

フーリエ記述子を用いた 脳梁形状の性差の解析

**Analysis of sex differences of corpus callosum shapes
based on Fourier descriptors**

2006年1月

博士(工学)

学位論文：博士(工学)甲₂₉₄

河村 洋子

岐 阜 大 学

フーリエ記述子を用いた脳梁形状の性差の解析

論文要旨

二次元平面上の曲線形状を表現する手法の一つとしてフーリエ記述子があり、パターン認識などにしばしば利用されている。これまで、G, Z, P型フーリエ記述子などが提案されてきた。閉曲線に対しては、G型フーリエ記述子が離散フーリエ変換と同等の曲線表現能力を持つものの、開曲線に対しては、少数のパラメータに元の曲線のより多くの情報を集約するという意味で、いずれのフーリエ記述子も十分な曲線表現能力を有していない。本論文では、開曲線に対し、従来のフーリエ記述子よりも高い情報集約能力をもつI型フーリエ記述子を提案する。I型フーリエ記述子は、元の開曲線とそれを180度回転させた開曲線を接続して得られる閉曲線に対するG型フーリエ記述子の部分集合として定義される。これは、元の開曲線に対する非整数周波数0.5, 1.5, 2.5,...のフーリエ係数といった意味を持ち、I型フーリエ記述子から元の曲線を完全に再構成可能である。具体的に、任意の次数で打ち切られたフーリエ記述子から元の曲線を再構成した際の復元精度、および任意の次数までのフーリエ記述子を用いた曲線の近似精度の2つの立場から、提案するI型フーリエ記述子は、従来のZ, P, G型フーリエ記述子よりも、優れた情報集約能力を持つことが示された。

性同一性障害（以下、GID）の診断は、現在、精神科医による診断面接といった主観的な手法によって行われているが、診断精度向上と迅速な診断を実現するため、「心理学的な性（gender）」の客観的かつ定量的な評価法が必要とされている。本論文では、正常男女とGIDを有する被験者の頭部MRIを用いて、正中矢状断における脳梁形状の性差を調査した。最初に、脳梁形状をフーリエ記述子で表現した。次に、ソフトマージンをもつ線形サポートベクターマシンを使って、フーリエ記述子によって張られるベクトル空間において、正常男性と正常女性の標本群を最も良く分離する超平面を決定した。各被験者の脳梁形状を得られた超平面に直交する線形部分空間 V に正射影した座標を、正常男女の性差を最も顕著に表す特徴量として提案した。線形部分空間 V 上の脳梁形状を解析した結果、正常女性は、正常男性と比較し、脳梁膨大が丸い、Isthmusは太いという従来知見に一致した結果が得られた。さらに、男性の脳梁幹前部は、女性より太いという新たな結果が得られた。また、GID患者に対して、上記特徴量の値を調べた結果、GID患者の特徴量の値は、彼らの身体的な性（sex）よりも、彼らの心理学的な性つまり、genderを表していた。このことから、本論文では、その特徴量は、sexに関連した違いではなく、genderに関連した違いであると結論付けた。今後、更に検証を進めてゆくことにより、その特徴量は、GIDの診断のための客観的な尺度として利用できる可能性を有しているといえる。

Analysis of sex differences of corpus callosum shapes based on Fourier descriptors

Abstract

As one technique that expresses the open curve two-dimensionally, a Fourier descriptor can be used. It is often used for pattern recognition and similar applications. The G-type Fourier descriptor has equivalent curve expressiveness for the closed curve with a discrete Fourier transform. However, for the open curve, neither Fourier descriptor has sufficient curve expressiveness, because the open curve concentrates much more information of the original curve into a few parameters.

In this study, a new Fourier descriptor, called an I-type Fourier descriptor, is developed for representing open curves more precisely. The I-type Fourier descriptor is calculated through the G-type Fourier descriptor for the closed curve obtained by connecting a given open curve and the 180[deg]-rotated open curve for the original open curve. Thereby, we obtain Fourier coefficients of non-integer frequencies 0.5, 1.5, 2.5, ... for the original open curve. An original curve can be reconstituted perfectly from the I-type Fourier descriptor. We perform two experiments concretely to evaluate the performance of the proposed I-type Fourier descriptor: restoration of accuracy that reconstructed the original curve from the Fourier descriptor with truncation in the optimal degree, and approximation of the accuracy of the curve using the Fourier descriptor to the optimal degree.

Results show that I-type Fourier descriptor can concentrate the information of the given open curve into fewer parameters than conventional Fourier descriptors can, i.e. Z-type, P-type, and G-type Fourier descriptors.

Gender identity disorder (GID) is a condition in which sex differs from gender identity. The basic methodology used to diagnose such a disorder involves examination by more than one psychiatrist. It is necessary to develop objective, quantitative evaluation for the mental sex (gender) to improve the credibility of diagnoses, and to expedite diagnoses. It has long been believed that sex-related differences exist in the shape and size of the corpus callosum (which interconnects the two cerebral hemispheres), and that these differences might form the basis of an objective, quantitative evaluation technique. Unfortunately, no such established methods exist.

This study investigated differences in corpus callosum shapes at the midsagittal plane using MRI for different subjects: normal males, normal females, and subjects with GID. We first represented callosal shapes using Fourier descriptors. Using linear support vector machines

(SVM) with soft-margin, we then determined a hyperplane that separates normal males and females most optimally in the vector space spanned by Fourier descriptors. We then proposed a measure that has prominent sex difference: it is defined as the coordinate of a callosal shape on the subspace V orthogonal to the obtained hyperplane. The value of a measure is expected to differ most prominently between normal males and females. Furthermore, as a result of analyses of the corpus callosum shape on linear subspace V , the splenia of females were revealed to be more bulbous than males', but not larger; females' isthmuses are thicker. Those results are in agreeing with conventional knowledge in this field. The novel result of the present study shows that the anterior truncus in males is slightly more tumid than in females.

In addition, we showed that values of the measure for GID more closely resembled those for those subjects' psychological sex, i.e. gender, than their physical sex. We concluded that the measure found in this study has no sex-related differences, but does have gender-related differences. It is therefore available for use as an objective measure for GID diagnoses.

目次

第1章	序論	1
1.1	本論文の背景, 目的	1
1.1.1	フーリエ記述子による形状解析へのアプローチ	1
1.1.2	非侵襲客観的尺度による性同一性障害診断へのアプローチ	3
1.2	本論文の構成	5
第2章	I型フーリエ記述子	9
2.1	はじめに	9
2.2	開曲線に適した新たなフーリエ記述子「I型フーリエ記述子」	10
2.2.1	G型フーリエ記述子	10
2.2.2	I型フーリエ記述子の考え方	11
2.2.3	曲線 $z(t)$ と $z_c(t)$ のそれぞれのG型フーリエ記述子の関係	12
2.2.4	I型フーリエ記述子の定義	13
2.2.5	I型フーリエ記述子からの元の曲線の再構成	14
2.3	情報集約性の検証	16
2.3.1	曲線復元精度の評価	16
2.3.2	曲線の近似精度の評価	17
2.4	まとめ	25
第3章	線形判別問題概説	27
3.1	はじめに	27
3.2	判別分析の定式化	28
3.3	正規密度に対する判別関数 [77]	29
3.3.1	マハラノビス汎距離による簡便的な判別	30
3.3.2	最尤法による判別/ベイズ判別法	31
3.4	成分分析と判別	33
3.4.1	成分分析 (KL 展開)	33
3.4.2	2クラスに対する線形判別法 (フィッシャーの方法)	35

3.4.3	KL 展開と判別分析の違い	38
3.4.4	正準判別分析ーフィッシャーの方法の拡張ー	40
3.5	線形判別関数	45
3.6	線形計画法	50
3.6.1	サポートベクターマシン (SVM)	50
3.6.2	線形計画	58
第 4 章	低次 G 型フーリエ記述子で表現される MRI 正中矢状断脳梁形状の性差	61
4.1	はじめに	61
4.2	脳梁形状の性差の検定, 性別同定法	63
4.2.1	対象	63
4.2.2	脳梁形状の性差に関する調査例	66
4.2.3	性差の検定法	66
4.3	脳梁の性差の解析	67
4.3.1	脳梁断面サイズの性差	67
4.3.2	脳梁断面の局所サイズの性差	68
4.3.3	脳梁膨大断面の円形度の性差	69
4.3.4	低次 G 型フーリエ記述子で表現された脳梁断面の性差	69
4.3.5	中心モーメントで表現された脳梁断面の性差	72
4.3.6	主軸方位の性差の統計的検定	75
4.4	性同一性障害の脳梁の主軸方位の解析	78
4.5	考察	81
4.5.1	脳梁主軸方位の性差の原因	81
4.5.2	脳の性分化 ^[52] と GID の成因	82
4.6	まとめ	83
第 5 章	高次 G 型フーリエ記述子で表現される脳梁形状の Gender 差の特定	85
5.1	はじめに	85
5.2	脳梁形状の解析手法	85
5.2.1	対象と用いた MRI	85
5.2.2	脳梁形状の高次フーリエ記述子による表現	86
5.2.3	サポートベクターマシンによる判別分析	88
5.3	正常男女の性差の解析	88

5.3.1	特徴量 a_c の特性	88
5.3.2	部分空間 V_c の解釈 —視覚的な表現—	90
5.4	GID 患者の特徴量 a_c と正常男女の特徴量 a_c の比較	92
5.5	脳梁形状と解析手法の関係	92
5.5.1	最適な打ち切り次数 K の決定	92
5.5.2	脳梁形状の分布と部分空間 V_c 間の主成分分析	94
5.6	討論	95
5.6.1	脳梁形状の性差の以前の研究調査	95
5.6.2	ヒトの脳と性 (gender) 間の相互関係	96
5.7	まとめ	97
第 6 章 結論		99
謝辞		103
参考文献		105
付録 A フーリエ記述子諸論		109
A.1	Z 型フーリエ記述子と P 型フーリエ記述子	109
A.1.1	Z 型フーリエ記述子	109
A.1.2	P 型フーリエ記述子	110
A.2	1 次フーリエ記述子のパラメータ算出	111
A.3	主軸方位と正準変量の関係による検証	113
研究業績目録		117
関連図書		121

表目次

4.1	標本の男女脳梁サイズの平均と標準偏差	66
4.2	脳梁サイズの性差	68
4.3	脳梁断面の局所面積の性差	69
4.4	フーリエ記述子で表現された脳梁断面の性差	73
4.5	脳梁の中心モーメントの性差	76
A.1	$z(t)$ の変化	112

目次

1.1	本論文の構成	6
2.1	I型フーリエ記述子を求める処理の流れ(a)と再構成の流れ(b)	15
2.2	数値実験に用いた開曲線の一例 ($L = 3316$)	17
2.3	N 次までのZ, P, G, I型フーリエ記述子から復元された曲線の平均2乗誤差	18
2.4	打ち切り次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ のZ, P, G, I型フーリエ記述子から復元された曲線	19
2.5	ペンタブレットを用いて入力された文字の例:「4」,「d」,「B」,「あ」,「キ」,「村」	20
2.6	次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いてZ, P, G, I型フーリエ記述子から復元された文字「あ」の近似精度(リ・サンプリング間隔:0.01)	21
2.7	次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いてZ, P, G, I型フーリエ記述子から復元された文字「村」の近似精度(リ・サンプリング間隔:0.01)	22
2.8	次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いてZ, P, G, I型フーリエ記述子から復元された文字「あ」の近似精度(リ・サンプリングなし)	23
2.9	各フーリエ記述子を用いた文字認識における認識率の比較	24
3.1	線形判別関数の幾何学的表現	47
3.2	ソフトマージンを持つサポートベクターマシンの幾何学的表現	53
4.1	頭部MRI正中矢状断面の一例	64
4.2	標本の年齢分布	65
4.3	脳梁輪郭線のフーリエ記述子の算出法	71
4.4	1次フーリエ記述子による脳梁輪郭線の楕円近似	72
4.5	中心モーメントを用いた脳梁の主軸方位の推定	74
4.6	脳梁の主軸方位 φ の分布	77

4.7	正常男女の主軸方位の確率密度分布と性同一性障害を有する者の主軸方位の比較	79
4.8	正常男女, GID の MTF, FTM における主軸方位のヒストグラムの比較 . . .	80
4.9	正常男女, MTF, FTM グループ間における検定結果	81
5.1	大脳皮質領域に応じた脳梁神経線維の局所解剖学図	86
5.2	フーリエ記述子の可変次数 K で近似した脳梁形状の例	87
5.3	正常男女の特徴量 a_c のヒストグラムと正常男女を判別するための閾値 θ の関数としての識別率	89
5.4	SVM により求められた超平面と部分空間 V_c , 正常男女の分布の模式図 . .	90
5.5	特徴量 $a_c = 0.13, 0.43, 0.69$ における脳梁形状	91
5.6	正常男女, GID の MTF, FTM における特徴量 a_c のヒストグラムの比較 . . .	93
5.7	認識率と打ち切り次数 K の間の関係	94
5.8	正常者の対象の脳梁形状の固有値と部分空間 V_c と V_i 間の角度	95
A.1	1次フーリエ記述子の楕円のパラメータ	112
A.2	(a) $\tilde{\varphi}$ と正準変量 z との相関, (b) $\tilde{\varphi}$ と主軸方位 φ との相関	114
A.3	$\tilde{\varphi}$ と正準係数 a とのなす角の変化量に対する, (a) 性の判別率との関係, (b) $\tilde{\varphi}$ と正準係数 a との関係	115

第1章 序論

1.1 本論文の背景, 目的

1.1.1 フーリエ記述子による形状解析へのアプローチ

デジタル画像処理の手法の中で、幾何学的特徴を取り出すための処理、つまり、幾何学的処理は、非常に重要なものである。とくに実際に実用的な処理の対象とされている画像では、濃淡情報自体は本質的な意味を持たず、そこに存在する図形の“形”が情報として意味を持つことが多い。こうした画像としては、例えば、文字画像、各種図面、部品などの工業用画像などがある。

代表的な幾何学的処理には、距離変換と骨格（スケルトン）、ラベル付けなどの連結成分処理、縮退・膨張などの図形融合、境界線抽出、画像の細線化・縮退化、図形の分割と多角形近似、形状の記述と解析などがある。中でも、図形の形状特徴を解析する手法のうち、 n 次元空間中の点集合の分布の幾何学的構造を調べる計算幾何学と呼ばれる研究が、近年進展した。2次元平面の点集合の配列を調べたり、図形輪郭線の形状を解析する問題は、この計算幾何学の対象とされる。計算幾何学は、画像処理自体の利用だけでなく、画像処理に関係する諸テーマ、例えば、パターン分類、クラスタリング、コンピュータグラフィックス、形状モデリングなどにも深く関係しており、画像処理において、直接的、あるいは間接的に大きく貢献し、今後もその発展動向は期待されている。

形状解析の中で、図形の輪郭線を含む線図形の折線近似あるいは多角形近似は、データ圧縮、雑音除去、図形の特徴抽出（記述）などを目的として多くの研究が行われている。折線近似には、線図形の特徴点を検出し、それらの間を線または円弧で結ぶ方法と、近似問題とみなして適当な評価関数の最適化を計る方法がある。その他に、線図形の近似表現としては、スプライン関数に代表されるような多項式による曲線をあてはめる方法がよく用いられる。

ここで、特徴点とは、(1) 交点 (intersections), (2) 分岐点 (branch points), (3) 端点 (end points), (4) 最大曲率点 (curvature maxima), (5) 変曲点 (points of inflection), (6) 最遠点对

(extreme points), (7) 屈折点 (corners) などである。これらの特徴点の検出に、いずれの場合も、値を定めなければならないパラメータがいくつかあり、多種多様な線図形に対して、自動的に適切な値を定める方法は与えられていない。

また、近年、スプライン補間に代表されるような多項式の曲線近似を拡張した方法にパラメトリック曲線と呼ばれる曲線近似がある。少ない情報で曲線を表現する方法として、コンピュータグラフィックス (CG) において良く知られ使われている。パラメトリック曲線は、パラメータ t をある範囲に限定し、その範囲で無限に細かく (x, y, z) をプロットする、つまり、 t から (x, y, z) を対応づけて得られる曲線である。 t から (x, y, z) を求めるために利用した関数グラフによって曲線の種類が決まり、Bernstein (バーンシュタイン) 基底関数という関数グラフを利用する Bezier 曲線、B スプライン基底関数という関数グラフを利用する B スプライン曲線のほか、Ferguson/Coons 曲線、Catmull-Rom スプライン曲線、NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) 曲線などもその代表的な曲線である。これらのパラメトリック曲線は、時間や角度のような連続する値を持つ変数、つまり、パラメータによって決まる曲線であるため、特徴点に相当する制御点、基底関数などの詳細なパラメータの設定が必要である。

これらに対し、変換による形状解析、つまり、記述と特徴抽出として、モーメントとともに、フーリエ記述子がよく知られる。線図形状解析の代表的な手法の一つである。フーリエ記述子は、図形の輪郭線あるいは一般に平面上の曲線を周波数領域で記述するものであり、従来、Zahn と Roskies による方法 [2] (以下、Z 型フーリエ記述子) と、Granlund による方法 [1] (以下、G 型フーリエ記述子) が代表的な手法であった。Z 型フーリエ記述子は、閉曲線上の始点からの長さに対する曲線の角度変化の累積 (全曲率関数) を、G 型フーリエ記述子は、閉曲線を始点からの長さの複素数値関数とみて、フーリエ展開し、得られる係数を記述子とする。

一般に、フーリエ記述子による方法の利点は、プログラムの簡便さとフーリエ展開の数学的基礎にあるといわれる。一方、欠点としては、図形の局所的な性質を記述することが困難であることや、開曲線に適用することが困難であることが挙げられる。また、Z 型フーリエ記述子では、フーリエ記述子の収束が遅く、低域成分による再生性が悪い。G 型フーリエ記述子では、開曲線の端点は互いに接近して閉曲線になろうとする傾向により、ギブス現象がおき、端点は保存されない。これらの欠点を解消し、全曲率関数を指数関数の指数部に持つ複素数値関数を被展開関数とするフーリエ記述子 (以下、P 型フーリエ記述子) が、上坂によって提案され、閉曲線だけでなく、開曲線にも適用できることが示された [3]。これによりフーリエ記述子の応用範囲が大きく広げられた。しかしながら、少

数のフーリエ記述子, つまり, 低域成分のもつエネルギー集約性が十分でないことが問題となっていた.

そこで, 従来のフーリエ記述子よりも集約性が高く, さらに, 開曲線にも適用可能な新しいフーリエ記述子 (I 型フーリエ記述子) を提案し, 幾何学的な図形形状解析における曲線近似という観点から, 提案のフーリエ記述子を評価し, 高い情報集約能力と優れた開曲線近似能力を示す.

1.1.2 非侵襲客観的尺度による性同一性障害診断へのアプローチ

1996年, 埼玉医科大学倫理委員会では, 性転換症に対する外科手術療法を正当な医療行為と判断し [19], その答申を受けて日本精神神経学会では, 1997年, 性同一性障害 (Gender Identity Disorder, 以下, GID) に関する答申と提言をまとめた [20]. そして, 具体的に, 1998年, 日本で初めて正式に性転換症に対する性別適合手術 (性転換手術) が埼玉医科大学で行われた. 1997年にまとめられた「性同一性障害に関する答申と提言」がいわゆる GID に関する初期のガイドラインである. 翌 1999年に, 専門分野の異なる医師, 臨床心理士, 法律関係者, GID 支援グループ, GID 当事者を会員にもち, GID を専門に扱う国内唯一の研究会である「GID (性同一性障害) 研究会」が組織され, 毎年学術集会が開催されている. これまで, 7回の学術集会が開かれ, GID に関する様々な提案がなされ, 問題が議論され, 治療方法や生活環境に関しての改善が重ねられ, 専門知識の向上と普及に大きく貢献している. そして, 最初のガイドラインから 4年後の 2002年に, ガイドライン第 2 版 [21] が公表され, 現在, 第 3 版の内容が検討されている. さらに, 2003年には, GID の性別の取り扱いの変更に関する手続きを示した, 性同一性障害者の性別の取り扱い特例に関する法律が, 7月 16日に公布され [49], 一定の要件を満たす GID に対し, 戸籍上の性の変更が, 認められるまでに至った.

毎年, 開催される GID 研究会では, ガイドラインの検討が中心的な議題ではあるが, 初期の医者による直接的な治療方法そのものの技術紹介や症例の報告が多かった研究会から, 次第に, ホルモン療法の改善, マイナーサージェリー, 音声治療, カミングアウト, 外来対応の配慮, 戸籍問題, 学校における精神的なケアに関してと間接的な多くの分野で幅広く GID の治療, ケアの報告が行われるまでになった. 近年では, GID の方が, 政界, スポーツ界の様々な分野で活躍される報道や, テレビ番組「3年 B 組金八先生」で GID をテーマに取り上げられたのをきっかけに, 中学生の文化祭などでも紹介されるなど, その認知は幅広い年齢層まで広がっている.

しかしながら、最初のガイドラインが作成され、日本で合法的に認められるようになった1997年から今日までは、まだ一区切りの10年という年月も経ておらず、まだ発展途上の未熟な研究分野である。

GIDや性転換症の診断は、これまで、複数の精神科医による診断面接から得られる患者の心理面に着目した定性的な診断が基本であり、それに加えて心理検査などの主観的定量的な診断や、ホルモンバランスなどの客観的定量的な診断も行われている。しかしながら、診断精度の向上と迅速な診断を実現するためには、できるかぎり多くの客観的定量的な尺度が必要とされている。こういったことから、工学的な立場での非侵襲客観的尺度による性同一性障害診断の実現を目指して、本研究が始められた。

ところで、近年、核磁気共鳴画像法(MRI)を始めとし、陽電子放射断層撮影法(PET)や機能的磁気共鳴画像法(fMRI)などの画像処理が広く使われるようになり、この分野の研究は急速に進んだ。それにより、脳に見られる性差はおもに生殖行動に関係する部分に限らず、認知や行動などにかかわる多数の脳領域についての性差が相次いで見つかっている。例えば、記憶や情動、視覚、聴覚、顔面認識の処理、目的地への進路の決め方、ストレスホルモンに対する脳の反応などにも違いが表れる。細胞レベルでも、言語の処理と理解にかかわる側頭葉皮質領域のニューロン密度は女性のほうが高いことが発見され、ニューロン数の男女差が認知能力に関係するかどうか調査されるようになった。脳にみられるすべての性差を確認し、それが認知能力や脳に関連した疾患のかかりやすさなどにどう影響するのかを正確に把握できるようになるには、まだまだ先の話ではある。それでも、これまでに行われた研究から、脳には男女差があり、解剖学的な構造だけでなく、そこで起きる化学反応や機能にも違いがあることがすでに示されている [78]。

こういったことから、本研究では、脳の中でも、大脳左右半球を連結する2億本以上の交連繊維が集束し、大脳の機能分化の性差の影響を受けていると考えられている脳梁に着目した。カルフォルニア大学のジェイ・フィーラン博士は、最もはっきりした脳機能の性差が脳梁にあると考えている [79]。

そこで、本研究では、MRI正中矢状断の脳梁輪郭線を閉じた曲線とみなし、G型フーリエ記述子を特徴量として用いて、身体的、心理学的性差の有無を解析する。

2001年米国科学アカデミーは、健康に関する性差についての包括的な報告をした。「性別は重要である。男性であるか女性であるかは、生物医学や健康関連研究の計画・分析をする際に、あらゆる分野、あらゆるレベルで考察すべき、重要で基本的な「人」の変数である。」と指摘している。

脳や行動、そして、薬物治療の効果などに、性別がどのような影響を与えるかを解き明

かそうとする研究は非常に重要であり、性差は、考慮しないわけにはいかない重要な要素である。脳梁そのものに性差があるか否か、また、GIDの診断を目的とするか否かに関わらず、非侵襲に計測可能であり、かつ身体的、あるいは、心理学的性差を反映する脳内の特徴量を特定することは、ヒトの認知能力において、性差、個人差が発生するメカニズムを解明するためにも非常に重要である。

1.2 本論文の構成

図 1.1 は、本論文の構成を示したものである。大きく分類して、「開曲線に適した新たな I 型フーリエ記述子の提案」と、「G 型フーリエ記述子を用いた脳梁形状の Gender 差の特定」から成る。

まず、第 2 章では、開曲線に対して、適用可能な I 型フーリエ記述子を提案し、従来のフーリエ記述子よりも高い情報集約性と優れた開曲線近似能力を示す。

2次元平面上の曲線形状を表現する手法としてフーリエ記述子があり、これまで、G, Z, P 型フーリエ記述子などが提案されてきた。閉曲線に対しては、G 型フーリエ記述子が離散フーリエ変換と同等の曲線表現能力を持つものの、開曲線に対しては、少数のパラメータに元の曲線のより多くの情報を集約するという意味で、いずれのフーリエ記述子も十分な曲線表現能力を有していない。本論文では、開曲線に対し、従来のフーリエ記述子よりも高い情報集約能力を持つフーリエ記述子（I 型フーリエ記述子）を提案する。I 型フーリエ記述子は、元の開曲線とそれを 180 度回転させた開曲線を接続して得られる閉曲線に対する G 型フーリエ記述子の部分集合として定義される。これは、元の開曲線に対する非整数周波数 $0.5, 1.5, 2.5, \dots$ のフーリエ係数といった意味を持ち、I 型フーリエ記述子から元の曲線を完全に再構成可能である。具体的に、任意の次数で打ち切られたフーリエ記述子から元の曲線を再構成した際の復元精度、および任意の次数までのフーリエ記述子を用いた曲線の近似精度の 2 つの立場から、提案する I 型フーリエ記述子は、従来の Z, P, G 型フーリエ記述子よりも、優れた情報集約能力を持つことを示す。

次に、第 3 章では、第 4 章、第 5 章の解析に用いる準備として、線形判別分析とその関連について概説する。最初に、判別分析の定式化、以降、正規密度に対する判別関数、KL 展開、マハラノビス汎距離による判別分析、フィッシャーの判別分析、フィッシャーの方法を拡張した正準判別分析、線形判別関数、線形計画法で代表的なサポートベクターマシン、サポートベクターマシンに類似の線形計画法など、線形判別問題全般を概説し、性の判別、同定を議論するための準備とする。

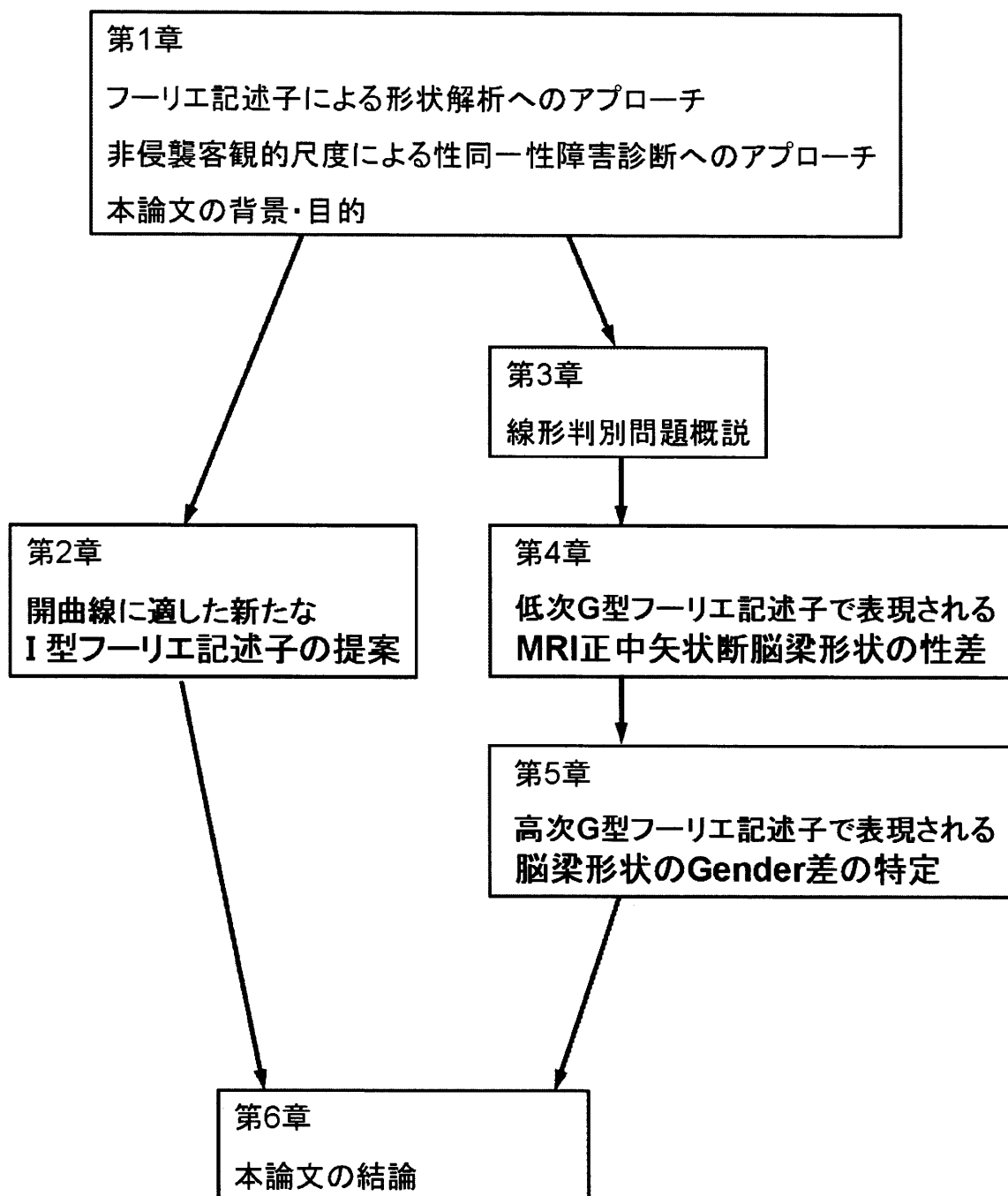


図 1.1: 本論文の構成

Fig. 1.1: A construction in this study.

第4章では、低次G型フーリエ記述子で表現されるMRI正中矢状断脳梁形状の性差を解析する。

GIDは、自己が認識している性、つまり心理学的な性が身体的な性、つまり生物学的な性と異なる症例を言う。そのようなGIDの診断やその患者に対する性別適合手術（性転換手術）の適用の可否の決定には、複数の精神科医による患者との診断面接から得られる患者の心理面に着目した定性的な診断が基本である。診断精度向上と迅速な診断を実現するため、心理学的な性を客観的かつ定量的手段により同定する手法の確立が急務とされている。古くから左右大脳半球を連結する脳梁の形状に性差があるといわれ、それが心理学的な性の同定に利用できると期待されてきたが、脳梁形状に有意な生物学的性差があることもいまだ明確にされていない。本論文では、脳梁形状をフーリエ記述子、中心モーメントを用いて記述し、その生物学的性差を調査した。その結果、男性より女性の方が脳梁が有意に前傾している傾向にあることを見出し、脳梁の主軸方位を特徴量として用いる生物学的な性の推定法を示した。このことから、脳梁主軸方位に性差が生じた原因を推測し、さらに脳の性分化とGIDの成因について考察を行なう。

第5章では、さらに、高次のG型フーリエ記述子までを用いて表現される脳梁形状を調査しGender差を特定する。

N 次までのフーリエ記述子により張られるベクトル空間において、正常男女の標本群を最も良く分離できる超平面をソフトマージンを持つ線形サポートベクターマシンにより求め、その超平面の直交補空間(1次元の軸)での座標を特徴量と定める。この特徴量は、正常男女の脳梁形状の性差を最も強く反映する。 $N = 9$ 次までのフーリエ記述子を用いた際のこの特徴量での正常男女の識別率は74%に及ぶことを示す。統計的な検定を行った結果でも、正常男女の間には、有意差があることが確認された($p < 10^{-17}$)。更に、線形部分空間上の脳梁形状を解析した結果、正常女性は、正常男性に比較し、脳梁膨大は大きくはないが丸い、Isthmusは太いという従来知見に一致した結果が得られた。更に、男性の脳梁幹前部は、女性より太いという新たな結果が得られた。

また、GIDの患者に対するこの特徴量の値は、FTMについては男性に近く、MTFについては、女性に近い値を有する。すなわち、FTM、MTFに関わらず、彼らの身体的な性よりも心理学的な性に対する特徴量の分布に近いことを示す。また、この解析手法と脳梁形状を記述したフーリエ記述子または、射影した部分空間との関係の妥当性を討論し、見出された性差は、心理学的な性を反映していると結論付けた。これにより、提案法は、将来GIDのための客観的かつ定量的な診断に使用できる可能性を示す。

第6章では、本論文の総括を行い、結言とする。

第2章

I 型フーリエ記述子

2.1 はじめに

フーリエ記述子は、2次元平面上の曲線形状を周波数領域で表現する手法であり、図形の形状認識や解析などに、曲線形状の特徴量として広く利用されている。閉曲線の記述を目的とするフーリエ記述子には、Granlundが提案したフーリエ記述子（以下、G型フーリエ記述子）[1]、ZahnとRoskiesが提案したフーリエ記述子（以下、Z型フーリエ記述子）[2]がある。一方、上坂は、Z型フーリエ記述子を拡張することにより、開曲線を表現することを可能にしたフーリエ記述子（以下、P型フーリエ記述子）を提案した[3]。また、フーリエ係数を用いた楕円フーリエ記述子が提案されている[4]。楕円フーリエ記述子は、簡単な変換によりG型フーリエ記述子に変換できるため、G型フーリエ記述子の一つとみなされる。

これまで、フーリエ記述子を用いて、機械部品の認識、工業部品の形状認識、植物の葉の形状解析と分類、食品の分類、及び医用画像における特定部位の抽出などが行われてきた[5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。我々も、G型フーリエ記述子をMRIで撮影された脳梁の形状解析に利用し、脳梁形状の性差の調査、性同一性障害の診断支援などを試みてきた[12]。

一般にパターン認識においては、より少数の特徴量でパターンを良く表現でき、また具体的に、パターン認識率の高い特徴量が良いとされる。フーリエ記述子を用いた曲線形状認識においても、形状に関するより多くの情報が低次のフーリエ記述子に集中していることが望まれる。こうした性質を情報集約性と呼ぶことにする。G型フーリエ記述子は、離散フーリエ変換とほぼ等価であるため、閉曲線に対しては、離散フーリエ変換と同等の情報集約性を持つ。しかし、G型フーリエ記述子を開曲線に適用した場合、始点と終点の間が不連続になることによってフーリエ記述子の収束が遅くなり、情報集約性が低下する。一方、Z型フーリエ記述子[2]、開曲線に適用可能なP型フーリエ記述子[3]は、曲線の微分（差分）の偏角、規格化微分（差分）をそれぞれ離散フーリエ変換する手法である¹。いずれも曲線の微分（差分）をとるために滑らかさが失われ、フーリエ記述子の収束性に関

¹それぞれの具体的な手法は、付録A.1に記述した。

しては不利であり、情報集約性が低下する要因となる。

本論文では、開曲線に対し、従来のフーリエ記述子よりも高い情報集約性を持つ、新しいフーリエ記述子（I型フーリエ記述子と呼ぶ）を提案する。数値実験により、任意の次数 N までのフーリエ記述子を用いて元の曲線を再構成した場合、I型フーリエ記述子は、従来のフーリエ記述子よりも高い曲線復元精度を持つことを示す。さらに、曲線のパターン認識に適用することにより、I型フーリエ記述子は、従来のフーリエ記述子よりも、高い認識率を有することを示す。

以下、2.2で、まず、G型フーリエ記述子について述べ、その問題点の再考から、新たなI型フーリエ記述子を提案する。2.3では、2種類の実験により、具体的に、I型フーリエ記述子が従来のフーリエ記述子に比べ、高い情報集約性を有することを示す。

2.2 開曲線に適した新たなフーリエ記述子「I型フーリエ記述子」

2.2.1 G型フーリエ記述子

閉曲線 C を複素平面上に置き、適当に定めた1点から曲線 C をトレースすることにより、整数の集合の上で定義され、値として複素数をとる関数、複素数値関数 $z(t)$ として表す。そして、任意の整数 t に対して、 $z(t) = z(t+L)$ を満たすものとする。G型フーリエ記述子は、 $z(t)$ の離散フーリエ変換に $1/L$ 倍した

$$c(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} z(t) \exp(-2\pi itk/L),$$

$$k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2.1)$$

として定義されている [1]。ただし、 i は虚数単位を表す。逆に、G型フーリエ記述子 $c(k)$ を L 倍し逆離散フーリエ変換することにより、元の曲線 $z(t)$ を

$$z(t) = \sum_{k=0}^{L-1} c(k) \exp(2\pi itk/L),$$

$$t = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2.2)$$

として再構成できる。離散フーリエ変換の性質より、 $c(-k) = c(L-k)$, $\forall k$ となるので、式(2.1)に示した k の範囲を $k = -L'+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, L'$ と定義して、式(2.2)の代わ

りに,

$$z(t) = \sum_{k=-L'+1}^{L'} c(k) \exp(2\pi itk/L),$$

$$t = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2.3)$$

とすることもできる. ただし, L' は, $(L-1)/2$ 以下の最大の整数を表す. 本論文では, $c(k)$ と $c(-k)(=c(L-k))$ をあわせて k 次のフーリエ記述子と呼ぶ.

G型フーリエ記述子を開曲線に対して適用した場合, 始点 $z(0)(=z(L))$ と終点 $z(L-1)$ の間の距離が離れ, 不連続になるため, 不連続な関数に対するフーリエ級数展開と同様に, フーリエ記述子の収束が遅くなる問題が発生する.

2.2.2 I型フーリエ記述子の考え方

G型フーリエ記述子は, 対象とする曲線 $z(t)$ が開曲線である場合に問題となるので, 曲線 $z(t)$ とそれを 180 度回転させた曲線をそれぞれの端点が一致するように結合することによって閉曲線にすることを考える. 曲線 $z(t)$ を 180 度回転させることは, 複素平面上では, $z(t)$ に $e^{i\pi}(= -1)$ を乗じることを意味する. また, 180 度回転後, それぞれの端点を一致させるため, 事前に, 曲線 $z(t)$ が $q = z(0) + z(L-1) = 0$ となるように, 平行移動しておくものとする. 具体的には, $z(t) - q/2$ を新たに $z(t)$ とおけば良い. 曲線の平行移動は 0 次のフーリエ記述子のみに影響を与える. さらに, 端点が重複することを避けるため, 曲線 $z(t)$ の最後の 1 点 $z(L-1)$ を除去しておく. つまり, 曲線 $z(t)$ とそれを 180 度回転させ, 端点同士を結合させた曲線 $z_c(t)$ は,

$$z_c(t) = \begin{cases} z(t), & t = 0, 1, \dots, L-2, \\ -z(t - (L-1)), & t = L-1, \dots, 2L-3 \end{cases} \quad (2.4)$$

と表される. 曲線 $z_c(t)$ は閉曲線であるため, 離散フーリエ変換しても問題は生じない. 曲線 $z_c(t)$ の G 型フーリエ記述子は,

$$c_c(k) = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{t=0}^{2L-3} z_c(t) \exp\left(\frac{-2\pi itk}{2(L-1)}\right),$$

$$k = 0, 1, \dots, 2L-3 \quad (2.5)$$

となる.

