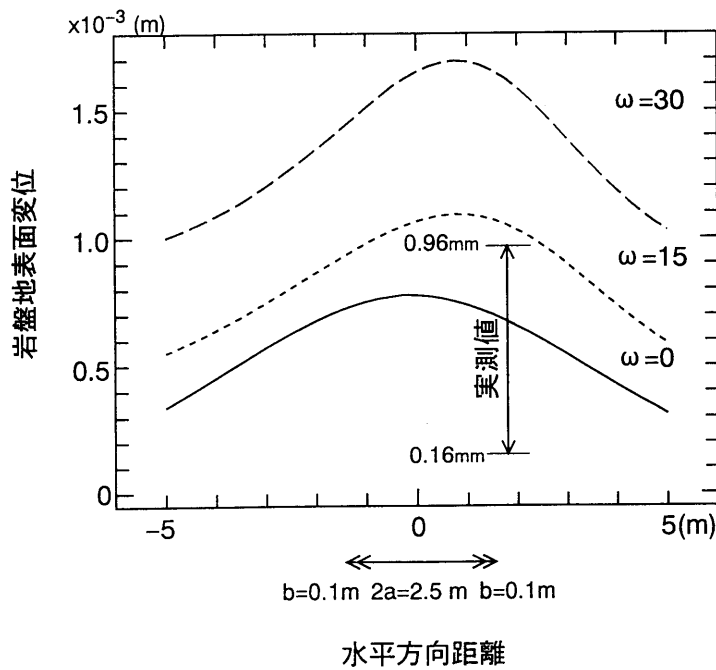


図 7.21 主軸角度の影響

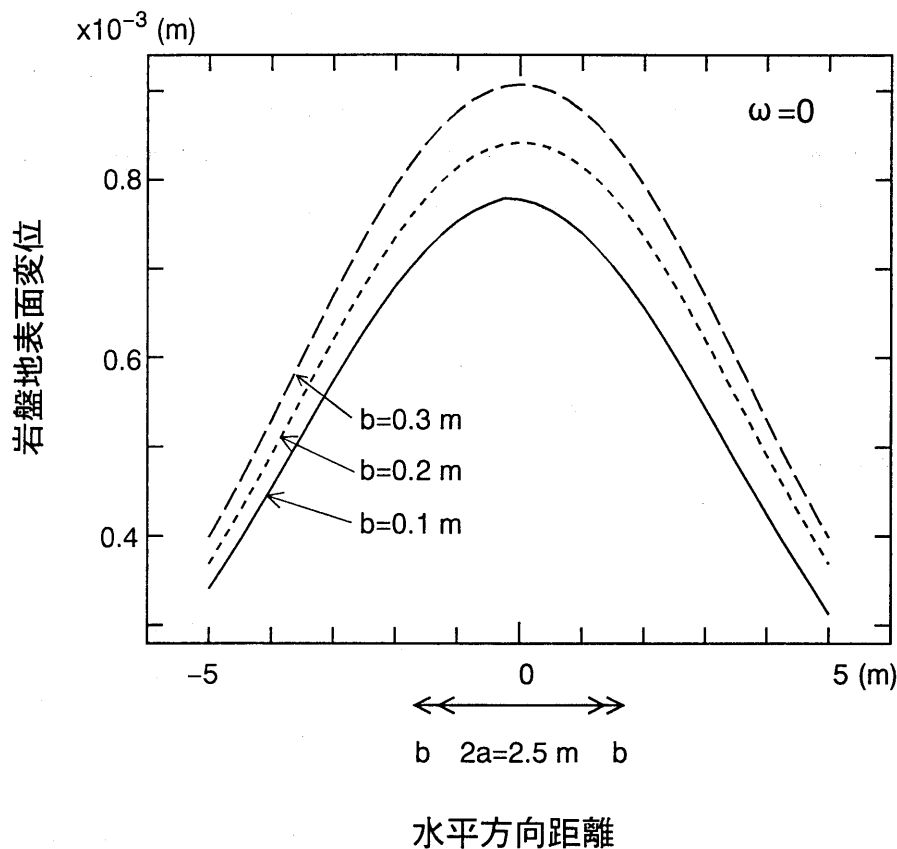


図 7.22 プロセスゾーンの変化による影響

## 7.6 まとめ

本章では無限板内にき裂を有する直交異方性弾性板の各種き裂開口関数の誘導方法を示し、これらの関数を用いて自由辺をもつ直交異方性弾性板のき裂近傍の解析に活用したものである。本章の研究成果をまとめると次のようになる。

- (1) 従来の研究ではき裂近傍で応力が無限大になる解が活用されているが、工学的に不合理な点がある。また数値解析手法ではき裂近傍の応力の急変化を表現し難いなど問題がある。本研究ではき裂近傍でも応力分布が有限で滑らかな解析解を得ることができる。
- (2) 本研究では直交異方性弾性板を対象として各種き裂開口関数を誘導し分類・整理した。これらの関数はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定することによりき裂近傍で滑らかな応力を表現できるものであり、中央き裂のみならず外側き裂の場合に対しても引張応力、せん断応力、 $\xi$ 軸曲げ、 $\eta$ 軸曲げの4種類の面内力問題の解析が可能となる。
- (3) 本章の解は代数分岐 $(z-ia)^{n/2}$ を基本にしたものであるからそれぞれの解を単独で活用してもプロセスゾーン部分の応力や開口には反転が現れずに極めて好都合である。第4章の境界面き裂の解では $H(z, a, b)$ 関数(指数表示)を用いているので、解関数の単独使用は必ずしも好ましいものにならなかったことと対照的である。
- (4) これらの開口関数を用いて、自由辺近傍のき裂解析に活用した。自由辺での境界条件を満足する解は、まずき裂を持つ無限板の解に、自由辺で生じている $\sigma_x$ を0とする解を

重ねて、さらに自由辺境界で発生しているせん断応力  $\tau_{\epsilon n}$  を打ち消す解を重ね合わせることでより求められる。

(5) いずれも諸剛性値や主軸角、自由辺までの距離等を任意に変化させることができる解であり、異方性を示す岩盤や複合材料のき裂解析などに応用可能である。具体的な例として、岩盤内のき裂に内圧が作用している例とダム基礎強化のためのコンソリデーショングラウト施工時の岩盤変形解析例を取り上げその有用性を示し、計算値が現実的な値となることを示し得た。