さて、式(2.4)で示される曲線 $z_c(t)$ に対する G 型フーリエ記述子 $c_c(k)$ は、元々の曲線 $z(t)$ の G 型フーリエ記述子 $c(k)$ に比べ、パラメータ数が L から $2(L-1)$ に増えている。これは、曲線 $z(t)$ から曲線 $z_c(t)$ を作成した際に、曲線の長さが L から $2(L-1)$ に増えたことによる。フーリエ記述子を用いてパターン認識を行う場合、パラメータ数が2倍に増えることは、特徴空間の次元が増えることを意味するため、望ましいことではない。端点を連続にすることによりフーリエ記述子の収束性を改善しても、パラメータ数が2倍になっては無意味である。しかし、次節で述べるように、曲線 $z_c(t)$ の偶数次のフーリエ記述子の値は恒等的にゼロであり、意味のあるパラメータ数は、結局、元の曲線 $z(t)$ の G 型フーリエ記述子のパラメータ数 L に等しいことが示される。

2.2.3 曲線 $z(t)$ と $z_c(t)$ のそれぞれの G 型フーリエ記述子の関係

曲線 $z(t)$ と $z_c(t)$ のそれぞれの G 型フーリエ記述子の関係について述べる。

式(2.4)で表される曲線 $z_c(t)$ は、次式で定義される2つの曲線 $z_1(t)$, $z_2(t)$ の差 $z_c(t) = z_1(t) - z_2(t)$ で表現される。

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \begin{cases} z(t), & t = 0, \dots, L-2, \\ 0, & t = L-1, \dots, 2L-3 \end{cases} \\ z_2(t) &= \begin{cases} 0, & t = 0, \dots, L-2, \\ z(t - (L-1)), & t = L-1, \dots, 2L-3 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

曲線 $z_1(t)$, $z_2(t)$ は、曲線 $z(t)$ の後ろ、前にそれぞれゼロを付加したものである。こうした操作は、デジタル信号処理ではゼロ詰めと呼ばれており、信号や画像の標本点間を補間する目的にしばしば用いられる。ゼロ詰めにより、曲線 $z_1(t)$ の G 型フーリエ記述子 $c_1(k)$ は、次式に示すように、元の曲線 $z(t)$ ² の G 型フーリエ記述子 $c(k)$ を1点おきに sinc 関数により補間し、1/2倍したものになっている。

$$\begin{aligned} c_1(2k) &= \frac{1}{2}c(k) \\ c_1(2k-1) &= \frac{1}{2}(\text{interpolation of } c(k)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

離散フーリエ変換は、周期的な信号に対する変換であることを考慮すれば、曲線 $z_2(t)$ は、曲線 $z_1(t)$ を $L-1$ だけ t -軸をシフトしたものと考えることができる。こうした処理

²正しくは、 $z(t)$ の最後の1点を除いた $z(t)$, $t = 0, 1, \dots, L-2$ である。

は、デジタル信号処理では、環状シフトと呼ばれている。t軸のシフトは、周波数軸では位相シフトになるので、このことを考慮すると、曲線 $z_2(t)$ のG型フーリエ記述子 $c_2(k)$ は、曲線 $z_1(t)$ のG型フーリエ記述子 $c_1(k)$ を用いて、

$$\begin{aligned} c_2(k) &= c_1(k) \exp\left(-2\pi i k \frac{L-1}{2(L-1)}\right) \\ &= c_1(k)(-1)^k \end{aligned} \quad (2.8)$$

と表される。つまり、 $c_2(k)$ は、 $c_1(k)$ の符号を1点おきに反転したものになる。

離散フーリエ変換の線形性により、 $z_c(t) = z_1(t) - z_2(t)$ のG型フーリエ記述子 $c_c(k)$ は、

$$c_c(k) = c_1(k) - c_2(k) \quad (2.9)$$

となる。ゆえに、式(2.7),(2.8)を式(2.9)に代入することにより、曲線 $z(t)$ と $z_c(t)$ のそれぞれのG型フーリエ記述子の関係が得られる。

$$c_c(k) = \begin{cases} 0, & k : \text{even} \\ \text{interpolation of } c(k), & k : \text{odd} \end{cases} \quad (2.10)$$

式(2.10)より、閉曲線 $z_c(t)$ のフーリエ記述子 $c_c(k)$ は、偶数次ではゼロであり、奇数次では、元の開曲線 $z(t)$ のフーリエ記述子 $c(k)$ を1点おきに補間し、補間された値のみを取り出したものであることがわかる。つまり、閉曲線 $z_c(t)$ は、 $c_c(k)$, $k = 1, 3, 5, \dots, 2L-3$ で完全に表現されており、また、これらのパラメータから、閉曲線 $z_c(t)$ を完全に再構成可能である。また、開曲線 $z(t)$ は、閉曲線 $z_c(t)$ と絶対位置情報 $q = z(0) + z(L-1)$ から復元可能である。ゆえに、開曲線 $z(t)$ は、 $q, c_c(k)$, $k = 0, 1, 3, 5, \dots, 2L-3$ の合計 L 個のパラメータで表現することができ、開曲線 $z(t)$ のG型フーリエ記述子 $c(k)$, $k = 0, 1, \dots, L-1$ と実質的なパラメータ数は、まったく変化していないことになる。

2.2.4 I型フーリエ記述子の定義

2.2.3での議論を踏まえ、式(2.4)により作成される閉曲線 $z_c(t)$ のG型フーリエ記述子 $c_c(k)$ を利用して、新しいフーリエ記述子 $c_I(k)$ を次式で定義する。

$$c_I(k) = \begin{cases} \frac{z(0) + z(L-1)}{2}, & k = 0 \\ c_c(\text{sign}(k)(2|k| - 1)), & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

ただし、 $\text{sign}(\cdot)$ は、 \cdot が正ならば1、負ならば-1を表す。このフーリエ記述子 $c_I(k)$ は、元の曲線 $z(t)$ のG型フーリエ記述子の補間された次数 (0.5, 1.5, 2.5, ... 次) を取り出した

ものに相当するため、I型フーリエ記述子 (Interpolative Fourier descriptor) と呼ぶことにする。開曲線 $z(t)$ から I型フーリエ記述子 $c_I(k)$ を求める処理の流れを図 2.1(a) に示す。

曲線 $z(t)$ の I型フーリエ記述子 $c_I(k)$ は、曲線 $z(t)$ の G型フーリエ記述子 $c(k)$ と同じ k の範囲 $k = 0, 1, \dots, L-1$, または、 $k = -L'+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, L'$ で、曲線 $z(t)$ に関するすべての情報を持つ。ただし、 L' は、 $(L-1)/2$ 以下の最大の整数を表す。

2.2.5 I型フーリエ記述子からの元の曲線の再構成

I型フーリエ記述子 $c_I(k)$ から開曲線 $z(t)$ の再構成は、以下のように行うことができる。その流れを図 2.1(b) に示す。

1. I型フーリエ記述子 $c_I(k)$ の偶数次にゼロを挿入するアップサンプリングを行い、 $c_c(k)$ を求める。

$$c_c(k) = \begin{cases} c_I(\text{sign}(k) \frac{|k|+1}{2}), & k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

2. 得られた $c_c(k)$, $k = 0, 1, \dots, 2L-3$ から、 $z_c(t)$ を再構成する。

$$z_c(t) = \sum_{k=0}^{2L-3} c_c(k) \exp\left(\frac{2\pi i t k}{2(L-1)}\right), \\ t = 0, 1, \dots, 2L-3$$

3. $z_c(t)$ の最初の L 点を取り出し、更に、絶対位置を復元して $z(t)$ とする。

$$z(t) = z_c(t) + c_I(0), \quad t = 0, 1, \dots, L-1$$

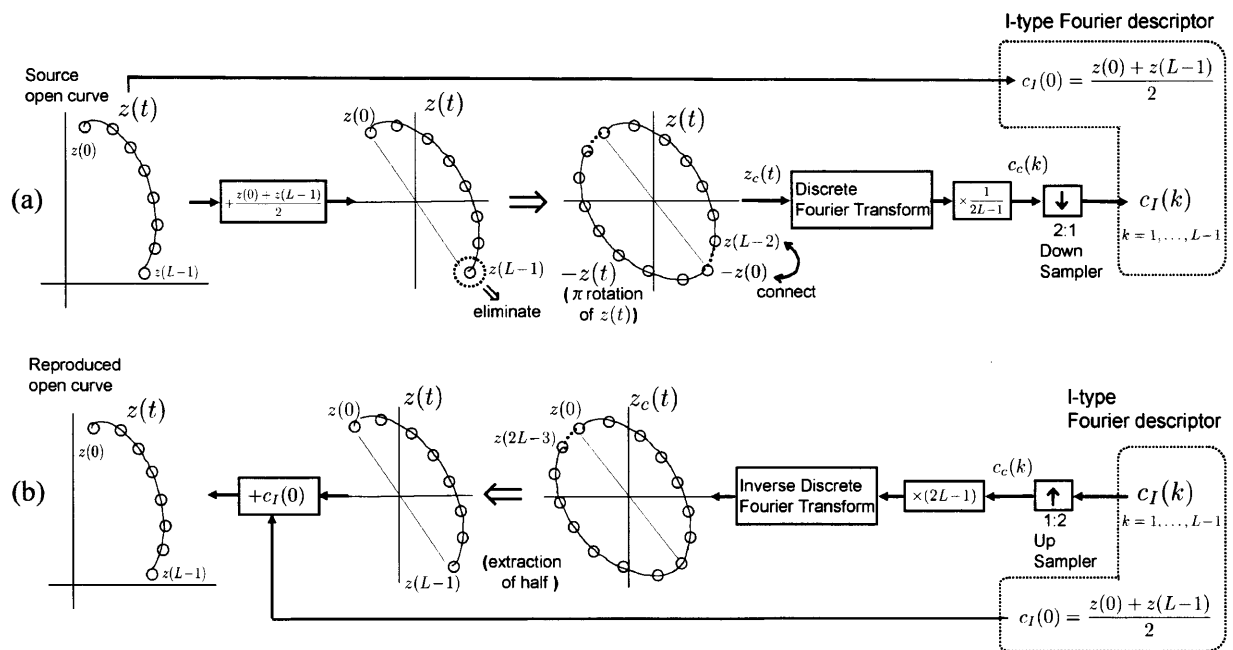


図 2.1: I型フーリエ記述子を求める処理の流れ (a) と再構成の流れ (b)

Fig. 2.1: (a) Procedure to obtain I-type Fourier descriptor and (b) that for reproducing the original open curve.

2.3 情報集約性の検証

少ないパラメータの中に曲線に関するより多くの情報を集約することは、曲線形状のパターン認識、符号化など様々な用途において極めて有用である。一般的には、フーリエ記述子を N 次までで打ち切り、元の曲線を再構成した際の復元精度が高ければ、また具体的に、 N 次までのフーリエ記述子を用いて曲線の近似精度が高ければ、高い情報集約性を持つといえる。以下、2.3.1 では曲線復元精度、2.3.2 では曲線の近似精度の立場から、提案している I 型フーリエ記述子が、従来の Z, P, G 型フーリエ記述子よりも、高い情報集約性を持つことを示す。

2.3.1 曲線復元精度の評価

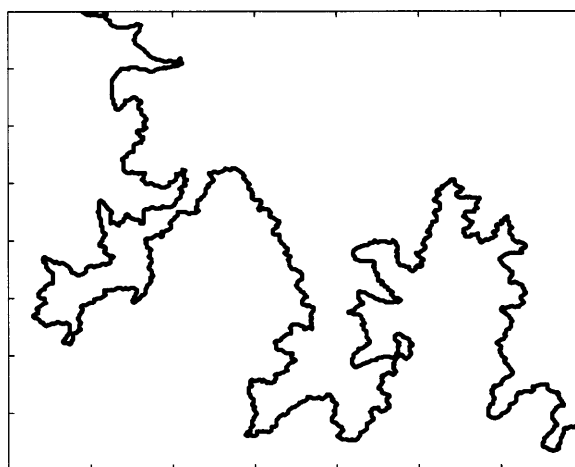
我々は、本論文で提案している I 型フーリエ記述子の用途の一つとして、地形図における等高線情報の符号化を考えている。そこで、数値実験では、曲線の一例として、等高線を取り上げ、復元精度を評価する。数値実験に用いた地形図は、国土地理院刊行、数値地図 50m メッシュ（標高）のうち、第 1 次地域区画メッシュ・コード 5437（20 万分の 1 地勢図図名：高山）、第 2 次地域区画メッシュ・コード 34,35,44,45（2 万 5 千分の 1 地形図図名：笠ヶ岳、穂高岳、三俣蓮華岳、槍ヶ岳）を結合したものである。開曲線の一例として、その地形図における北アルプス穂高岳、槍ヶ岳周辺における標高 2,400m の等高線の一部を図 2.2 に示す。

Z, P 型フーリエ記述子を適用可能なように、 $|z(t+1) - z(t)| = \text{Constant}, \forall t$ となるように開曲線 $z(t), t = 0, 1, \dots, L-1$ をサンプリングした。この曲線 $z(t)$ の Z, P, G, I 型フーリエ記述子を求め、 N 次までで打ち切って元の曲線 $z(t)$ を再構成した。再構成された曲線を $\hat{z}(t)$ とし、これと元の開曲線 $z(t)$ の平均 2 乗誤差を次式で定義する。

$$E(N) = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} |\hat{z}(t) - z(t)|^2 \quad (2.12)$$

図 2.2 に示した開曲線を Z, P, G, I 型フーリエ記述子で記述し、 N 次までを用いて再構成した際の平均 2 乗誤差 $E(N)$ を打ち切り次数 N の関数として図 2.3 に示す。図 2.3 より、復元精度は、おおよそ Z, G, P, I 型フーリエ記述子の順に高くなることがわかる。

打ち切り次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ のそれぞれのフーリエ記述子を用いて再構成された曲線 $\hat{z}(t)$ を図 2.4 に示す。図 2.4 では、再構成曲線 $\hat{z}(t)$ を太い実線、元の開曲線 $z(t)$ を細い実線で示した。図 2.4 より、Z 型フーリエ記述子を用いた場合、再構成曲線 $\hat{z}(t)$ は、 $N = 20$ でも元の曲線 $z(t)$ をほとんど表現できておらず、G 型フーリエ記述子では、始点

図 2.2: 数値実験に用いた開曲線の一例 ($L = 3316$)Fig. 2.2: An example of open curves used in a numerical experiment ($L = 3316$).

と終点の間でギブス現象が見られることがわかる。これまでに提案されたフーリエ記述子の中では、P型フーリエ記述子が最も高い復元精度を有しているが、I型フーリエ記述子は、それよりもさらに高い復元精度を有することが分かる。また、地形図の他の等高線に対しても同様の実験を行ったところ、図 2.3、図 2.4 と定性的に同様の結果が得られた。

2.3.2 曲線の近似精度の評価

我々は、また、ペンタブレットを用いて入力された署名、乱筆文字、記号等のパターン認識に、本論文で提案しているI型フーリエ記述子を利用することを考えている。そこで、ペンタブレット入力された手書き文字を曲線の例として取り上げ、提案しているI型フーリエ記述子を用いて文字の近似精度を他のフーリエ記述子と比較する実験を行った。

実験に用いた文字種は、数字 (10種)、英字小文字 (26種)、英字大文字 (26種)、ひらがな (71種)、カタカナ (71種)、漢字 (20種) の合計 224種である。ひらがな、カタカナでは、濁音、半濁音も含む。漢字は、「子」、「岡」、「崎」、「平」、「康」、「後」、「慎」、「成」、「村」、「植」、「横」、「河」、「洋」、「浩」、「田」、「純」、「藤」、「西」、「透」、「郎」である。これらの文字を一人の被験者が、数字、英字小文字、英字大文字については各文字種について 20文字、ひらがな、カタカナ、漢字については各文字種について 10文字、合計 2,860文字をペンタブレット(ワコム社, intuos3 PTZ-630)に書き、サンプリング間隔 15.625[ms]で、その座標を記録した。各文字ごとにサイズを規格化した。いくつかの文字

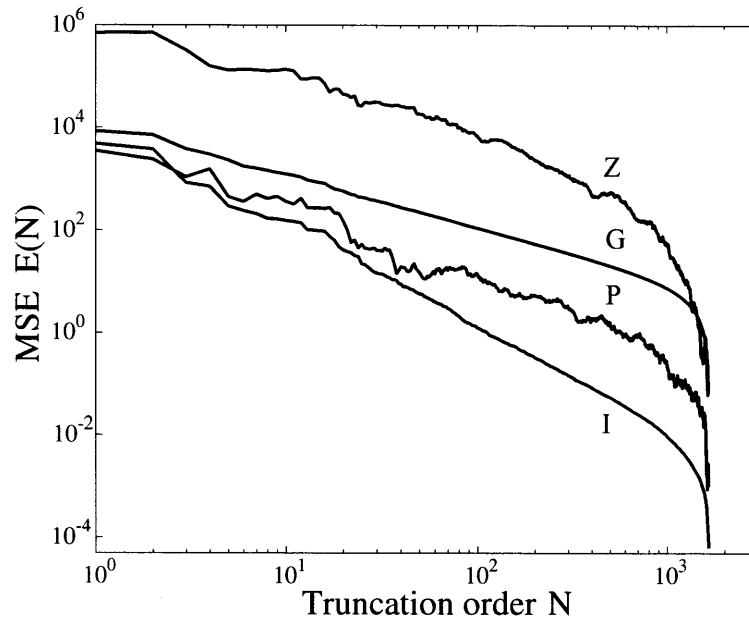


図 2.3: N 次までの Z, P, G, I 型フーリエ記述子から復元された曲線の平均 2 乗誤差
 Fig. 2.3: Mean squared error of the open curve reconstructed by each of Z, P, G, I-type Fourier descriptors with truncation order N .

種について、記録された文字の例を図 2.5 に示す。図 2.5 では、文字を表す線を太い実線、ペンタブレットから離れてペンが移動している軌跡を細い実線で示した。本実験では、文字を表す線そのものだけではなく、ペンタブレット表面から離れてペンが移動している軌跡も曲線データとして用いた。こうして得られた曲線を $z(t)$ とする。また、Z, P 型フーリエ記述子では、 $|z(t+1) - z(t)| = \text{Constant}, \forall t$ であることが要求される。そこで、曲線 $z(t)$ を補間し、こうした条件を満たすようにリ・サンプリングした曲線 $z'(t)$ を作成した。

記録されたすべての文字について、曲線 $z(t)$, $z'(t)$ の Z, P, G, I 型フーリエ記述子を求め、1 次から N 次までの記述子の値を取り出して特徴ベクトルとした。フーリエ記述子は複素数であり、また各次数のフーリエ記述子には負の周波数成分を表す負の次数の記述子も存在するため、 N 次までの記述子は、要素数 $4N$ の実数ベクトルとして表現される。

文字を曲線とみなして、次数 N までのそれぞれのフーリエ記述子を用いて、復元された文字の近似精度を比較する。打ち切り次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ のそれぞれのフーリエ記述子を用いて復元された文字「あ」と「村」の文字近似精度を、それぞれ、図 2.6, 図 2.7 に示す。図 2.6, 図 2.7 では、再構成文字 $\hat{z}(t)$ を太い実線、元の文字 $z(t)$ を細い実線で示した。図 2.6, 図 2.7 より、Z 型フーリエ記述子を用いた場合、再構成文字 $\hat{z}(t)$ は、 $N = 20$

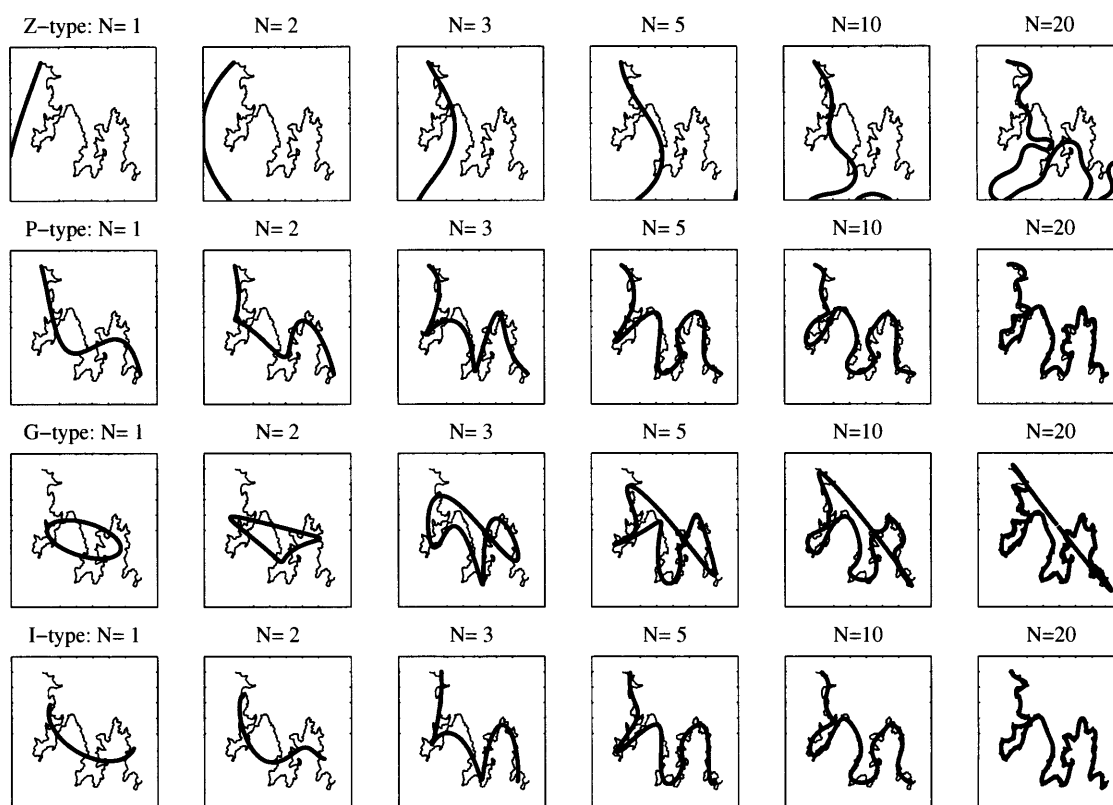


図 2.4: 打ち切り次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ の Z, P, G, I 型フーリエ記述子から復元された曲線

Fig. 2.4: The open curves reconstructed by each of Z, P, G, I-type Fourier descriptors with truncation order $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$.

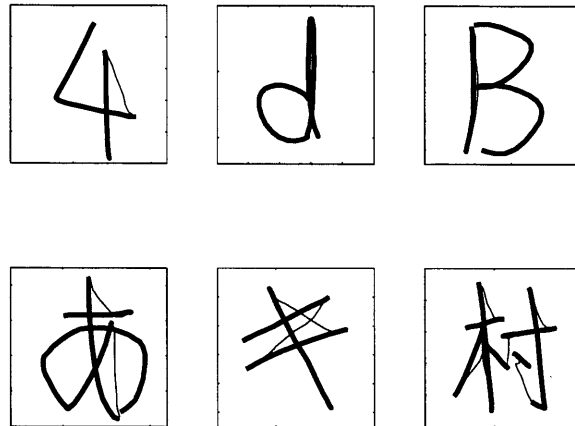


図 2.5: ペンタブレットを用いて入力された文字の例: 「4」, 「d」, 「B」, 「あ」, 「キ」, 「村」
 Fig. 2.5: Samples of characters written with a pen tablet: “4”, “d”, “B”, “あ”, “キ”, “村”.

でも元の文字 $z(t)$ をほとんど表現できておらず、G型フーリエ記述子では、始点と終点の間でギブス現象が見られることがわかる。しかし、I型フーリエ記述子は、P型フーリエ記述子よりも高い近似精度を有することがわかる。また、リ・サンプリングされていない文字 $z(t)$ を復元した場合の文字「あ」の近似精度を、図 2.8 に示す。これより、P型フーリエ記述子は、Z型フーリエ記述子と同程度の近似精度であり、I型フーリエ記述子は、リ・サンプリングした場合よりも、さらに近似精度は高くなる。また、他の文字についても同様の実験を行ったところ、図 2.6, 図 2.7, 図 2.8 と定性的に同様の結果が得られた。

図 2.6, 図 2.7, 図 2.8 より以下のことが分かる。

- I, G 型フーリエ記述子では、文字を描く速度情報を利用した方が文字近似精度が高い。
- P型フーリエ記述子では、 $|z(t+1) - z(t)| = \text{Constant}, \forall t$ であることが要求されるため、文字を描く速度情報を利用することができない。文字を描く速度情報を含む $z(t)$ を用いたとしても文字近似精度は低下する。
- 文字を描く速度情報を利用しない場合、I, P型フーリエ記述子の近似精度はほぼ等しい。
- それぞれのフーリエ記述子で近似精度が高い手法を選択した場合、その近似精度は、I, G, P型フーリエ記述子の順に低下する。

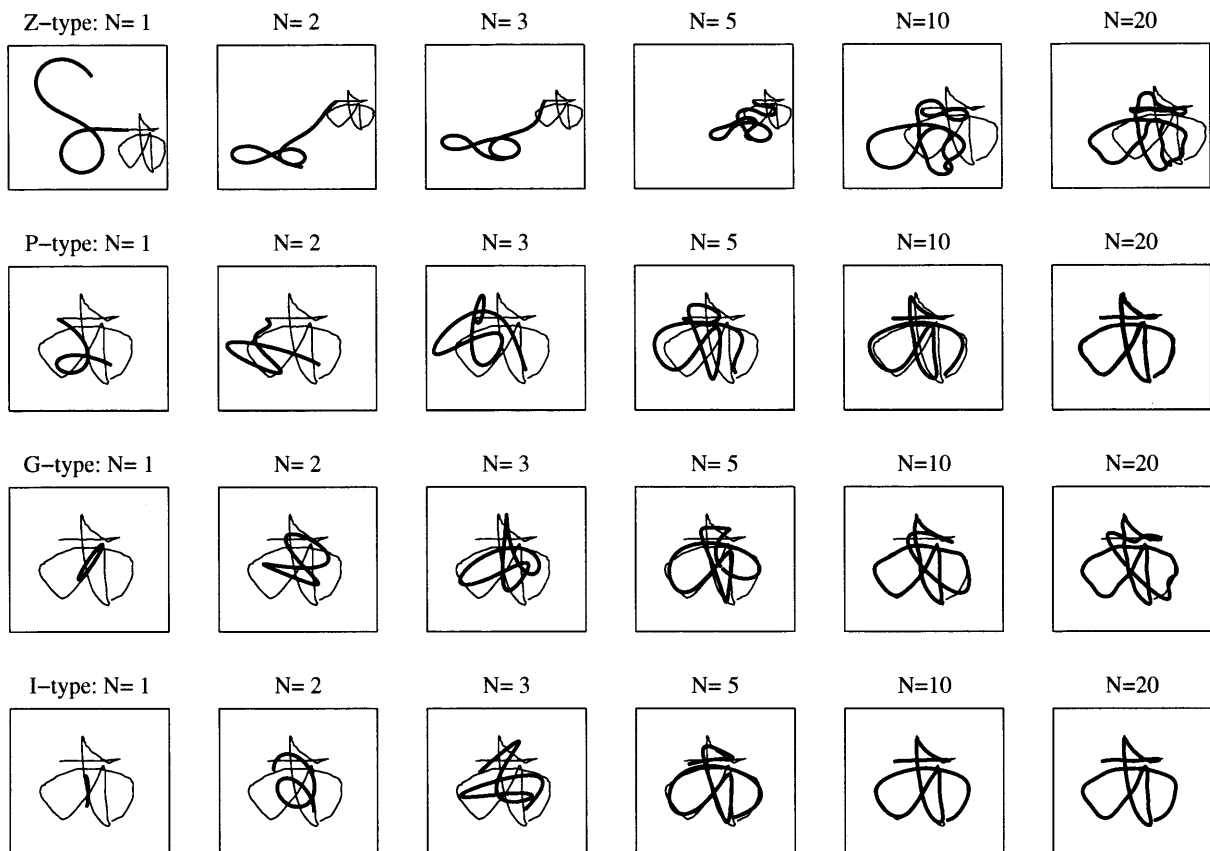


図 2.6: 次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いて Z, P, G, I 型フーリエ記述子から復元された文字「あ」の近似精度 (リ・サンプリング間隔:0.01)

Fig. 2.6: Approximation accuracy of character “あ” reconstructed by each of Z, P, G, I-type Fourier descriptor with order $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$. (resampling interval:0.01)

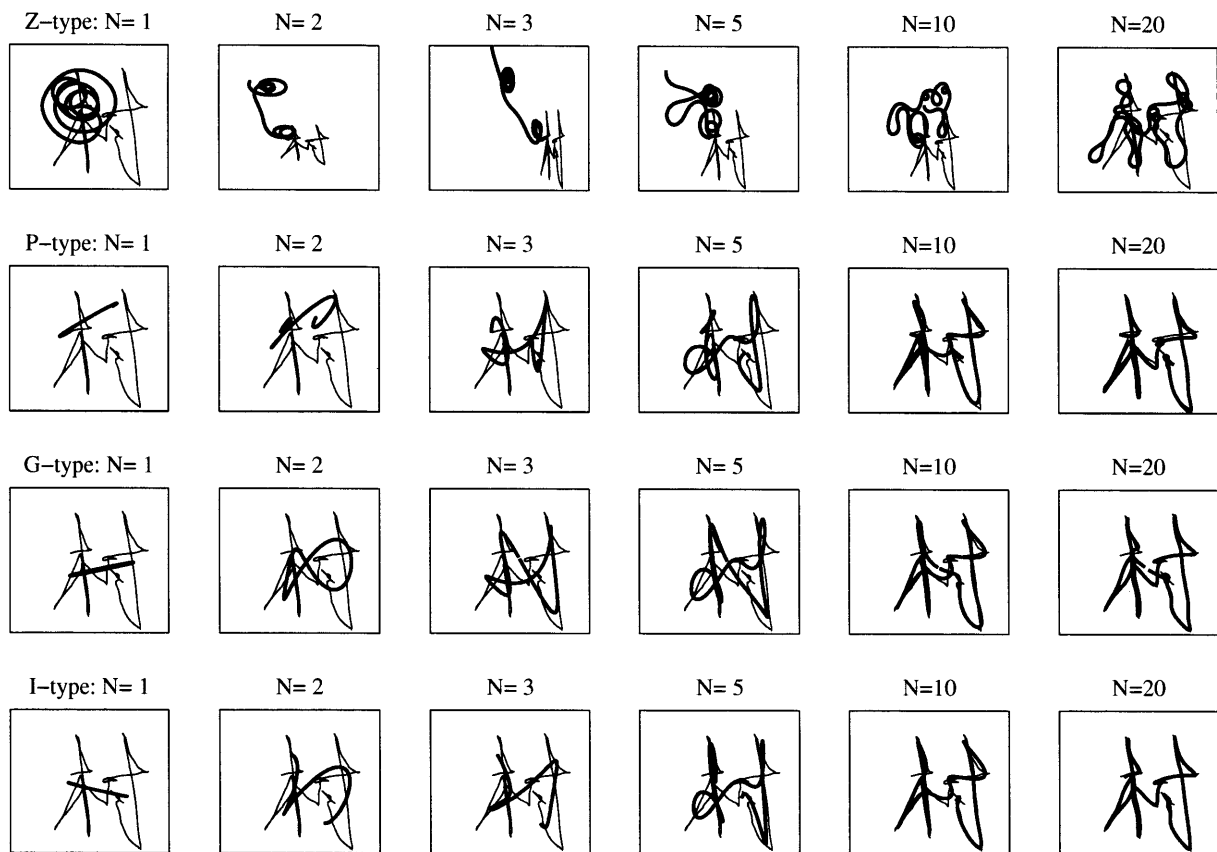


図 2.7: 次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いて Z, P, G, I 型フーリエ記述子から復元された文字「村」の近似精度 (リ・サンプリング間隔:0.01)

Fig. 2.7: Approximation accuracy of character "村" reconstructed by each of Z, P, G, I-type Fourier descriptor with order $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$. (resampling interval:0.01)

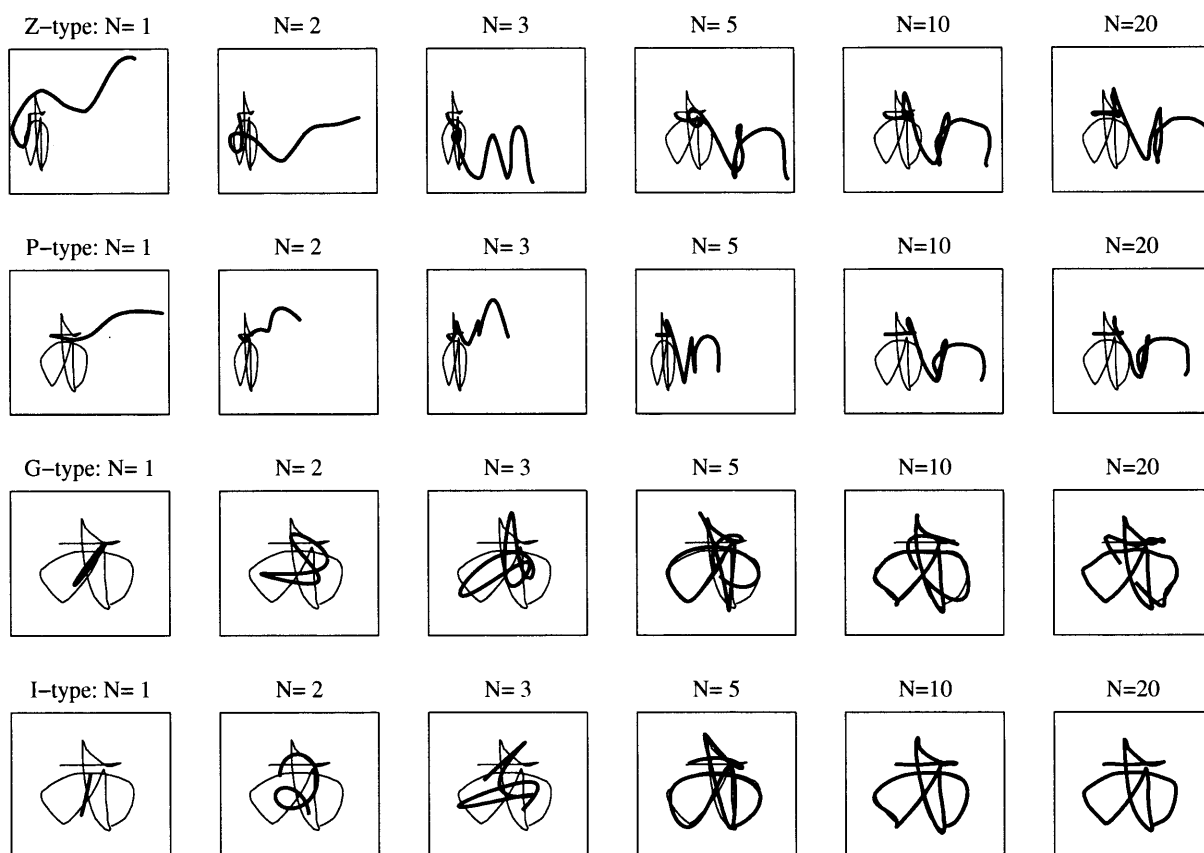


図 2.8: 次数 $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$ までを用いて Z, P, G, I 型フーリエ記述子から復元された文字「あ」の近似精度 (リ・サンプリングなし)

Fig. 2.8: The character "あ" reconstructed by each of Z, P, G, I-type Fourier descriptor with order $N = 1, 2, 3, 5, 10, 20$. (no resampling)

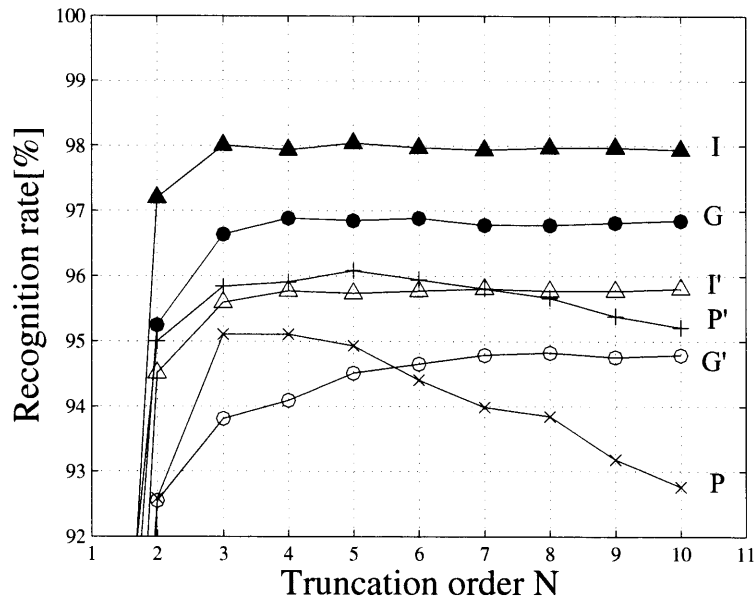


図 2.9: 各フーリエ記述子を用いた文字認識における認識率の比較

Fig. 2.9: Comparison of recognition rates in character recognition with each Fourier descriptor.

これらより、I型フーリエ記述子は、開曲線に対してフーリエ記述子の収束性が高いという点からG型フーリエ記述子よりも、また曲線の速度情報を利用できる点からP型フーリエ記述子よりも、曲線の近似性能に優れているといえる。

これらの文字近似精度の比較で明らかであるが、参考までに認識率での評価を行ってみた。文字認識は、ユークリッド距離を用いたk-NN法 [13]により行った。認識率の評価は、cross-validation法のうち、各文字から1標本ずつ抽出して評価用標本とするleave-one-out法 [13, 14]で行った。

打ち切り次数 N を $N = 1, \dots, 10$, k-NN法におけるパラメータ k を $k = 1, \dots, 11$ とするすべての組み合わせについて、各フーリエ記述子を用いた際の文字認識率を調べた。その結果、 k の増加に対し、各フーリエ記述子とも認識率は単調に減少し、 $k = 1$ の場合に最も高い認識率が得られた。そこで、 $k = 1$ とし、各フーリエ記述子を用いた際の認識率を打ち切り次数 N の関数として図 2.9 に示す。図 2.9 において、I, G, P は、文字を描く速度情報を含む $z(t)$ を、それぞれ I, G, P 型フーリエ記述子で表現した際の認識率、I', G', P' は、文字を描く速度情報を含まない $z'(t)$ を、それぞれ I, G, P 型フーリエ記述子で表現した際の認識率を表す。Z型フーリエ記述子を用いた際の認識率は、80%台と極端に低かったために図 2.9 には現れていない。これらの結果は、図 2.6, 図 2.7, 図 2.8 の文字

の近似精度とほぼ同様の結果となった。

しかしながら、フーリエ記述子を用いて文字認識を行った場合、文字の全体的な形状の認識には優れてはいるが、細かい部分に差がある文字、例えば、「ぱ」と「ば」などの認識には不得手であることがわかっている。I型フーリエ記述子で、文字全体の大まかな形状を識別したうえで、文字の局所的な違いを識別するのが優れているパターンマッチングなどの手法を組み合わせることによって、オンライン文字認識、なかでも、著名、乱筆文字、記号等の認識も可能であると考えられる。

2.4 まとめ

開曲線を表現するための新たなフーリエ記述子 (I型フーリエ記述子) を提案した。I型フーリエ記述子は、元の開曲線とそれを180度回転させた開曲線を接続して得られる閉曲線に対するG型フーリエ記述子の部分集合として定義される。I型フーリエ記述子は、元の開曲線に対する非整数周波数0.5, 1.5, 2.5,...のフーリエ係数といった物理的な意味を持つ。数値実験により、任意の次数で打ち切られたフーリエ記述子から元の曲線を再構成した際の復元精度、および任意の次数までのフーリエ記述子を用いて曲線の近似精度を調べた。これらの結果から、提案するI型フーリエ記述子は、開曲線に対し、従来のZ, P, G型フーリエ記述子よりも、優れた情報集約性を持つことが示された。

提案したI型フーリエ記述子は、開曲線を記述するための手法であり、閉曲線を記述するためには、従来のG型フーリエ記述子を使えば良いとするのが本論文の立場である。ところで、離散フーリエ変換を基本とするフーリエ記述子では、そもそも、すべての曲線を閉曲線とみなすのであるから、開曲線と閉曲線の違いは、明確に定義されているわけではなく、始点と終点の間の距離や接続の滑らかさに依存する曖昧なものである。そのため、始点と終点がどのような関係にあれば、G型フーリエ記述子に代えて提案したI型フーリエ記述子を使えば良いのかという疑問が起こる。現在のところ、こうした疑問に対する一般的な答えを述べることはできないが、実用上は、与えられた対象と問題に対し、G, I型フーリエ記述子を共に適用し、優れた性能が得られる方を選択すればよいので、大きな問題はないと思われる。

第3章

線形判別問題概説

3.1 はじめに

パターン認識の分野では、識別 (classification), 判別 (discrimination) が頻繁に用いられるが、厳密に区別されるべきである。識別とは、あらかじめ与えられたクラスに関する知識に基づいて、未知のパターンがどのクラスに属するかを決定する過程を指し、判別とは識別のような決定過程は必ずしも含まず、単に識別に有効な特徴を強調することを意味する [75]。さらに、統計的データ解析の立場からは、判別は分類 (classification) と区別されなければならない。分類とは、分類対象間に見られる類似性あるいは差異性を表す測度を用意して、これに従ってその対象をいくつかの群に分けることをいう。これに対し、対象がすでにある標識にもとづいて仕分けされる場合に、この分類標識をもつ標本にもとづいて適当な分類規則 (方式) を作り、この分類方式に従って新たな対象がどの分類群に属するかを定めることを判別と言う。すなわち、所属が未知の対象をあらかじめ分けられた群の一つに割り当てることを判別と言う [64]。

線形判別法 (linear discriminant method) は、特徴空間からある基準に基づいて識別に適した部分空間を決定する、すなわち、特徴空間をより次元の小さい部分空間に変換する方法である。そして、その簡便さと高い有用性のためパターン識別の応用例において広く使われていると同時に、統計学の分野では判別分析 (discriminant analysis) と呼ばれ多変量解析の基本技法として知られている。

判別分析は、R.A. Fisher が、1936年の論文においてクラス間の識別問題について考察したことに始まる。クラス内分散とクラス間分散の比を評価尺度にするという Fisher のアイデアは、多変量解析の分野で、識別に適した次元圧縮法として発展、線形判別法として活用されている。

判別分析は、特徴ベクトル x を線形の次元圧縮写像によって、 $y = Ax$ のように変換し、識別に適した低い次元の表現を得ることを目的としている。直接的に識別関数を与えるわけではないが、分布の歪みを修正する効果が期待できるため、判別分析をおこなった後の空間で、パターンマッチングなどの簡単な識別を行えば、もとの空間で行うよりも計算量

を減らしながら、識別誤り率を減らせる可能性がある [73].

この章では、判別分析について、特に、線形判別分析について焦点をあて概説する。最初に、3.2で判別分析の定式化を述べる。以降、3.3では、正規密度に対する判別関数、次に、3.4で主成分分析を簡単に説明したあと、マハラノビス汎距離による判別分析から、フィッシャーの判別分析を述べ、K-L展開と判別分析の違いを考察し、フィッシャーの方法を拡張した、正準判別分析について述べる。さらに、3.5で線形判別関数を広く概説したあと、3.6で、線形計画法で代表的なサポートベクターマシンによる線形分離可能、不可能な場合、非線形な場合をそれぞれ簡単に概説し、最後に、サポートベクターマシンに類似の線形計画法について、簡単に述べる。

3.2 判別分析の定式化

判別分析は、 d 個の変数からなる多変量データ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ によって特徴付けられる個体を、1つの群に割り当てるための規則となる関数（判別関数, discriminant function）を決定することにある。判別関数を定めるには、次の3つの条件が必要とされる。

(a) 異なる g 個の群それぞれについての、多変量データ \mathbf{x} に関する確率密度 $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, g$ が知られていること。

(b) g 個の群に属する個体の、各群での相対頻度にあたる先験確率 (prior probability) $q_i, i = 1, 2, \dots, g$ が知られていること。

(c) 第 i 群に属する個体を、誤って第 j 群へ判別したときにこうむる損失 $C(j|i)$ が知られていること。

このとき、統計的決定理論の考え方から、未知の個体 \mathbf{x} を第 j 群へ誤って判別することで生じる総損失は、

$$\sum_{i=1}^g C(j|i) q_i f_i(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

で表される。これより、式 (3.1) を最小とする群へ判別を行えば、誤判別による損失を最小にすることができる。

誤判別による損失 $C(j|i)$ は、判別分析の利用者が研究内容に応じて定めるべきものである。しかし、誤判別による損失を具体的に数値で表現することは困難であるため、通常は、 $i = j$ のとき、 $C(j|i) = 0$ 、 $i \neq j$ のとき、 $C(j|i) = 1$ と仮定される。

誤判別率を最小にする基準を選択したとき、条件 (a) の確率密度関数が、各群ごとに母

数まで完全に分かっている場合には、次式

$$q_i f_i(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

を最大にする群に割り当てを行えばよい。

具体的に、2群に判別する場合、確率ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ の π_1, π_2 における確率密度関数をそれぞれ $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})$ とする。判別法は、 d 次元空間 \mathcal{R}^d を互いに素な領域 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ に分割し、 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_i (i = 1, 2)$ ならば、観測値 \mathbf{x} を π_i に属すると判別することによって定式化される。この判別法を、 $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ と表す。

3.3 正規密度に対する判別関数 [77]

一般に、最小誤り率識別は、次の判別関数を使って実現できる。

$$g_i(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}|w_i) + \ln P(w_i) \quad (3.3)$$

ここで、 $P(w_i)$ は事前確率、 \ln は自然対数である。この式は、密度 $p(\mathbf{x}|w_i)$ が多変量正規分布、つまり、 $p(\mathbf{x}|w_i) \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ であれば、ただちに計算することができる。この場合、式(3.12)から、

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) - \frac{d}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \ln P(w_i) \quad (3.4)$$

となる。

ケース1： $\boldsymbol{\Sigma}_i = \sigma^2 \mathbf{I}$

最も単純なケースは、特徴量が統計的に独立でそれぞれ同じ分散 σ^2 を持つ場合で、共分散行列は単位行列 \mathbf{I} を単に σ^2 倍した対角行列である。これは幾何学的に見れば、 i 番目のクラスの標本が、平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$ を中心とする同じ大きさの超球状集団に含まれるという状況に対応する。 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ の行列式と逆行列の計算は特に簡単で、 $|\boldsymbol{\Sigma}_i| = \sigma^{2d}$ と $\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} = (1/\sigma^2)\mathbf{I}$ となる。式(3.4)の $|\boldsymbol{\Sigma}_i|$ と $(d/2) \ln 2\pi$ の項はどちらも i によらないので、これらは無視できる付加定数になる。したがって、次式の単純な判別関数が得られる。

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i\|^2}{2\sigma^2} + \ln P(w_i) \quad (3.5)$$

ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。これを、展開し、まとめると、

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} & (3.6) \\ \text{where } \mathbf{w}_i &= \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\mu}_i \\ w_{i0} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{\mu}_i + \ln P(w_i) \end{aligned}$$

となり、線形判別関数が得られる。

ケース2: $\Sigma_i = \Sigma$

共分散行列が同一で、それ以外にとくに制約のない場合が、もう1つの単純なケースである。これは幾何学的には、 i 番目のクラスの標本が、平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$ を中心とする同じ大きさの形の超楕円体の群に落ちることに対応する。式(3.4)の $|\Sigma_i|$ と $(d/2) \ln 2\pi$ の項は i に依存しないので、付加的な定数項として無視できる。この簡略化により判別関数は次のようになる。

$$g_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_i) + \ln P(w_i) \quad (3.7)$$

これを、展開し、無視できる項を除くと、判別関数は次式のように再び線形になる。

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} & (3.8) \\ \text{where } \mathbf{w}_i &= \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_i \\ w_{i0} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_i + \ln P(w_i) \end{aligned}$$

ケース3: 任意の Σ_i

一般的な多変量正規分布の場合、共分散行列はそれぞれのカテゴリで異なる。式(3.4)から除くことができるのは $(d/2) \ln 2\pi$ 項だけで、得られる判別関数は本質的に2次である。

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{W}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} & (3.9) \\ \text{where } \mathbf{W}_i &= -\frac{1}{2} \Sigma_i^{-1} \\ \mathbf{w}_i &= \Sigma_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i \\ w_{i0} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^T \Sigma_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_i - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_i| + \ln P(w_i) \end{aligned}$$

3.3.1 マハラノビス汎距離による簡便的な判別

簡便的な判別分析の方法に、マハラノビス汎距離 (Mahalanobis distance) を用いた方法がある [69, 70, 71]。マハラノビス汎距離を用いた判別は、一般に、2母集団の母数が既知

でかつ、分散共分散が $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ の場合に適用される。

各群の確率密度関数が d 変量正規分布である場合を考え、第1群での母平均ベクトルを μ_1 、第2群では、 μ_2 、そして、両群は等しい母分散共分散行列 Σ を持つと仮定する。この時、第1群、第2群のそれぞれのマハラノビス汎距離は、

$$\begin{aligned} D_{(1)}^2 &= (\mathbf{x} - \mu_1)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_1) \\ D_{(2)}^2 &= (\mathbf{x} - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。ここで、 T は、転置を表す。判別は、マハラノビス汎距離 $D_{(1)}$ 、 $D_{(2)}$ を用いて、次式(3.11)のように行う。

$$\begin{aligned} D_{(2)}^2 > D_{(1)}^2 &\Rightarrow \mathbf{x} \text{を } \mathcal{R}_1 \text{群に判別.} \\ D_{(2)}^2 < D_{(1)}^2 &\Rightarrow \mathbf{x} \text{を } \mathcal{R}_2 \text{群に判別.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

このマハラノビス汎距離による判別は、両群の先験確率 $q_i = 1/2, i = 1, 2$ で等しい場合に限られる。

3.3.2 最尤法による判別／ベイズ判別法

最尤法

各群からの観測値ベクトルに確率モデルを設定できる場合 [74] には、距離のかわりに尤度を用いて、各群の確率モデルの尤度が最大となる群に判別することができる。つまり、確率変数 \mathbf{x} が、 d 変量正規分布に従うとすると最尤法により判別することができる。

確率変数 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は、平均 μ_1, μ_2 、共分散行列 Σ_1, Σ_2 であるとする、 d 変量正規分布

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_i|^{-1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i) \right\} \quad (3.12)$$

の μ_i, Σ_i にそれぞれ代入し、得られた確率の高い方を判別された群とする。

ベイズ判別法

ベイズ判別法 [64] は、母集団 π_i の先験確率 q_i が既知であると、期待損失は、 $q_1 C(2|1) P(2|1, R) + q_2 C(1|2) P(1|2, R)$ となる。この値を最小にする判別法 $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ である。 $a_i = q_i C(j|i) (i = 1, 2)$ とおくと、ベイズ法は、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &: a_1 f_1(\mathbf{x}) \geq a_2 f_2(\mathbf{x}), \\ \mathcal{R}_2 &: a_1 f_1(\mathbf{x}) < a_2 f_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

で与えられる。特に, $C(1|2) = C(2|1)$, $q_1 = q_2 = 1/2$ の時,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &: f_1(\mathbf{x}) \geq f_2(\mathbf{x}), \\ \mathcal{R}_2 &: f_1(\mathbf{x}) < f_2(\mathbf{x})\end{aligned}$$

となる。

2母集団の母数が既知であり, 共分散は $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ でなく, $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ の場合, 確率変数 \mathbf{x}_i , $i = 1, 2$ が, d 次元正規母集団 $N(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$ であるとし,

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1})\mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_2^T\Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1^T\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1) + \frac{1}{2}\log\left\{\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\right\}\end{aligned}\quad (3.13)$$

とおくとき, ベイズ判別法は,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &: U \geq c \\ \mathcal{R}_2 &: U < c\end{aligned}\quad (3.14)$$

で与えられる。ここに,

$$c = \log\{q_2C(1|2)/\{q_1C(2|1)\}\}\quad (3.15)$$

であり, q_1, q_2 は, d 次元正規母集団の先験確率, $C(j|i)$ は, i に属する個体を, j に属すると判別することによる損失を表わす。従って, 先験確率は, 男女の割合が等しい, つまり $q_1 = q_2 = 0.5$ とし, 損失 $C(1|2), C(2|1)$ を等しいと仮定すると, 式(3.14)において $c = 0$ となる。

また, 式(3.13)は, 以下のように算出される。多変量正規分布の確率密度は, 式(3.12)で表わされ, 第1群, 第2群の母分散共分散行列を Σ_1, Σ_2 とすると, その尤度比は,

$$\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} = \frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T\Sigma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T\Sigma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)\}\right]\quad (3.16)$$

と書き換えられる。さらに上式(3.16)の自然対数をとると,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T\Sigma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T\Sigma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) + \log|\Sigma_2| - \log|\Sigma_1|\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\mathbf{x}^T\Sigma_2^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2^T\Sigma_2^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\mu}_2^T\Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2) \\ &\quad - (\mathbf{x}^T\Sigma_1^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1^T\Sigma_1^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_1^T\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1)\} + \frac{1}{2}\log\left\{\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1})\mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_2^T\Sigma_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1^T\Sigma_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\log\left\{\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\right\}\end{aligned}\quad (3.17)$$

となり、式(3.13)が得られる。

ベイズ判別法は、先験確率、誤り損失が等しいとすれば、基本的に、最尤法による判別と同じになる。また、実際に、2群の判別を含めて、3.3.1に述べたマハラノビス汎距離による判別は、多変量正規分布を仮定したときに、最大の尤度の群に判別することにあたる[72]。

3.4 成分分析と判別

過剰な次元数についての問題を処理する1つの方法は、特徴量を結合して次元数を減らすことである。線形結合は簡単で解析的に扱いやすいため、線形法は、高次のデータを低次の空間に射影する方法としてよく利用される。有効な線形変換を求めるための古典的な2つの方法がある。1つの方法は、主成分分析 (Principal Component Analysis, PCA) とか、Karhunen-Loève 展開 (Karhunen-Loève expansion, KL 展開)[75] として知られているもので、最小2乗の意味でデータを最もよく表現する射影を探す方法である。もう1つの方法は、多重判別分析 (Multiple Discriminant Analysis, MDA) として知られ、最小2乗の意味でデータを最も良く分離する射影を探す方法である。

3.4.1 成分分析 (KL 展開)

n 個の d 次元の標本 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の集合に含まれるすべてのベクトルを単一のベクトル \mathbf{x}_0 で表現するという問題から始める。明確には、 \mathbf{x}_0 と各 \mathbf{x}_k 間の距離の2乗和ができるだけ小さくなるベクトル \mathbf{x}_0 を求めることである。2乗誤差の評価関数 $J_0(\mathbf{x}_0)$ を

$$J_0(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k\|^2$$

と定義し、 J_0 を最小にする値 \mathbf{x}_0 を求める。この問題の解が、 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k$ で表される標本平均であることは容易に理解できる。

平均標本はデータ集合のゼロ次元表現である。それは簡単ではあるが、データのいかなる変動も表現できない。標本平均を通る直線上にデータを射影して、もっと興味深い1次元表現を得ることが出来る。 \mathbf{e} を直線の方角を示す単位ベクトルとすると、直線を表す式は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + a\mathbf{e} \tag{3.18}$$

と書ける。ただし、 a (任意の実数をとる)は、平均 \mathbf{m} と任意の標本点 \mathbf{x} との距離に関連している。 \mathbf{x}_k を $\mathbf{m} + a_k \mathbf{e}$ で表すと、2乗誤差評価関数

$$\begin{aligned} J_1(a_1, \dots, a_n, \mathbf{e}) &= \sum_{k=1}^n \|(\mathbf{m} + a_k \mathbf{e}) - \mathbf{x}_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|a_k \mathbf{e} - (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\mathbf{e}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}) + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \quad (3.19) \end{aligned}$$

を最小化することで、最適な係数 a_k の集合が得られる。 $\|\mathbf{e}\| = 1$ なので、 a_k について偏微分して微分係数をゼロにすると、

$$a_k = \mathbf{e}^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}) \quad (3.20)$$

が得られる。幾何学的に見れば、この結果は単に、方向ベクトルが \mathbf{e} であるような標本平均を通る直線上に、ベクトル \mathbf{x}_k を射影することによって最小2乗解を得たことに過ぎない。

この直線の最適な方向ベクトル \mathbf{e} を求めるという問題は、

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})(\mathbf{x}_k - \mathbf{m})^T$$

で定義される散布行列 (scatter matrix) \mathbf{S} が含まれる。これは、単に標本の共分散行列の $n-1$ 倍である。これは、式 (3.20) の a_k を式 (3.19) に代入して、

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{e}) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n [\mathbf{e}^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})]^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n \mathbf{e}^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})(\mathbf{x}_k - \mathbf{m})^T \mathbf{e} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= -\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \quad (3.21) \end{aligned}$$

を得る際に生ずる。明らかに、 J_1 を最小にするベクトル \mathbf{e} は、 $\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e}$ を最大化する。ここで、 $\|\mathbf{e}\| = 1$ の制約下で $\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e}$ を最大化するために、ラグランジュの乗数法を用いる。 λ を未定乗数とし、

$$u = \mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e} - \lambda(\mathbf{e}^T \mathbf{e} - 1)$$

を e に関して微分すると,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = 2Se - 2\lambda e$$

が得られる. この傾きベクトルをゼロとおくと, e は散布行列の固有ベクトルでなければならない. すなわち,

$$Se = \lambda e$$

であることが分かる. 特に, $e^T Se = \lambda e^T e = \lambda$ なので, $e^T Se$ を最大化するためには, 散布行列の最大化の固有値に対する固有ベクトルを選ぶのが望ましいということになる. 言い換えれば, 最適なデータの 1 次射影を求めるには, 2 乗誤差の最小和の意味で最適な, 標本平均を通り, 散布行列の最大固有値に対する固有ベクトルの方向を持つ直線上にデータを射影することになる.

この結果は, 1 次元から多次元の射影に容易に拡張できる. 式 (3.18) の代わりに,

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + \sum_{i=1}^{d'} a_i \mathbf{e}_i \quad (3.22)$$

と書く. ただし, $d' \leq d$ である. 評価関数

$$J_{d'} = \sum_{k=1}^n \left\| \left(\mathbf{m} + \sum_{i=1}^{d'} a_{ki} \mathbf{e}_i \right) - \mathbf{x}_k \right\|^2 \quad (3.23)$$

が最小になるのは, ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d'}$ が散布行列の最大固有値に対する d' 個の固有ベクトルであるときである. 散布行列は実対称行列なので, これらの固有ベクトルは直交する. これらは任意の特徴ベクトル \mathbf{x} を表すための自然な基底ベクトルの集合を構成する. 式 (3.22) の係数 a_i は, この基底における \mathbf{x} の成分であり, 主成分と呼ばれる. 幾何学的には, データ点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ が d 次元の超楕円体の分布を構成するものとして描くと, 散布行列の固有値はこの超楕円体の主要軸となる. KL 展開とは, 分布の散らばりが最大となる方向に注意を制限して特徴空間の次元を減らすことである.

3.4.2 2 クラスに対する線形判別法 (フィッシャーの方法)

パターン認識において最もよく利用されるのは 2 クラスに対する線形判別であり, これをフィッシャーの線形判別法 (Fisher's linear discriminant method)[75] あるいは単にフィッシャーの方法 (Fisher's method) と呼ばれる. フィッシャーの方法は特徴空間上の 2 クラスのパターンの分布からこの 2 クラスを識別するのに最適な 1 次元軸を求める手法である.

クラス内分散とクラス間分散の比を評価尺度にするという、フィッシャーのアイデアは、式(3.31)に示す、クラス内変動・クラス間変動比の判別基準（フィッシャーの基準） $J_S(\mathbf{A})$ を最大にするように選ぶ、とするものである。

クラス w_i のパターン集合を \mathcal{X}_i 、クラス w_i の変動を表す行列、変動行列 \mathbf{S}_i を

$$\mathbf{S}_i \equiv \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^T \quad (3.24)$$

と定義する。ここで、 \mathbf{m}_i はクラス w_i のパターン平均である。次に、2クラスの全特徴ベクトルを用いて、クラス内変動行列 (within-class scatter matrix) \mathbf{S}_W とクラス間変動行列 (between-class scatter matrix) \mathbf{S}_B を

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_W &\equiv \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \\ &= \sum_{i=1,2} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^T \\ \mathbf{S}_B &\equiv \sum_{i=1,2} n_i (\mathbf{m}_i - \mathbf{m})(\mathbf{m}_i - \mathbf{m})^T \\ &= \frac{n_1 n_2}{n} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

と定義する、ここで、 \mathbf{m} は全パターンの平均を表し、 n_i はパターン数を表す。式(3.25)から \mathbf{S}_B はクラス平均間の距離によって決まる量である。ここで d 次元特徴空間から1次元空間への変換を表す $(d, 1)$ 行列を \mathbf{A} とする。このとき、パターン \mathbf{x} を \mathbf{A} により変換したパターンはスカラー量であり、これを y とすると

$$y = \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (3.26)$$

と書ける。変換された空間でのクラス平均 $\tilde{\mathbf{m}}_i$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{y \in \mathcal{Y}_i} y = \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{m}_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる。 \mathcal{Y}_i は変換後の空間での w_i に属するパターン集合を表す。変換後の空間上でのクラス内変動行列 $\tilde{\mathbf{S}}_W$ 、クラス間変動行列 $\tilde{\mathbf{S}}_B$ も同様に求めることができ、式(3.26),(3.27)

を用いて

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{S}}_W &= \tilde{\mathbf{S}}_1 + \tilde{\mathbf{S}}_2 \\
&= \sum_{i=1,2} \sum_{y \in \mathcal{Y}_i} (y - \tilde{m}_i)^2 \\
&= \mathbf{A}^T \mathbf{S}_W \mathbf{A} \\
\tilde{\mathbf{S}}_B &= \sum_{i=1,2} n_i (\tilde{m}_i - \tilde{m})^2 \\
&= \frac{n_1 n_2}{n} (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2 \\
&= \mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

となる. ここで, $\tilde{\mathbf{S}}_i, i = 1, 2$ はクラス w_i に属するパターンの変換後におけるクラス内変動であり, \mathbf{S}_i (式 (3.24)) と同様にして

$$\tilde{\mathbf{S}}_i \equiv \sum_{y \in \mathcal{Y}_i} (y - \tilde{m}_i)^2 \tag{3.29}$$

で定義される. このとき, \mathbf{A} は $(d, 1)$ 行列であるから, $\tilde{\mathbf{S}}_W, \tilde{\mathbf{S}}_B$ はスカラー量であり, 変換後の1次元空間におけるクラス平均と分散をそれぞれ $\tilde{m}_i, \tilde{\sigma}_i^2$ と置くと

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{S}}_W &= n_1 \tilde{\sigma}_1^2 + n_2 \tilde{\sigma}_2^2 \\
\tilde{\mathbf{S}}_B &= n_1 (\tilde{m}_1 - \tilde{m})^2 + n_2 (\tilde{m}_2 - \tilde{m})^2 \\
&= \frac{n_1 n_2}{n} (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

となる.

フィッシャーの方法の基本的な考え方は, クラス間変動のクラス内変動に対する比, クラス内変動・クラス間変動比を最大にする1次元軸を求めることにある. すなわち, 変換後の空間において二つのクラスがよく分離するために, $\tilde{\mathbf{S}}_W$ になるべく小さくそして $\tilde{\mathbf{S}}_B$ になるべく大きくなるように変換 \mathbf{A} を定めるわけである. このクラス内変動・クラス間変動比を $J_S(\mathbf{A})$ と表すと

$$\begin{aligned}
J_S(\mathbf{A}) &\equiv \frac{\tilde{\mathbf{S}}_B}{\tilde{\mathbf{S}}_W} = \frac{n_1 n_2}{n} \cdot \frac{(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2}{n_1 \tilde{\sigma}_1^2 + n_2 \tilde{\sigma}_2^2} \\
&= \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T \mathbf{S}_W \mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

となる. この評価基準 $J_S(\mathbf{A})$ はフィッシャーの評価基準 (Fisher's criterion) と呼ばれる. この J_S を最大にする \mathbf{A} を求める問題は

$$\tilde{\mathbf{S}}_W = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_W \mathbf{A} = I \tag{3.32}$$

という制約条件の下で

$$\tilde{\mathbf{S}}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \mathbf{A} \quad (3.33)$$

を最大化する変分問題に帰着する。ただし、 \mathbf{I} は \tilde{d} 次元単位行列である。 λ をラグランジュ未定乗数とし

$$J(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^T \mathbf{S}_B \mathbf{A} - \lambda(\mathbf{A}^T \mathbf{S}_W \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (3.34)$$

を \mathbf{A} で偏微分して0と置くと、 $\mathbf{S}_B, \mathbf{S}_W$ は対称行列であるから

$$\mathbf{S}_B \mathbf{A} = \lambda \mathbf{S}_W \mathbf{A} \quad (3.35)$$

を得る。したがって、 \mathbf{S}_W が正則であるならば

$$(\mathbf{S}_W^{-1} \mathbf{S}_B - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{A} = 0 \quad (3.36)$$

となるので、 $\mathbf{S}_W^{-1} \mathbf{S}_B$ の最大固有値を λ_1 とすると

$$\max\{J_S(\mathbf{A})\} = \lambda_1 \quad (3.37)$$

が得られる。また、 J_S を最大にする \mathbf{A} は最大固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルとして求まる。

さらに、式(3.35)より

$$\lambda \mathbf{S}_W \mathbf{A} = \mathbf{S}_B \mathbf{A} = \frac{n_1 n_2}{n} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{A} \quad (3.38)$$

となり、 $(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T \mathbf{A}$ がスカラー量であることに注意すると

$$\mathbf{A} \propto \mathbf{S}_W^{-1} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \quad (3.39)$$

となる。こうして求まる変換行列 \mathbf{A} によって変換された特徴空間は、クラス内変動・クラス間変動比を最大にする1次元空間となる。しかし、この線形判別法によって決まるのは空間(軸)のみであって、軸上に設けるべき識別のための境界は定まらない。

3.4.3 KL展開と判別分析の違い

KL展開は、特徴パラメータ間の相関を除くように軸変換するものである。回転後の軸 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ を並べた行列を \mathbf{U} とすれば、

$$J(\mathbf{U}) = \frac{|\mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}|}{|\mathbf{U}^T \mathbf{U}|} \quad (3.40)$$

を最大にするものである。

一方、判別分析による次元圧縮法は、クラス間の分離を最大にするように（クラス間の相関を除くように）軸変換する方法である。クラス間にわたる共分散行列（クラス間分散）を S_B 、クラス内の共分散行列（クラス内分散）を S_W とすれば、

$$J(\mathbf{U}) = \frac{|\mathbf{U}^T \mathbf{S}_B \mathbf{U}|}{|\mathbf{U}^T \mathbf{S}_W \mathbf{U}|} \quad (3.41)$$

を最大にする軸変換法である。式(3.41)は、前述した式(3.31)で示したフィッシャーの評価基準である。KL展開の \mathbf{R} の代わりに、 $\mathbf{S}_B \mathbf{S}_W^{-1}$ を用いることに等しい。 \mathbf{S}_B のランクは、(クラス数-1)以下であり、(クラス数-1)以下の次元に圧縮できる。しかし、KL展開よりも圧縮精度は悪いとされる[76]。また、線形判別法における変動比最大という基準は変換後の識別を考慮した基準であり、この点がKL展開の場合とは異なる[75]。

以上のようにKL展開は、“パターン全体の分布を最良近似”する部分空間を求める方法であるが、線形判別は“各クラスのパターン分布の分離度を最大にする”部分空間を求める方法である。したがって、この二つは目的に応じて使い分けなければならない。

KL展開は特徴ベクトルの分布全体の持つ情報をなるべく最大限に反映できるように特徴空間の次元を削減する方法であるから、複数のクラスが特徴空間上に存在するとき、KL展開によって変換した空間が必ずしもこれらのクラスを識別するために有効な空間であるとは限らない。これは、KL展開がクラスの識別ということをまったく考慮に入れていないことに起因する。一方、線形判別は異なるクラスの分布の分離度(separability)を考慮した空間の変換の方法の1つとなっている。このKL展開による次元削減と線形判別による次元削減の性質の違いは、前者が表現(representation)もしくは圧縮(compression)のための次元削減であるのに対し、後者は判別(discrimination)のための次元削減であるということができる[75]。

しかしながら、KL展開は識別のことが考慮されていない次元削減であるにもかかわらずパターン認識の処理において広く用いられている。この理由として、第一に、高度な認識を行うためには、通常高次元の特徴ベクトルを必要とする。そのため、次元の呪いから逃れる手段としての次元削減が不可欠となる。第二に、初めに選ばれた特徴には相関を持つ特徴の組が含まれている可能性がある。相関の非常に高い2つの特徴が存在する時、共分散行列は0に近い固有値を持つのでKL展開によって特徴空間の次元を減らすことは冗長な情報を減らすことを意味する[75]。

3.4.4 正準判別分析—フィッシャーの方法の拡張—

多母集団の場合には、個体の判別より、むしろ、母集団間の差異をできるだけ少数個の線形判別関数で説明することを目的とする、正準判別分析 (canonical discriminant analysis)¹ と呼ばれる方法が利用される [64, 65, 66, 67, 68]. 個々の観測値 x を、特定のどれかの群 (クラス) に判別するという観点よりも、群間の差異を正準変数 (canonical variate) と呼ばれる少数個の変数を用いて、できるだけ明確に表現することに重点が置かれる. 総変動 (総平方和積和行列) を群内と群間の変動に分け、そのうち群間の変動の割合を最大にするという形に定式化されるため、とくに分布の型は問われない. しかし、すべての群をプールして群内変動が計算されるので、各群の分散共分散行列が非常に異なるというのは具合が悪い. そのような極端な場合を除き、正準判別分析はかなり広い範囲の分布に適用できると考えて良いと考えられている [64].

p 個の変数 x_1, \dots, x_p に対して任意の係数 (a_1, \dots, a_p) を用いて、

$$z = a_1x_1 + \dots + a_px_p \quad (3.42)$$

のような線形結合 (1 次式による合成変数) z をつくり、この値によって判別することを考える. 係数 a_1, \dots, a_p が与えられると、 $n (= n_1 + \dots + n_g)$ 個からなる g 群 p 変数の個体の各々に対して、合成変数

$$\begin{aligned} z_i^{(k)} &= a_1x_{1i}^{(k)} + \dots + a_px_{pi}^{(k)}, \\ k &= 1, \dots, g; i = 1, \dots, n_k \end{aligned} \quad (3.43)$$

を計算することができる. この $z_i^{(k)}$ の変動を表わす平方和は、分散分析でよく知られているように、次のように分解される.

$$\sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (z_i^{(k)} - \bar{z})^2 = \sum_{k=1}^g n_k (\bar{z}^{(k)} - \bar{z})^2 + \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (z_i^{(k)} - \bar{z}^{(k)})^2 \quad (3.44)$$

ここで、 $\bar{z}^{(k)}$ は k 群の平均、 \bar{z} は総平均である. 一般に、式 (3.44) の左辺は、総平方和 S_T 、右辺第 1 項は、群間平方和 S_B 、第 2 項は群内平方和 S_W と呼ばれる.

z により g 個の群がよく判別されるということを、群間平方和 S_B が、総平方和 S_T に対して大きくなることと考え、相関比

$$\eta^2 = S_B/S_T$$

¹これまで、ラオによる正準分析、その他、重判別分析、多群の判別分析、重相関比などと呼ばれ、名称が統一されていなかった.

を最大にするように、係数 a_1, \dots, a_p を定める。それはまた、群間平方和 S_B と群内平方和 S_W の比

$$\lambda = S_B/S_W \quad (3.45)$$

を最大にすることと同じである。

k 群の i 番目のサンプルの j 番目の変数の測定値を $x_{ji}^{(k)}$, k 群の j 番目の変数の平均値を $\bar{x}_j^{(k)}$, j 番目の変数の全体の平均値を \bar{x}_j とした時、行列の要素を、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, \dots, a_p)^T \\ \mathbf{B} &= (b_{jj'}), \\ b_{jj'} &= \sum_{k=1}^g n_k (\bar{x}_j^{(k)} - \bar{x}_j) (\bar{x}_{j'}^{(k)} - \bar{x}_{j'}) \\ \mathbf{W} &= (w_{jj'}), \\ w_{jj'} &= \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ji}^{(k)} - \bar{x}_j^{(k)}) (x_{j'i}^{(k)} - \bar{x}_{j'}^{(k)}) \\ \mathbf{T} &= (t_{jj'}), \\ t_{jj'} &= \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (\bar{x}_{ji}^{(k)} - \bar{x}_j) (\bar{x}_{j'i}^{(k)} - \bar{x}_{j'}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

と行列表現すると、

$$\lambda = S_B/S_W = \mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{a} / \mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a}$$

と表わされる。ここで、 \mathbf{B} は、群間の平方和積和行列 (between-group sum of squares and products matrix, between SSP), \mathbf{W} は、群内の平方和積和行列 (within-groups sum of squares and products matrix, within SSP), \mathbf{T} は、総平均平方和積和行列 (total sum of squares and products matrix, total SSP), と呼ばれる。

λ を \mathbf{a} の各要素で偏微分して 0 とおくと、次式の一般固有値問題が得られる。

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{W}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

式 (3.47) は、一般に $r = \min(g-1, p)$ 個の非負の固有値 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ と $(p-r)$ 個の固有値 0 をもつ。固有値 λ_j に対する固有ベクトルを \mathbf{a}_j とすると、

$$(\mathbf{B} - \lambda_j \mathbf{W}) \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$$

両辺に \mathbf{a}_j^T をかけて、 $\mathbf{a}_j^T \mathbf{W} \mathbf{a}_j$ で割ると

$$\lambda_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{B} \mathbf{a}_j / \mathbf{a}_j^T \mathbf{W} \mathbf{a}_j$$

が、成り立ち、固有値はちょうど最大にすべき式(3.45)の λ に等しい。従って、求める係数 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T$ として、最大固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{p1})^T$ の要素を用いればよいことがわかる。得られた線形結合

$$z_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{p1}x_p$$

は第1正準変量 (first canonical variate) と呼ばれる。

このようにして求めた1つの正準変量だけで十分判別できないときには、2番目の正準変量を導入する。そのため、再び式(3.42)の形の線形結合 z を考える。 z はすでに求まっている第1正準変量 z_1 で、判別しきれない部分を補うために考えるわけであるから、 z は z_1 とは無相関になるようにとる。 z と z_1 の共分散は、

$$\text{Cov}(z, z_1) = \frac{1}{n-1} \mathbf{a}^T \mathbf{T} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{n-1} (1 + \lambda_1) \mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a}_1$$

のように表わされるから

$$\mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a}_1 = 0$$

の制約条件のもとで、式(3.45)の λ を最大化すればよい。ラグランジュ未定乗数を用いて定式化すると、再び式(3.47)の固有値問題が導かれる。固有値 λ_j が最大にすべき式(3.45)の λ に等しいことを考慮すれば、結局、2番目に大きい固有値 λ_2 に対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{p2})^T$ の要素を用いて線形結合

$$z_2 = a_{12}x_1 + \dots + a_{p2}x_p \quad (3.48)$$

をつくれればよいことがわかる。式(3.48)の z_2 は、第2正準変数 (second canonical variate) と呼ばれる。

以下同様にして、必要に応じて第3,4,...正準変量を求めることができる。

なお、固有ベクトル \mathbf{a}_j は、正準変量 $z_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}$ の群内の分散 $\mathbf{a}_j^T \mathbf{W} \mathbf{a}_j / (n - g) = 1$ となるように基準化しておく。

また、正準変量の平均は、どこにとっても本質的ではないので、グラフ表示の都合上、平均が0となるようにとることにする。そのためには、

$$\begin{aligned} z_j &= \mathbf{a}_j^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - \mathbf{a}_j^T \bar{\mathbf{x}} \\ &= a_{1j}x_1 + \dots + a_{pj}x_p - (a_{1j}\bar{x}_1 + \dots + a_{pj}\bar{x}_p) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$(j = 1, 2, \dots)$

によって正準変量の値を計算すればよい。

正準判別分析を用いることの最も大きな利点は、群の数 g に比べ変数の数 p がかなり大きい場合、得られる正準変量は $(g - 1)$ 個であるから、情報の縮約が期待できることにある。つまり、正準判別分析は主成分分析と同様に、次元縮小の方法とみなすことができる。しかも、最初のいくつかの正準変量のプロットを行えば、個体間、群間の関係が視覚的に捉えられる。また、もう1つの利点として、正準相関分析との関係から正準変量の有意性検定を行えることがあげられる。

判別規則

正準判別分析における判別規則には、以下の方法などがある。

判別規則 1: 標本平均ベクトルとの距離に基づく判別 [64]

正準変量を用いて、不明のサンプルの観測値 \mathbf{x}_0 を π_1, \dots, π_k のいずれかに判別することができる。 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)^T$ とおいて、 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{y}_g = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_g - \bar{\mathbf{x}})$ とする。ここに、 $\bar{\mathbf{x}}_g$ は、 π_g からの標本に関する標本平均ベクトルである。 \mathbf{y}_0 と \mathbf{y}_g との距離を

$$\rho_g = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_g\|, \quad g = 1, \dots, k$$

と定める。これを用いて、 $\min\{\rho_1, \dots, \rho_k\} = \rho_g$ ならば、 \mathbf{y}_0 を π_g に判別することができる。

判別規則 2: 群間・群内変動比の最大化に基づく判別 [66]

総平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}$, 自由度 $k - 1$ の群間積和行列 B , 自由度 k の群内積和行列 W を式 (3.46) に従って表わすと、標本判別関数の組が得られる。すなわち、 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_s \geq 0$ を

$$|B - l(W + B)| = 0$$

の根、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ を対応する固有ベクトルとする。ただし、

$$s = \min(k - 1, p)$$

であり、 \mathbf{a}_i は、 $\mathbf{a}_i^T(W + B)\mathbf{a}_i = 1$ と基準化されている。いま、 l_1, l_2, \dots, l_f ($f \leq s$) が有意に 0 より大きく、残りの $s - f$ 個の根は 0 と見なせるものとする。すると f 個の標本判別関数

$$z_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, f$$

によって、 π_1, \dots, π_k の間を判別することになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (z_1, z_2, \dots, z_f)^T, \\ A: f \times p &= (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_f^T)^T \end{aligned} \tag{3.50}$$

と表示すれば,

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x}$$

となる. これを用いると, 各 π_α ($\alpha = 1, \dots, k$) からの標本に対して

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{z}}_\alpha &= A\bar{\mathbf{x}}_\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, k) \\ S_{\mathbf{z}} &= ASA^T\end{aligned}\tag{3.51}$$

であるから, 新しく得られた $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ に対応した $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ と $\bar{\mathbf{z}}_\alpha$ の間の汎距離の2乗を

$$\begin{aligned}D_\alpha^2(\mathbf{z}) &= (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\alpha)^T S_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_\alpha) \\ &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_\alpha)^T A^T (ASA^T)^{-1} A (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_\alpha)\end{aligned}\tag{3.52}$$

とすれば, 最小距離判別ルールを用いる場合には, もし,

$$D_i^2(\mathbf{z}) = \min_\alpha \{D_\alpha^2(\mathbf{z})\}$$

ならば, \mathbf{z} を, したがって, \mathbf{x} を π_i に属すると判別する.