(6) 本解析法によれば自由辺に平行な複数のき裂がある場合に発展させることが可能である。

(7) ただし、本章で導いた解は2次元問題であり応用例として導入したものは3次元問題を2次元化したものであるから解析例の精度に対しては問題が残るが、解の傾向は十分把握し得ていると考えられる。

## 参考文献

- 1) 土居 亮太, 長瀬 裕信, 中川 建治: 直交異方性板の自由辺近傍の亀裂の解析法に関する研究, 土木学会中部支部研究発表会, 1-7, 1995. 3.
- 2) 長瀬 裕信, 土居 亮太, 中川 建治: 直交異方性板の各種開口関数の構成法と自由辺近傍の亀裂解析への適用, 土木学会論文集投稿中(1995. 3投稿)
- 3) 結城 良治, 許 金泉: パーソナルコンピュータによる異材接合継手・界面き裂の境界要素弾性解析, 日本機械学会論文集(A編), 56巻527号, pp. 13-19, 1990.
- 4) 結城 良治・許 金泉: 直交異方性異材界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集(A編), 57巻539号, pp. 78-85, 1991.
- 5) 北川 浩, 渋谷 陽二等: 異材界面近傍のき裂の特性, 日本機械学会論文集(A編), 59巻560号, pp. 45-50, 1993.
- 6) H. Lu. and T. J. Lardner.: Mechanics of Subinterface Cracks In Layered Material, Int. J. Solids Struct., 29, 669-688, 1992.
- 7) L. M. Keer, J. C. Lee and T. Mura.: Stress Distributions for a Quarter Plane Containing an Arbitrarily Oriented Crack, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 50, pp. 43-49, 1983.
- 8) J. W. Hutchinson, M. E. Mear and J. R. Rice.: Crack Paralleling an Interface Between Dissimilar Materials, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 54, pp. 828-832, 1987.
- 9) 六郷 恵哲, 内田 裕市, 加藤 英徳, 小柳 洽: 鋼繊維補強コンクリートの曲げ破壊性状と引張軟化曲線, 土木学会論文集, No. 460, V-18, pp. 57-64, 1993.
- 10) 日本コンクリート工学協会: 破壊力学の応用研究委員会報告書, pp329-564. 1993.
- 11) N. Krstulovic-Oparau.: Fracture Process Zone Resonance and Behavior in Mortar Specimens, ACI. Materials Journal., November-December, pp618-627, 1993.
- 12) 池田 徹, 宮崎 則幸, 祖田 敏弘, 宗像 健: 異種材界面き裂の混合モード破壊基準, 日本機械学会論文集, 58巻555号, pp. 70-77, 1992.
- 13) 堀井 秀之, 一宮 利通: レーザースペックル法によるフラクチャープロセスゾーンの

- 計測, 土木学会構造工学論文集, Vol. 36A. 1993.
- 14) 大塚 浩司, 勝部 宏明: コンクリートの破壊進行領域の性状に及ぼす骨材寸法の影響, 土木学会論文集, No. 478, V-21, pp. 109-116, 1993.
  - 15) Duan S. J, Nakagawa K: Stress Functions For Central Straight Cracked Anisotropic Plates, Applied Mathematics Mechanics, pp. 531-539.
  - 16) 林 毅(編): 軽構造の理論とその応用(上), (財)日本科学技術連盟, pp. 124-129, 1966. 9
  - 17) 長瀬 裕信, 中川 建治: 直交異方性弾性体間の界面き裂周辺の応力解析に関する基礎的な研究, 土木学会論文集, No. 507. I-30, pp. 53-63, 1995. 1
  - 18) 段 樹金, 児島 弘行, 中川 建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, 第374号, I-6, pp. 399-407, 1986. 10
  - 19) 志水 茂明: ダム施工の実際, (社)全日本建設技術協会, pp. 182-183.
  - 20) 中部電力(株): 岩盤のグラウチング効果予測とパターン選定に関する基礎検討報告書, pp. 23-25, 1991. 4

## 第 8 章 本研究の解析解と他の解析法との比較検討

### 8.1 はじめに

著者等が提案しているプロセスゾーンで有限な応力集中を表現できる解析解と数値解析法の代表的な方法である有限要素法による解析結果との比較検討を行う。

プロセスゾーンとは、延性の大きな鋼材においては塑性域へ入って大きな伸びが現れている領域であり、コンクリートのような脆性材料ではマイクロクラックが多発してマクロ的な扱いしか適用し得ない部分である。

したがって、有限要素法によってプロセスゾーン部分の力学的特性を解析するためにはどのような要素分割が適当であるか、さらに要素それぞれの弾性特性をどのように設定すべきかという問題に直面することになる。

しかしこのような問題を論じ得た研究報告は見当たらない。解析に臨んで適宜に要素を設定したり、微小3角形要素が設定されているのが通例である。

他方、著者等はプロセスゾーン相当部分として応力と開口変位を共存させる領域を設けて弾性領域として解く手法を構成したが、重み積分の重みの形状をいかなるものにするのが妥当かという問題を解決したものではない。

このような現状に基いて次のような見解で有限要素法解析と本解法による計算例を求めて比較する。き裂解析で一般的に設定されている有限要素分割法による結果と著者等の解法による結果にはどのような相違が生じるか、さらに両者を整合させるにはどのような手段が考えられるかを考察する。

### 8.2 有限要素法解析のモデル化

要素分割を図 8.1 に示す。中央のき裂を中心としてき裂先端部の要素分割を最小0.5mm×0.5mmとする。変位と応力が共存するプロセスゾーンはトラス構造を設定して、その弾性定数を変化させることによりプロセスゾーンを表現する。その弾性定数の採用値の決定は難しいが、ここでは鋼材の1/100と仮定して一定値とした場合とプロセスゾーンで1/100～1/10000に漸減させる場合の2通りのモデルを想定して解析を行う。