判別規則 3: 群間・群内変動比の最大化と平均ベクトルとの距離に基づく判別 [65, 67, 68]

\mathbf{x} が多変量正規分布に従う場合には, $\mathbf{z} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ も正規分布に従う. 式 (3.47) を解いて得られる s 個の固有ベクトルを行列 $A_s = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$, A_s の最初の r 個の固有ベクトルからなる行列を A_r とする. $z_l = \mathbf{a}_l^T \mathbf{x}$, $l = 1, 2, \dots, r$ は, それぞれが独立であるから, 最初の r 個の固有ベクトルを用いた場合のサンプル \mathbf{x} と第 i 群の平均ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_i$ との距離は,

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T A_r A_r^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)\tag{3.53}$$

となる. 上式 (3.53) を最小にする群 i は, \mathbf{x} と $\bar{\mathbf{x}}_i$ との距離が最も近いことになり, このとき \mathbf{x} を第 i 群に判別する. r としては, 正準変数の有意性検定の結果を用いるのが妥当と思われるが, 統計的に有意な次元数が必ずしも実用上意味のあることに一致しないので, 実際には, 得られた固有値 λ_l , $l = 1, 2, \dots, s$ の寄与率から r を決めることが望ましい. $r = s$ の場合には, 式 (3.53) に基づく判別方式が最適な規則となる. 本研究では, $r = s$ とした判別規則により, すべての固有ベクトルを用いて判別を行うこととする.

2群における正準判別分析

2群における正準判別分析は, 3.4.4 正準判別分析—フィッシャーの方法の拡張—の節で述べた多群における正準判別分析より, 計算は若干簡単になる.

各群の変動・共変動行列を $S^{(1)}, S^{(2)}$, 2群をプールしたときの分散・共分散行列を V とすると, それぞれの要素は, 次のように定義される.

$$\begin{cases} S_{ij}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n_1} (x_{im}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)})(x_{jm}^{(1)} - \bar{x}_j^{(1)}) \\ S_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^{n_2} (x_{im}^{(2)} - \bar{x}_i^{(2)})(x_{jm}^{(2)} - \bar{x}_j^{(2)}) \\ V_{ij} = \frac{S_{ij}^{(1)} + S_{ij}^{(2)}}{n_1 + n_2 - 2} \end{cases} \quad (3.54)$$

また, 各変数の平均値の差のベクトル d を,

$$d = (\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12}, \bar{x}_{21} - \bar{x}_{22}, \dots, \bar{x}_{p1} - \bar{x}_{p2})^T$$

とすると, 係数 a は以下の連立方程式を解けば得られる.

$$\begin{cases} a_1 V_{11} + a_2 V_{12} + \dots + a_p V_{1p} = d_1 \\ a_1 V_{21} + a_2 V_{22} + \dots + a_p V_{2p} = d_2 \\ \vdots \\ a_1 V_{p1} + a_2 V_{p2} + \dots + a_p V_{pp} = d_p \end{cases} \quad (3.55)$$

これを, 行列で表わせば, $Va = d$ ゆえ, V の逆行列を V^{-1} とすれば, $a = V^{-1}d$ である.

係数 a が得られれば, 3.4.4 正準判別分析で述べた判別規則 1,2,3 のいずれかを使って, 2群に判別することができる.

3.5 線形判別関数

まず, 判別関数 (discriminant function) の厳密な表現形式が予め分かっており, 標本を識別器のパラメータの値を推定するのに用いると仮定する. 判別関数を決定する手法には, 統計的であるものないもの様々であるが, いずれも母集団の確率分布の表現形式に関する知識を必要としない. この限定的な意味において, それらの手法は, ノンパラメトリックとすることができる.

線形判別関数は, 様々な取り扱い易い解析的特性を有している. 本体の複数の関数がガウス関数で, その共分散値が等しいというように協調的であれば, 最適である. しかし, 分布関数が最適でなくても, 比較的計算が容易であるため, 線形関数以外の示唆する情報が存在しないときは, 線形識別器は, とっかかりの識別器として1つの魅力ある候補である.

線形判別関数を見つける問題は、評価関数を最小化する問題として定式化される。識別を目的とする明白な評価関数は、「訓練誤り」であり、最終目標は、未知のテスト用パターンを識別することである。たとえ訓練誤差が小さいからといってテストの誤差が小さいことを保証するものではない。

以下は、2つのカテゴリーの場合の線形判別クラスとして、基本的な判別関数の設計について述べる。

2つのカテゴリーの場合

\mathbf{x} の成分の線形結合である判別関数は次式(3.56)のように表せる。

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = \mathbf{W}^T \mathbf{X} \quad (3.56)$$

ここで、 \mathbf{w} は重みベクトルであり、 w_0 はバイアスである。一般的には c 個の判別関数が存在し、それぞれは、 c 個のカテゴリーの1つ1つに対応するものである。式(3.56)の形式の判別関数に対しての2カテゴリー識別器は、 $g(\mathbf{x}) > 0$ ならば w_1 であり、 $g(\mathbf{x}) < 0$ ならば w_2 という決定則を持つ。

$g(\mathbf{x}) = 0$ は、 w_1 に割り当てられる点と w_2 に割り当てられる点とを分割する決定面を定義する。 $g(\mathbf{x})$ が線形の場合、この決定面は、超平面(hyperplane)である。 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 が両方とも決定面上にあれば、 $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_1 + w_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_2 + w_0$ あるいは、 $\mathbf{w}^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$ である。この式は、 \mathbf{w} が、その超平面上にある任意のベクトルに対して垂直であることを示している。一般的に、超平面 H は、その特徴空間を2つの半空間に分割する： w_1 に対応する決定領域 \mathcal{R}_1 と w_2 に対応する領域 \mathcal{R}_2 である。 \mathbf{x} が \mathcal{R}_1 内に存在するならば、 $g(\mathbf{x}) > 0$ であるため、法線ベクトル \mathbf{w} は、 \mathcal{R}_1 内部を指すこととなる。

判別関数 $g(\mathbf{x})$ は、 \mathbf{x} からその超平面への距離の代数的測度として、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \gamma \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

と表現するのが最も安易な方法である。ここで、 \mathbf{x}_p は、 \mathbf{x} の H の法線方向への射影であり、 γ は、求めるべき代数的距離である (\mathbf{x} が正の側にあれば正であり、負の側にあれば負である。)。 $g(\mathbf{x}_p) = 0$ であるから、

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 = \gamma \|\mathbf{w}\|$$

すなわち、

$$\gamma = \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}\|}$$

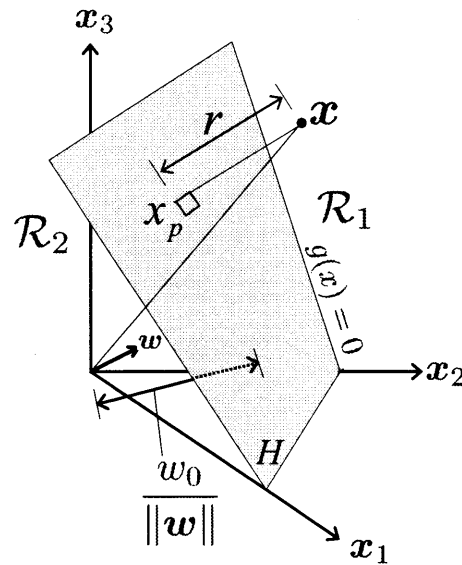


図 3.1: 線形判別関数の幾何学的表現

Fig. 3.1: The geometric expression of linear discriminant function.

である。特に、原点から H への距離は $w_0/\|\mathbf{w}\|$ により与えられる。もし、 $w_0 > 0$ であれば、原点は H の正の側にあり、 $w_0 < 0$ であれば、負の側にある。 $w_0 = 0$ であれば、 $g(\mathbf{x})$ は、同次形式 $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ を有し、その超平面は原点を通過する。これらの代数的結果の幾何学的な表現は、図 3.1 に示す。

要約すれば、線形判別関数は、特徴空間を超平面の決定面により分割する。その決定面の向きは法線ベクトル \mathbf{w} に依存し、その決定面の位置はバイアス w_0 により決定される。その判別関数 $g(\mathbf{w})$ は、 \mathbf{x} からその超平面への符号付きの距離に比例する。 \mathbf{x} が正の側であれば、 $g(\mathbf{x}) > 0$ であり、 \mathbf{x} が負の側であれば、 $g(\mathbf{x}) < 0$ である。

3.4.2 で述べた線形判別法による特徴空間の線形変換という立場からみると、超平面を決定することは d 次元特徴空間の部分空間となる 1 次元空間を定めてパターンをこの 1 次元空間上に射影した後、この空間上で決定境界を定めるということに相当する。線形判別法によって求まる d 次元空間から 1 次元空間への変換を $(d, 1)$ 行列 \mathbf{A} で表すと、 \mathbf{A} はこの超平面の法線ベクトルであり、1 次元空間への射影値 $g(\mathbf{x})$ は

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{x} + a_0 \quad (3.57)$$

と書け、式 (3.56) と同じ形になる。

w を求める方法

w を求める方法については、誤差評価あるいは期待損失評価という観点から、また特徴空間の変換という観点からなどの方法がある。ここでは、判別関数 $g(\mathbf{x})$ に対する評価を表す関数 J を最大にする観点から述べる。

まず、判別関数 $g(\mathbf{x})$ に対する評価を表す関数を J と置く。境界となる超平面を定めることは、その法線ベクトルで表される軸と軸上の境界点を定めることと等価である。そこで、その軸によって表される1次元空間上での各クラス w_i の平均と分散をそれぞれ、 \tilde{m}_i , $\tilde{\sigma}_i^2, i = 1, 2$ とする。ここで、評価関数 J が $\tilde{m}_i, \tilde{\sigma}_i^2$ の関数として与えられるとする。すなわち、

$$J \equiv J(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{\sigma}_1^2, \tilde{\sigma}_2^2) \quad (3.58)$$

である。一方、判別関数を式(3.56)で表すと、それは1次元部分空間への射影値でもあることから

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} g(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{m}_i + w_0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} (g(\mathbf{x}) - \tilde{m}_i)^2 = \mathbf{w}^T \frac{1}{n_i} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^T \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T \Sigma_i \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。ただし、 \mathbf{m}_i, Σ_i はクラス w_i の平均ベクトルと共分散行列である。ここで、 J を最大にすると \mathbf{w} と w_0 を求める。まず、式(3.59), (3.60)を \mathbf{w} と w_0 で偏微分すると、

$$\frac{\partial \tilde{m}_i}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{m}_i, \quad \frac{\partial \tilde{m}_i}{\partial w_0} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^2}{\partial \mathbf{w}} = 2\Sigma_i \mathbf{w}, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^2}{\partial w_0} = 0 \quad (3.61)$$

となるので、 J を \mathbf{w}, w_0 で偏微分して0と置くことにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_1^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}_1^2}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_2^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}_2^2}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_1} \cdot \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_2} \cdot \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial \mathbf{w}} \\ &= 2 \left(\frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_1^2} \Sigma_1 + \frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_2^2} \Sigma_2 \right) \mathbf{w} + \left(\frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_1} \mathbf{m}_1 + \frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_2} \mathbf{m}_2 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_0} &= \frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_1} + \frac{\partial J}{\partial \tilde{m}_2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

が得られる。ここで、式(3.63)を式(3.62)に代入することにより、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial J}{\partial \tilde{\boldsymbol{m}}_1} \left(\frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_1^2} \boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{\partial J}{\partial \tilde{\sigma}_2^2} \boldsymbol{\Sigma}_2 \right)^{-1} (\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1) \\ &\propto (s \boldsymbol{\Sigma}_1 + (1-s) \boldsymbol{\Sigma}_2)^{-1} (\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2) \end{aligned} \quad (3.64)$$

という関係式が求まる。ただし、

$$s \equiv \frac{\partial J / \partial \tilde{\sigma}_1^2}{\partial J / \partial \tilde{\sigma}_1^2 + \partial J / \partial \tilde{\sigma}_2^2} \quad (3.65)$$

である。 \boldsymbol{w} は超平面の法線方向を表すベクトルであるので方向だけが求まればよく定数倍は無視して良い。また、 w_0 は式(3.63)を使って求められる。

以上の結果から、一般に $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{\sigma}_1^2, \tilde{\sigma}_2^2$ の関数として定義された任意の J に対して J を最大にする \boldsymbol{w} を w_0 を求めることができる。

一例として、 J が任意の正定数 k_1, k_2 を用いて、

$$J \equiv \frac{(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2}{k_1 \tilde{\sigma}_1^2 + k_2 \tilde{\sigma}_2^2} \quad (3.66)$$

と定義されている場合を考える。この J を最大化することは、1次元空間に射影したパターンのクラス平均間の差がなるべく大きく、かつ各クラスの分散はなるべく小さくなるような \boldsymbol{w} を求めることを意味する。しかし、 J を式(3.66)で定義したとき、 \boldsymbol{w} は求まるが w_0 は一意に決まらないため、別の方法によって w_0 を決定する必要がある。その方法の一例として、

(1) 変換後のクラス平均の midpoint を境界とする方法。すなわち、

$$w_0 = -\frac{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}{2}$$

(2) 変換後の各クラスごとの分散で内分する方法。すなわち、

$$w_0 = -\frac{\tilde{\sigma}_2^2 \tilde{m}_1 + \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{m}_2}{\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2}$$

あるいは、変換後の各クラスごとの標準偏差で内分する方法。すなわち、

$$w_0 = -\frac{\tilde{\sigma}_2 \tilde{m}_1 + \tilde{\sigma}_1 \tilde{m}_2}{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2}$$

(3) 事前確率も考慮して内分を行う方法。すなわち、

$$w_0 = -\frac{P(w_2) \tilde{\sigma}_2^2 \tilde{m}_1 + P(w_1) \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{m}_2}{P(w_1) \tilde{\sigma}_1^2 + P(w_2) \tilde{\sigma}_2^2}$$

などがある。

3.6 線形計画法

線形計画法 (linear programming algorithm) は、線形の等式、あるいは不等式による制約を満たす線形関数を最大化、あるいは、最小化する手法である。このことは、ただちに、適当な線形計画法の問題中に、線形不等式を制約条件として利用することで、その線形不等式を解ける可能性を示している [77].

以下は、線形計画法の代表的なサポートベクターマシン (SVM)[45, 46, 63] について、線形分離可能な場合、線形分離不可能な場合、非線形 SVM と SVM に類似の線形計画について述べる。

3.6.1 サポートベクターマシン (SVM)

トレーニングデータ集合 S が \mathbb{R}^N の超平面によって $y_i = 1$ のグループと $y_i = -1$ のグループに分離される場合を線形分離可能 (linearly separable) とする。候補となる超平面を

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) + b = 0 \quad (3.67)$$

と表す。ここで、 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$ で、 \mathbf{w} は超平面の法線ベクトル、 b は定数項、 $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$ は内積を表す。そして、識別関数を

$$g(x) = \text{sgn}((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) + b) \quad (3.68)$$

とする。ただし、 $\text{sgn}(0) = 1$ と約束する。一般にトレーニングデータを分離する超平面は一意には決まらない。

超平面 $(\mathbf{w} \cdot b)$ に対するサンプル (\mathbf{x}_i, y_i) のマージンは、

$$\gamma_i = \frac{y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b)}{\|\mathbf{w}\|} \quad (3.69)$$

と定義される。ただし、 $\|\cdot\|$ は 2 ノルムを表す。 $\gamma_i > 0$ ならば、 (\mathbf{x}_i, y_i) は正しく識別されていることになる。点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ を超平面 (3.67) へ射影した点を $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$ とすると、

$$\|\mathbf{w}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| = |(\mathbf{w} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))| = |(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) - (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{x}} + b)| = |(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)| \quad (3.70)$$

となるから、 $\gamma_i > 0$ ならば γ_i は点 \mathbf{x}_i から超平面 $(\mathbf{w} \cdot b)$ への距離を表す。

上記マージン $\gamma_i, i = 1, \dots, \ell$ の最小値をサンプルデータ集合 S に対する超平面 (\mathbf{w}, b) のマージンと言う。そして、すべての超平面のマージンの最大値をこのデータ集合 S のマージンと呼ぶ。線形分離可能なデータに対してはマージンは正となる。

線形分離可能な場合

線形分離可能なデータ集合の場合、超平面 (\mathbf{w}, b) が存在して、

$$y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) > 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (3.71)$$

となるから、超平面を正規化して、

$$\min_i \{y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b)\} = 1 \quad (3.72)$$

とすることが出来る。この性質を満たす形式を正準形 (canonical form) と言う²。正準形式の超平面のマージンは、 $1/\|\mathbf{w}\|$ となる。マージンが最大になるような超平面を最適な超平面 (optimal hyperplane) と考えると、それは、

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R} \\ \text{条件} \quad & y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned} \quad (3.73)$$

の解によって与えられる。

この問題 (3.73) は、凸 2 次計画問題であり、問題の構造も特に複雑でないが、以下で非線形の (曲面による) 識別に拡張するために双対問題を考えると都合が良い。ラグランジュ関数を $L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha})$ とする。ここで、 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell$ は双対変数である。Wolfe の双対問題は、

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell \\ \text{条件} \quad & \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \nabla_b L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。具体的には、

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1)$$

であるから、最適性の必要十分条件である Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件は、

$$\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.74)$$

$$\nabla_b L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0 \quad (3.75)$$

$$\alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1) = 0, \alpha_i \geq 0, y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 \geq 0, \quad (3.76)$$

$$i = 1, \dots, \ell$$

²正準超平面の集合の VC-次元は $N + 1$ であることが知られている [63].

であるから、これらの条件を考慮すると、双対問題は、

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.77)$$

となる。双対問題のヘッセ行列を $-\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $D_{ij} = y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)$ と置くと行列 \mathbf{D} は対称非負定値行列となり、上記問題は、

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & (\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.78)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{\ell}$ である。

最適解を $(\mathbf{w}^*, b^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ とすると、双対変数 α_i^* , $i = 1, \dots, \ell$ の中で非零のものは不等式制約条件が有効となっているもの、すなわち

$$y_i ((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b) = 1 \quad (3.79)$$

となるものなので、数が少ない場合が多い。式(3.74)より、最適解を与える \mathbf{w}^* は非零の α_i^* に対応するサンプルデータ \mathbf{x}_i の1次結合によって表される。そのようなデータをサポートベクターと呼ぶ。サポートベクターの集合を $S_V \subset S$ と表すと、

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i \in S_V} \alpha_i^* y_i \mathbf{x}_i$$

である。双対変数のほんの一部のみが非零となる(有効制約が少数である)ことはスパース性(sparseness)と呼ばれている。式(3.79)より、 b^* も任意のサポートベクター \mathbf{x}_i によって

$$b^* = y_i - (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) = y_i - \sum_{j \in S_V} \alpha_j^* y_j (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i)$$

と表される。識別関数は、

$$g(x) = \text{sgn} \left(\sum_{i \in S_V} \alpha_i^* y_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_i) + b^* \right)$$

となる。また、 b^* の表式より

$$\|\mathbf{w}^*\|^2 = \sum_{i \in S_V} \alpha_i^* y_i (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{w}^*) = \sum_{i \in S_V} \alpha_i^* (1 - y_i b^*) = \sum_{i \in S_V} \alpha_i^*$$

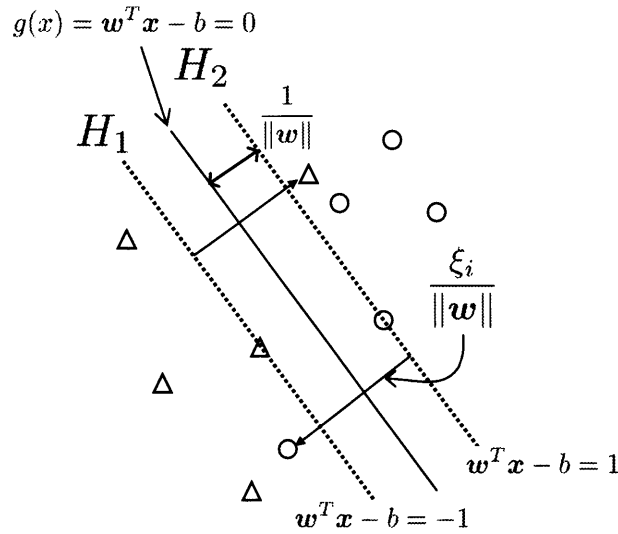


図 3.2: ソフトマージンを持つサポートベクターマシンの幾何学的表現
 Fig. 3.2: The geometric expression of support vector machine with soft-margin.

となるのでデータ集合 S のマージン γ は,

$$\gamma = \frac{1}{\|\mathbf{w}^*\|} = \left(\sum_{i \in S_V} \alpha_i^* \right)^{-1/2}$$

で与えられる.

線形分離不可能な場合

線形分離が不可能 (linearly non-separable) な場合, すなわち, データ集合 S のマージンが正にならない場合は, 元の問題の条件:

$$\text{条件 } y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, \ell$$

にスラック変数を導入して

$$\text{条件 } y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, \ell$$

と変換して, 制約条件がすべて満たされない場合に対応する. このような形式の制約条件を扱うものをソフトマージンによる最適化と言う. スラック変数の値はなるべく小さくしたいので, 目的関数にペナルティを課すのは最適化の常套手段である. ペナルティ項の形の代表的なものを以下に2つあげる. なお, ソフトマージンを持つ SVM の幾何学的表現を, 図 3.2 に示す.

1 ノルムによるソフトマージン最適化

解くべき問題を

$$\text{最小化 } \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\ell}$$

$$\text{条件 } y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, \ell$$

とする。ここで、 $C > 0$ はペナルティパラメータである。ラグランジュ関数を

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i) - \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \xi_i$$

とする。ここで、 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell}$ と $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{\ell}$ は双対変数である。線形分離可能な場合と同様に、KKT条件は、

$$\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

$$\nabla_b L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0 \quad (3.81)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = C\mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

$$\alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i) = 0, \quad \alpha_i \geq 0, y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i \geq 0, \quad (3.83)$$

$$i = 1, \dots, \ell$$

$$\beta_i \xi_i = 0, \quad \beta_i \geq 0, \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (3.84)$$

となる。式(3.82)から得られる $\boldsymbol{\beta} = C\mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha}$ を式(3.84)に代入すると

$$(C - \alpha_i)\xi_i = 0, \quad \alpha_i \leq C, \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (3.85)$$

を得る。結局、双対問題から $\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}$ が消去できて

$$\text{最大化 } -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell}$$

$$\text{条件 } \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0, \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\alpha} \leq C\mathbf{e} \quad (3.86)$$

を得る。分離可能な場合と異なるのは、変数に上限が付加されることである。

- 双対変数 $\alpha_i^* > 0$ に対応するのは、不等式制約条件が有効となっているもの、すなわち、

$$y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) = 1 - \xi_i^*$$

であり, さらに $\alpha_i^* < C$ ならば $\xi_i^* = 0$ となる. したがって, $0 < \alpha_i^* < C$ となるデータが正しく識別されたサポートベクターとなる:

$$0 < \alpha_i^* < C \implies y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) = 1$$

• $\alpha_i^* = 0$ の場合は, 式 (3.85) より $\xi_i = 0$ となるので,

$$\alpha_i^* = 0 \implies y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) \geq 1$$

• $\alpha_i^* = C$ の場合は, $y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i = 0$ かつ $\xi_i \geq 0$ となるので,

$$\alpha_i^* = C \implies y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) \leq 1$$

上記より, 正しく識別されたサポートベクター \mathbf{x}_i が存在するとき b^* は

$$b^* = y_i - (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) = y_i - \sum_{j \in S_V} \alpha_j^* y_j (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i)$$

と表される.

2 ノルムによるソフトマージン最適化

2 ノルムのペナルティを利用する場合には, 問題は

$$\text{最小化 } \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^2, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\ell}$$

$$\text{条件 } y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell$$

となる. ここで, ξ_i に対する非負条件は不必要なので除去されている. 何故なら, $\xi_i < 0$ の点では, $y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1$ の制約条件はみたされていて, \mathbf{w}, b の値を固定したまま $\xi_i = 0$ とした方が目的関数の値はより小さくなる. したがって, $\xi_i < 0$ が最適解として得られることは無いからである. ラグランジュ関数は

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i)$$

となる. KKT 条件は,

$$\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (3.87)$$

$$\nabla_b L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0 \quad (3.88)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = C\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

$$\alpha_i (y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i) = 0, \quad \alpha_i \geq 0, y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) - 1 + \xi_i \geq 0, \quad (3.90)$$

$$i = 1, \dots, \ell$$

となる。上式より、双対問題から \mathbf{w}, b, ξ が消去できて

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j ((\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{C} \delta_{ij}) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.91)$$

を得る。ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である。1 ノルムの場合と異なるのは、変数 $\boldsymbol{\alpha}$ に関する上限制約が存在しないことと、ヘッセ行列の対角項に $1/C$ という数が引かれていることである。したがって、この場合、ヘッセ行列は負定値となり、数値計算上はより好条件となる。

最適解では、

- $\alpha_i^* = 0$ ならば $\xi_i^* = 0$ となり、

$$\alpha_i^* = 0 \implies y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) \geq 1$$

- $\alpha_i^* > 0$ ならば $\xi_i^* = \alpha_i^*/C > 0$ なので、

$$\alpha_i^* > 0 \implies y_i((\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) + b^*) < 1$$

b^* は任意のサポートベクター \mathbf{x}_i によって

$$b^* = y_i(1 - \alpha_i^*/C) - (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i) = y_i(1 - \alpha_i^*/C) - \sum_{j \in S_V} \alpha_j^* y_j (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i)$$

と計算される。

非線形 SVM

すべての場合に平面による識別が適切とは限らない。そこで、より複雑な識別に対応するために曲面による分離を考える。このような場合、高次元の空間への非線形変換とその空間でのカーネルトリックと言われる方法が知られている。まず、入力データをより高次元な空間（非線形）写像する。すなわち、

$$\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots)$$

と対応付けられる入力データ空間 $X \subset \mathbb{R}^N$ から特徴空間 (feature space) $F = \{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}$ への写像を考える。そして、特徴空間において線形分離を考える。その際に、双対問題で

表された最適化問題において、特徴空間に対応した量はすべて内積の形式でのみ現われることに注意する。すなわち、 $(\phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ の形式である。高次元空間において内積を文字通り計算するのは現実的ではないので、対応する項をカーネル関数で置き換える：

$$K(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y}))$$

このとき、識別関数は、

$$g(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left(\sum_{i \in S_V} \alpha_i^* y_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + b^* \right) \quad (3.92)$$

となる。

1 ノルムソフトマージン最適化問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} & \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq C \mathbf{e} \end{array}$$

となり、

$$b^* = y_i - \sum_{j \in S_V} \alpha_j^* y_j K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)$$

また、2 ノルムソフトマージン最適化問題は、

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \left(K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \frac{1}{C} \delta_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} & \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

となり、

$$b^* = y_i (1 - \alpha_i^* / C) - \sum_{j \in S_V} \alpha_j^* y_j K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)$$

任意に与えた関数 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ をカーネル関数として使えるわけではない。それは、内積の形で表せる必要があるが、その保証を与えるのが、関数解析で古くから知られている Mercer の定理である。

定理 (Mercer) X は \mathbb{R}^N の有界閉集合で、関数 $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ対称 ($K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{y}, \mathbf{x})$) とする。このとき、関数 K が、一様収束する級数：

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{y}), \quad a_j > 0$$

によって展開可能となる必要十分条件は

$$\int_{X \times X} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \geq 0, \forall f \in L_2(X) \quad (3.93)$$

である. □

この定理の正定符号カーネルの条件式 (3.93) は,

$$\sum_{i,j=1}^n K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) v_i v_j \geq 0, \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X, \forall v_i, v_j \in \mathbb{R} \quad (3.94)$$

と表すことができる. すなわち, 行列 $\{K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), i, j = 1, \dots, n\}$ が非負定値という条件である.

Mercer の条件をみたく具体的なカーネル関数の形としてよく使用されているものは, 次のようなものである.

- radial basis function(RBF) カーネル $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/(2\sigma^2))$
- d 次の多項式カーネル $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^d$
- シグモイドカーネル $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tanh(\kappa(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) - \theta)$

3.6.2 線形計画

サポートベクターマシンと類似で, 数理計画を利用した識別法が提案されている. 初期の方法は超平面で分離する考えは同じであるが, マージン最大化の考えは入っていない. 誤った識別をなるべく少なくする分離ということで, 以下のように定式化される.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, & \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} & y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, & i = 1, \dots, \ell \end{array}$$

この定式化ではマージン最大化を考慮していないので, 統計的性質は期待できない. また, 線形分離可能なデータセット ($\boldsymbol{\xi}^* = 0$) に対しては一意的な解を与えない. しかし, この問題は線形計画問題なので, かなり大規模なものでも直接解くことが可能であるというメリットがある.

そこで, ソフトマージン最大化を一般化して以下のように定式化してみる:

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \|\mathbf{w}\|_p + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, & \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} & y_i((\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0 & i = 1, \dots, \ell \end{array}$$

ここで、 $\|\cdot\|_p$ は、 L_p ノルムを表す。この問題は一般に (凸) 非線形計画問題となり、何らかの識別法を与える。2次計画問題による定式化との類似から $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$ とおくと、

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \left\| \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \right\|_p + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, & \alpha \in \mathbb{R}^{\ell}, b \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & y_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + b \right) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

となるが、目的関数をさらに簡単化して、

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \|\alpha\|_1 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, & \alpha \in \mathbb{R}^{\ell}, b \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & y_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + b \right) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

とする。カーネル関数を導入すると

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \|\alpha\|_1 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i, & \alpha \in \mathbb{R}^{\ell}, b \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \text{条件} \quad & y_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + b \right) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

を得る。このような定式化ではマージン最大化ではなく、スパース性を追求したことになることは明らかである。この問題は、補助変数を導入することによって線形計画問題となるので、リニアプログラミングマシンによる識別と呼ばれる。識別関数は、式(3.92)と同様である。

第4章

低次G型フリーエ記述子で表現される MRI正中矢状断脳梁形状の性差

4.1 はじめに

性同一性障害 (Gender Identity Disorder, 以下, GID) とは, 身体の性 (Sex, 以下, 生物学的性)¹と自己が認識している性 (Gender, 以下, 心理学的性)² が持続的に一致せず, 身体の性に対する持続的な不快感, 自己が認識している性に対する持続的な同一感があり, 臨床的に著しい苦痛または, 社会的, 職業的または他の重要な領域における機能の障害を引き起こしているものと定義されている [15, 16, 17]. また, 性同一性障害のうち, ホルモン療法や外科手術療法などにより, 生物学的性を心理学的性に可能な限り一致させようとする願望を伴っている場合, 性転換症 (Transsexualism)³と呼ばれることがある [16, 17, 18]. 具体的に, 1998年, 日本で初めて正式に性転換症患者に対する性別適合手術⁴ (性転換手術) が埼玉医科大学⁵で行われ, 2, 3例目が1999年6月と11月にそれぞれ行なわれ, 2000

¹初版のガイドライン [20] には, 「生物学的性 (sex)」という用語が用いられているが, 第二版のガイドライン [21] では, 「身体的性別」という用語が用いられている. この理由は, 「生物学的性」という用語の使用が不正確だからであり, 外性器, 内性器, ホルモン, 性染色体に関する性別を示す用語として, 「身体的性別」が用いられたと説明される.

²第二版のガイドライン [21] では, ジェンダー・アイデンティティ (英語では, gender identity) が新たに用いられ, 2002年3月岡山で開催された第4回 GID 研究会でも使用が承認された. ジェンダー・アイデンティティとは何かについては, 第二版では明示されていないが, gender identity という言葉の生みの親である, ジョン・マナー [24] の定義「一人の人間が男性, 女性, もしくは両性として持っている個性の, 統一性, 一貫性, 持続性をいう」より, identity の同一性が身体的性別と心理・社会的性が同一という意味ではなく, 自己の単一性, 普変性, 連続性という意味において同一なのである. と解釈され, 性同一性は, gender identity の訳語であることを留意し誤解しないで用いなければならない.

³MTF (Male to Female), すなわち身体の性は男性で性自認の性は女性 (女性になりたい男性), または, FTM (Female to male) に分類される. これらは, GID の性別の表現として用いられる. また, 同義語として, 中核群の GID (対して周辺群の GID) [20, 22, 23], セックス GID, 中核群 (真性) の GID [27] などがあり, 以前には, Primary (対して secondary) [25, 26] とも呼ばれた.

⁴英語では, Sex Reassignment Surgery (SRS) と呼び, その日本語訳は, 「性別再判定手術」「性別再指定手術」「性別再適合手術」など様々であった. 2001年3月第3回 GID 研究会において, SRS の訳語が検討され, 結局, SRS の直訳にはこだわらず, 「性別適合手術」という用語が採用された.

⁵2005年の時点で, ジェンダークリニックは, 埼玉医科大学総合医療センターをはじめ, 岡山大学医学部・歯学部付属病院, 札幌医科大学付属病院, 大阪医科大学付属病院, 関西医科大学付属病院の5施設となっている.

年3月末までに5件が実施された。

こうした国内での性別適合手術は、性同一性障害に関するガイドライン「性同一性障害に関する答申と提言」[20]⁶、がまとめられたことにより実現可能になった。本ガイドラインには、性同一性障害の診断基準⁷として、複数の精神科医による診断面接から得られる患者の心理面だけに着目した定性的な基準が記載されている。しかし、こうした定性的な診断基準だけでは、診断の確実性が不十分であるため、性同一性障害の診断に際し、定量的かつ客観的な基準、例えば患者の内分泌量や脳梁形状などを利用する試みがなされている[27]。個々の診断基準を単独に用いて性同一性障害の判定を行なった際の正解率がたとえ低くても、それらの診断基準から得られた判定結果を統合すれば、最終的な性同一性障害の診断の確実性は向上する。1つでも多くの定量的な診断基準を見出していくことが現在の重要な課題である。

心身医学では、脳が性機能を制御し、一方で性が脳の形成に影響を与えているとされ、脳と性の深い関わりが指摘されてきた。古くからヒトの脳の形態的、あるいは機能的な性差が解剖学、生理学などさまざまな立場から調査されてきた。例えば、解剖学的には、視索前野や視床下部のいくつかの神経核は男性の方が容積が大きく、また、神経核を形成する性的二型核は男性の方が大きく、数も多いことが死体脳の解剖により確認されている[29, 30]。また、性行動に関係が深いとされる分界条床核は、女性の方が小さい傾向にあるが、6名の男性から女性への性転換者については、死後の解剖により女性のものと同じくらいに小さいことが確認されている[31]。さらに、大脳左右半球を連結する神経線維の集束である脳梁(Corpus callosum)は、その後頭部側が男性より女性の方が大きく、神経繊維の数も多いと報告されている[32]。

死体脳に対する解剖学的な脳の性差は、その存在がほぼ認知されているものの、性同一性障害の診断には利用できない。こうしたことから、非侵襲な計測により脳の性差を調べる試みがなされている。例えば、聴覚誘発電位(AEP)の性差[33]、体性感覚誘発電位(SEP)の性差[34]が報告されている。また、脳梁のMRI正中矢状断形状については、1986年の最初の報告[35]以降、数多くの性差に関する調査結果が報告されている⁸。Bishopら[38]は、1994年以前に行われた脳梁の性差に関する調査結果を総合的に評価し、脳梁の形状、サイズには性差がないと考えることが妥当であると主張した。

⁶2002年7月に改訂されたガイドライン第2版が公表され[21]、現在第3版の改訂が検討されている。

⁷性染色体異常、半陰陽などの身体的な異常が認められる場合でも、身体の性と性自認の性が一致していない場合、GIDの一部として広く認められるようになった[21]。しかし、一般に混同されがちな同性愛は、性的指向が同性であるということであり、GIDの性自認とは全く異なる。

⁸[36, 37]がしばしば引用され、[38]には1994年以前に発表されたほとんどすべての論文が紹介されている。

脳梁そのものに性差があるか否か, また, 性同一性障害の診断を目的とするか否かに関わらず, 非侵襲に計測可能であり, かつ生物学的, あるいは心理学的性差を反映する脳内の特徴量を特定することは, ヒトの認知能力において, 性差, 個人差が発生するメカニズムを解明するためにも重要である.

本論文では, 心理学的な正常者 422 名 (男女ともに 211 名) に対し, 脳梁の MRI 正中矢状断形状を G 型フーリエ記述子 [1] (以下, フーリエ記述子), 及び中心モーメントを用いて記述し, その性差を詳細に調査する. その結果, フーリエ記述子, 及び中心モーメントのいずれを用いて測定した場合においても, 脳梁の MRI 正中矢状断面での主軸方位に大きな性差がある, 具体的には男性より女性の方が有意水準 10^{-14} で有意に前傾していることを示す. これは, これまで考えられてこなかった脳梁の傾き, 換言すれば, 頭蓋内における脳梁の配置に大きな性差があるとする全く新しい知見を与えるものである. また, 性転換症患者を含む性同一性障害を有する者 15 名の脳梁の主軸方位が, 正常な男女それぞれの脳梁の主軸方位のどちらに近いかを調べた結果, 被験者のほとんどは, 正常女性に近い主軸方位の脳梁を有していることを示す.

4.2 脳梁形状の性差の検定, 性別同定法

4.2.1 対象

実験には, 正常者 422 名に対する静磁場強度 1.5[Tesla], 繰り返し時間 $T_R = 300$ [ms], エコー時間 $T_E = 11$ [ms], または, $T_R = 216$ [ms], $T_E = 14$ [ms] で撮影された頭部 MRI 正中矢状断を使用した. その一例を図 4.1 に示す. 標本の内訳は, 男性 211 名, 女性 211 名であり⁹, それらの年齢のヒストグラムを図 4.2 に示す. また, 用いた標本の脳梁部の面積 A , 周囲長 ℓ , 前後長 W , 高さ H の男女それぞれの平均と標準偏差を表 4.1 に示す.

⁹本研究で用いた MRI 標本には個人を特定可能な情報は一切含まれていない.