### 8.3 解析例

解析モデルは左半平面はほぼ等方性の部材特性を有するコンクリートとし、右半平面は異方性を示す材料と想定する。無限遠方で引張応力 $\sigma_0=1 \text{ kg/cm}^2$ を受ける場合とせん断応力 $\tau_0=1 \text{ kg/cm}^2$ を受ける場合とを考える。主軸の角度の組み合わせは $\omega_1=\omega_2=0^\circ$ 、 $\omega_1=\omega_2=45^\circ$ の2ケースとして、プロセスゾーンの剛性値を一定としたモデルと漸減させるものを対象とする。最終的には表 8.1 に示す8ケースとなる。

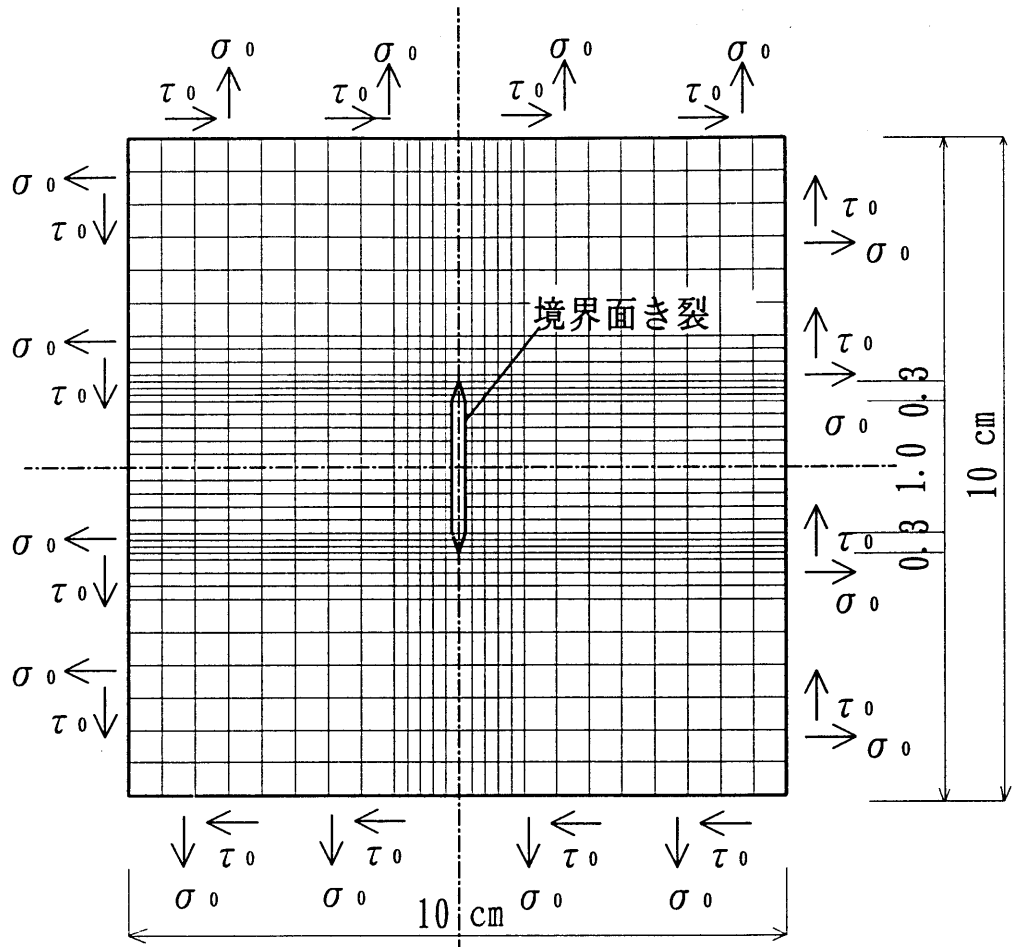


図 8.1 (a) 解析モデル

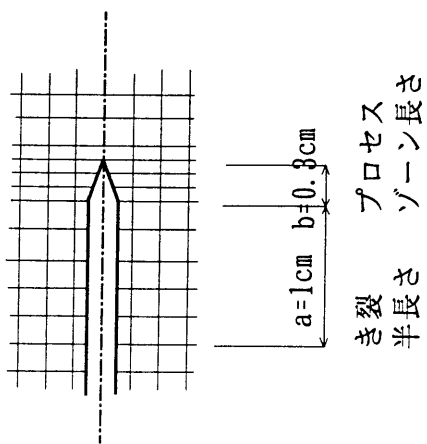


図 8.1 (b) き裂先端部拡大

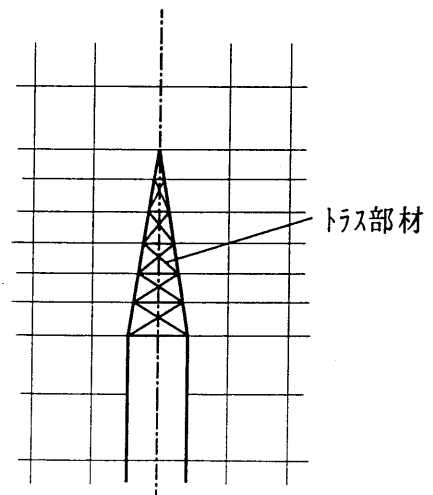


図 8.2 (c) プロセスゾーン詳細

図 8.1 有限要素法の解析モデル

表 8.1 (a) 引張応力が作用する場合の計算ケース

		ケース-1.1	ケース-1.2	ケース-2.1	ケース-2.2
曲げ剛性 (kg/cm <sup>2</sup> )	B <sub>x1</sub>	90000	90000	90000	90000
	B <sub>y1</sub>	100000	100000	100000	100000
	B <sub>x2</sub>	40000	40000	40000	40000
	B <sub>y2</sub>	400000	400000	400000	400000
ポアソン比	v <sub>1</sub>	0.17	0.17	0.17	0.17
	v <sub>2</sub>	0.2	0.2	0.2	0.2
ねじり 定数	k <sub>1</sub>	0.9	0.9	0.9	0.9
	k <sub>2</sub>	0.5	0.5	0.5	0.5
主軸角度 (度)	ω <sub>1</sub>	0	0	45	45
	ω <sub>2</sub>	0	0	45	45
トラス剛性 (kg/cm <sup>2</sup> )	E	21000	21000~ 210	21000	21000~ 210
応力状態 (kg/cm <sup>2</sup> )	$\begin{matrix} \sigma_o \\ \tau_o \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=1 \\ \tau_o=0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=1 \\ \tau_o=0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=1 \\ \tau_o=0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=1 \\ \tau_o=0 \end{matrix}$

表 8.1 (b) せん断応力が作用する場合の計算ケース

		ケース-3.1	ケース-3.2	ケース-4.1	ケース-4.2
曲げ剛性 (kg/cm <sup>2</sup> )	B <sub>x1</sub>	90000	90000	90000	90000
	B <sub>y1</sub>	100000	100000	100000	100000
	B <sub>x2</sub>	40000	40000	40000	40000
	B <sub>y2</sub>	400000	400000	400000	400000
ポアソン比	v <sub>1</sub>	0.17	0.17	0.17	0.17
	v <sub>2</sub>	0.2	0.2	0.2	0.2
ねじり 定数	k <sub>1</sub>	0.9	0.9	0.9	0.9
	k <sub>2</sub>	0.5	0.5	0.5	0.5
主軸角度 (度)	ω <sub>1</sub>	0	0	45	45
	ω <sub>2</sub>	0	0	45	45
トラス剛性 (kg/cm <sup>2</sup> )	E	21000	21000~ 210	21000	21000~ 210
応力状態 (kg/cm <sup>2</sup> )	$\begin{matrix} \sigma_o \\ \tau_o \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=0 \\ \tau_o=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=0 \\ \tau_o=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=0 \\ \tau_o=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_o=0 \\ \tau_o=1 \end{matrix}$

## 8.4 解析結果とその考察

### (1) 変位 $u$

$\sigma_0=1$  を受けるケース-1.1、1.2、2.1、2.2の左右半平面の水平方向開口変位差  $u$  を図 8.2 に示す。これらの結果から以下の特性を推定し得る。

- a) プロセスゾーン部の水平方向開口変位差の形状では本解析法とプロセスゾーン剛性を漸減させたモデルの結果とが比較的良好一致し、滑らかな曲線となっている。
- b) プロセスゾーン剛性を一定とした場合はプロセスゾーン部分で変位差が急変している。これは剛性を一定としたことによる影響であり、プロセスゾーン先端から開口部に向かって漸減させたケース-1.2、2.2は本解析法による結果に近づいている。
- c) 主軸角度  $\omega_1=\omega_2=0^\circ$  と比較して  $\omega_1=\omega_2=45^\circ$  の場合の方がき裂中心の水平方向変位差の絶対値が小さくなっている。これは主軸角度が傾いたことにより強軸方向主軸の影響で水平方向変位  $u$  が小さくなっていることによる。
- d) 主軸角度が  $\omega_1=\omega_2=45^\circ$  のケース-2.1、2.2の場合でもプロセスゾーン上部下部の変位量はほぼ同じで主軸角度の傾きの影響は少ない。
- e) 最大変位差の比 ( $u_{45\max}/u_{0\max}$ ) は本解析法では0.80、有限要素法解析では0.79とほぼ同値である。

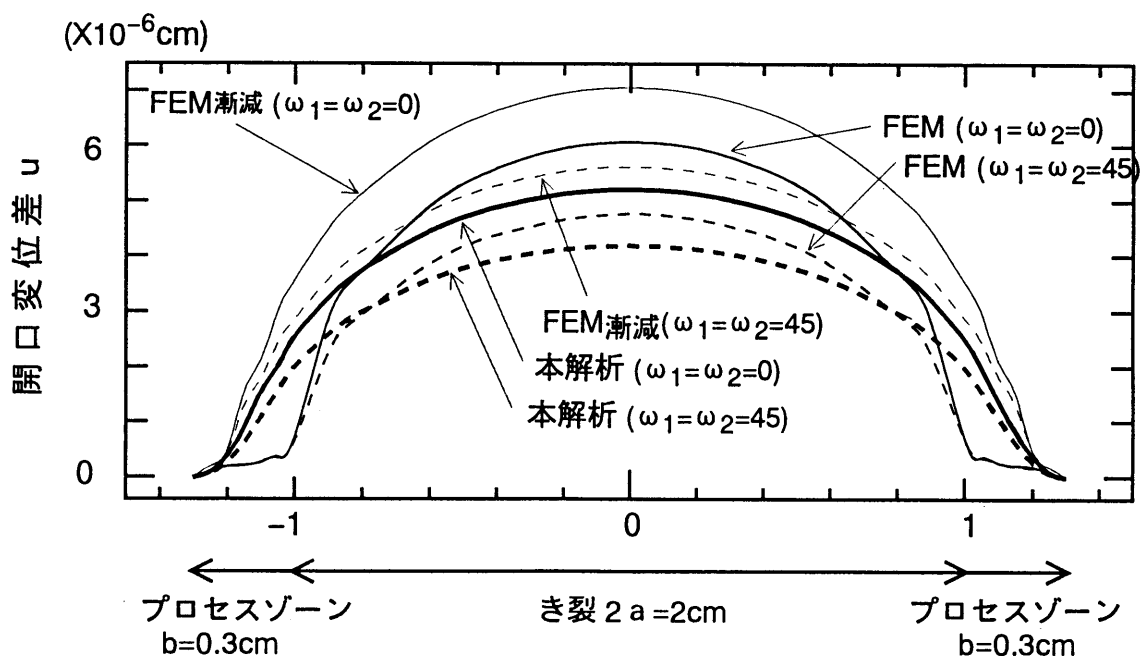


図 8.2 水平方向開口変位差  $u$



## (2) 変位 $v$

$\tau_0=1$  を受けるケース-3.1、3.2、4.1、4.2の場合に、左右半平面の鉛直方向開口変位差  $v$  に着目して比較したものを図 8.3に示す。これらの結果から以下の特性が推定される。

- a) 本解析法と有限要素法による結果とは主軸角度  $\omega_1=\omega_2=0^\circ$  のケース-3.1、3.2では比較的よく一致しているが、主軸角度が  $\omega_1=\omega_2=45^\circ$  のケース-4.1、4.2では本解析法と比較して有限要素法解析の方が約2倍大きな値を示している。これは主軸角度の傾斜により強軸方向主軸の影響が現れて解析結果の差が生じていると考えられる。
- b) プロセスゾーン部の変位形状は本解析法の方が滑らかなものとなっている。
- c) プロセスゾーンの上下部分の変位形状への影響はケース-1.2、2.2と比較すれば相対的に大きい但其の絶対値はき裂中心と比較して十分小さい。
- d) せん断力を受ける場合の鉛直方向変位  $v$  は引張力を受ける場合の水平方向変位  $u$  と比較して1オーダー絶対値が大きい。
- e) 最大変位差の比( $v_{45\max}/v_{0\max}$ )は本解析法では0.67、有限要素法解析では1.35となり異なる傾向にある。