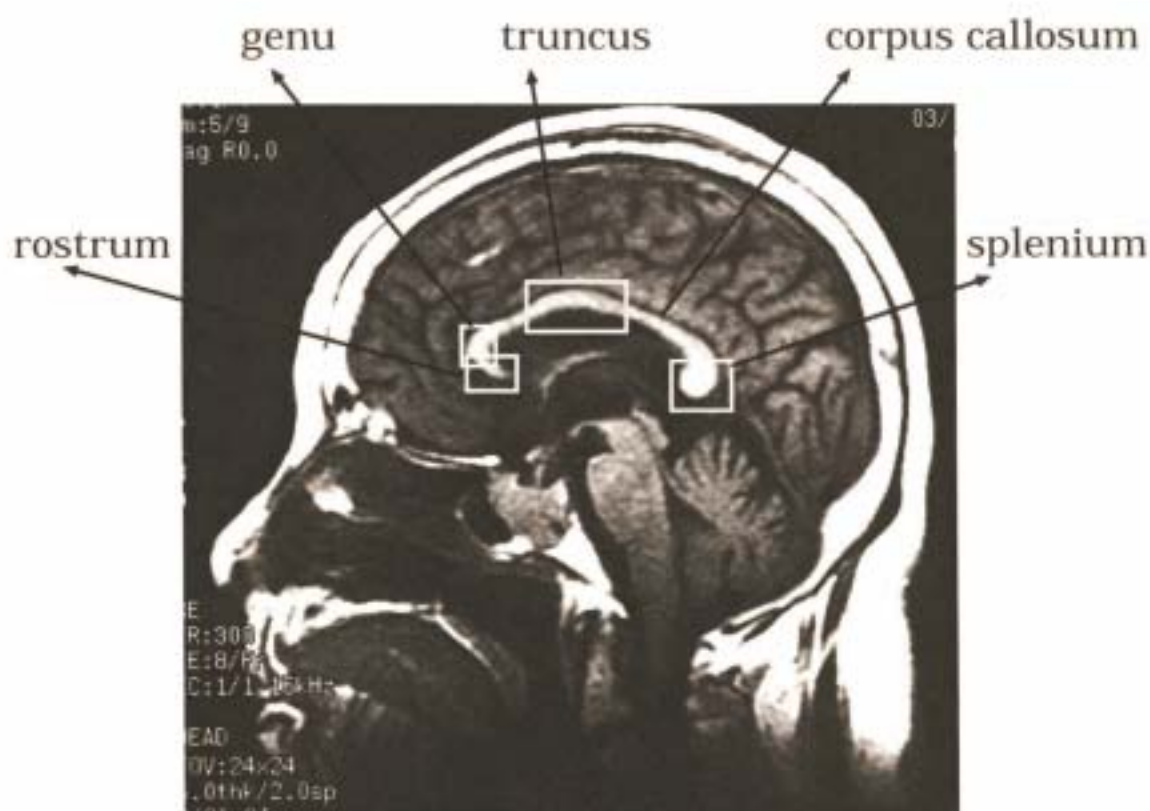


図 4.1: 頭部MRI 正中矢状断面の一例
Fig. 4.1: An example of MRIs at the midsagittal plane

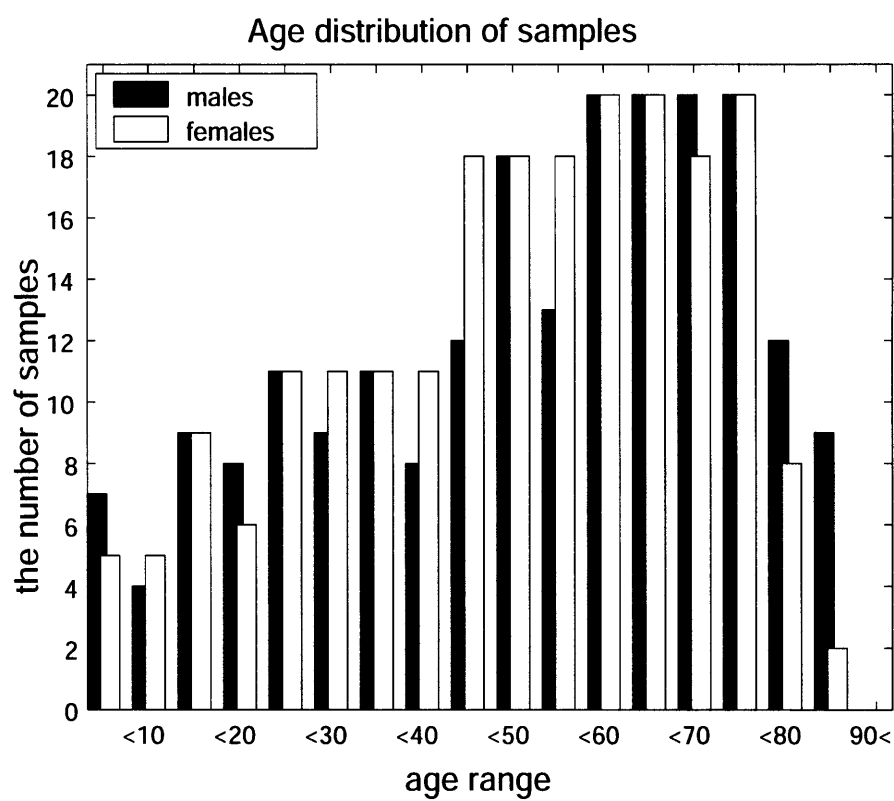


図 4.2: 標本の年齢分布

Fig. 4.2: Age distribution of samples
 (Males 48.64 ± 21.89 , Females 47.11 ± 20.26 [years])

表 4.1: 標本の男女脳梁サイズの平均と標準偏差
 Table 4.1: Mean and S.D. of corpus callosum sizes
 for male and female samples.

	Male	Female
W [cm]	7.38 ± 0.59	7.18 ± 0.54
A [cm ²]	5.77 ± 0.96	5.58 ± 1.14
ℓ [cm]	22.42 ± 2.20	21.94 ± 2.12
H [cm]	2.99 ± 0.40	3.09 ± 0.43

4.2.2 脳梁形状の性差に関する調査例

de Lacoste-Utamsing と Holloway は、男性 9 名、女性 5 名の死後の解剖により、脳梁膨大 (Splenum) の正中矢状断は女性の方が円形でかつ大きい傾向にあることを見出した [32]. Allen ら [36] は、男女共に 73 名の被験者に対し、MRI を用いて脳梁の正中矢状断形状を計測した。これより、脳梁全体の断面積、局所的な断面積には性差はないものの、脳梁膨大の断面は、男性より女性の方が主観的により円形であることを確認した。更に、Allen らは、脳梁膨大の断面の円形度を、脳梁膨大の最大幅、脳梁膨大の平均幅が近傍の平均幅よりも大きかった標本の割合のそれぞれで定義し、それらの性差を定量的に評価した結果、いずれも有意な性差があり、女性の方が有意に円形に近かったと報告している。

さて、Emory ら [37] は、男女共に 20 名の正常者と、MTF、FTM 共に 10 名の性転換症患者に対し、MRI を用いて脳梁の正中矢状断形状を計測した。これにより、脳梁膨大は女性の方がより円形に近い傾向にあることは認めたものの、これら 4 グループの脳梁形状には統計的に有意な性差はないと報告した。また、Bishop ら [38] は、MRI によらない場合を含め、1994 年までに行われた 49 件の脳梁の性差に関する調査結果を総合的に評価した結果、脳梁の形状、サイズには性差はないと考えることが妥当であると主張している。

4.2.3 性差の検定法

本論文での最初の目的は、脳梁形状を表すどのようなパラメータ (以下、形状特徴量, figure characteristics, f.c.) に大きな性差が含まれているのかを見出すことである。脳梁形状に限らず、一般的な図形、領域の形状を定量的に表現するために、フーリエ記述子 [1], 中心モーメントなどを用いることが多い。本論文では、脳梁断面の形状をこれらを用いて記述し、大きな性差を持つ形状特徴量を以下の手法で検出する。まず、男女の脳梁断面の

形状特徴量がそれぞれ（多次元）正規分布に従うと仮定する．そして，全標本から評価用1標本を除いた421標本を用い，男女それぞれの形状特徴量の確率密度分布を（多次元）正規分布で近似し，残りの評価用1標本の形状特徴量の値の発生確率が高い方の性を推定値とする（最尤推定）．これは，マハラノビス汎距離 [39] に基づく判別分析に等しい．こうした推定を全422標本をそれぞれ評価用標本に用いて行い，正しく性別を推定できた評価用標本の割合を性別推定の正解率 R_r [%] とする．

こうした性別推定の正解率 R_r を用い，以下に示すように性差の有無の判定を行う．まず，男女それぞれの標本数に一致するように，全標本を無作為に2つのグループに分け，この2つのグループに対し，性別を推定する際と同様にグループを推定する実験を行う．この際の正解率を擬グループに対する正解率 R_s [%] と呼ぶことにする．正解率 R_s は平均50%のおおよそ正規分布に従うはずであるから， R_r が R_s の変動に対し有意に高い値をとるならば，男女のグループ分けが無作為ではないということであり，用いた形状特徴量に有意な性差があることを意味する．Wilksの Λ 統計量 [40] などを用いて性差を検定することも可能であるが，こうした検定では，形状特徴量の正規性，若しくは特定の確率密度分布に従うことを仮定するため，その仮定が満たされない場合には，検定そのものの妥当性が崩れる．しかし， R_r が R_s の変動に対し有意に高い値をとるならば，特徴量の正規性の有無にかかわらず，少なくとも正規性を仮定しても有意に高い正解率 R_r が得られたと言うことになる．つまり，性差があることの十分条件で性差の有無を示されることになる．したがって，この手法で， R_r が R_s の変動に対し有意に高い値をとらなかったとしても，その形状特徴量に性差がないことはいえない．

4.3 脳梁の性差の解析

4.3.1 脳梁断面サイズの性差

脳梁の性差を調べる上で，脳梁断面の面積 A ，周囲長 ℓ ，前後長 W ，高さ H はもっとも基本的な形状特徴量である．本論文においても，予備実験として，これらの性差の有無を調べる．全標本に対し，これらのパラメータをそれぞれ用いて性別を推定した際の正解率 R_r ，擬グループに対する正解率 R_s を求めた結果を表4.2に示す．ただし，擬グループに対する正解率 R_s は，100試行に対する平均 \pm 標準偏差を表している．これより，脳梁の前後長 W に最大の性差があるものの，正解率が高々59%，擬グループに対する正解率が $50\pm 3.4\%$ であることを考えれば，脳梁断面サイズに明らかな性差があるとは言いがたい．

表 4.2: 脳梁サイズの性差

Table 4.2: Sex differences in the corpus callosum sizes.

	R_r [%]	R_s [%]
W	59.24	50.13±3.01
A	54.03	50.67±3.08
ℓ	53.32	49.92±3.73
H	54.27	50.02±3.63

4.3.2 脳梁断面の局所サイズの性差

Allen らは、脳梁正中矢状断を脳梁の前後長、あるいは脳梁の中心線の長さで均等に 5 分割した各領域、前方半分、後方半分、後方より 3 分の 1、4 分の 1、後方 2 分の 1 から 3 分の 1 を引いた領域、3 分の 1 から 5 分の 1 を引いた領域の合計 22 領域の面積の性差を個別に調べた結果、これらには有意な性差はなかったと報告している [36]。しかし、この Allen らの調査は、22 個の特徴量の性差を個別に調べたものであり、これらの特徴量を組み合わせた場合、つまり特徴ベクトルとして扱った際の性差を調べたものではない。

脳梁断面の局所面積の性差を詳細に調べるため、脳梁断面をその前後長で均等に 5 分割した各領域の面積を特徴量とし、これらの特徴量を組み合わせて、つまり特徴ベクトルとみた際の性差の有無を調べる。ただし、5 分割した各領域の面積を前頭部側から後頭部側にかけて、それぞれ A_1, A_2, \dots, A_5 と表すことにする。形状特徴量 A_1, \dots, A_5 のすべての組み合わせについて、それを形状特徴量として性別の推定を行った。正解率 R_r の高かった上位 5 組について、その特徴量の組み合わせと正解率 R_r [%] を表 4.3(a) に示す。同表には示していないが、擬グループに対する正解率 R_s は、表 4.2 に示した結果と同様、いずれも $50 \pm 3.0\%$ 程度であった。

さて、前脳容量と脳梁の正中矢状断面積には線形関係があり [41]、また、16 歳以上では、脳梁断面積は年齢と共に線形に減少する傾向が指摘されており [36]、脳梁断面サイズ、局所サイズの性差は、これらを要因とする性差に従属して検出されている可能性が高い。そこで、年齢など他の要因により生じる脳梁サイズの従属的な性差の影響を除去するため、脳梁断面の局所面積 A_1, \dots, A_5 を脳梁全体の断面積 A で規格化 (normalization) し、これら規格化された特徴量の性差を同様に調べた。その結果を表 4.3(b) に示す。

表 4.3(b) より、脳梁膨大の面積 A_5 を含む後頭部側は、正解率の高かった上位の特徴量に多く含まれていることから、より大きな性差を持つ特徴量であると言える。これは、Allen らの主張 [36] を支持する結果であるが、正解率はたかだか 56% であり、これらに有意な

表 4.3: 脳梁断面の局所面積の性差

Table 4.3: Sex differences in local area of corpus callosum.

(a) No normalization by overall area A .

$N, \{A_n\}_{n \in N}$	R_r [%]
5,4,3,2	59.00
5,2	57.82
5,4,3,1	57.58
5,4,3	57.58
5,4	57.58

(b) Normalization by overall area A .

$N, \{A_n\}_{n \in N}$	R_r [%]
5,4,3	55.92
5,4,3,2	55.69
5,4,3,1	55.69
5,4,2,1	55.69
5,3,2,1	55.69

性差があると結論付けることは難しい。

4.3.3 脳梁膨大断面の円形度の性差

脳梁の形状、サイズの性差のみならず、脳梁膨大断面が、男性より女性の方がより円形に近いとする報告も多い [32, 36, 37]。そこで、次に、脳梁膨大断面の円形度の性差を検証する。全標本を被験者にランダムに呈示し、脳梁膨大断面が主観的に円形であるか否かを回答させ、円形であると回答されたものを女性と推定した。こうした主観による推定における正解率は、約 53%であった。また、一般に、周囲長 ℓ 、面積 A の図形の円形度を $4\pi A/\ell^2$ として評価することが多い。そこで、脳梁膨大に相当する脳梁断面の後方から 5 分の 1 の領域に対し、こうした円形度を用いて性別を推定した。その際の正解率は、約 54%であった。これらの結果からは、脳梁膨大断面の円形度には、主観的にも定量的にも大きな性差があるとは言いがたい。

4.3.4 低次 G 型フーリエ記述子で表現された脳梁断面の性差

脳梁形状の性差をより詳細に調べるため、フーリエ記述子を新たに脳梁の形状特徴量として導入する。フーリエ記述子は、図 4.3 に示したように図形が複素平面上に置かれた

ものとし，図形の輪郭線を，適当に定めた始点からの距離 l を媒介変数として $u(l)$ ， $l = 0, 1, \dots, L-1$ で表現し，その離散フーリエ変換に $1/L$ を乗じた

$$c_n = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} u(l) \exp(-i2\pi nl/L) \quad (4.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, L-1$$

とするものである．ただし， i は虚数単位を表す．フーリエ記述子を用いれば，図形の輪郭線 $u(l)$ は

$$u(l) = \sum_{n=0}^{L-1} c_n \exp(i2\pi nl/L) \quad (4.2)$$

$$l = 0, 1, \dots, L-1$$

として表現される．式(4.1)において，離散フーリエ変換の性質より $c_{-k} = c_{L-k}$ であるから，以後， $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ と記述し， c_n, c_{-n} をあわせて n 次フーリエ記述子と呼ぶことにする．各次のフーリエ記述子は，いずれも複素数であり，それらの実部，虚部をそれぞれ $\Re[\cdot]$ ， $\Im[\cdot]$ で表現する．0次フーリエ記述子 c_0 は，輪郭線の中心座標を表す．

図4.3に示したように，脳梁部断面を前頭部を左側に位置するように置き，もっとも後頭部に位置する点を始点 ($l = 0$) とし，反時計回りに脳梁断面の輪郭線 $u(l), l = 0, 1, \dots, L-1$ を定めた．得られた輪郭線 $u(l)$ を式(4.1)に適用することにより，フーリエ記述子 $c_n, n = 0, 1, \dots, L-1$ を算出した．1,2,3次のフーリエ記述子の実部と虚部を別な特徴量と見て，それらすべての組み合わせについて，それらを形状特徴量とした際の正解率 R_r を調べた．高い正解率が得られた上位5組について，その特徴量の組み合わせと正解率 R_r [%] を表4.4(a)に示す．これより，1次フーリエ記述子を含むいくつかのフーリエ記述子を組み合わせることで形状特徴量とすることにより，最大71%の正解率で性別を推定できることがわかる．擬グループに対する正解率 R_s は，これまでの結果と同様にいずれも $50 \pm 3.3\%$ 程度であり，正解率 $R_r=71\%$ は有意に高い値であるといえる．

図4.4は，代表的な脳梁断面形状とそれを1次以下のフーリエ記述子で近似した形状を重ねて示したものである．1次のフーリエ記述子 c_1, c_{-1} は，図形の輪郭線を周期1の楕円で近似した際の楕円のパラメータを表している．楕円の形状は，図4.4に示すように，長軸半径 a ，短軸半径 b ，長軸の方位，すなわち主軸方位 φ で記述され，これらのパラメー

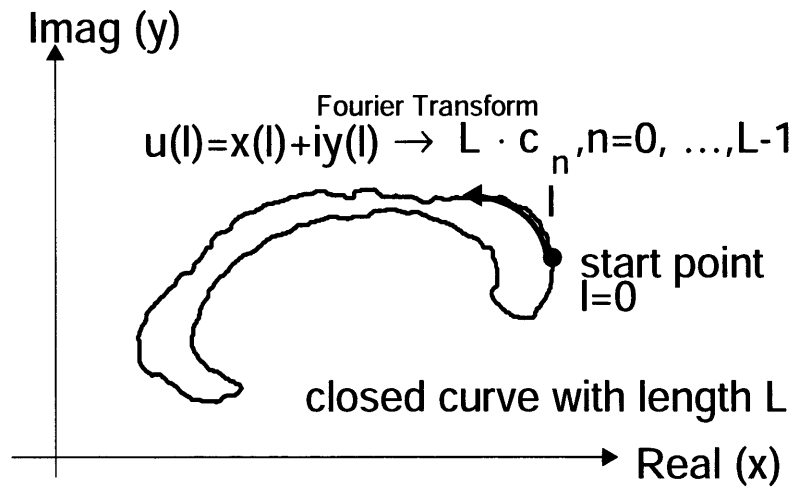


図 4.3: 脳梁輪郭線のフーリエ記述子の算出法

Fig. 4.3: A procedure for obtaining Fourier descriptors of callosal contour.

たと1次のフーリエ記述子 c_1, c_{-1} には次式に示される関係がある.

$$\begin{cases} a = |c_1| + |c_{-1}| \\ b = ||c_1| - |c_{-1}|| \\ \varphi = \frac{\angle c_1 + \angle c_{-1}}{2} \\ \theta = \frac{\angle c_1 - \angle c_{-1}}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

ただし, $|\cdot|$ は絶対値, \angle は位相角を表す. 式(4.3)の導出は, 付録A.2に示す. また, θ は, 始点 ($l=0$) の位置に依存し, 長軸方向は,

$$l = -\frac{L\theta}{2\pi n} \quad (4.4)$$

として表現される.

次に, 大きな性差を有した脳梁の1次フーリエ記述子において, それが記述するどのような性質, つまり脳梁を楕円で近似した際の楕円のいかなる性質に性差があるのかを調べる. そこで, 式(4.3)により, 1次フーリエ記述子を a, b, φ, θ に置き換え, 3次までのフーリエ記述子のすべての組み合わせについて, それらを形状特徴量として用いた際の正解率 R_r を調べた. 正解率の高かった上位5組について, その特徴量の組み合わせと正解率 $R_r[\%]$ を表4.4(b)に示す. これより, 1次のフーリエ記述子の中では, 近似された楕円の主軸方位 φ は上位5組の中に必ず含まれており, 最も大きな性差をもつことがわかる. 形状特徴量に主軸方位 φ を含むとき, 70%以上の正解率で性別を推定できる.

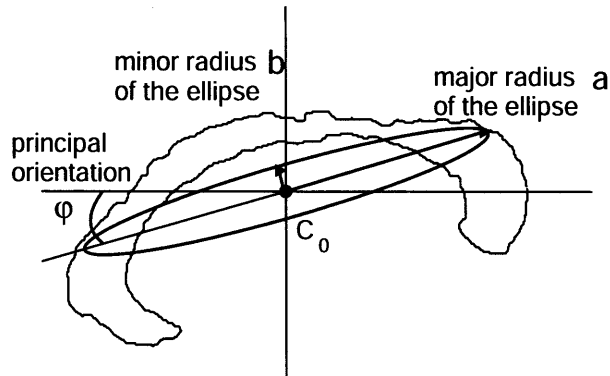


図 4.4: 1次フーリエ記述子による脳梁輪郭線の楕円近似

Fig. 4.4: Elliptical approximation of callosal contour by first-order Fourier descriptors.

脳梁を楕円で近似した際の長軸、及び短軸の半径 a, b は、脳梁サイズを表現する特徴量である。次に、こうした脳梁サイズを表す形状特徴量を除いた特徴量の性差を調べるため、 $b/a, \varphi, \theta$ と長軸半径 a と短軸半径 b の積の平方根 \sqrt{ab} で規格化された2,3次のフーリエ記述子 c_n/\sqrt{ab} , $n = \pm 2, \pm 3$ を用いて同様の実験を行った。その結果を表4.4(c)に示す。表4.4(b)と比較することにより、脳梁のサイズ \sqrt{ab} で規格化しても、主軸方位 φ が含まれていれば、約70%の正解率で性別を推定できることがわかる。

更に、脳梁サイズと主軸方位を含まない形状特徴量の性差を調べるため、 $b/a, \theta$ とサイズ \sqrt{ab} 、主軸方位 φ の両方で規格化された2,3次のフーリエ記述子 $c_n \cdot \exp(-i\varphi)/\sqrt{ab}$, $n = \pm 2, \pm 3$ を用いて同様の実験を行った。その結果を表4.4(d)に示す。サイズ \sqrt{ab} と主軸方位 φ の情報を削除されたフーリエ記述子では、正解率は約60%である。表4.4(c)と比較することにより、主軸方位 φ の情報を削除すると、正解率は10%近く低下することがわかる。

4.3.5 中心モーメントで表現された脳梁断面の性差

中心モーメントは、図形に含まれる座標 (x, y) の集合を S として、

$$M_{m,n} = \frac{1}{|S|} \sum_{(x,y) \in S} (x - \bar{x})^m (y - \bar{y})^n, \quad m + n > 1$$

で与えられる。ただし、 (\bar{x}, \bar{y}) は、図形の重心の座標、 $|S|$ は集合 S の要素数である。

中心モーメント $M_{m,n}$, $0 \leq m, n \leq 3$, $m + n > 1$ のすべての組み合わせについて、そ

表 4.4: フーリエ記述子で表現された脳梁断面の性差
 Table 4.4: Sex differences in Fourier descriptors of corpus callosum.

(a) No normalization.	
f.c.	R_r [%]
$\Im[c_1], \Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}], \Im[c_2], \Re[c_3]$	71.56
$\Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}], \Re[c_{-2}], \Re[c_3],$ $\Im[c_3], \Re[c_{-3}], \Im[c_{-3}]$	70.85
$\Im[c_1], \Re[c_{-2}], \Im[c_{-2}], \Re[c_3]$	70.85
$\Im[c_1], \Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}], \Im[c_2], \Re[c_3], \Im[c_3]$	70.62
$\Im[c_1], \Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}], \Im[c_2], \Re[c_{-2}], \Re[c_3]$	70.62

(b) No normalization.	
f.c.	R_r [%]
$b, \varphi, \Im[c_{-2}], \Re[c_3]$	71.09
$\varphi, \theta, \Im[c_2], \Re[c_3]$	70.85
$b, \varphi, \Im[c_3]$	70.62
$b, \varphi, \Im[c_2], \Re[c_3]$	70.62
$b, \varphi, \Im[c_3], \Re[c_{-3}]$	70.14

(c) Normalization by \sqrt{ab} .	
f.c.	R_r [%]
$b/a, \varphi, \Re[c_3], \Im[c_3]$	70.62
$b/a, \varphi, \Re[c_2], \Im[c_3]$	69.67
$\varphi, \Re[c_3], \Im[c_3]$	69.43
$\varphi, \Re[c_2], \Im[c_3]$	69.43
$b/a, \varphi, \Im[c_2], \Re[c_3]$	69.43

(d) Normalization by both \sqrt{ab} and φ .	
f.c.	R_r [%]
$b/a, \theta, \Re[c_{-2}], \Re[c_3]$	62.09
$\theta, \Re[c_{-2}], \Re[c_3]$	62.09
$b/a, \theta, \Re[c_2], \Re[c_{-2}], \Im[c_{-3}]$	61.14
$\theta, \Re[c_2], \Re[c_{-2}]$	61.14
$b/a, \theta, \Re[c_2], \Im[c_3], \Im[c_{-3}]$	61.14

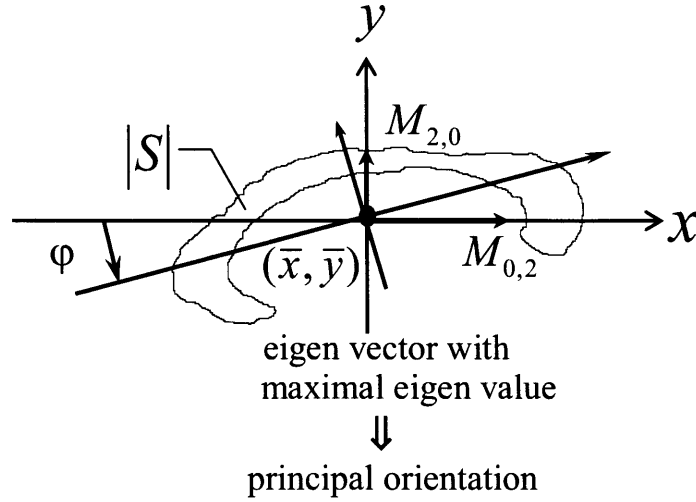


図 4.5: 中心モーメントを用いた脳梁の主軸方位の推定

Fig. 4.5: Estimation of the callosal principal orientation by central moment.

れらを形状特徴量に用いて性別を推定した際の正解率 R_r を調べた. 高い正解率が得られた上位5組について, その特徴量の組み合わせと正解率 R_r を表 4.5(a) に示す. これより, フーリエ記述子を用いた場合とほぼ同様に, 最大約 71% の正解率で性別を推定できることがわかる. 擬グループに対する正解率 R_g は, これまでの結果と同様いずれも $50 \pm 3.3\%$ 程度であり, 正解率 $R_r=71\%$ は有意に高い値であるといえる.

図形のサイズを, 分散に相当する 2 次中心モーメント $M_{2,0}, M_{0,2}$ で与えるならば,

$$\frac{M_{m,n}}{M_{2,0}^{m/2} M_{0,2}^{n/2}}, \quad m, n \leq 3, m + n > 1 \quad (4.5)$$

は, 図形のサイズで規格化された中心モーメントを表す. 性別推定における脳梁のサイズの影響を除去するため, $M_{2,0}, M_{0,2}$ 自身を除く規格化されたこれらの中心モーメントのすべての組み合わせについて, それらを形状特徴量とした際の性別推定の正解率 R_r を調べた. その結果を表 4.5(b) に示す. フーリエ記述子を用いた場合とほぼ同様, 脳梁サイズで規格化しても, 最大で約 68% の正解率で性別を推定できることがわかる.

さて, 図形の主軸方位 φ を分散を最大にする方位と定義するならば, その方位は, 図 4.5 に示すように, 行列

$$\begin{pmatrix} M_{2,0} & M_{1,1} \\ M_{1,1} & M_{0,2} \end{pmatrix}$$

の最大固有値に対する固有ベクトルの示す方向として与えられる。図形を主軸方位 φ で規格化し、更に、式(4.5)に示したようにサイズで規格化して得られる中心モーメントのすべての組み合わせについて、それらを形状特徴量に用いて性別を推定した際の正解率 R_r を調べた。ただし、規格化に用いた $M_{2,0}$, $M_{0,2}$, $M_{1,1}$ を除外した。その結果を表 4.5(c) に示す。フーリエ記述子を用いた場合とほぼ同様、主軸方位で規格化すると正解率は 60% 以下に低下することがわかる。

中心モーメントを用いて算出された主軸方位 φ だけを形状特徴量として性別を推定した際の正解率は 68.01% であり、フーリエ記述子を用いて算出された主軸方位 φ だけを形状特徴量として性別を推定した際の正解率 68.48% にほぼ一致した。

4.3.6 主軸方位の性差の統計的検定

これまでに示した実験結果から、脳梁の形状特徴量とそれを性別推定に用いた際の正解率の関係を以下にまとめた。

- サイズ：約 60%
- 主軸方位：約 70%
- サイズ、主軸方位を含む形状：70%強
- サイズ、主軸方位で規格化された形状：約 60%

以上の結果は、フーリエ記述子、中心モーメントのいずれを用いた場合にもほぼ一貫して得られており、十分に信憑性があると思われる。

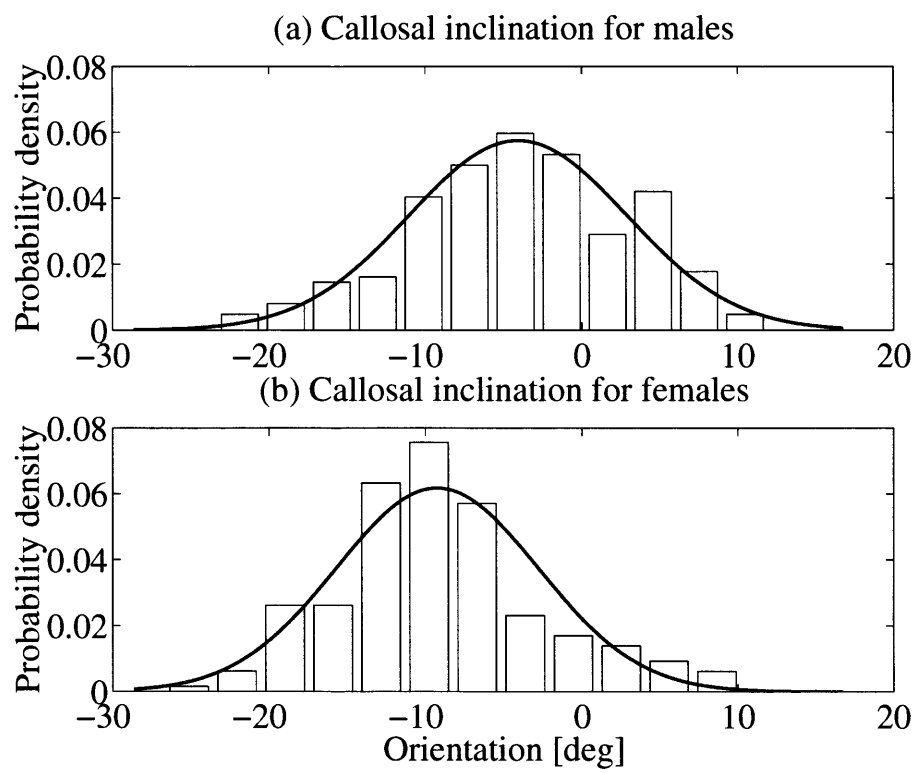
脳梁の主軸方位は、単独でもっとも大きな性差を有する形状特徴量である¹⁰。脳梁の主軸方位の性差をより詳細に調べるため、脳梁の主軸方位 φ の男女それぞれの頻度分布とそれを正規分布で近似した際の確率密度分布を図 4.6(a),(b) に示した。ここで、主軸方位 φ をフーリエ記述子から算出したが、中心モーメントから算出した場合もほぼ等しい結果になった。主軸方位 φ の平均 \pm 標準偏差は、男性 -4.07 ± 6.94 [deg]、女性 -9.25 ± 6.46 [deg] であり、女性の方が前傾している傾向にある。頻度分布からでも性差があることは明らかであるが、脳梁主軸方位 φ が正規分布に従うと仮定し、その性差の有無の片側検定を行った。検定の結果、有意水準 10^{-14} でも性差がないとする仮説は棄却された。さらに、具体的に、脳梁の主軸方位を尺度として主観的に性別推定を行った結果、正解率約 67.5% が得られた。

¹⁰主軸方位の妥当性を正準変量との関係から付録 A.3 に述べる。

表 4.5: 脳梁の中心モーメントの性差

Table 4.5: Sex differences in central moment of corpus callosum.

(a) No normalization.	
$N^2, \{M_{m,n}\}_{(m,n) \in N^2}$	R_r [%]
2,0, 2,2, 2,3, 3,0, 3,2, 3,3	70.62
0,2, 0,3, 1,3, 2,0, 3,2, 3,3	70.62
0,2, 1,2, 2,0, 3,2, 3,3	70.62
1,1, 2,0, 2,1, 2,3, 3,0, 3,1, 3,2, 3,3	70.38
1,1, 1,3, 2,0, 2,1, 2,2, 3,1, 3,2, 3,3	70.14
(b) Normalization by size $M_{0,2}$ and $M_{2,0}$.	
$N^2, \{M_{m,n}\}_{(m,n) \in N^2}$	R_r [%]
1,1, 1,3, 3,2, 3,3	68.48
1,3, 3,1, 3,3	68.48
1,3, 3,1, 3,2, 3,3	68.25
1,2, 2,1, 3,0, 3,1, 3,3	68.25
1,1, 3,0, 3,1, 3,2	68.25
(c) Normalization by size $M_{0,2}$, $M_{2,0}$ and principal orientation φ .	
$N^2, \{M_{m,n}\}_{(m,n) \in N^2}$	R_r [%]
0,3, 1,2, 2,1, 2,2, 3,0, 3,1	55.92
1,2, 2,2, 2,3, 3,0, 3,2	55.45
1,2, 1,3, 2,3, 3,0, 3,1	55.21
1,2, 1,3, 2,3, 3,0, 3,1, 3,2	54.98
0,3, 1,2, 1,3, 3,0, 3,2	54.74

図 4.6: 脳梁の主軸方位 φ の分布Fig. 4.6: Distributions of the principal orientation φ of corpus callosum.

4.4 性同一性障害の脳梁の主軸方位の解析

精神科医により性同一性障害がある、もしくは性転換症であると診断され、本研究に利用する旨の了解を得ている15名の被験者 (FTM 11名, MTF 4名)¹¹の脳梁主軸方位 φ が、4.3.4で求めた正常な男女それぞれの脳梁主軸方位のどちらに近いかを調べる。そこで、性同一性障害を有する者¹²15名の被験者の脳梁主軸方位を、主軸方位 φ を表す数直線上に、FTM 11名については記号○, MTF 4名については記号×で記したものを図4.7に示す。正常男女の主軸方位のそれぞれの確率密度分布と比較するため、4.3.4で求めた正常男女の脳梁主軸方位のそれぞれの確率密度分布を、その横軸と数直線を対応させて図4.7に重ねて示した。これらの確率密度分布は、ある被験者が正常男性、あるいは正常女性である条件の下でのその被験者の脳梁主軸方位 φ の条件付確率密度分布、つまり尤度 $P(\varphi|\text{Male})$, $P(\varphi|\text{Female})$ を表す。これらの確率密度分布の値の比、すなわち尤度比 $r \equiv P(\varphi|\text{Male})/P(\varphi|\text{Female})$ が1となる主軸方位 φ に点線を引いた。ある被験者の脳梁主軸方位が $r < 1$ なる領域にあるならば正常女性、 $r > 1$ なる領域にあるならば正常男性の脳梁主軸方位に近いと考えることができる。こうした判定、検定は、最尤推定、尤度比検定に等しい。

性同一性障害を有する被験者15名についてこうした性別の最尤推定を行なう、つまり、尤度比 $r < 1, r > 1$ のどちらの領域に属するのかを調べた¹³。図4.7からも明らかのように、FTM 1名とMTF 1名を除くその他13名の性同一性障害の被験者は、FTM, MTFに関らず、正常女性に近い主軸方位 φ の脳梁を有しているといえる。言い換えれば、脳梁主軸方位の観点からは、FTMは、心理学的な性よりも生物学的な性に近く、MTFは、生物学的な性よりも心理学的な性に近いということになる。これは、MTF, FTMに関らず性同一性障害を有する者では、基本形といわれる女性の脳 [47] から、脳の性分化への成長過程において正常な性ホルモンを受けることができず、脳の性分化が起こらなかったことによるとも考えられる。FTMが、心理学的に男性であるにも関わらず、生物学的には女性のものに近い脳梁を有していることについては、本結果から解釈することはできない。

Emoryら [37] は、正常男女, MTF, FTMの4グループ間で、脳梁形状に統計的に有意な差はないと報告している。そこで、次に、4.3.4で用いた正常男女各211名, MTF 4名, FTM 11名の4グループ間で、脳梁主軸方位に有意な差があるか否かを調べるため、

¹¹2005年11月現在、性同一性障害の被験者は、67名 (FTM 38名, MTF 29名) である。

¹²疾患の分類と人間の分類を混同しないため、「性同一性障害者」という表記は使用しない [21, 15, 28]。すなわち、「性同一性障害者」という人がいるのではなく、「性同一性障害という疾患がある人」である。

¹³67名の被験者についてGID患者MTFとFTMの主軸方位のヒストグラムを図4.8(c)(d)に示す。比較を容易にするため、図4.6で示した正常男女のヒストグラムを図4.8(a)(b)に再掲した。

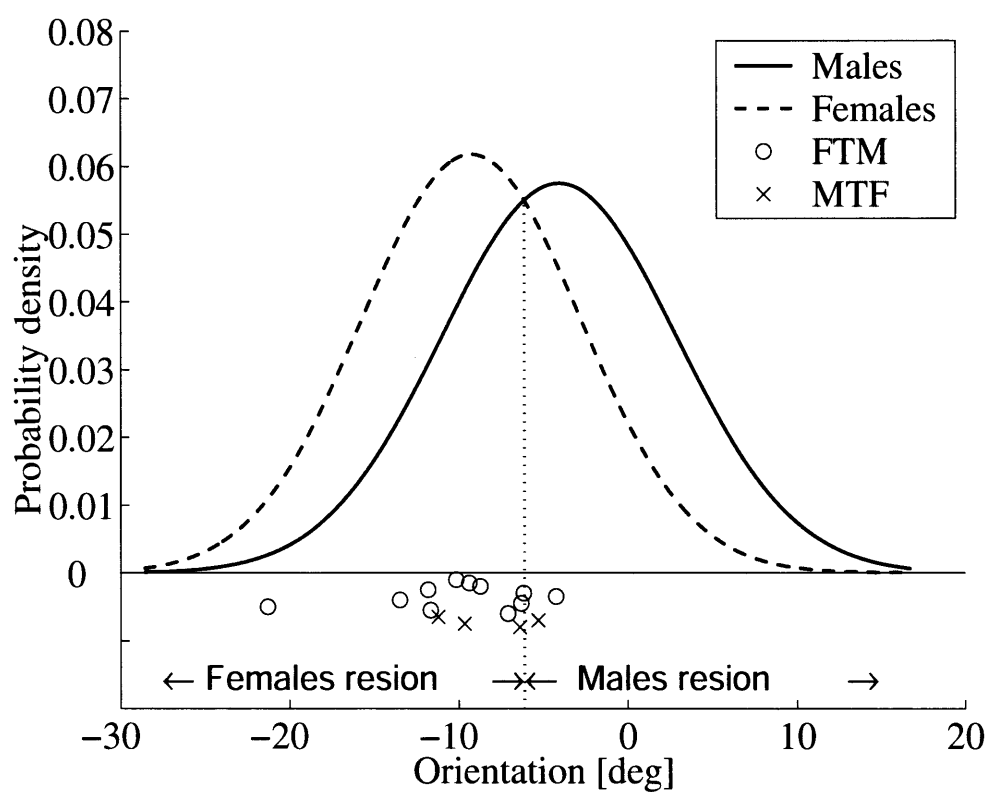


図 4.7: 正常男女の主軸方位の確率密度分布と性同一性障害を有する者の主軸方位の比較
Fig. 4.7: Comparison of the callosal principal orientation of GID and the probability density of that of Normal subjects.

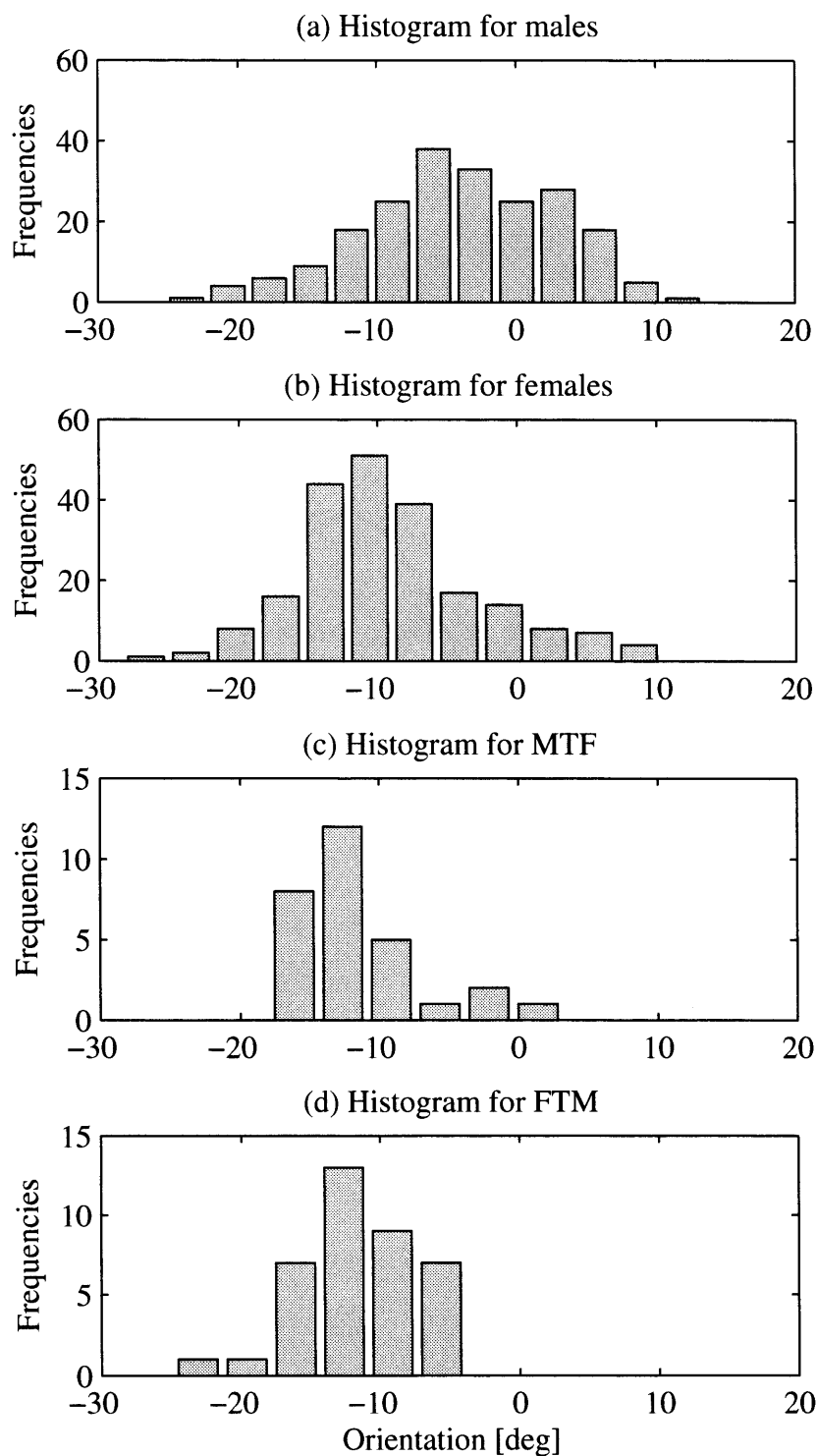


図 4.8: 正常男女, GID の MTF, FTM における主軸方位のヒストグラムの比較
 Fig. 4.8: Comparison of the histograms of the callosal principal orientation for normal males and females, and MTF and FTM in GID.

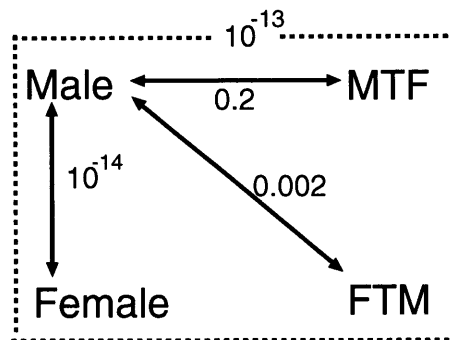


図 4.9: 正常男女, MTF, FTM グループ間における検定結果
 Fig. 4.9: The results of Kruskal-Wallis test between 4 groups and Mann-Whitney test between each 2 groups.

Kruskal-Wallis 検定を行なった。検定の結果、これら 4 グループ間に差がないとする仮説は、有意水準 10^{-13} で棄却された。また、これら 4 グループ中の任意の 2 グループ間で、脳梁主軸方位に有意な差があるか否かを調べるため、Mann-Whitney 検定を行った。その結果、正常な男女間で差がないとする仮説は、有意水準 10^{-14} 、正常男性と FTM 間では同 0.002、正常男性と MTF 間では同 0.2 でそれぞれ棄却された。それ以外の組み合わせでは、有意差は検出されなかった。これらの結果を図 4.9 にまとめた。以上の検定結果は、先に述べた性同一性障害を有する者の性別を最尤推定した結果と完全に一致している。また、最尤推定、統計的検定ともに、主軸方位 φ として、フーリエ記述子を利用して推定した値を用いたが、中心モーメントを利用した場合も同様の結果が得られている。

4.5 考察

4.5.1 脳梁主軸方位の性差の原因

我々の研究では、これまで調査されてきた脳梁のサイズや形状の性差よりも、MRI 正中矢状断の脳梁主軸方位に、最大の性差があることを見出した。そのことは、女性は、男性より有意により前傾している脳梁を持つことを示している。この事実は、脳梁の性差は、これまで討論されてきた脳梁の形やサイズよりもむしろ、頭蓋内における脳梁の配置に影響を与えるだろうことを示唆している。

脳梁主軸方位がなぜ性によって異なるかという理由は、大脳半球の機能局在の程度とそれぞれの大脳領域の発達速度の違いという観点から分析をすることができる。それは、

Witelson ら [60] は、側頭葉後部、例えば、後言語野における感覚性言語中枢のウェルニッケ野における聴覚連合野において女性は、男性よりより高い密度のニューロンを持っている傾向があることを確認した。女性におけるより発達したニューロンにより、脳梁の後部が押し上げられ、相対的に、脳梁の前部を押し下げているにちがいないと推測される。

4.5.2 脳の性分化^[52]とGIDの成因

性中枢神経系の解剖学的な研究では、前視床下部の間質神経核 (INAH)、視索交叉上神経核 (SCN) や視索前野の性的二形核 (SDN-POA) といった神経核などは、女性より男性の方が、神経の容積が大きく [50, 29, 58, 30]、そして、SDN-POA のニューロンの数も女性より男性の方がより多いことが確認されている [29, 30]。ヒトの性行動、特に性同一性障害に関係があるとされる分界条床核 (BSTc) は、男性より女性の方が小さい傾向にあり [31, 57, 53]、男性は、女性よりほぼ2倍多くニューロンがあることが確認された [57]。

さらに、周生期の精巣から分泌されるアンドロゲンの作用を受けるか受けないかにより、細胞がアポトーシス (apoptosis) をおこし、ニューロン数が減少することにより、これらの神経核などに性差が生じると言われている [51, 59]。しかし、BSTc(分界条床核) のニューロン数は、成人期でのホルモン療法やホルモン分泌量の経年変化によって、影響を受けないということが考察されている [31, 57]。つまり、神経核の性差の発現は、成人期ではなく、胎生期に生じると考えることができる。

したがって、性の因子は、胎生6週から12週に受けるホルモン分泌量の影響によって、脳に組み込まれているという Diamond の提唱 [54, 55] を考え合わせると、性同一性障害の成因は、胎生期におけるホルモンの発現異常などが大脳辺縁系のニューロンに影響を与え、脳の性分化の形成不全を引き起こしたと推測される。さらにそれを裏付ける考察として、最近、Landén は、性同一性障害の発病率が1960年代から現在までに変化がないことより、性同一性障害の中核群は、社会環境による影響は受けず、その基礎障害は神経生物学的な問題から生じていると推測している [56]。

しかしながら、Chung ら [53] は、脳の構造において注目した性に依存する組織的な変化は、初期の発達に限るだけでなく大人において拡張するだろうということを提唱している。つまり、性同一性障害を引き起こす原因は、胎児期からすでにあつたが、脳の構造としてそれが顕在化する時期は、はるかに後のことであると考察されている [53]。

このように、GIDは、ヒトの脳の性分化の時期、その時期のホルモン状態、ニューロンの形成など、個々の何らかの異常、もしくは、それらの相互作用の異常が関与して、脳の

性分化の形成不全を引き起こされた結果であると推測される。しかしながら、近年、染色体（遺伝子）レベルでの研究 [61, 62] も進められており、具体的に、なぜ、どのように、といった本質的な解明は、まだこれからの問題でもある。

ニューロンにおける性差という観点から見て、BSTcなどの神経核の性差が、脳の性分化やGIDの成因の解明に寄与できると同じように、脳梁主軸方位の性差もまた、脳の性分化やGIDの解明に、そして、GIDの客観的な診断に応用できるものと確信している。今後の研究では、脳梁主軸方位は、多くのホルモンが影響を及ぼしている他の脳の領域の成長に、どのように影響を及ぼすかを調査すべきである。さらに、ヒトの脳において、何の部分がsexと同様に、genderによって制御され、影響を受けるかといった調査は、ヒトの脳とgenderとの相互関係を解明する上でも必要である。

4.6 まとめ

本論文では、脳梁のMRI正中矢状断形状をフーリエ記述子、及び中心モーメントを用いて記述し、その生物学的性差を調査した。これより、3次以下のフーリエ記述子で近似可能な脳梁形状の中では、主軸方位に最大の性差がある、具体的には、男性より女性の方が脳梁が有意に前傾していることが示された。

脳梁の主軸方位、つまり傾斜に性差があるとする本論文で得られた知見は、これまで論争されてきた脳梁の形状やサイズに性差があるのではなく、むしろ脳梁の頭蓋内における配置に大きな性差が存在するといったこれまで指摘されていなかったまったく新たな知見を与えるものである。本論文で対象とした性同一性障害の被験者のほとんどは、FTM、MTFに関らず、正常女性に近い主軸方位の脳梁を有していることが示された。換言すれば、脳梁主軸方位の立場からは、FTMは、心理学的な性よりも生物学的な性に近く、MTFは、生物学的な性よりも心理学的な性に近いといえる。したがって、本論文で見出した脳梁主軸方位は、FTMはともかく少なくともMTFに対しては、性同一性障害の診断のための客観的かつ定量的な診断基準の1つになりうる可能性が示されたといえる。より強い結論を導くためには、さらに多くの標本に対する詳細な調査、検討が必要である。

第5章

高次G型フーリエ記述子で表現される脳梁形状のGender差の特定

5.1 はじめに

高次G型フーリエ記述子 [1] を用いて、正常男女、GID 患者の MRI 正中矢状断脳梁形状を詳細に表現し、性差を調査する。ソフトマージンをもつ線形サポートベクターマシン (SVM)[45, 46] を使い、正常男女の標本群を最も良く分離する超平面を決定し、これに直交する直交補空間（1次元の軸）上の座標を特徴量として定義する。この特徴量は、正常男女の脳梁形状の性差を最も強く反映する。GID 患者に対するこの特徴量の値は、FTM, MTF に関わらず、身体的な性よりも心理学的な性に対する特徴量の分布に近いことを示し、その特徴量は、sex に関連した違いではなく、gender に関連した違いであると結論付けた。これらより、脳梁形状の Gender 差を特定する。

5.2 脳梁形状の解析手法

5.2.1 対象と用いた MRI

実験に用いた標本は、第4章と同様である。頭部 MRI 正中矢状断の一例は、図4.1に示す。正常者422名の標本の内訳は、男性211名、女性211名であり、それらの年齢のヒストグラムを図4.2に示す。すべての被験者は、三重大学付属病院を受診し、精神面の観点からは正常者である。

GID を有する被験者は、絃仁病院または、亀谷メンタルクリニックを受診し、GID と診断された、FTM 38 名、MTF 29 名、計 67 名である。GID 被験者の MRI は、三重大学付属病院または、岡崎市民病院で撮影された¹。MRI は、DICOM (Digital imaging and communications in medicine) フォーマットのまま転送され、eFilm 1.5.3 (efilm Medical Inc.)

¹GID 患者には、研究に対して十分な通知を行ったのち、MRI を撮影させていただくこと及びプライバシーの保全に十分注意を払い、学術発表させていただくことに書面をもって同意を得ている。

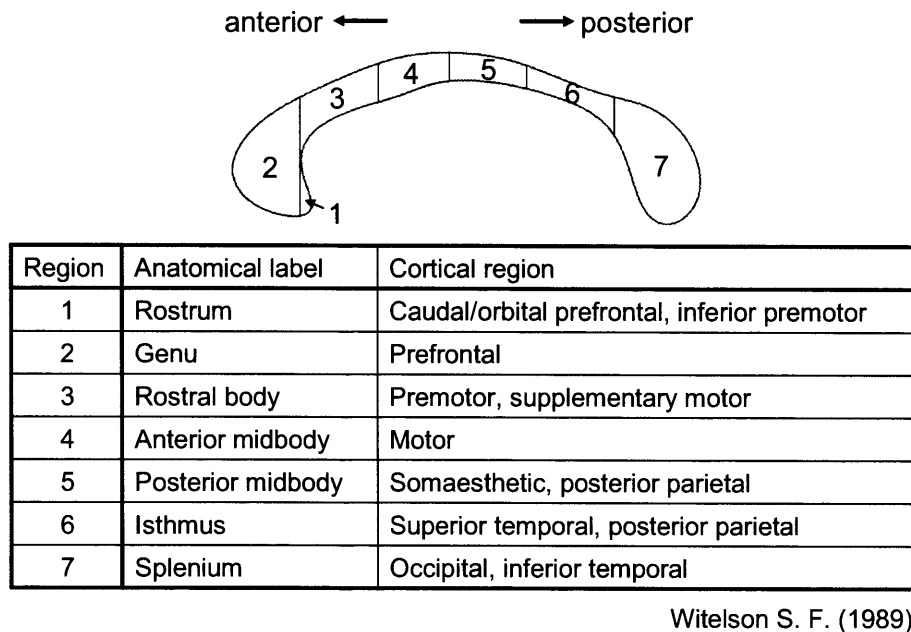


図 5.1: 大脳皮質領域に応じた脳梁神経線維の局所解剖学図
 Fig. 5.1: Topography of callosal fibers in relation to cortical regions.

で正中矢状断の画像を抽出し, Matlab (The MathWorks Inc.) にて解析処理を行った。

ここで, Witelson が示した大脳領域に関連した脳梁神経線維の局所解剖学図を図 5.1 に示した [44]. 脳梁の神経線維が, 大脳皮質のどの領域を連結しているかを示している。

5.2.2 脳梁形状の高次フーリエ記述子による表現

まず, これまでと同様に, 脳梁形状を G 型フーリエ記述子 [1] で記述する. すべての被験者に対する MRI 正中矢状断における脳梁形状 (輪郭線) をフーリエ記述子により表現する. フーリエ記述子は, $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 次の係数から構成されており, いずれも複素数である. 0 次の係数は, 輪郭線の絶対位置, n 次の係数は, 輪郭線を周期 n の楕円で近似した際の係数を表す. ゆえに, フーリエ記述子を適当な次数 (例えば, K 次) で打ち切って元の輪郭線を再構成した場合, K が大きいほど, 元の輪郭線の微細な形状までを再構成することが可能になる. 図 5.2 は, 次数 K を変えて K 次フーリエ記述子で近似した脳梁形状を示す. これより, 少なくともおおよそ $K = 9$ 次のフーリエ記述子が脳梁形状を表現するのに必要であることを示している。

本研究では, 輪郭線の絶対位置を表し, 形状には無関係である 0 次フーリエ記述子は解

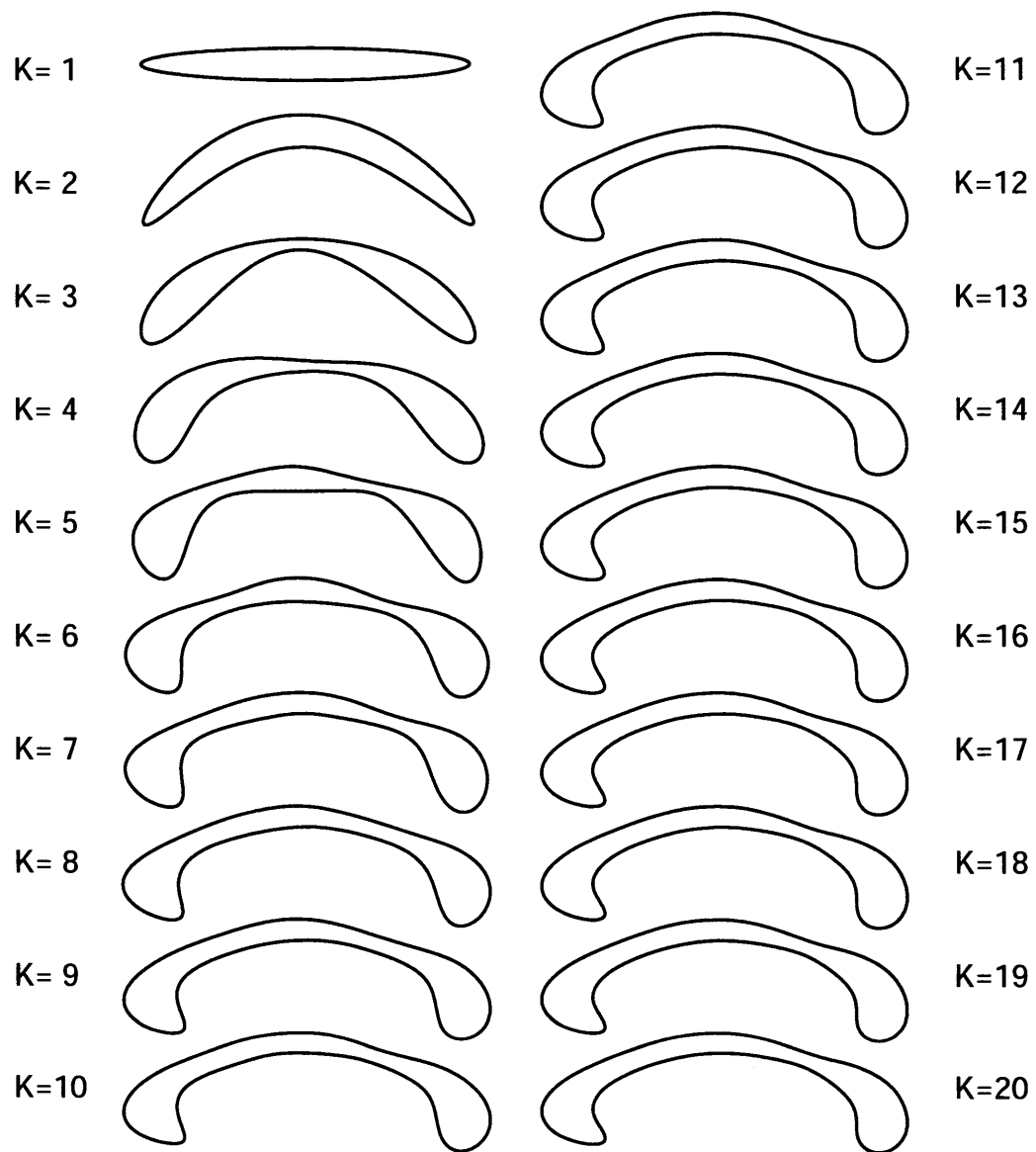


図 5.2: フーリエ記述子の可変次数 K で近似した脳梁形状の例

Fig. 5.2: Examples of callosal shapes approximated with various order K of Fourier descriptor.

析から除外する。また、脳梁のサイズ、傾きを含まない形状そのものの性差に着目するため、すべてのフーリエ記述子をサイズ、傾きで規格化する。フーリエ記述子を構成する各次数の係数は、いずれも複素数であるため、 ± 1 次から $\pm K$ 次までのフーリエ記述子は、 $4K$ 次元の実ベクトルで表現される。すなわち、各被験者の脳梁形状は、 $4K$ 次元実ベクトル空間中の1点として表される、言い換えると、すべての被験者の脳梁形状は、このベクトル空間に分布することになる。

5.2.3 サポートベクターマシンによる判別分析

$4K$ 次元実ベクトル空間中に存在する正常男女それぞれの分布を最も良く分離する($4K-1$)次元超平面を求める。この超平面を求めるためには、様々な手法を利用可能であるが、本研究では、ソフトマージンを持つ線形サポートベクターマシン(SVM)[45, 46]を用いる。SVMにより得られた超平面に直交し、かつ正常なすべての被験者の平均値を通る1次元部分空間を V_c で表す。この部分空間 V_c は、脳梁形状の正常男女の性差を最も強く反映する軸であるといえる。各被験者の脳梁形状をこの1次元部分空間 V_c に正射影した際のこの軸上の座標を特徴量と呼び、 a_c で表すことにする。特徴量 a_c は、正常男女の性差を最も顕著に表すスカラーであるといえる。

5.3 正常男女の性差の解析

5.3.1 特徴量 a_c の特性

正常男女それぞれの分布を最も良く分離する超平面 V_c は、脳梁形状をフーリエ記述子で表現した際に用いた次数 K に依存する。 K の値が大きいほど、脳梁形状のより詳細な形状を表現することになる。そこで、様々な K に対して超平面 V_c を求め、その超平面に直交する成分量である特徴量 a_c を求めた。一例として、 $K=9$ での正常男性、正常女性の特徴量 a_c の値のヒストグラムをそれぞれ、図5.3(a),(b)に示す。これらの平均 \pm 標準偏差は、正常男性については、 0.4689 ± 0.0832 、正常女性については、 0.3918 ± 0.0850 であった。これより、正常男性、正常女性の特徴量 a_c の値は、明らかに異なることが分かる。実際に、スチューデントのt検定を行った結果、正常男女の間には有意差があることが確認された($p < 10^{-17}$)。

次に、正常男女を識別する立場から、この特徴量 a_c の持つ性差を評価する。特徴量 a_c を用いて正常男女を識別した際の識別率を以下のように定義する。ある閾値 θ を定め、あ

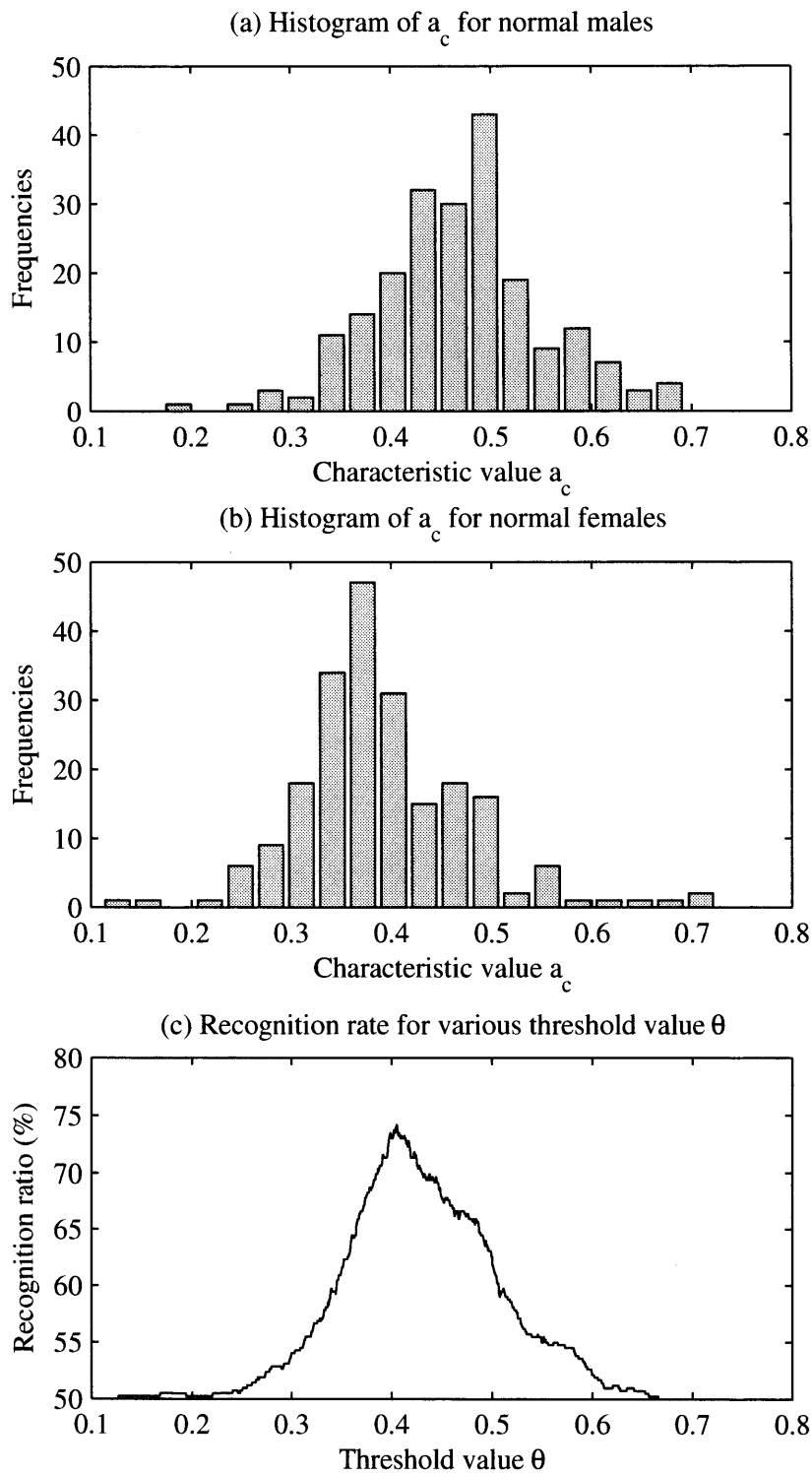


図 5.3: 正常男女の特徴量 a_c のヒストグラムと正常男女を判別するための閾値 θ の関数としての識別率

Fig. 5.3: Histograms of the characteristic values a_c for normal males and females, and the recognition ratio as a function of threshold value θ to discern normal males and females.

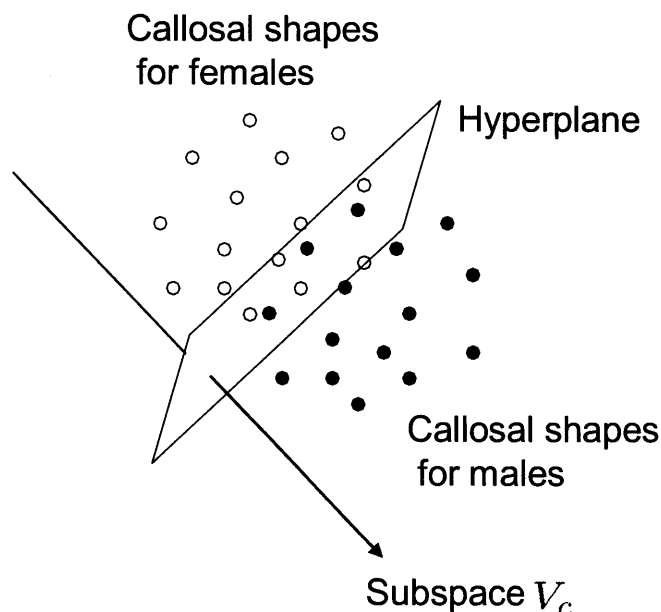


図 5.4: SVM により求められた超平面と部分空間 V_c , 正常男女の分布の模式図
 Fig. 5.4: Illustration for distribution of normal male and female, hyperplane obtained by SVM and subspace V_c .

る被験者の特徴量 a_c の値がこの閾値 θ よりも大きければ、男性と識別し、小さければ女性と識別する。正常男女すべての被験者に対し、正しく性別を識別できた割合を識別率とする。閾値 θ の最適値を求めるために、様々な閾値 θ に対する識別率を調べた。その結果を図 5.3(c) に示す。この図より、 $\theta = 0.4051$ の時、最大の識別率 74.17% が得られることが分かる。

5.3.2 部分空間 V_c の解釈 – 視覚的な表現 –

サポートベクターマシンにより求められた $(4K - 1)$ 次元超平面に直交する線形部分空間 V_c は、正常男女の脳梁形状の違いを最も強く反映する 1 次元ベクトル空間である。このことを説明する模式図を図 5.4 に示す。図中、いくつかの円は、仮想的な正常男女の脳梁形状の分布を模式的に表す。ただし、実際にこれらの分布はオーバーラップしている。また、同図に、これらの分布を最も良く分離する超平面とこれに直交する線形部分空間 V_c を示した。

線形部分空間 V_c は、脳梁形状の中で、正常男女間の違いが最も大きな成分を表す。具体的にその成分を視覚的に示すため、線形部分空間 V_c 上を移動させながら、各点での脳

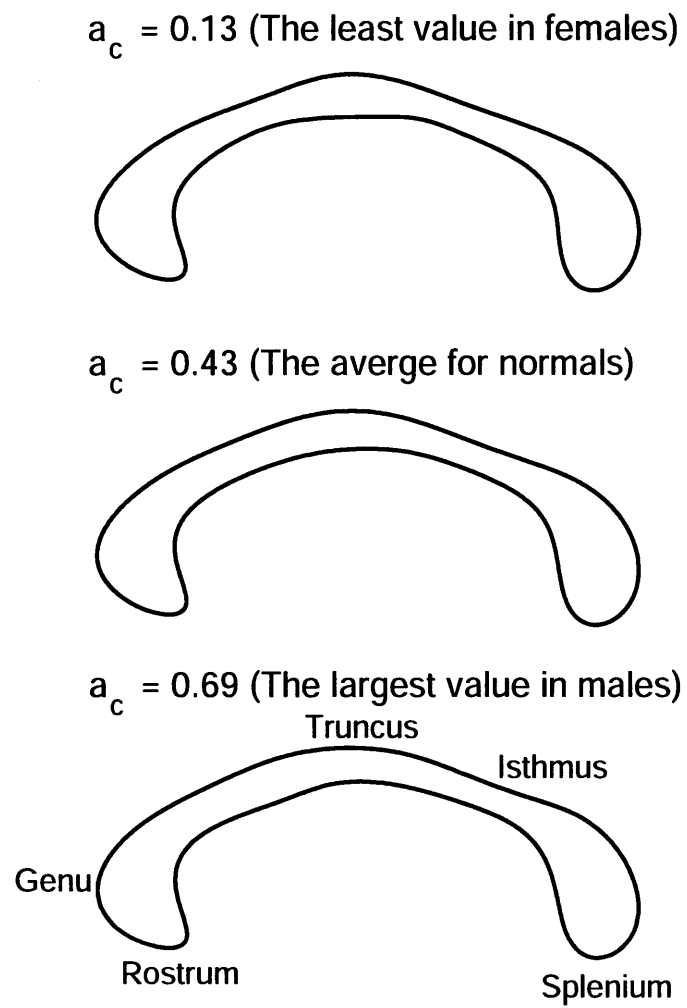


図 5.5: 特徴量 $a_c = 0.13, 0.43, 0.69$ における脳梁形状
 Fig. 5.5: The callosal shapes at various characteristic values $a_c = 0.13, 0.43, 0.69$.

梁形状を描く。正常女性における最も小さい値，すべての正常者に対する平均した値，正常男性における最も大きな値，それぞれの特徴量 $a_c = 0.13, 0.43, 0.69$ における脳梁形状を線形部分空間 V_c に正射影したものを図 5.5 に示す。図 5.5 中の脳梁は，右側が後頭部側であり，また，各部の名称を図中に記した。これより，女性の脳梁膨大 (Splenum) は，男性よりも大きくはないが，丸いことが分かる。また，女性の Isthmus は，男性より太く，女性の脳梁幹 (Truncus) 前部は，男性より細い。逆に，男性の脳梁幹前部は，女性のものよりわずかに腫れてる。この脳梁幹前部は，図 5.1 に示したように，大脳皮質領域の前運動野 (Premotor), 補足運動野 (Supplementary motor), 運動野 (Motor) を連結している。音楽家なかでも特にピアノ奏者などの鍵盤楽器奏者は，両手を使う能力が鍛えられているため，この部分が大きいと言われている [48]。

5.4 GID 患者の特徴量 a_c と正常男女の特徴量 a_c の比較

次に，正常男女の特徴量 a_c の分布と比較し，GID 患者の特徴量 a_c がどの程度の値を持つのかを調べる。GID 患者 MTF と FTM のそれぞれの特徴量 a_c のヒストグラムを図 5.6(c) と図 5.6(d) に示す。比較を容易にするため，図 5.3(a)(b) に示した正常男女のそれぞれの特徴量 a_c のヒストグラムを図 5.6(a)(b) に再掲した。図 5.6 より，MTF 患者の特徴量 a_c のヒストグラムは，明らかに正常男性のヒストグラムとは異なり，むしろ，それは，正常女性のヒストグラムに近くなっている。一方，FTM 患者のヒストグラムは，正常女性のヒストグラムから正常男性のヒストグラムに向けて，特徴量 a_c の値が大きい方に移動しているように見える。言い換えれば，FTM のヒストグラムは，より大きな a_c ，つまり，正常女性より正常男性の分布により近い傾向に現われている。したがって，GID 患者は，彼らの身体の性よりも心理学的な性，つまり gender により近い特徴量 a_c を有していると考えることができる。

5.5 脳梁形状と解析手法の関係

5.5.1 最適な打ち切り次数 K の決定

図 5.3, 図 5.5, 図 5.6 に示したすべての結果は，脳梁形状を $K = 9$ までのフーリエ記述子で表現した際の結果であったが， $K = 9$ 次以外についても，同様の解析を行っている。次数 K とその次数で得られる正常男女の識別率の最大値との関係を，図 5.7 に示す。これより， $K = 9$ くらいまでは直線的に識別率が上昇し， $10 < K < 15$ くらいまでは識別

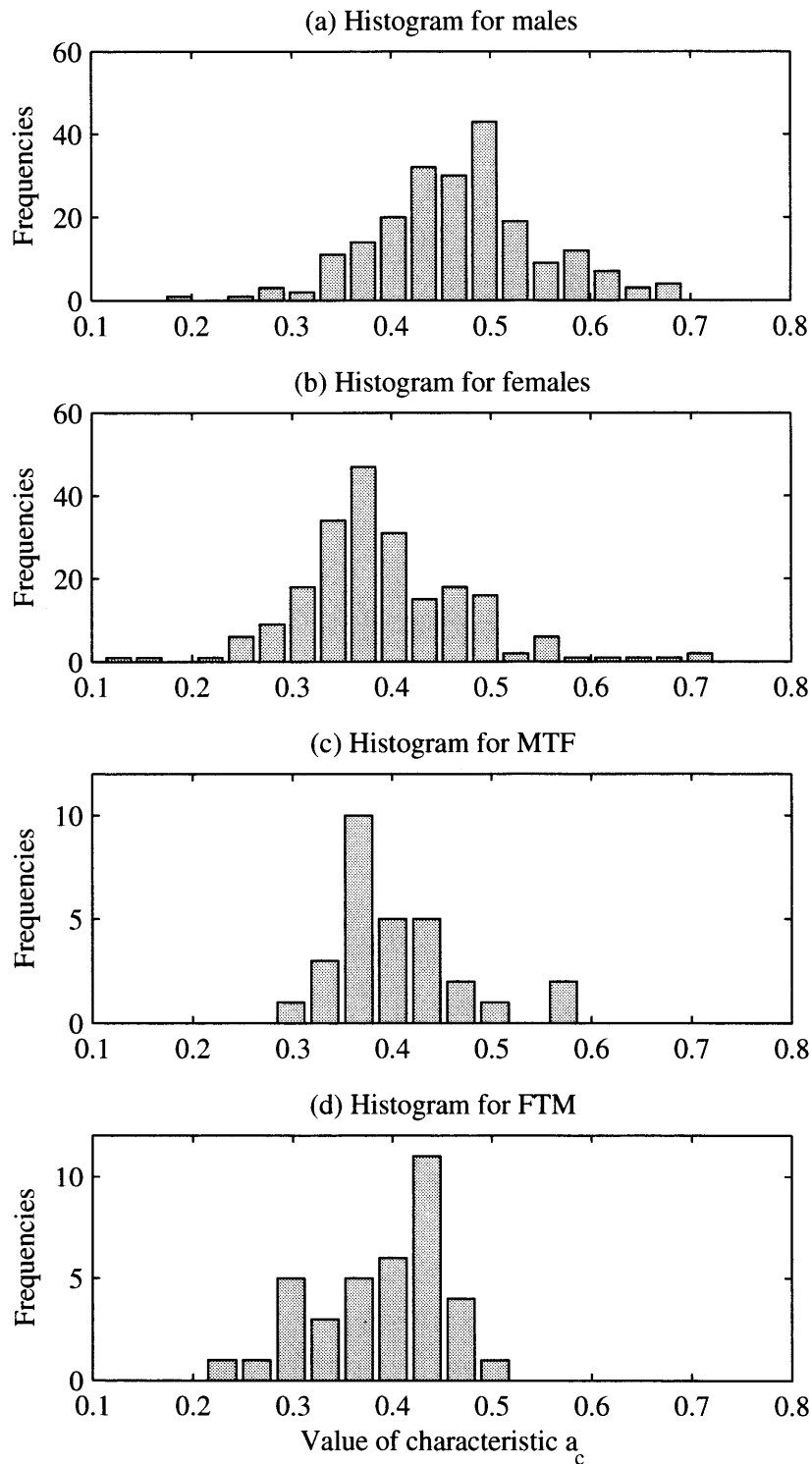


図 5.6: 正常男女, GID の MTF, FTM における特徴量 a_c のヒストグラムの比較

Fig. 5.6: Comparison of the histograms of the characteristic values a_c for normal males and females, and MTF and FTM in GID.

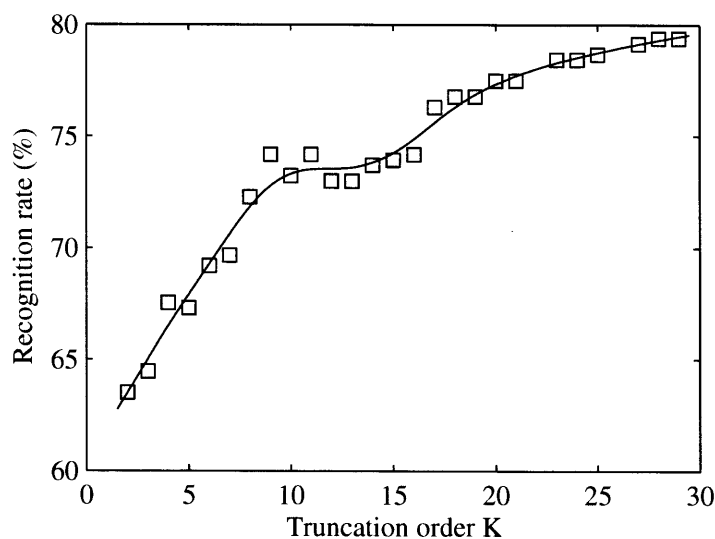


図 5.7: 認識率と打ち切り次数 K の関係

Fig. 5.7: Relationship between the recognition ratio and truncation order K .

率は飽和状態になり、 $K \geq 15$ からは、再び識別率が緩やかに上昇する傾向が読み取れる。また、事前の調査により、脳梁形状は、おおよそ $K = 9$ 次程度までのフーリエ記述子で表現できることが分かっている。これらのことを考え合わせると、 $K = 9$ までの識別の上昇は、脳梁形状をフーリエ記述子により正確に表現できてゆくことによるものであり、 $K = 15$ からの識別率の緩やかな上昇は、SVM を行う際の特徴空間の次元過多による過剰フィッティングによるものと解釈することが出来る。したがって、 $K = 9$ 付近で解析を行うことが望ましいと考えることができる。

5.5.2 脳梁形状の分布と部分空間 V_c 間の主成分分析

$4K$ 次元ベクトル空間における正常者の脳梁形状の分布と本研究で得られた部分空間 V_c 間の関係を精密に調査するため、主成分分析を行った。図 5.8(a) は、次数を減少させたときの次数における正常者の脳梁形状の分散共分散行列の全ての固有値を示す。最も大きい N 個の固有値に対する N 個の固有ベクトルによって張られる N 次元部分空間を V_i とする。部分空間 V_i は、正常者の脳梁形状変動の主成分を表す。それは、最も大きな個人の成分である。図 5.8(b) は、 N における、部分空間 V_i と部分空間 V_c 間の角度の関数を示す。図 5.8(a) と図 5.8(b) は、gender に関係した成分が得られた部分空間 V_c は、最も大きな個人に関係した成分の部分空間 V_i と $90[\text{deg}]$ の角度となることを示している。言い換

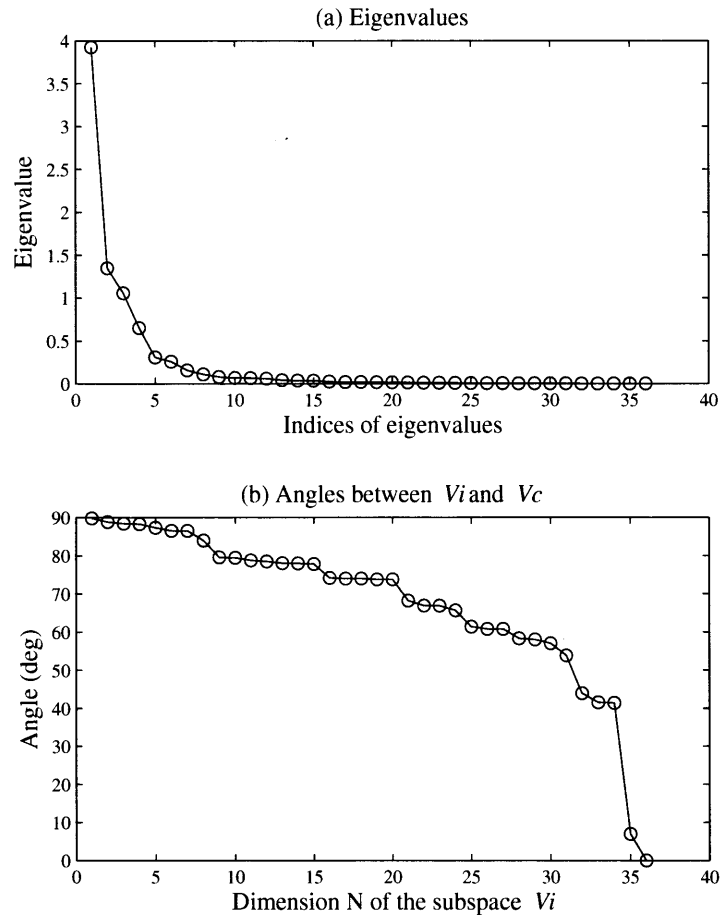


図 5.8: 正常者の対象の脳梁形状の固有値と部分空間 V_c と V_i 間の角度
 Fig. 5.8: Eigenvalues of callosal shapes for normal subjects and the angles
 between the subspace V_c and V_i .