## (3) 応力 $\sigma_\epsilon$ ( $\sigma_0=1$ を受けるケース-1、2の場合)

$\sigma_0=1$  を受けるケース-1、2の場合の応力  $\sigma_\epsilon$  を図 8.4(a)(b) に示す。

- a) 本解析法による応力  $\sigma_\epsilon$  は滑らかな結果となっているが有限要素解析では要素で離散化している特性から、応力は要素内の平均応力度となるため開口部で  $\sigma_\epsilon \neq 0$  となっている。
- b) 分布形状は有限要素法による解析の方が尖ったものとなっている。プロセスゾーン部の変位  $u$  の形状の急変化と同様に  $\sigma_\epsilon$  の形状も急変化している。

プロセスゾーンの弾性係数を開口部方向へ漸減させると、本解析結果に近い形状になっている。

- c) 絶対値は  $\sigma_0=1$  に対して約3倍の値となっており、プロセスゾーン先端部近くで最大値を示しさらに漸減している。主軸角度  $\omega_1=\omega_2=45^\circ$  の方がやや小さい値となっている(逆にせん断力は大きくなる)。

## (4) 応力 $\tau_{\epsilon n}$ ( $\tau_0=1$ を受けるケース-3、4の場合)

$\tau_0=1$  を受けるケース-3、4の場合の応力  $\tau_{\epsilon n}$  を図 8.5(a)(b) に示す。

- a) 本解析法によるせん断応力  $\tau_{\epsilon n}$  は本解析法がプロセスゾーン部で滑らかな凸状の分布を示している。有限要素解析の場合は要素内の平均応力であるため開口部で  $\tau_{\epsilon n} \neq 0$  である。
- b)  $\omega_1=\omega_2=45^\circ$  の方が絶対値が幾分大きくなっているが、本解析法の方が滑らかな曲線を示している。

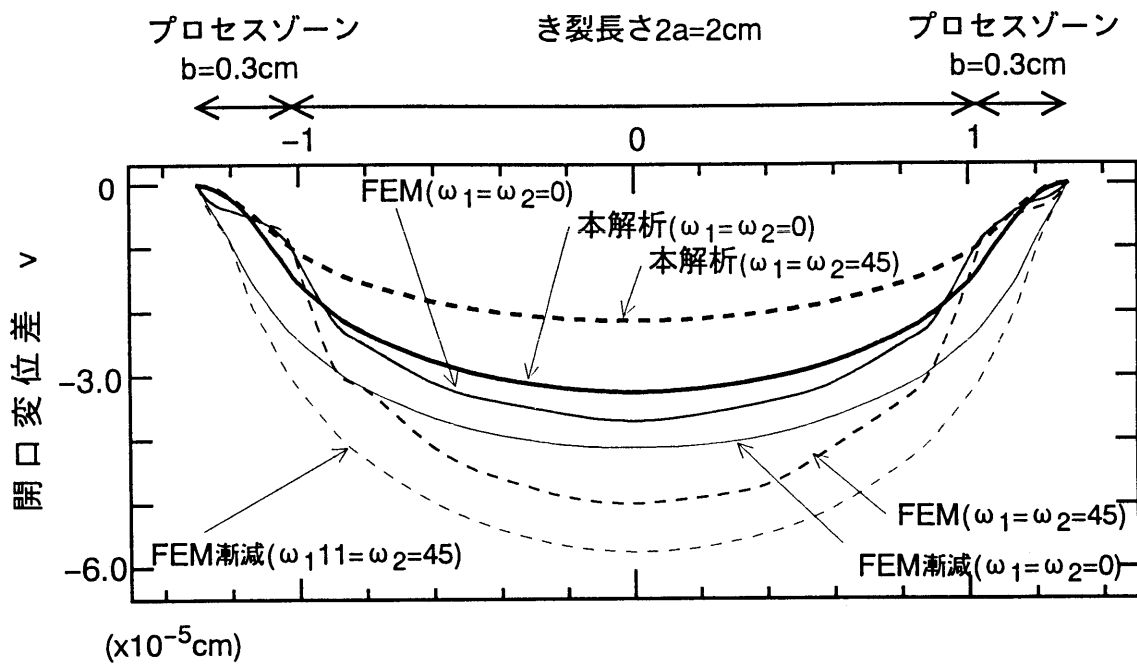


図 8.3 鉛直方向開口変位差  $v$

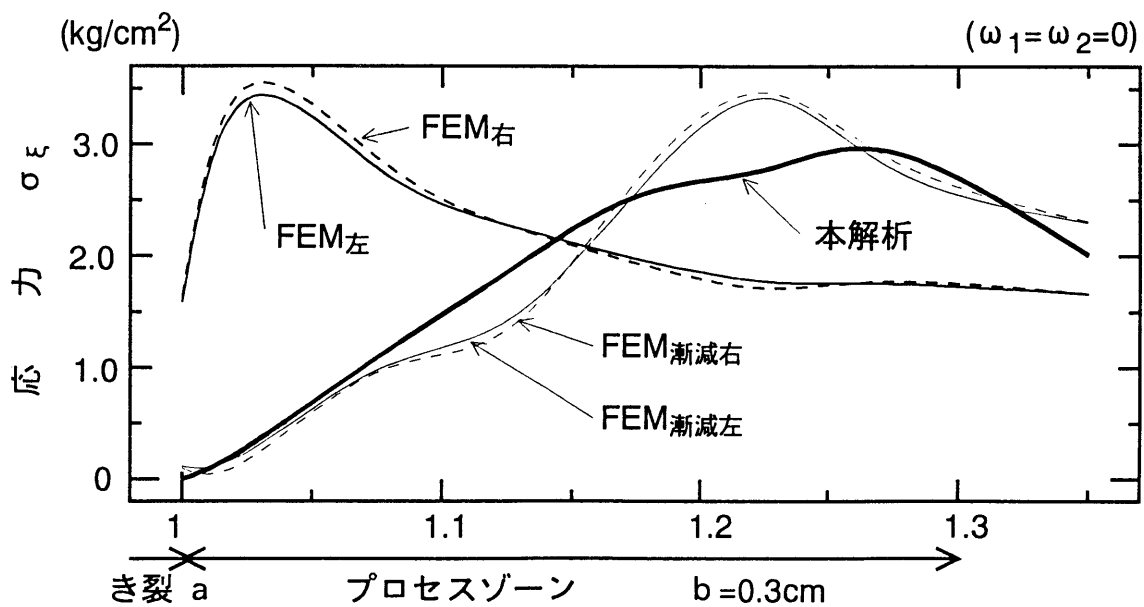


図 8.4(a) 応力  $\sigma_\epsilon$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 0$ )

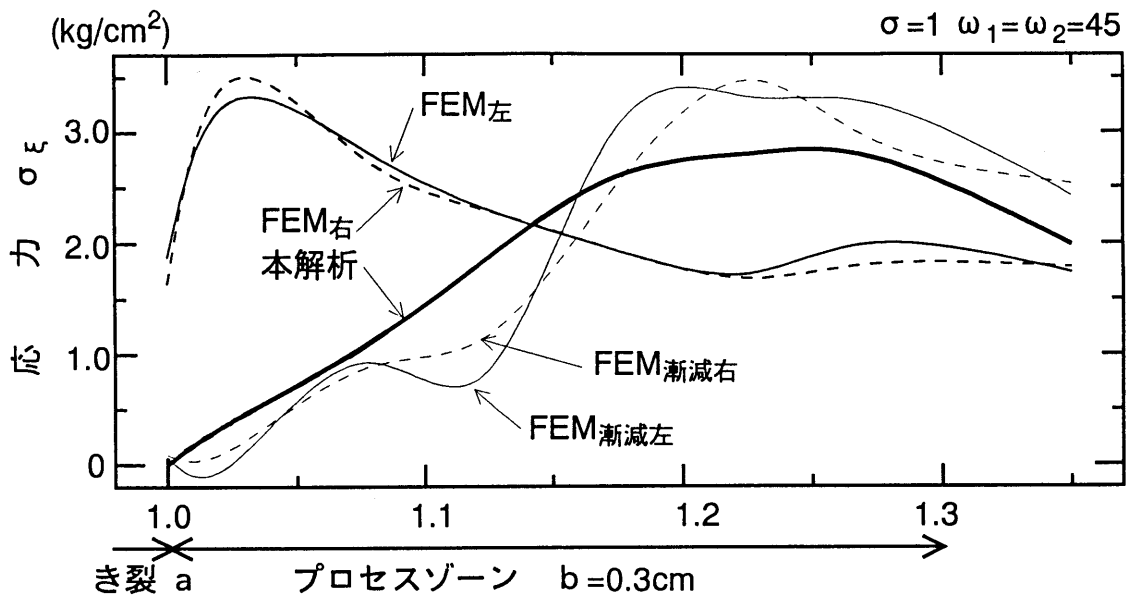


図 8.4(b) 応力 σ<sub>ε</sub> (ω<sub>1</sub>=ω<sub>2</sub>=45)

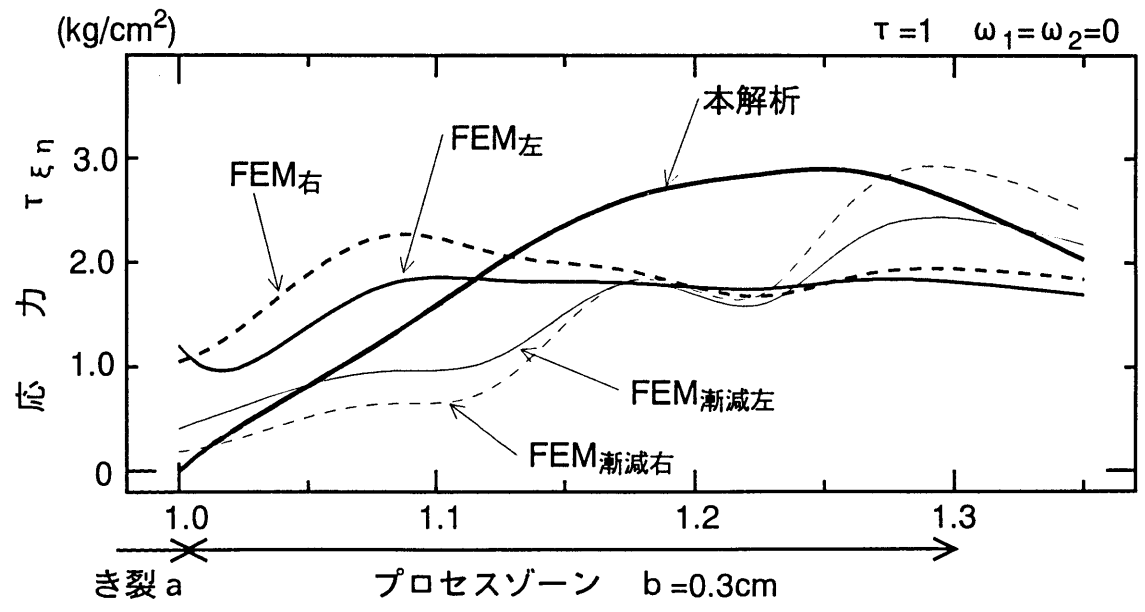


図 8.5(a) せん断応力 τ<sub>εn</sub> (ω<sub>1</sub>=ω<sub>2</sub>=0)