えれば、これらの部分空間は、お互いに直交している。図 5.8(a) と図 5.8(b) は、gender に関係した成分の大きさが、個人に関係した成分よりも非常に小さいことを示している。それゆえ、gender に関係した成分は、非常に発見することがむずかしいと言える。

5.6 討論

5.6.1 脳梁形状の性差の以前の研究調査

2,30 年も前から、脳梁形状に性差があるかないかという調査について多くの研究が行われてきた。最初に脳梁の性差を指摘したのは、De Lacoste-Utamsing と Holloway である

[32]. 彼らは、男性9名、女性5名の脳を解剖し、脳梁の正中矢状断における形状を調べた。これにより、女性の脳梁膨大は、男性よりも、丸くかつ大きい傾向にあることを指摘した。その後、Allenらは、年齢を一致させた正常男女の73組のペアに対し、MRIにより、脳梁の正中矢状断における各部位の面積を調べた[36]。その結果、各部位の面積には、男女の性差はないものの、脳梁膨大については、女性の方が男性よりも丸い形状であることを報告した。Emoryらは、20名ずつの正常男性、正常女性、10名ずつのMTF、FTM患者の正中矢状断における脳梁形状をMRIにより調べた[37]。その結果、正常女性の脳梁膨大は、正常男性よりもわずかに丸いことを認めたが、統計的には、正常男女、MTF、FTMの4グループ間に有意な差はないと主張した。Steinmetzらは、26名ずつの正常男女の正中矢状断における脳梁の様々な部位の面積を、全体の面積で規格化して調べた[42]。そして、Isthmus部分の規格化された面積は、男性より女性の方が大きいことを報告した。ClarkeとZaidelは、60名の正常者の脳梁形状を調べた結果、Isthmusに男女間に性差があることを報告している[43]。

脳梁形状にsexやgenderに関係した差があるかどうか、まだ論争はある。そのような論争は、genderに関連した成分が、図5.8で示した個人に関連した成分よりも非常に小さいという理由により起こっている。しかしながら、本研究では、Allenら[36]、Steinmetzら[42]、ClarkeとZaidel[43]の報告を完全に支持する、図5.5に描いたgenderに関連した成分を的確に見つけることができた。

さらに、本研究は、これまで報告例がなかった脳梁幹(Truncus)前部にも正常男女間の性差があることを新たに示したことになる。

5.6.2 ヒトの脳と性(gender)間の相互関係

ニューロンにおける性差という観点からみて、脳梁の特徴量 a_c の性差が、分界条床核(BSTc)などと同じような神経核の性差に関係していると思われるため、この事実は、中枢神経の性差の原因の分析の一部、GIDの成因の解明、さらに、GIDのための客観的な診断の確立に寄与できるだろう。

Genderに関連する成分は、個人に関連した成分と比較して非常に小さいけれども、genderに関連した成分は、定義された部分空間 V_c の一つを他からはっきりと区別できる。なぜならば、それらは、お互いに直交しているからである。その結果、本研究で見つかった特徴量 a_c は、GIDの診断のための客観的計測の尺度となりえるといえる。

ヒトの神経系統の分化は、受精後6週間で始まる。脳梁は、胎生8-20週の間、脳梁膝

(genu), 脳梁幹 (truncus), 脳梁膨大 (splenium), 脳梁吻 (rostrum) の順で形成されるが, その形成過程において, 性ホルモンを受ける時期と他の皮質, 辺縁系の形成の時間的な関係で, 脳梁形成が進む方法が決まる. 今後, こうした脳梁の発生学の立場から, 脳梁に性差が発生する理由を明らかにしていくことも重要である. さらに, 今後の研究では, 脳梁の特徴量 a_c が, 他の脳領域の成長に影響を及ぼすいくつかのホルモンにどのように関連しているかを調査すべきである. これはまた, ヒトの脳において, 何の部分が制御し, sex と gender によって影響を及ぼすかといった調査は, ヒトの脳と gender との相互関係を解明する上でも重要である.

5.7 まとめ

本研究では, まず, MRI で撮影された脳梁の正中矢状断形状を高次フーリエ記述子で表現した. 正常男性と正常女性のフーリエ記述子で表現された脳梁形状を最も良く分離する超平面をソフトマージンを持つ線形サポートベクターマシンにより求めた. この軸に直交する線形部分空間を V_c とし, 各被験者の脳梁形状をこの部分空間 V_c に正射影した際のこの軸上の座標を正常男女を識別するためのスカラー特徴量 a_c として定義した.

特徴量 a_c を用いて正常男女を識別した際の識別率は 74.17% であり, この特徴量 a_c には統計的にも有意な性差があることを示した. 更に, 線形部分空間 V_c 上の脳梁形状を解析した結果, 正常女性は, 正常男性に比較し, 脳梁膨大 (Splenium) が丸い, Isthmus は太いという従来知見に一致した結果が得られた. 更に, 女性の脳梁幹 (Truncus) 前部は男性より細いという新たな結果が得られた. 脳梁形状のこれらの性差と脳の機能的な性差の関係については, 今後, 調査する必要がある.

また, GID 患者に対し, 上記の解析により定義された特徴量 a_c の値を求めた. その結果, GID 患者の特徴量 a_c の値は, 彼らの身体的な性 (sex) よりも, 転換を望む心理学的な性 (gender) に対する値に近いことが示された. すなわち, 特徴量 a_c は, sex に関連した違いではなく, gender に関連した違いであると結論付け, 脳梁形状の gender 差を特定した.

以上の結果は, この特徴量 a_c が直ちに GID の診断に利用できることを主張するものではないが, 今後, 更に検証を進めてゆくことにより, GID の診断のための客観的尺度の一つになりうる可能性を有しているといえる.

第6章 結論

2次元図形を表現する代表的な手法の一つであるフーリエ記述子について、新たに開曲線に適したI型フーリエ記述子を提案した。地形図における等高線と手書き文字を開曲線とみなし、その曲線の近似精度を評価することによって、従来のフーリエ記述子よりも高い開曲線近似能力を持つことを示した。I型フーリエ記述子は、元の開曲線とそれを180度回転させた開曲線を接続して得られる閉曲線に対するG型フーリエ記述子の部分集合として定義される。数値実験により、任意の次数で打ち切られたフーリエ記述子から元の曲線を再構成した際の復元精度、および任意の次数までのフーリエ記述子を用いた曲線の近似精度を調べた。これらの結果から、提案するI型フーリエ記述子は、開曲線に対し、従来のZ、P、G型フーリエ記述子よりも、優れた開曲線近似能力を持つことが示された。

今後は、新たに提案したI型フーリエ記述子について、性能・性質などを信号処理の立場からその特性を詳細に調査する。

近年、パーソナルコンピュータや携帯情報端末の普及により、地理情報の需要がますます重要視されている。特に、位置情報サービス (Location Based Service, LBS)[80] の利用分野が急速に拡大し、ある範囲内のコンテンツ情報 (point of interest, POI) を得るディレクトリサービス、移動体など第三者の場所を追跡するトラッキングサービス、既に移動体などで利用されているナビゲーションサービスなどでは、地理情報は不可欠なものとなっている。I型フーリエ記述子は、このような地理情報の符号化にも効果が期待できる。また、生体信号情報処理機構の工学的応用に役立つものと考えられるため、I型フーリエ記述子の符号化としての拡張とその符号化性能を評価する。具体的には、フーリエ記述子の次数、長さが符号化性能に与える影響などを定式化し、他の符号化手法との比較や実際の情報圧縮・符号化への応用を検討する。さらに、画像処理における輪郭線の形状解析などに扱われる場合が多いため、ノイズがフーリエ記述子に与える影響を調査する。これは、シャノンの標本化定理 (sampling theorem) を2次元に拡張したものと関連していると考えられる。また、開曲線に優れた性能を示すI型フーリエ記述子と信号スペクトル解析とを統合して、座標位置に依存しない、周波数領域におけるパターンの解析へ応用することを検討する。LBSにおけるトラッキングサービスの移動体の直接的な追跡を手助けする

だけでなく、無意識な移動、また、その根底にある心理状態などの把握を、スペクトルパターンから検出解析することにより、徘徊に対しての安全性の確保や臨床治療の一端に役立つなど、幅広い応用が示唆される。

フーリエ記述子と脳梁形状を関係付けた調査として、2次、3次、...、のフーリエ記述子で表現される脳梁形状の形状解析との理論的な関係を導き、定式化することも、脳梁形成過程で脳梁形状を解析するためにも、また、フーリエ記述子の特性を把握する上でも必要であろう。それはまた、GIDが生じる原因の追究にも有用であるばかりでなく、図形形状解析と信号処理の特性との関係の追及に有益である。

I型フーリエ記述子の形状解析としては、MPEG-4(Moving Picture Experts Group-phase 4)で採用されている任意形状オブジェクト符号化の技術に、さらに、大型対象物の3次元形状計測の手法に応用可能であろう。また、コンピュータグラフィックスにおける曲線表現やコンピュータ内で図形を表現する、形状モデリングの技術などに、幅広く工学的な応用が期待される。

次に、サポートベクターマシンなどの主な判別・識別手法を概説し、性の判別、同定を議論するための準備とした。その上で、それらの代表的な判別・識別手法を使って、実際に脳梁形状を調査し、Gender差を特定した。

まず、MRIで撮影された脳梁の正中矢状断形状をフーリエ記述子及び中心モーメントを用いて記述し、その生物学的性差を調査した。これより、3次以下のフーリエ記述子で近似可能な脳梁形状の中では、主軸方位に最大の性差がある、具体的には、男性より女性の方が脳梁が有意に前傾している傾向にあることを見出した。

さらに、高次のフーリエ記述子までを用いて表現されるMRI正中矢状断形状について、正常男女の性差を調べた。正常男性と正常女性のフーリエ記述子で表現された脳梁形状を最も良く分離する超平面をソフトマージンを持つ線形サポートベクターマシンにより求めた。得られた超平面に直交する線形部分空間を V_c とし、各被験者の脳梁形状をこの部分空間 V_c に正射影した際のこの軸上の座標を正常男女を識別するためのスカラー特徴量 a_c として定義した。線形部分空間 V_c 上の脳梁形状を解析した結果、正常女性は、正常男性に比較し、脳梁膨大は大きくはないが丸い、Isthmusは太いという従来知見に一致した結果が得られた。更に、女性の脳梁幹(Truncus)前部は男性より細いという新たな結果が得られた。脳梁形状のこれらの性差と脳の機能的な性差の関係については、今後、さらに調査する必要がある。

また、GID患者に対し、上記の解析により定義された特徴量 a_c の値を求めた結果、GID患者の特徴量 a_c の値は、彼らの身体的な性(sex)よりも、転換を望む心理学的な性(gender)

に対する値に近いことが示された。以上の結果は、この特徴量 a_c が直ちに GID の診断に利用できることを主張するものではないが、今後、更に検証を進めてゆくことにより、GID の診断のための客観的尺度の一つになりうる可能性を有しているといえる。

このような個々の診断基準を単独に用いて GID の判定を行った際の識別率がたとえ低くても、それらの診断基準から得られた判定結果を統合すれば、最終的な GID の診断の確実性は向上する。今後は、1 つでも多くの定量的な診断基準を見出していくことが現在の重要な課題である。

今後の課題として、その具体的な方法の一つに、機能的 MRI (fMRI) や脳磁図 (MEG) を使って、脳の活性、不活性により GID を間接的に測定することがあげられる。GID の症例である身体の性と性自認の持続的な不一致の状態を直接、fMRI や MEG で観測することは難しいが、性的刺激に対する脳の活性化の研究が行われているように、何らかの刺激に対する脳の走査結果から、つまり、正常者と GID での脳の活性化の違いから GID かどうかの区別が可能になるものと考え。こういった刺激を与えるかという難しい新たな問題もあるが、脳の活性化の違いが発見できれば、一つの尺度になりうると思う。

しかし、これまで調査してきた対象の部位、つまり脳梁は、大脳半球の機能の局在化の性差に関連し、神経細胞の数の違いからによるという間接的な形状解析によるものであり、GID の本質的な違いを直接的に抽出しているわけではない。この解釈は非常に難しいと認識している。性中枢神経系の解剖学的な研究で、神経核の性差や、GID に関係があるとされる分界条床核 (BSTc) に性差が確認されているように、また、染色体 (遺伝子) レベルでの調査がおこなわれているように、正常者とは違う GID の本質的な特性が現われている何かを探し出せれば、こういった客観的な判断基準の必要性は少なくなるであろう。それまでは、できる限り GID の本質に迫る部位を探し出し、非侵襲に診断できる基準を追求していく必要がある。

直接的な治療に関わってはいないが、本研究が、間接的な治療と原因追求に、少なからず貢献できることを期待する。

そして、脳梁そのものに性差があるか否か、また、GID の診断を目的とするか否かに関わらず、非侵襲に計測可能であり、かつ身体的、あるいは、心理学的性差を反映する脳内の特徴量を特定することは、ヒトの認知能力において、性差、個人差が発生するメカニズムを解明することにも寄与されると期待する。

最後に、本研究で得られた成果が、科学の発展に寄与することはもとより、それにより得られた成果が再び工学的あるいは医学的にフィードバックされ、さらなる生活資質の向上、科学文化の発展に少しでも利用されることを深く願っている。

謝辞

本博士論文に関する研究を進めるにあたり、終始懇切なる御指導と御鞭撻を賜った岐阜大学工学部応用情報学科、横田康成助教授に深く感謝の意を表します。

本論文をまとめるにあたり、有益な御討論、御助言を頂いた岐阜大学大学院医学研究科再生医科学専攻再生工学講座 知能イメージ情報分野（工学研究科兼任）藤田廣志教授、岐阜大学工学部応用情報学科 山本和彦教授、岸田邦治教授に対し、厚く御礼申し上げます。

本研究の進行にあたり、絃仁病院精神科性医学部 亀谷謙医師（現、亀谷メンタルクリニック）、三重大学医学部医学科放射線医学、竹田寛教授、松村要助教授（現、医療法人松徳会 東天満クリニック院長）には、貴重な標本を御提供頂くと共に、御討論と御助言を賜りました。特に、亀谷謙先生からは、常に誠意と忍耐をもって、時には厳しく、時には父親のように優しく、惜しみないご指導を賜りました。心から感謝いたします。

GIDの被験者のMRI撮影とデータ処理に関しては、岡崎市民病院神経内科今村一博先生、情報処理センター奥田保男技師に大変お世話になりました。また、一時期の共同研究者として、上智大学の林慎一郎先生（現、和光大学人間関係学部人間発達学科）にもご討論をいただきました。御礼申し上げます。

岐阜大学の工学部の先生方からは、御嶽会、山行、マラソン練習を通して、貴重な研究者としてのご経験談より、人生観から研究の本質に至る、有益なご指導を頂きました。岐阜大学工学部応用情報学科、伊藤昭教授、金子美博助教授、工学部電気電子工学科 吉田弘樹助教授、仁田昌二教授（現、Visiting Professor, Advanced Technology Institute Buildings Scholl of Electronics and Physical Sciences, University of Surrey）に深謝致します。また、工学部人間情報学システム工学科 野方文雄教授からは、「今日一日の過ごし方があなたの一生の過ごし方である。」という格言とともに、研究に取り組む姿勢を身をもって示してくださいました。深く感謝いたします。

性、GIDに関する質問に対し、資料のご提供と、有益なご教示とご討論を頂きました、針間克己先生（東京武蔵野病院精神神経科）、東優子先生（大阪府立大学人間社会学部社会福祉学科助教授）に感謝いたします。また、世界的に御高名なDr. Milton Diamond (University of Hawaii, John A. Burns School of Medicine, Dept. of Anatomy and Reproductive, Pacific Center for Sex and Society) からは、貴重な資料の送付をいただき、稚拙な質問に対して、易しく簡潔にご返事を頂き、多大なご指導を賜りました。厚く御礼申し上げます。

亀谷謙先生を通して、田中富久子先生(横浜市立大学医学部長)、松井三枝先生(富山大学医学部心理学教室助教授、旧富山医科薬科大学)から、研究に対して前向きなご討論を頂きました。また、林基治教授(京都霊長類研究所 分子生理器官調節分野)からは、英科学誌ネイチャー(Nature)、米科学誌サイエンス(Science)への投稿に関して、御助言と御指導を賜りました。厚く御礼申し上げます。

GID研究会の参加や、亀谷先生を通して何人かのGID患者の方との交流の機会を得て、当事者の方々と直接、あるいは間接的に議論し、当事者の方の苦痛、問題に直接接することにより、GIDに関わる理解をより深くし、研究の動機付けをさらに強くしました。深く感謝いたします。

また、本学横田研究室における日頃の様々な議論から有益な御討論を頂き、本研究に対して御助力を頂きました横田研究室の諸氏ならびに卒業生の皆様に感謝いたします。

特に、同期の仲井郁人氏(現、株式会社デンソークリエイト)からは、いつも前向きな叱咤激励を頂いた。後輩とはいえ、広い視野から研究の討論を頂いた山下勇氏(現、キヤノン株式会社)、幅広い人生観などの討論で河口光洋氏(現、デンソークリエイト株式会社)、日比野高氏(現、株式会社イーザ)、譚效勇氏(現、株式会社シークス)、植村浩平氏(修士2年)、計算機処理関連の有益な情報提供などで、坂口賢志氏(現、東芝デジタルメディアエンジニアリング株式会社)、水野芳樹氏(修士2年)から、研究生活の糧を頂いた。以上の方々に感謝いたします。

第4章における初期のMRIデータの取得において、多くのフィルムの読み取り処理に御協力頂いた横田研究室の先輩、同期の皆様には感謝いたします。第2章の手書き文字の近似精度実験においては、文字のペンタブレット入力とそのデータベースの構築に御協力頂いた卒業生西岡透氏(現、株式会社インフォファーム)に感謝いたします。

本学横田研究室には、学部4年の時から9年もの長い間お世話になった。毎年、配属される学部生を、卒業、修了されるのを見送る立場であったが、日頃から変わらずに暖かく接していただき、逆に多くのことを学ばせていただき、研究の幅が広がった。心より感謝いたします。

最後に、始終変わらぬ理解と協力をしてくれた妹、博士課程在学中、病氣療養中にも関わらず暖かく見守ってくれた父(2001年8月死去)、苦境の中でも暖かい理解と惜しみない支援を続けてくれた母には、心から感謝します。

参考文献

- [1] G.H. Granlund: “Fourier preprocessing for hand print character recognition”, IEEE Trans. Computers, **C-21-2**, pp.195–201 (1972)
- [2] C.T. Zahn and R.Z. Roskies: “Fourier descriptors for plane closed curves”, IEEE Trans. Computers, **C-21-3**, pp.269–281 (1972)
- [3] 上坂吉則: “開曲線にも適用できる新しいフーリエ記述子”, 信学論 (A), **J67-A**, No.3, pp.166–173 (1984)
- [4] F.P. Kuhl and C.R. Giardina: “Elliptic Fourier features of a closed contour”, Computer Graphics and Image Processing, **18**, pp.236–258 (1982)
- [5] E. Persoon and K-S. FU: “Shape discrimination using Fourier descriptors”, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, **SMC-7**, No.3, pp.170–179 (1977)
- [6] 伊藤豪俊, 平田達也, 石井直宏: “フーリエ記述子を用いた部品の形状認識と処理”, 信学論 (D), **J71-D**, No.6, pp.1065–1073 (1988)
- [7] L.H. Staib and J.S. Duncan: “Boundary finding with parametrically deformable models”, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, **14**, No.11, pp.1061–1075 (1992)
- [8] V.F. Ferrario, C. Sforza, G. Serrao, T. Frattini and C.D. Favero: “Shape of the human corpus callosum elliptic Fourier analysis on midsagittal magnetic resonance scans”, Investigative Radiology, **29**, No.7, pp.677–681 (1994)
- [9] N. Furuta, S. Ninomiya, N. Takahashi, H. Ohmori and Y. Ukai: “Quantitative evaluation of soybean (*Glycine max* L. Merr.) leaflet shape by principal component scores based on elliptic Fourier descriptor”, Breeding Science, **45**, pp.315–320 (1995)
- [10] H. Iwata, H. Nesumi, S. Ninomiya, Y. Takano and Y. Ukai: “The evaluation of genotype × environment interactions of citrus leaf morphology using image analysis and elliptic Fourier descriptors”, Breeding Science, **52**, pp.243–251 (2002)
- [11] T. Brosnan and D-W. Sun: “Improving quality inspection of food products by computer vision - a review”, J. of Food Eng., **61**, pp.3–16 (2004)
- [12] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 松村要: “正常者と性同一性障害者の脳梁のMRI正中矢状断の性差”, 医用電子と生体工学, **39**, No.1, pp.56–65 (2001)
- [13] K. Fukunaga: “Introduction to Statistical Pattern Recognition Second Edition”, Academic Press, San Diego (1990)
- [14] K. Fukunaga and D.M. Hummels: “Leave-one-out procedures for nonparametric error estimates”, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, **11**, No.4, pp.421–423 (1989)
- [15] A. Frances: “Gender Identity Disorders”, In Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, 4th edition, (DSM-IV). pp.532–538, American Psychiatric Association, Washington DC (1994)
- [16] Y. Kameya and Y. Narita: “A clinical and psychosociological case study on gender identity disorder in Japan”, J. Sex Martical Ther., **26-4**, pp.345–350 (2000)
- [17] 針間克己: “人格障害の心理療法”, 臨床心理学体系, **19-15**, 金子書房, 東京, pp.281–302 (2000)
- [18] N. Sartorius: “Gender Identity Disorders”, In The ICD-10 Classification of Mental and Behavioural Disorders, pp.215–217, World Health Organization, Geneva (1992)
- [19] 山内敏雄他: “「性転換症治療の臨床的研究」に関する審議経過と答申”, 埼玉医科大学雑誌, **23**, pp.313–329 (1996)

- [20] 日本精神神経学会「性同一性障害に関する特別委員会」：“性同一性障害に関する答申と提言”，精神神経学雑誌，**99** 卷，pp.533–540 (1997)
The special Committee on Gender Identity Disorder, the Japanese Society of Psychiatry and Neurology: “Report and Proposal on Gender Identity Disorder”, Magazine for Psychiatrists and Neurologists, **99**, pp.533–540 (1997)
- [21] 日本精神神経学会「性同一性障害に関する第二次特別委員会」：“性同一性障害に関する診断と治療のガイドライン（第2版）”，精神神経学雑誌，**104** 卷，7号，pp.618–632 (2002)
The second of Special Committee on Gender Identity Disorder, the Japanese Society of Psychiatry and Neurology: “The guideline of diagnosis and cure on gender identity disorder”, Magazine for Psychiatrists and Neurologists, **104**, pp. 618–632 (2002)
- [22] 山内俊雄，庄野伸幸，加沢鉄士：“性同一性障害の心理的側面”，臨床精神医学，**30**，No.7，p.751–756 (2001)
- [23] 塚田攻：“IV 性同一性障害の治療，A. 心理社会的接近”，臨床精神医学講座，S4 卷，摂食障害・性障害，牛島定信・山内利雄責任編集，松下正明総編集，山中書店，東京，pp.497–504 (2002)
- [24] J. Money and P. Tucker: “Sexual Signatures: On Being a Man or a Woman”，Little, Brown and Company (1975)
J. Money and P. Tucker: “性の著名: 問い直される男と女の意味”，朝山新一他訳，人文書院，京都 (1979)
- [25] E. Person and L. Ovesey: “The Transsexual Syndrome in Males I. Primary Transsexualism,” American Journal of Psychotherapy, **28**, No.1, pp.4–20 (1974)
- [26] E. Person and L. Ovesey: “The Transsexual Syndrome in Males II. Secondary Transsexualism”, American Journal of Psychotherapy, **28**, No.2, pp.174–193 (1974)
- [27] 亀谷謙，成田善弘：“性同一障害の1症例—診断治療に関する医学的・心理社会的考察”，臨床精神医学，**28-5**，pp.563–573 (1999)
Y. Kameya and Y. Narita: “A clinical and psycho-sociological case study on gender identity disorder”, J. Clin. Psychiatry, **28-5**, pp.563–573 (1999)
- [28] The Harry Benjamin International Gender Dysphoria Association/s: “Standards of Care for Gender Identity Disorders, Sixth Version”, (2001)
“性同一性障害の治療とケアに関する基準 << SOC >>”，東優子，針間克己訳，臨床精神医学，**7**，pp.887–902 (2001)
- [29] M.A. Hofman and D.F. Swaab: “The sexually dimorphic nucleus of the preoptic area in the human brain: a comparative morphometric study”, J. Anatomy, **164**, pp.55–72 (1989)
- [30] D.F. Swaab, L.J.G. Gooren and M.A. Hofman: “Brain research, gender and sexual orientation”, J. Homosexuality, **28**, pp.283–301 (1995)
- [31] J-N. Zhou, M.A. Hofman, L.J.G. Gooren and D.F. Swaab: “A sex difference in the human brain and its relation to transsexuality”, Nature, **378**, pp.68–70 (1995)
- [32] C. de Lacoste-Utamsing and R.L. Holloway: “Sexual dimorphism in the human corpus callosum”, Science, **216-25**, pp.1431–1432 (1982)
- [33] T. Allison, C.C. Wood and W.R. Goff: “Brain stem auditory, pattern-reversal visual, and short-latency somatosensory evoked potentials: latencies in relation to age, sex, and brain and body size”, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., **55**, pp.619–636 (1983)
- [34] T. Ikuta and N. Furuta: “Sex differences in the human group mean SEP”, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., **54**, pp.449–457 (1982)
- [35] H.A. Nasrallah, N.C. Andreasen, J.A. Coffman, S.C. Olson, V.D. Dunn, J.C. Ehrhardt, and S.M. Chapman: “A controlled magnetic resonance imaging study of corpus callosum thickness in schizophrenia”, Biol. Psychiatry, **21**, pp.274–282 (1986)
- [36] L.S. Allen, M.F. Richey, Y.M. Chai and R.A. Gorski: “Sex differences in the corpus callosum of the living human being”, J. Neuroscience, **11-4**, pp.933–942 (1991)

- [37] L.E. Emory, D.H. Williams, C.M. Cole, E.G. Amparo and W.J. Meyer: "Anatomic variation of the corpus callosum in persons with gender dysphoria", *Archives of Sexual Behavior*, **20**-4, pp.407-417 (1991)
- [38] K.M. Bishop and D. Wahlsten: "Sex Differences in the Human Corpus Callosum: Myth or Reality?", *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, **21**-5, pp.581-601 (1997)
- [39] P.C. Mahalanobis: "On tests and measures of group divergence", *J. Asiatic Soc. Bengal*, **26**, pp.541-588 (1930)
- [40] S.S. Wilks: "Certain generalizations in the analysis of variance", *Biometrika*, **24**, pp.471-494 (1932)
- [41] L. Jäncke, J.F. Staiger, G. Schlaug, Y. Huang and H. Steinmetz: "The relationship between corpus callosum size and forebrain volume", *Cerebral Cortex*, **7**-1, pp.48-56 (1997)
- [42] H. Steinmetz, L. Jäncke, A. Kleinschmidt, G. Schlaug, J. Volkmann and Y. Huang: "Sex but no hand difference in the isthmus of the corpus callosum", *Neurology*, **42**, pp.749-752 (1992)
- [43] J.M. Clarke and E. Zaidel: "Anatomical-behavioral relationships: corpus callosum morphometry and hemispheric specialization", *Behavioural Brain Research*, **64**, pp.185-202 (1994)
- [44] S.F. Witelson: "Hand and Sex Differences in the Isthmus and Genu of the Human Corpus Callosum", *Brain*, **112**, pp.799-835 (1989)
- [45] B. Scholkopf and A.J. Smola: "Learning with Kernels", The MIT Press, Cambridge (2002)
- [46] N. Cristianini and J.S. Taylor: "An Introduction to Support Vector Machines: And Other Kernel-Based Learning Methods", Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000)
- [47] D. Kimura: "Sex Differences in the Brain", *Scientific American*, **267**, pp.80-87 (1992)
- [48] N.M. Weinberger: "Music and the Brain", *Scientific American*, pp.66-73, November (2004)
- [49] "性同一性障害者の性別の取り扱いの特例に関する法律", 平成 15 年 7 月 16 日法律第 111 号 (2003 年 7 月 16 日公布) (2003)
- [50] L.S. Allen, M. Hines, J.E. Shryne and R.A. Gorski: "Two sexually dimorphic cell groups in the human brain", *J. Neuroscience*, **9**, pp.497-506 (1989)
- [51] Y. Arai: "Brain Science and Neuron Biology", shokabo, Tokyo (2000)
新井康允: "脳とニューロンの科学", 裳華房, 東京 (2000)
- [52] 新井康允: "ii. 中枢の性分化—女の脳・男の脳", 新女性医学大系 17, 性の分化とその異常, 生殖器系の発生・解剖・機能, II 性決定・分化と分子機構, E. 性決定・分化に関する遺伝子とその異常, 藤本征一郎担当編集, 武谷雄二総編集, 中山書店, 東京, pp.72-93 (2002)
- [53] W.C.J. Chung, G.J.D. Vries and D.F. Swaab: "Sexual differentiation of the bed nucleus of the stria terminalis in humans may extend into adulthood", *J. Neuroscience*, **22**, pp.1027-1033 (2002)
- [54] M. Diamond: "A critical evaluation of the ontogeny of human sexual behavior", *Quarterly Review of Biology*, **40**, pp.147-175 (1965)
- [55] M. Diamond and A. Karlen: "SEXUAL DECISIONS", MA:Little Brown and Company, Boston (1980)
M. Diamond and A. Karlen: "人間の性とは何か", 田草川まゆみ訳, 福島章, 宮原忍監修, 小学館, 東京 (1984)
- [56] M. Landén: "Prevalence, incidence and sex ratio of transsexualism", *Acta Psychiatrica Scandinavica*, **93**, pp.221-223 (1990)
- [57] F.P.M. Kruijver, J.N. Zhou, C.W. Pool, M.A. Hofman, L.J.G. Gooren and D.F. Swaab: "Male-to-Female Transsexuals Have Female Neuron Numbers in a Limbic Nucleus", *J. Clinical Endocrinology & Metabolism*, **85**, pp.2034-2041 (2000)
- [58] S. LeVay: "A difference in hypothalamic structure between heterosexual and homosexual men", *Science*, **253**, pp.1034-1037 (1991)

- [59] S. LeVay: "The sexual brain", MIT Press (1993)
"脳が決める男と女—性の起源とジェンダー・アイデンティティ", 新井康允訳, 文光堂, 東京 (2000)
- [60] S.F. Witelson, I.I. Glezer and D.L. Kgar: "Women have greater density of neurons in posterior temporal cortex", *J. Neuroscience*, **15**, pp.3418–3428 (1995)
- [61] M. Landén: "Transsexualism: Epidemiology, Phenomenology, Regret after Surgery, An etiology, and Public Attitudes", Doctoral thesis from the Institute of Clinical Neuroscience, Section of Psychiatry, Göteborg University (1999)
- [62] S. Henningsson, L. Westberg, S. Nilsson, B. Lundström, L. Ekselius, O. Bodlund, E. Lindström, M. Hellstrand, R. Rosmond, E. Eriksson and M. Landén: "Sex steroid-related genes and male-to-female transsexualism", *Psychoneuroendocrinology*, **30**, pp.657–664 (2005)
- [63] V. Vapnik: "The Nature of Statistical Learning Theory (Second Edition)", Springer (1999)
- [64] 竹内啓編集: "統計学辞典", I 理論, 12. 多変量解析, 東洋経済新報社, pp.163–180 (1989)
- [65] 柳井晴夫, 高木廣文編著: "多変量解析ハンドブック", 第3章主成分分析, 第5章判別分析, 現代数学社 (1986)
- [66] 塩谷實: "統計ライブラリー多変量解析概論", 6. 判別分析, 朝倉書店, pp.131–171 (1990)
- [67] R. Gnanadesikan: "Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations", John Wiley & Sons, New York (1977)
"統計的多変量データ解析", 丘本正, 磯貝恭一訳, 日科技連 (1979)
- [68] H. Yanai: "Explicit expressions of projectors on canonical variables and distances between centroids of groups", *Journal of the Japan Statistical Society*, **11**, pp.43–53 (1981)
- [69] 田中豊, 脇本和昌: "多変量統計解析法", 現代数学社 (1998)
- [70] 脇本和昌: "多変量統計解析法 見方・考え方 判別分析(その1)", *数学セミナー*, **49**, pp.85–94, 日本評論社, May (1990)
- [71] 脇本和昌: "多変量統計解析法 見方・考え方 判別分析(その2)", *数学セミナー*, **49**, pp.89–96, 日本評論社, June (1990)
- [72] 竹村彰通, 谷口正信: "統計科学のフロンティア 1 統計学の基礎 I", 岩波書店, Jan. (2003)
- [73] 麻生英樹, 津田宏治, 村田昇: "統計科学のフロンティア 6 パターン認識と学習の統計学", 岩波書店, April (2003)
- [74] R.A. Johnson and D.W. Wichern: "多変量解析の徹底研究", 4. 多変量正規分布, 4.6 正規性の前提の評価, 西田俊夫訳, pp.170–182, 現代数学社 (1992)
- [75] 石井健一郎, 上田修功, 前田英作, 村瀬洋: "わかりやすいパターン認識", オーム社, 東京 (1998)
- [76] 中川聖一: "パターン情報処理", 丸善 (1999)
- [77] R.O. Duda, P.E. Hart and D.G. Stork: "Pattern Classification second edition", John Wiley & Sons (2000)
"パターン識別", 尾上守夫監訳, 新技術コミュニケーションズ, 東京 (2001)
- [78] L. Cahill: "His Brain, Her Brain", *Scientific American*, pp.22–29, May (2005)
"やっぱり違う男と女の脳", *日経サイエンス*, 第35巻, 第8号, August (2005)
- [79] "Newton 別冊 遺伝子と脳からみる男と女のサイエンス", NewtonPress, October (2001)
- [80] 東明佐久良: "位置情報サービス (LBS: Location Based Service) 標準の展開", *信学誌*, **87**, No.2, pp.101–107, Feb. (2004)
S. Shinoaki: "Development of international standards for LBS", *IEICE Trans.*, **87**, No.2, pp.101–107 (2004)

付録A

フーリエ記述子諸論

A.1 Z型フーリエ記述子とP型フーリエ記述子

A.1.1 Z型フーリエ記述子

G型フーリエ記述子は、閉曲線 $z(t)$ そのものの離散フーリエ変換であるが、閉曲線 $z(t)$ の微分（差分）の偏角（全曲率関数と呼ぶ）の離散フーリエ変換として定義されるZ形フーリエ記述子が提案されている [2].

閉曲線 $z(t)$ は、 $|z(t+1) - z(t)|$, $t = 0, \dots, L-1$ が一定値 δ となるように、サンプリングされているとする。このとき、閉曲線 $z(t)$ の微分（差分）の偏角（全曲率関数） $\theta(t)$ を次式で定義する。

$$\theta(t) = \arg(z(t+1) - z(t)) \quad (\text{A.1})$$

ただし、 $\arg(\cdot)$ は、複素数 \cdot の偏角を表す。全曲率関数 $\theta(t)$ は、その連続性を保証するため、主値 $(-\pi, \pi]$ で定義されるのではなく、信号処理で使われる位相戻し操作が行われているものとする。そのため、 $\theta(0)$ と $\theta(L)$ は、 2π の整数 m 倍だけ値が離れている。ただし、 m は閉曲線 $z(t)$ の回転数である。そこで、始点と終点での連続性を保証するため、次式で示す操作が行われる。

$$\phi(t) = \theta(t) - 2\pi mt/L \quad (\text{A.2})$$

こうして得られた $\phi(t)$ の離散フーリエ変換に $1/L$ 倍した

$$c(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \phi(t) \exp(-2\pi itk/L), \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{A.3})$$

が曲線 $z(t)$ のZ型フーリエ記述子となる。

A.1.2 P型フーリエ記述子

P型フーリエ記述子は、Z型フーリエ記述子を開曲線に対しても適用できるように拡張したものである [3]. Z型フーリエ記述子の場合と同様に、曲線 $z(t)$ は、 $|z(t+1) - z(t)|$, $t = 0, \dots, L-1$ が一定値 δ となるように、サンプリングされているとする. Z型フーリエ記述子における微分 (差分) の偏角 (全曲率関数) $\theta(t) = \arg(z(t+1) - z(t))$ の代わりに、規格化微分 (差分)

$$w(t) = \frac{z(t+1) - z(t)}{\delta} \quad (\text{A.4})$$

を用いる. P型フーリエ記述子は、式 (A.4) の離散フーリエ変換に $1/L$ 倍した

$$c(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} w(t) \exp(-2\pi itk/L), \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{A.5})$$

として定義される.

開曲線の場合、一般に始点 $z(0)(= z(L))$ と終点 $z(L-1)$ の間の距離が離れているが、P型フーリエ記述子では、規格化操作により $|w(t)| \leq 1$, $\forall t$ の範囲に抑えられるため、 $w(t)$ を離散フーリエ変換した場合の収束の遅さは改善される. しかし、Z型、P型ともに、曲線の微分 (差分) を用いるため、元の曲線よりも滑らかさは低下する. このことは、フーリエ記述子の高次の成分が大きくなることを意味し、結果として情報集約性が低下することになる.