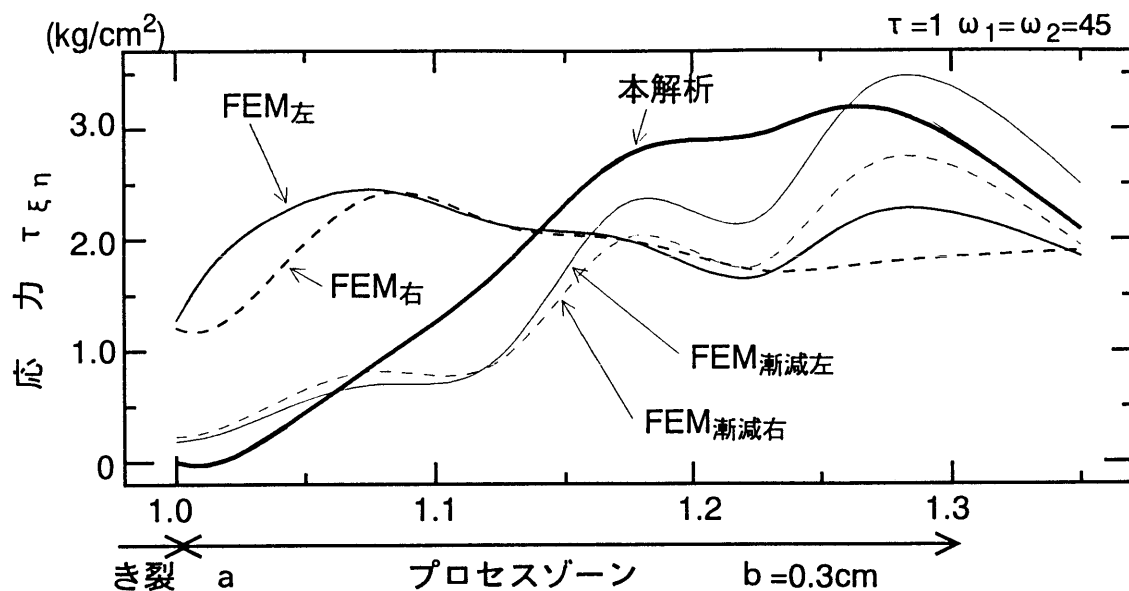


図 8.5(b) せん断応力  $\tau_{\xi\eta}$  ( $\omega_1 = \omega_2 = 45$ )

## 8.5 まとめ

著者等が提案しているプロセスゾーンで有限な応力集中を表現できる解析解と数値解析法の代表的な方法である有限要素解析法による解析結果との比較検討を行った。その結果、プロセスゾーン部での剛性値はプロセスゾーンが一定の場合よりはプロセスゾーン先端から開口部に向かって1/100~1/10000程度に漸減させると本解析法と比較的よく一致することが判った。すなわち、著者等の解析解は有限要素法で数値解析する場合にプロセスゾーン部分の剛性を漸変させるモデルを設定する結果に近いものである。

# 第 9 章 結 論

## 9.1 総 説

本研究は第 1 には直交異方性弾性体の境界面き裂を対象にして、従来の境界面き裂研究で問題となっているき裂先端での集積特異点状の応力集中を消滅することを目的として、応力と開口が共存するプロセスゾーンを設定し、重み関数法によりき裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を実現した。第 2 には直交異方性弾性体内にき裂がある場合の開口関数を整理し、自由境界近傍にあるき裂に関する応力集中に対しても同様なプロセスゾーンを設定する手法で滑らかな応力分布と開口変位を実現した。さらに、第 3 には土木分野での岩石・岩盤問題への実務的な応用例を挙げ、本研究で提案する応力集中の解析方法の有意義さを示した。

本章では研究のまとめとして各章の研究成果を挙げて総括をする。

第 1 章：弾性体を対象としたき裂解析の現状を文献調査し、一様弾性体中のき裂、境界面き裂に関する既往研究内容を整理し内包する問題点を指摘した。境界面き裂解析の従来の研究では、き裂先端の応力が集積特異点状となるなどの工学的に不合理な点が見受けられた。さらに、複合材料の開発や複合構造物の設計・施工実績の急増に伴い弾性定数の異なる材料間の接合面に生じている空隙やき裂の解析の重要性を指摘し、本研究の意義を示した。

また、土木工学分野における破壊力学の実務問題への適用の現状を調査し、本研究で提案している解析手法の主として岩盤などを対象とした適用可能性範囲を示した。

第 2 章：従来の解析に最も引用されている Westergaard の解は、応力が無限大になる特異点をもつので、コンクリートや岩盤材料などのようなき裂先端で有限で滑らかな応力分布を示す土木工学分野の材料には不適であることを指摘した。この特異性を示す 0.5 乗のオーダーの無限大は積分可能であることに着目して、特異項を指数関数へ変形して重み積分する方法を提案した。具体的には 2 次式 4 次式の重み積分を行い「き裂先端で滑らかな応力集中と開口変位を実現する」開口関数を誘導し、滑らかな曲面を示した。

これを実現させた要因はき裂先端で応力と開口が共存する区間(プロセスゾーン)を設定したことであり、本研究の第 1 の特徴である。

第 3 章：直交異方性弾性体の面内問題の基礎式から一般解を得た。一般解の変数として従来用いられている  $Z_j$  ではなく  $z_j = P \xi + i \eta$  という形の変数で解関数を定義して  $\eta$  軸上の連続条件を簡素化した点が他の解析方法には見られない点で、本研究の第 2 の特徴である。これにより、直交異方性弾性体の境界面き裂解析が可能となった。

第 4 章：一般解はその基本的性質により 4 つの関数に分類できることを明らかにした。これらの一般解を複数個重ね合わせて、境界線上における変位と開口の連続条件を導入して満足させると、直交異方性弾性体の境界面き裂関数の解析関数が得られることを詳述した。

さらに、一般解の基本的形状を認識するために等方性を対象にした解析モデルの境界面き裂問題を解き変位と応力の曲面を図化した。

第5章：これらの単独の一般解の曲面を重ね合わせて、目的としている「き裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を形成する」解析解を得るための手法を4つ提案して検討した。その結果、「開口変位の曲率自乗和を最小とする方法」が最も平滑化された変位と応力分布を表すという見地より最適の方法であることが判明した。

具体的な中心き裂の解析例として、異方性の岩盤とその上に打設されたコンクリートがせん断応力を受ける場合を想定し、接触不良部の応力集中の状況を解析した。既往の研究には見られない異方性の任意の主軸角度による影響、岩盤の剛性値の変化による応力集中の変化、プロセスゾーンの大きさによる影響などについての知見が得られた。また、地下岩盤内の2層の異方性境界面に有限な大きさのき裂を想定した解析も行い本解析法が地盤内のき裂問題などにも応用できることを示し得た。

第6章：外側き裂の解析例として鋼材と接合している異方性材料に引張応力が作用する場合の接触面不良問題を取り上げ、異方性の主軸の傾きによる応力集中状態を解析しその影響を明らかにした。また、岩盤内に建設された低温貯蔵式のLPG地下空洞の温度勾配による覆工コンクリートと周辺岩盤との接触面不良問題を解析して、現実的な岩盤問題への応用例を示した。

第7章：自由辺の境界面を持つ直交異方性弾性体の境界面近傍のき裂解析を行った。内部にき裂を有する直交異方性弾性体を対象とする場合の各種き裂開口関数の一般形を誘導して分類・整理し、これらの開口関数を基にして自由辺近傍のき裂解析に活用し得る特異関数の構成法を導いた。岩盤を対象とする応用例として、ダム基礎岩盤の強化を目的とするコンソリデーショングラウトの施工に伴う岩盤変形問題を取り上げて解析し、実例との対比をした結果本解析法が十分適用できることが判った。

第8章：本研究で提案しているプロセスゾーンで有限な応力集中と開口を表現できる解析解と数値解析法の代表的な方法である有限要素法による解析との比較検討をした。

有限要素法解析ではプロセスゾーン部の剛性値をどの程度の値に仮定すべきかが問題であり、き裂先端から開口部方向へ剛性値を $1/100 \sim 1/10000$ に漸変させたケースが本解析法による計算結果と比較的よく一致することが判った。

## 9.2 今後の方向

本研究は2次元の直交異方性弾性体を対象としものであり研究の目的である「境界面き裂問題を取り上げき裂先端で滑らかな応力分布と開口変位を実現すること」「直交異方性弾性体内にき裂がある場合の開口関数を整理し、自由辺境界近傍にあるき裂周辺の滑らかな応力分布と開口変位を実現すること」「土木工学分野での岩石・岩盤問題への実務的な応用例を挙げ、本研究で提案する応力集中の解析方法の有意義さを明らかにすること」については十分な成果が得られている。

今後、解析的な方向では研究対象を複数のき裂解析、2次元から3次元の面外き裂問題

への拡張や層状複合材料の層に平行、垂直なき裂問題への展開が期待される。また、実務的にはコンクリートや岩石・岩盤を対象とする土木分野や境界領域を含めた種々の実際問題へのき裂解析の適用を積極的にはかり、その意義を高めていく必要がある。

## 本研究に関連する発表論文・口頭発表

- 1) 長瀬 裕信, 中川 建治: 直交異方性体間の境界面亀裂周辺の応力集中解析, 土木学中部支部研究発表会, 1-6, 1994. 3.
- 2) 長瀬 裕信, 中川 建治: 部分接合された直交異方性体の接合部近傍の応力集中解析 土木学会第49回年次学術講演会, 1-308, 1994. 9.
- 3) 長瀬 裕信, 中川 建治: 直交異方性弾性体間の界面き裂周辺の応力解析に関する基礎的な研究, 土木学会論文集, No. 507, 1-30, PP. 53-63, 1995. 1
- 4) 土居 亮太, 長瀬 裕信, 中川 建治: 直交異方性板の自由辺近傍の亀裂の解析法に関する研究, 土木学会中部支部研究発表会, 1-7, 1995. 3.
- 5) H. Nagase, S. J. Duan and K. Nakagawa: Stress analysis around interface crack partially bonded dissimilar anisotropic composite materials, Eng. Fract. Mech. 投稿中(1994. 10投稿)
- 6) 長瀬 裕信, 土居 亮太, 中川 建治: 直交異方性板の各種開口関数の構成法と自由辺近傍の亀裂解析への適用, 土木学会論文集投稿中(1995. 3投稿)
- 7) 長瀬 裕信, 土居 亮太, 中川 建治: 部分接合された直交異方性弾性体の未接合部近傍の応力解析, 土木学会西部支部, 土木構造・材料論文集 第11号, 1995. 11.



## 謝 辞

今から4年前に母校岐阜大学に大学院博士課程が新設されたおり、中川教授からもう一度勉強しないかとお誘いがありました。私も社会にでて15年という節目にきていましたし、会社内にあっても長らく設計業務に携わってきており少なからず「技術や研究」に対する希求願望もありましたので、40代にして博士号取得へ挑戦する決心をしました。

このような向学の機会を与えていただくと共に今日までの3年間にわたり熱意ある献身のご指導をいただきました岐阜大学教授中川建治先生には心よりお礼申し上げます。

また、本論文をまとめるにあたり岐阜大学教授小柳 洽先生、六郷 恵哲先生には研究内容について丁寧なご指導と暖かい助言をいただきました。厚くお礼申し上げます。

さらに、研究を進める過程で中川研究室の藤井康寿助手、華北水利水電学院教授段 樹金先生、大学院生の皆様からは貴重な助言や協力をいただきました。大学院生土居 亮太氏には数値計算や結果の整理にご協力いただきました。合わせてお礼申し上げます。

また、私の博士号取得への挑戦にご理解をいただきその機会を与えていただきました当時の名古屋支店長 吉田 賢常務取締役をはじめ、現名古屋支店長三枝 浩取締役、歴代の土木部長の安藤 方昭様、粕谷 弘様、高橋 基修様、平田 彰男様には今日まで業務に多大な便宜を計っていただくとともに暖かいご支援を賜りました。心よりお礼申し上げます。

業務多忙の折り職場の上司、同僚の皆様方には多くの迷惑をおかけしたにも関わらず暖かく見守りご支援いただきましたこと深く感謝いたします。

最後に、私のわがままや気まぐれを許し叱咤激励をして支えてくれた家族に感謝いたします。

平成 8年 1月

## 著者略歴

昭和50年 3月 岐阜大学工学部土木工学科卒業  
昭和52年 3月 岐阜大学大学院工学研究科修了  
" 4月 株式会社 熊谷組入社  
平成元年 6月～ " 名古屋支店 土木部設計課長代理  
平成 3年10月～ " 名古屋支店 土木部土木設計課長  
平成 5年10月～ " " 土木部土木技術課長

技術士(建設部門)、一級建築士

平成 6年 4月～ (社)地盤工学会中部支部 調査設計施工技術報告会運営委員会委員  
" (社)日本土木工業協会中部支部 土木施工技術研修会委員会委員  
" " 土木技術研究専門委員会委員  
平成 6年 7月 (社)土木学会中部支部技術賞選考委員(平成 6年度)