A.2 1次フーリエ記述子のパラメータ算出

脳梁形状をフーリエ記述子で表現した際の1次フーリエ記述子 c_1, c_{-1} は、脳梁輪郭線を周期1の楕円で近似した際の楕円のパラメータを表している。長軸半径 a , 短軸半径 b , 長軸の方位, すなわち主軸方位 φ で記述され, 式 (4.3) に示される関係があり, 長軸半径 a , 短軸半径 b は, 以下のように導出される。

まず, 1次フーリエ記述子は,

$$z(t) = c_1 e^{2\pi i \frac{t}{L}} + c_{-1} e^{2\pi i \frac{-t}{L}} \quad \text{where } t = 0, \dots, L \quad (\text{A.6})$$

と表される。ここで, t に対して, $\frac{2\pi}{L}$ を乗じると,

$$z(t) = c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it} \quad \text{where } t = 0, \dots, 2\pi \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで, $r_1 = |c_1|, r_{-1} = |c_{-1}|, \theta_1 = \angle c_1, \theta_{-1} = \angle c_{-1}$ を考慮すると,

$$z(t) = r_1 e^{i\theta_1} e^{it} + r_{-1} e^{i\theta_{-1}} e^{-it} \quad (\text{A.8})$$

となる。ここで, さらに, $\varphi = \frac{\theta_1 + \theta_{-1}}{2}, \theta = \frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2}$ で置き換えると, $\varphi + \theta = \theta_1, \varphi - \theta = \theta_{-1}$ となり, 次のように展開される。

$$\begin{aligned} z(t) &= r_1 e^{i(\varphi+\theta)} e^{it} + r_{-1} e^{i(\varphi-\theta)} e^{-it} \\ &= r_1 e^{i(\varphi+\theta+t)} e^{it} + r_{-1} e^{i(\varphi-\theta-t)} e^{-it} \\ &= (r_1 e^{i(\theta+t)} + r_{-1} e^{-i(\theta+t)}) e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

さらに, $t' = t + \theta$ と変数変換すると,

$$z(t) = (r_1 e^{it'} + r_{-1} e^{-it'}) e^{i\varphi} \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで, オイラー (Eular) の関係式, つまり, $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ を適用すると,

$$\begin{aligned} z(t) &= \{(r_1 (\cos t' + i \sin t') + r_{-1} (\cos t' - i \sin t'))\} e^{i\varphi} \\ &= \{(r_1 + r_{-1}) \cos t' + i(r_1 - r_{-1}) \sin t'\} e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる. ここで, $r_1 + r_{-1} = A (> 0)$, $r_1 - r_{-1} = B$ と置き換えると, 最終的に,

$$z(t) = (A \cos t' + i B \sin t') e^{i\varphi} \quad (\text{A.12})$$

が得られる. 式 (A.12) において, t' が, $0, \pi/2, \pi, 2\pi$ と変化すると $z(t)$ は, 表 A.1 のように変化し, 図 A.1(a) のように, 複素平面上において, 楕円の軌跡を描くことに相当する.

表 A.1: $z(t)$ の変化
Table A.1: chang of $z(t)$.

t'	$\sin t'$	$\cos t'$	$z(t)$
0	0	1	$Ae^{i\varphi}$
$\pi/2$	1	0	$Be^{i\varphi}$
π	0	-1	$-Ae^{i\varphi}$
2π	-1	0	$-Be^{i\varphi}$

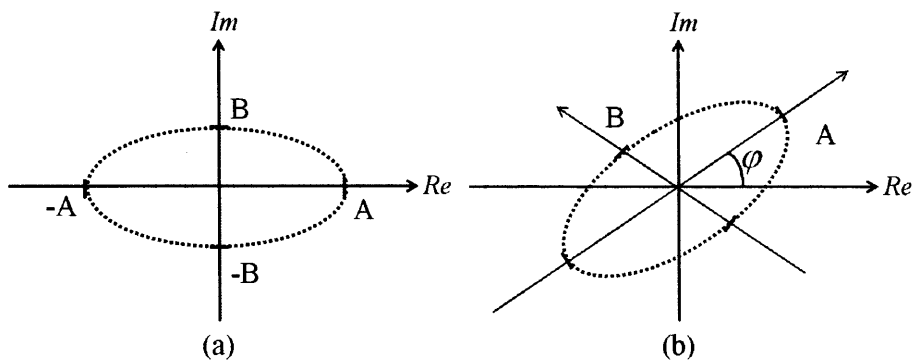


図 A.1: 1次フーリエ記述子の楕円のパラメータ
Fig. A.1: The elliptical parameters of 1st Fourier descriptor.

さらに, $z(t)$ において, $\varphi = 0$ の時, $e^{i\varphi} = 1$ となり, つまり, $e^{i\varphi}$ は, 水平線からの傾きを表していることに相当する (図 A.1(b)). そして, $B < 0$ の時, 時計周りに, $B > 0$ の時, 反時計周りに楕円を描くことになる.

A.3 主軸方位と正準変量の関係による検証

脳梁主軸方位の妥当性を、別の尺度から検証する。脳梁主軸方位は、付録A.2に示したように、1次フーリエ記述子 c_1, c_{-1} を用いて、式(4.3)の φ として算出される。1次フーリエ記述子 c_1, c_{-1} をテイラー展開を使って変換した1次係数と、1次フーリエ記述子を用いて正準判別分析を行った際の正準変量とを比較し、主軸方位の妥当性を検証する。

1次フーリエ記述子 c_1, c_{-1} は、具体的には、 $\Re[c_1], \Im[c_1], \Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}]$ に分解される。男女422名の脳梁形状の1次フーリエ記述子を、3.4.4に示した正準判別分析を行なったときの正準係数 \mathbf{a} 、及び、 $\mathbf{a}'\mathbf{W}\mathbf{a} = 1$ で規格化したときの正準係数 \mathbf{a}_n は、

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \{0.4825 \quad -0.1335 \quad -0.2931 \quad -0.2161\} \\ \mathbf{a}_n &= \{0.5546 \quad -0.1534 \quad -0.3368 \quad -0.2484\}\end{aligned}$$

となる。この場合、当然ではあるが、多変量の正準判別、2群を対象に限定した正準判別ともに、結果は同じである。さらに、 $|\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{I}| = 0$ を満たす固有値は、 $\min(p, k-1)$ 個存在する。ただし、 p は、変量、 k は、群の数である。したがって、2群の判別の場合は、1つの固有値しか存在しないことになり、正準係数も第1正準係数のみである。

一方、解析的な関数 $f(x)$ に対する基点 $x = a$ に関する Taylor 級数は、

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ f(x) &= f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

と表され、脳梁主軸方位 φ の平均値 $\boldsymbol{\mu}$ 回りでのテイラー近似式は、

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(\boldsymbol{\mu}) + \left(\frac{d\varphi}{dx_1} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}, \frac{d\varphi}{dx_2} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}, \frac{d\varphi}{dx_3} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}, \frac{d\varphi}{dx_4} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right) \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ x_3 - \mu_3 \\ x_4 - \mu_4 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{A.14})$$

となる。ここで、1次係数 $\tilde{\varphi}$ 、及び、正規化した $\tilde{\varphi}_n$ は、それぞれ、

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \{-0.006798 \quad -0.026949 \quad 0.000624 \quad 0.034882\} \\ \tilde{\varphi}_n &= \{-0.1524 \quad -0.6042 \quad -0.0140 \quad 0.7820\}\end{aligned}$$

と求まるので、式(A.14)に、具体的な数値、すなわち、 $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 4$ に、全サンプルの1次フーリエ記述子 $\Re[c_1], \Im[c_1], \Re[c_{-1}], \Im[c_{-1}]$ を、 $\boldsymbol{\mu}_i, i = 1, \dots, 4$ に、全サンプル

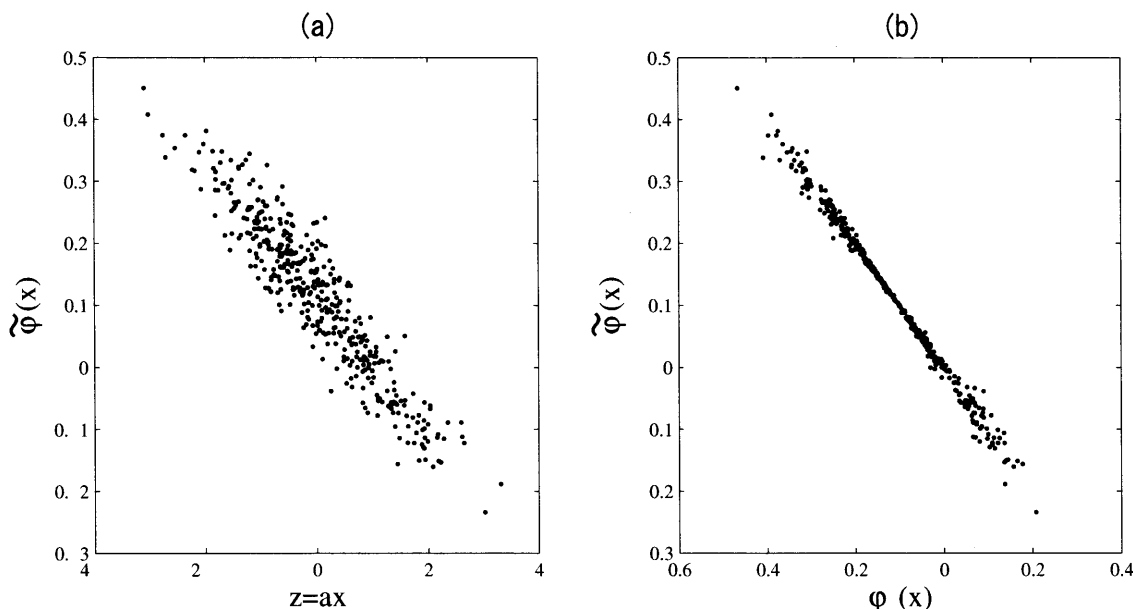


図 A.2: (a) $\tilde{\varphi}$ と正準変量 z との相関, (b) $\tilde{\varphi}$ と主軸方位 φ との相関
 Fig. A.2: (a) The correlation between $\tilde{\varphi}$ and z , (b) The correlation between $\tilde{\varphi}$ and φ .

の1次フーリエ記述子の平均 $\{17.4479, 4.4011, 14.3294, -0.2564\}$ を代入し, $x = 0$ の回りでテイラー展開近似をすると, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)_n$ が算出される.

求めた $\tilde{\varphi}(x)$ と正準係数から得られた正準変量 $z = ax$ との関係を図 A.2(a) に示す. 比較のため, $\tilde{\varphi}(x)$ と主軸方位 φ を, 図 A.2(b) に示す. 図 A.2(a) より, $\tilde{\varphi}(x)$ は, 明らかに, 正準変量 z と強い相関がある.

そこで, さらに, 詳細に調べるため, $\tilde{\varphi}$ と正準係数 a とのなす角 θ を変化させた際の男女の判別率との関係を調べる. なす角 θ は,

$$\theta = \frac{\langle a', \tilde{\varphi} \rangle}{|a'| \cdot |\tilde{\varphi}|}$$

where $a' = \tilde{\varphi} + \alpha(a - \tilde{\varphi}), \quad \alpha = -1.5, \dots, 3.0$ (A.15)

として求める. その結果を, 図 A.3 に示す. これらの結果より, $\tilde{\varphi}$ は, $\theta = 0$ の時, 判別率は, 69.43%, a は, $\theta = 58.1$ の時, 判別率は, 69.19% となり, $\tilde{\varphi}$ と a のなす角は, 58.1[degree] となり, ほぼ等しいと結論付けることができる.

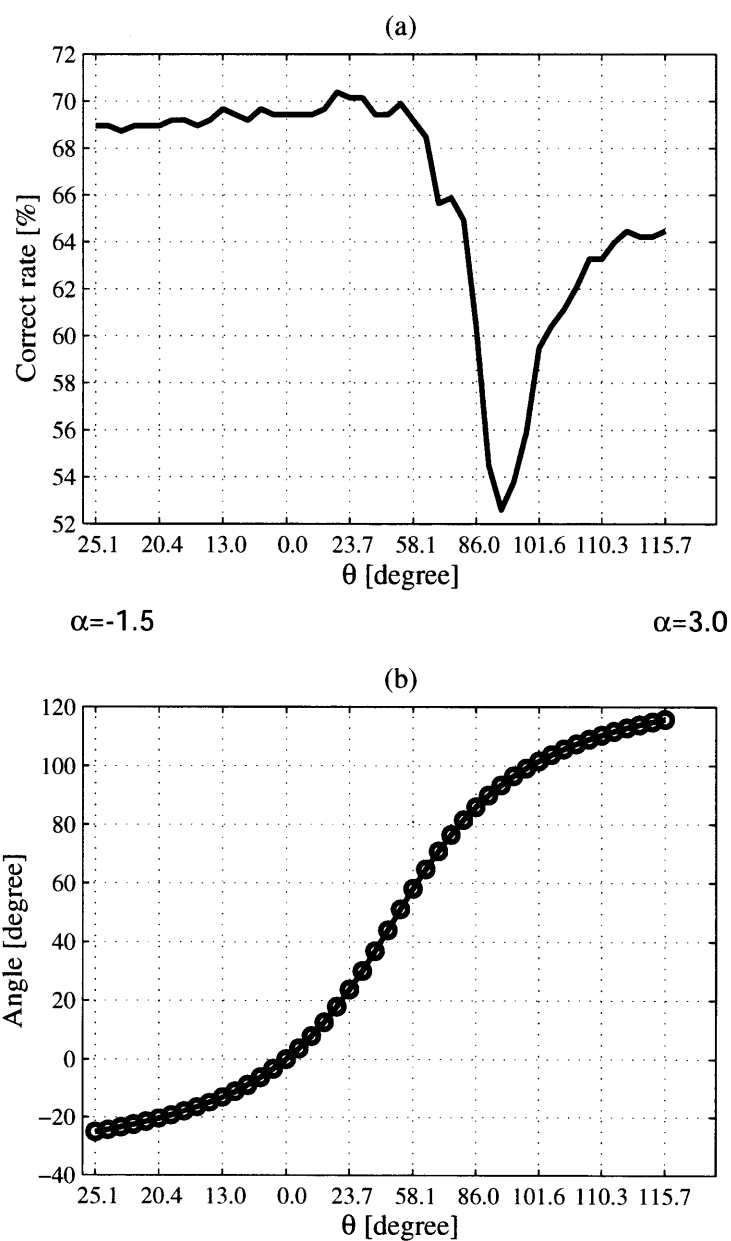


図 A.3: $\tilde{\varphi}$ と正準係数 α とのなす角の変化量に対する, (a) 性の判別率との関係, (b) $\tilde{\varphi}$ と正準係数 α との関係

Fig. A.3: (a) Correct rate of the angle between $\tilde{\varphi}$ and rate of canonical DA, (b) The relation between $\tilde{\varphi}$ and α using changing angle.

研究業績目録

学術論文

- [1] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “脳梁の正中矢状断の主軸方位の性差”, 電気学会論文誌, Vol.120-C, No.12, pp.2111–2112 (2000-12)
- [2] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 村松要: “正常者と性同一性障害者の脳梁のMRI正中矢状断の性差”, 医用電子と生体工学 (JJME), Vol.39, No.1, pp.56–65 (2001-03)
- [3] 河村洋子, 横田康成, 河村洋子: “開曲線に適した新たなフーリエ記述子「I型フーリエ記述子」”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J88-D-II, No.10, pp.2021–2028 (2005-10)

国際会議

- [1] Yoko Kawamura, Yasunari Yokota, Yuzuru Kameya, Kaname Matsumura: “Sex differences in corpus callosum at the midsagittal plane in subjects with GID”, Abstract Book of 15th World Congress of Sexology(Paris), p.119 (2001-06)
- [2] Shin'Ichiroh Hayashi, Yuzuru Kameya, Yasunari Yokota, Yoko Kawamura: “An attempt develop quantitative diagnostic criteria for GID”, Abstract of XII World Congress of Psychiatry(Yokohama), vol.2, p.54 (2002-08)
- [3] Yasunari Yokota, Yoko Kawamura, Yuzuru Kameya: “Callosal Shapes at the Midsagittal plane: MRI Differences of Normal Males, Normal Females, and GID”, Proceedings of 27th Annual International Conference of the IEEE, Engineering In Medicine and Biology Society(Shanghai), (ICEMBS2005), CD-ROM, 758, pp.1–4 (2005-09)
- [4] Yasunari Yokota, Yoko Kawamura, Yuzuru Kameya: “Difference of the corpus callosum on midsagittal plane between normal male, female, and transsexuals”, Proceedings of 3rd European Medical & Biological Engineering Conference, IFMBE European Conference on Biomedical Engineering(Prague), CD-ROM, 1520, pp.1–4 (2005-11)

シンポジウム講演

- [1] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “脳梁形状の性差の検定, および性別推定”, 計測自動制御学会, 第14回生体・生理工学シンポジウム論文集, pp.61-64 (1999-10)
- [2] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 村松要: “性同一性障害者におけるホルモン療法がMRI正中矢状断の脳梁主軸方位に与える影響”, 計測自動制御学会, 第17回生体・生理工学シンポジウム論文集, pp.323-324 (2002-09)
- [3] 河村洋子, 横田康成: “性同一性障害者の診断支援のためのMRI脳梁形状解析に適用した新しいフーリエ記述子”, 計測自動制御学会, 第19回生体・生理工学シンポジウム論文集, pp.123-124 (2004-11)
- [4] 河村洋子, 横田康成: “正常男性, 正常女性, 性同一性障害者の脳梁正中矢状断形状の比較”, 計測自動制御学会, 第20回生体・生理工学シンポジウム論文集, pp.79-82 (2005-09)

学会研究会

- [1] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “性別による脳梁形状の統計的有意差の検証”, 電子情報通信学会技術研究報告, **MBE99-13**, pp.85-92 (1999-05)
- [2] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “MRI正中矢状断における脳梁の生物学的な性の同定”, 電子情報通信学会技術研究報告, **MBE99-121**, pp.45-52 (1999-12)
- [3] 横田康成, 河村洋子, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “正中矢状断MRIにおける脳梁主軸方位の性差”, 第2回GID研究会抄録集, p.11 (2000-03)
- [4] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 松村要, 竹田寛: “男性, 女性, GID患者の脳梁の主軸方位の差の検定”, 第3回GID研究会抄録集, p.12 (2001-03)
- [5] 林慎一郎, 亀谷謙, 横田康成, 河村洋子: “性同一性障害者の脳梁主軸方位・自己イメージの性度・「らしさ」に対する態度”, 第4回GID研究会抄録集, p.12 (2002-03)
- [6] 亀谷謙, 林慎一郎, 河村洋子: “健常者およびGID患者のGI(Gender Identity), GR(Gender Role), GO(Gender Orientation)の強度測定に関する研究”, 第5回GID研究会抄録集, p.14 (2003-03)
- [7] 河村洋子, 横田康成, 奥田保男, 亀谷謙: “中核的性同一性障害とその周辺における男性・女性に対する脳梁形状の統計的有意差の検証”, 第6回GID研究会抄録集, p.45 (2004-03)

学会発表

- [1] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “脳梁形状の性差の検定, 脳梁形状を用いた性別判定”, 平成 11 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p.345 (1999-09)
- [2] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 竹田寛, 松村要: “頭部 MRI 正中矢状断面の脳梁形状の性差”, 平成 11 年度日本エム・イー学会東海支部学術集会予稿集, p.52 (1999-10)
- [3] 河村洋子, 横田康成, 亀谷謙, 松村要, 竹田寛: “性同一性障害者の脳梁の MRI 正中矢状断の性差”, 第 40 回日本エム・イー学会大会論文集, 第 39 巻特別号, p.408 (2001-05)
- [4] 河村洋子, 横田康成: “開曲線に適用可能な新しいフーリエ記述子”, 平成 16 年度電気関係学会東海支部連合大会論文集, CD-ROM, O-431, (2004-09)
- [5] 横田康成, 河村洋子, 亀谷謙: “正常男女, 性同一性障害者の脳梁 MRI 正中矢状断形状の比較”, 日本生体医工学会, 平成 17 年度日本生体医工学会東海支部学術集会, p.14 (2005-10)
- [6] 亀谷謙, 横田康成, 河村洋子: “頭部 MRI による「性同一性障害の診断」”, 第 25 回日本性科学学会学術集会, 日本性科学会雑誌 (Japanese Journal of Sexology), Vol.23, No.2, p.174, Oct. 2005 (2005-11)

記事

- [1] 日刊工業新聞インターネット版ニュース 2001/05/22: “岐阜大などが性同一性障害で脳梁の傾きの違い発見” 掲載 (May, 2001)
- [2] “GID 脳梁形状を検討 診断尺度として期待”, 性差と医療, News & Report, vol.3, No.1, p.126 (Jan., 2006)

その他

- [1] 電子情報通信学会東海支部, 平成 13 年度前期学生研究発表助成 (国外の国際会議発表) 採用: “Sex differences in corpus callosum at the midsagittal plane in subjects with GID”, 15 th World Congress of Sexology(Paris)(June, 2001)
- [2] 平成 16 年度リサーチ・アシスタント採用: “客観的指標による性同一性障害の診断支援に関する研究”, (2004)

関連図書

- [1] 小此木啓吾, 及川卓著: “性別同一性障害 gender identity disorder”, 現代精神医学大系, 8, 人格異常, 性的異常, pp.233–273, 中山書店 (1981)
- [2] 中野明德: “VI 性同一性の障害”, 臨床精神医学講座 第7巻人格障害, pp.259–270 中山書店 (1998)
- [3] 阿倍輝夫: “性同一性障害関連疾患 191 例の臨床報告—統計分布と今後の問題点—”, 臨床精神医学, **28**(4), pp.373–381 (1999)
- [4] 山内敏雄: “性転換手術は許されるのか. 性同一性障害と性のあり方”, 赤石書店 (1999)
- [5] 山内俊雄, 庄野伸幸, 加沢鉄士: “性同一性障害の心理的側面”, 臨床精神医学, **30**, No.7, pp.751–756 (2001)
- [6] 針間克己: “「性の決定」はいつになされるか—インターセックスと性同一性障害—”, 現代性教育月報, **19**, No.4, pp.1–5 (2001)
- [7] 針間克己: “性同一性障害の現状と特例法”, 日本医師会雑誌, **130**, No.5, pp.754–758 (2003)
- [8] 大島俊之: “性同一性障害者性別特例法の成立とその影響”, ビジネス法務, 10月号, 中央経済社, pp.8–9 (2003)
- [9] 大島俊之: “性同一性障害者の性別の取り扱いの特例に関する法律について”, 第6回 GID 研究会抄録, p.23 (2004)
- [10] 矢野樹理: “Rokitansky 症候群”, 日産婦誌, **57** 巻, 9号, pp.360–364 (2005)
- [11] 綾部琢哉: “早発思春期, 遅発思春期”, 日産婦誌, **57** 巻, 9号, pp.365–368 (2005)
- [12] 小森慎二: “Testicular feminization 症候群, 染色体の性と人格の性”, 日産婦誌, **57** 巻, 9号, pp.369–373 (2005)
- [13] 中山浩, 兼田康宏, 香川公一, 永峰勲, 苺舎健治, 古田典子, 生田琢己: “健常成人の聴覚性誘発電位 (AEP) と脳波の性差”, 四国医学雑誌, 第 **52** 巻, 第 1 号, pp.1–13, February 25 (1996)
- [14] 香川公一, 中山浩, 兼田康宏, 生田琢己, 苺舎健治: “健常成人の体性感覚誘発電位 (SEP) と脳波の性差”, 四国医学雑誌, 第 **54** 巻, 第 1 号, pp.39–49, February 25 (1998)
- [15] 石津宏: “性の心身医学 (Psychosomatic Medicine of Sexual Functions)”, 日本性科学会雑誌 (Japanese Journal of Sexology), **16**, No.2, September (1998)
- [16] 玉田太郎: “脳と性—女性; 脳の性分化とセクシュアリティ”, 日本性科学会雑誌 (Japanese Journal of Sexology), **16**, No.2, September (1998)
- [17] 山中京子: “性的少数派への理解をめざして”, 日本性科学会雑誌 (Japanese Journal of Sexology), **16**, No.2, September (1998)
- [18] 田中富久子: “女の脳・男の脳”, 日本放送出版協会, 東京 (1998)
- [19] ヴォルフ: “人体解剖学アトラス第4版”, 西村書店 (1993)
- [20] 萬年甫, 原一之: “脳解剖学”, 南江堂 (1994)
- [21] K.L. MOORE: “MOORE 人体発生学第4版”, 星野一正訳, 医歯薬出版株式会社 (1993)
- [22] 新井康允: “脳の性差”, 共立出版 (1993)
- [23] D. Kimua: “脳の性差”, 日経サイエンス, 11月号 (1992)
- [24] 立花隆: “脳を究める—脳研究最前線”, 朝日新聞社 (1993)
- [25] 立花隆: “サイエンス・ミレニアム”, 中央公論新社 (1999)
- [26] A. Kertesz, M. Polk, J. Howell and SE. Black: “Cerebral dominance, sex, and callosal size in MRI”, Neurology, **37**, pp.1385–1388 (1987)

- [27] S.J. Reinarz, C.E. Coffman, W.R.K. Smoker and J.C. Godersky: "MR Imaging of the Corpus Callosum: Normal and Pathologic Finding and Correlation with CT", *The American Journal of Roentgenology*, **151**, No.10, pp.791–798 (1988)
- [28] S. Clarke, R. Kraftsik, H. van Derloos and G.M. Innocenti: "Forms and Measures of Adult and Developing Human Corpus Callosum: Is There Sexual Dimorphism?", *The Journal of Comparative Neurology*, **280**, pp.213–230 (1989)
- [29] S. Weis, G. Weber, E. Wenger and M. Kimbacher: "The Controversy about a Sexual Dimorphism of the Human Corpus Callosum", *The International journal of Neuroscience*, **47**, pp.169–173 (1989)
- [30] A.D. Elster, D.A. Dipersio and D.M. Moody: "Sexual Dimorphism of the Human Corpus Callosum Studied by Magnetic Resonance Imaging: Fact, Fallacy and Statistical Confidence", *Brain & Development*, **12**, pp.321–325 (1990)
- [31] M.C. de Lacoste, T. Adesanya and D.J. Woodward: "Measures of Gender Differences in the Human Brain and Their Relationship to Brain Weight", *Biological Psychiatry*, **28**, pp.931–942 (1990)
- [32] M. Habib, D. Gayraud, A. Oliva, J. Regis, G. Salamon and R. Khalil: "Effects of Handedness and Sex on the Morphology of the Corpus Callosum: A Study with Brain Magnetic Resonance Imaging", *Brain and Cognition*, **16**, pp.41–61 (1991)
- [33] P.M. Doraiswamy, G.S. Figiel, M.M. Husain, W.M. McDonald, S.A. Shah, O.B. Boyko, E.H. Ellinwood and K.R. Krishnan: "Aging of the Human Corpus Callosum: Magnetic Resonance Imaging in Normal Volunteers", *The Journal of Neuropsychiatry and Clinical Neurosciences*, **3**, No.4, pp.392–397 (1991)
- [34] P.E. Cowell, L.S. Allen, N.S. Zalatimo and V.H. Denenberg: "A developmental study of sex and age interactions in the human corpus callosum", *Developmental Brain Research*, **66**, pp.187–192 (1992)
- [35] M. Hines, L. Chiu, L.A. McAdams and P.M. Bentler: "Cognition and the Corpus Callosum: Verbal Fluency, Visuospatial Ability, and Language Lateralization Related to Medsagittal Surface Areas of Callosal Subregions", *Behavioral Neuroscience*, **106**, No.1, pp.3–14 (1992)
- [36] F.L. Schmidt: "What Do Data Really Mean? Research Findings, Meta-analysis, and Cumulative Knowledge in Psychology", *The American Psychologist*, **47**, pp.1173–1181 (1992)
- [37] F. Aboitiz, A.B. Scheibel, R.S. Fisher and E. Zaidel: "Fiber composition of the human corpus callosum", *Brain Research*, **598**, pp.143–153 (1992)
- [38] R. Holloway, P.J. Anderson, R. Defendini and C. Harper: "Sexual Dimorphism of the Human Corpus Callosum From Three Independent Samples: Relative Size of the Corpus Callosum", *American Journal of Physical Anthropology*, **92**, pp.481–498 (1993)
- [39] J. Pujol, P. Vendrell, C. Junque, J.L. Marti-Vilalta and A. Capdevila: "When Does Human Brain Development End? Evidence of Corpus Callosum Growth up to Adulthood", *Annals of Neurology*, **34**, No.1, pp.71–75 (1993)
- [40] C. Pozzilli, S. Bastianello, A. Bozzao, A. Pieralline, F. Giubilei, C. Argentino and L. Bozzao: "No Differences in Corpus Callosum Size by Sex and Aging", *Journal of Neuroimaging*, **4**, No.4, pp.218–221 (1994)
- [41] S.C. Johnson, T. Farnworth, J.B. Pinkston, E.D. Bigler and D.D. Blatter: "Corpus Callosum Surface Area Across the Human Adult Life Span: Effect of Age and Gender", *Brain Research Bulletin*, **35**, No.4, pp.373–377 (1994)
- [42] V.F. Ferrario, C. Sforza, G. Serrao, T. Frattini and C.D. Favero: "Shape of the Human Corpus Callosum Elliptic Fourier Analysis on Midsagittal Magnetic Resonance Scans", *Investigative radiology*, **29**, No.7, pp.677–681 (1994)

- [43] K.D. Hopper, S. Patel, T.S. Cann, T. Wilcox and J.M. Schaeffer: "The relationship of age, gender, handedness, and sidedness to the size of the corpus callosum", *Academic Radiology*, **1**, No.3, pp.243–248 (1994)
- [44] H. Steinmetz, J.F. Staiger, G. Schlaug, Y. Huang and L. Jäncke: "Corpus callosum and brain volume in women and men", *NeuroReport*, **6**, No.79, pp.1002–1004, May (1995)
- [45] I.A. Parashos, W.E. Wilkinson and C.E. Coffey: "Magnetic Resonance Imaging of the Corpus Callosum: Predictors of Size in Normal Adults", *The Journal of Neuropsychiatry*, **7**, No.1, pp.35–41 (1995)
- [46] D. Constant and H. Ruther: "Sexual dimorphism in the human corpus callosum? A comparison of methodologies", *Brain Research*, **727**, pp.99–106 (1996)
- [47] V.F. Ferrario, C. Sforza, G. Serrao, T. Frattini and C.D. Favero: "Shape of the Human Corpus Callosum in Childhood Elliptic Fourier Analysis on Midsagittal Magnetic Resonance Scans", *Investigative radiology*, **31**, No.1, pp.1–5 (1996)
- [48] J.C. Rajapakse, J.N. Giedd, J.M. Rumsey, A.C. Vaituzis, S.D. Hamburger and J.L. Rapoport: "Regional MRI measurements of the corpus callosum: a methodological and developmental study", *Brain & Development*, **18**, pp.379–388 (1996)
- [49] C. Davatzikos, M. Vaillant, S.M. Resnick, J.L. Prince, S. Letovsky and R.N. Bryan: "A Computerized Approach for Morphological Analysis of the Corpus Callosum", *Journal of Computer Assisted Tomography*, **20**, No.1, pp.88–97 (1996)
- [50] J.M. Rumsey, M. Casanova, G.B. Mannheim, N. Patronas, N.D. Vaughn, S.D. Hamburger and T. Aquino: "Corpus Callosum Morphology, as Measured with MRI, in Dyslexic Men", *Biological Psychiatry*, **39**, pp.769–775 (1996)
- [51] D. Salat, A. Ward, J.C.A. Kaye and J.S. Janowsky: "Sex Differences in the Corpus Callosum With Aging", *Neurobiology of Aging*, **18**, No.2, pp.191–197 (1997)
- [52] C.M. Leonard: "Commentary Corpus Callosum: Sex or Size?", *Cerebral Cortex*, **7**, p.2 (1997)
- [53] R. Koshi, T. Koshi, L. Jeyaseelan and S. Vettivel: "Morphology of the corpus callosum in human fetuses", *Clinical Anatomy*, **10**, No.1, pp.22–26 (1997)
- [54] C. Davatzikos and S.M. Resnick: "Sex Differences in Anatomic Measures of Interhemispheric Connectivity: Correlations with Cognition in Women but not Men", *Cerebral Cortex*, **8**, No.7, pp.635–640 (1998)
- [55] J.N. Giedd, J. Blumenthal, N.O. Jaffeies, J.C. Rajapakse, A.C. Vaituzis, H. Liu, Y.C. Berry, M. Tobin, J. Nelson and F.X. Castellanos: "Development of the Human Corpus Callosum during Childhood and Adolescence: A Longitudinal MRI Study", *Progress in Neuro-psychopharmacology & Biological Psychiatry*, **23**, pp.571–588, May (1999)
- [56] S. Oka, O. Miyamoto, N.A. Janiua, N. Honjo-Fujikawa, M. Ohkawa, S. Nagao, H. Kondo, T. Minami, T. Toyoshima and T. Itano: "Re-evaluation of sexual dimorphism in human corpus callosum", *NeuroReport*, **10**, No.56, pp.939–940, April (1999)
- [57] F. Manes, J. Piven, D. Vrancic, V. Nanclares, C. Plebst and S.E. Starkstein: "An MRI Study of the Corpus Callosum and Cerebellum in Mentally Retarded Autistic Individuals", *The Journal of Neuropsychiatry and Clinical Neurosciences*, **11**, No.4, pp.470–474 (1999)
- [58] P.M. Thopson, J.N. Giedd, R.P. Woods, D. Macdonald, A.C. Evans and A.W. Toga: "Growth patterns in the developing brain detected by using continuum mechanical tensor maps", *Nature*, **404**, No.9, pp.190–193 (2000)
- [59] A.A. Dorion, M. Chantome, D. Hasboun, A. Zouaoui, C. Marsault, C. Capron and M. Duyme: "Hemispheric asymmetry and corpus callosum morphometry: a magnetic resonance imaging study", *Neuroscience Research*, **36**, No.1, pp.9–13 (2000)

- [60] E.V. Sullivan, M.J. Rosenbloom, J.E. Desmond and A. Pfefferbaum: "Sex differences in corpus callosum size: relationship to age and intracranial size", *Neurobiology of Aging*, **22**, pp.603–611 (2001)
- [61] A.A. Dorion, C. Capron and M. Duyme: "Measurement of the corpus callosum using magnetic resonance imaging: analysis of methods and techniques", *Perceptual and Motor Skills*, **92**, pp.1075–1094 (2001)
- [62] Y-W. Shin, D.J. Kim, T.H. Ha, H-J. Park, W-J. Moon, E.C. Chung, J.M. Lee, I.Y. Kim, S.I. Kim and J.S. Kwan: "Sex differences in the human corpus callosum: diffusion tensor imaging study", *Neuroreport*, **16**, No.8, pp.795–798, May (2005)
- [63] S. Levay: "Biology and Homosexuality", *Science*, **254** (5032), pp.630–631, November (1991)
- [64] R.C. Gur, B.I. Turetsky, M. Matsui, M. Yan, W. Bilker, P. Hughett and R. E. Gur: "Sex Differences in Brain Gray and White Matter in Healthy Young Adults: Correlations with Cognitive Performance", *The Journal of Neuroscience*, **19**, No.10, pp.4065–4072 (1999)
- [65] Z.Q. Ma, E. Spreafico, G. Pollio, S. Santagati, E. Conti, E. Cattaneo and A. Maggi: "Activated estrogen receptor mediates growth arrest and differentiation of a neuroblastoma cell line", *Neurobiology*, **90**, pp.3740–3744, April (1993)
- [66] M.X.H. Yan and J.S. Karp: "An adaptive bayesian approach to three-dimensional MR brain segmentation", In: *Information Processing in Medical Imaging*, Y. Bizais et al.(eds.), pp.201–213 (1995)
- [67] S.M. Breedlove: "Sex on the brain", *Nature*, **389**, p.801 (1997)
- [68] A.F. Goldszal, C. Davatzikos, D.L. Pham, M.X.H. Yan, R.N. Bryan and S.M. Resnick: "An Image-Processing System for Qualitative and Quantitative Volumetric Analysis of Brain Images", *Journal of Computer Assisted Tomography*, **22**(5), pp.827–837 (1998)
- [69] P.M. Thompson and A.W. Toga: "Tensor map computation", In: *Brain Warping*, (ed. A.D. Toga), pp.311–336, Academic, San Diego (1998)
- [70] D.D. Kelly: "Sexual Differentiation of the Nervous System", In: *PRINCIPLES OF NEURAL SCIENCE* third edition, No.61, pp.959–973 (1999)
- [71] I. Kupfermann: "Localization of Higher Cognitive and Affective Functions: The Association Cortices", In: *PRINCIPLES OF NEURAL SCIENCE* third edition, No.53, pp.823–838 (1999)
- [72] J.H. Martin and T.M. Jessell: "Development as a Guide to the Regional Anatomy of the Brain", In: *PRINCIPLES OF NEURAL SCIENCE* third edition, No.21, pp.296–308 (1999)
- [73] 松井三枝: "健常成人脳における灰白質と白質容積の加齢変化 -脳磁気共鳴画像による検討-", *脳のイメージング* (1999)
- [74] 松井三枝: "性差からみた精神分裂病-脳画像および神経心理学的アプローチ-", *北陸神経精神医学雑誌*, 第13巻, 第2号, pp.1–13 (1999)
- [75] J. Matsuizawa, M. Matsui, T. Konishi, K. Noguchi, R.C. Gur, W. Bilker and T. Miyawaki: "Age-related Volumetric Changes of Brain Gray and White Matter in Healthy Infants and Children", *Cerebral Cortex*, **11**, No.4, pp.335–342 (2001)
- [76] L. Agartz, J.L.R. Andersson and S. Skare: "Abnormal brain white matter in schizophrenia: a diffusion tensor imaging study", *NeuroReport*, **12**, No.10, pp.2251–2254, July (2001)
- [77] 松本元, 小野武年共編: "性ホルモンによる脳の性分化と機能の調節", In: *情と意の脳科学*, pp.162–172, 培風館, 東京 (2002)
- [78] 山内兄人, 新井康允: "性を司る脳とホルモン", コロナ社 (2001)
- [79] 山元大輔: "生物学からみた同性愛・性同一性障害", (連載講座/21世紀と性14), *現代性教育月報*, **20**, No.5, pp.6–9 (2002)
- [80] 吉永みち子: "性同一性障害-性転換の朝", 集英社 (2000)
- [81] 虎井まさ衛: "女から男になったワタシ", 青弓社 (1996)
- [82] 伊藤悟, 虎井まさ衛: "多様な「性」がわかる本", 高文研, 東京 (2002)

- [83] クリスティーヌ・テンブル: “脳のしくみとはたらき”, 朝倉哲彦訳, 講談社 (1997)
- [84] 功刀由紀子, 坂東昌子: “性差の科学”, ドメス出版, March (1997)
- [85] 新井康允: “入門ビジュアルサイエンス脳のしくみ”, 日本実業出版社 (1998)
- [86] V.S. ラマチャント・ラン, サンドラ・ブレイクスリー: “脳のなかの幽霊”, 山下篤子訳, 角川書店, July (1999)
- [87] リタ・カーター: “脳と心の地形図”, 藤井留美訳, 原書房, Dec. (1999)
- [88] デボラ・ブラム: “脳に組み込まれたセックス—なぜ男と女なのか”, 越智典子訳, 白揚社, March (2000)
D. Blum: “Sex on the Brain: The Biological Differences Between Men and Women”, Viking Pr (1997)
- [89] 澤口俊之: “わがままな脳”, 筑摩書房, March (2000)
- [90] ジョンJ. レイティ: “脳のはたらきのすべてがわかる本”, 堀千恵子訳, 角川書店 (2002)
J.J. Ratey.M.D.: “A user’s guide to brain”, Vintage Books (2002)
- [91] サイモン・バロン=コーエン: “共感する女脳, システム化する男脳”, 三宅真砂子訳, 日本放送出版協会, April (2005)
- [92] C.W. Richard JR and H. Hemami: “Identification of Three-Dimensional Objects Using Fourier Descriptors of the Boundary Curve”, IEEE trans on system, man and cybernetics, **SMC-4**, No.4, pp.371–378, July (1974)
- [93] H. Arakawa and I. Masuda: “On-line recognition of handprinted characters”, IEICE Trans., **J59-D**, No.11, pp.809–816 (1976)
荒川弘熙, 増田功: “手書き文字のオンライン認識”, 信学論 (D), **J59-D**, No.11, pp.809–816, Nov. (1976)
- [94] 安居院猛, 中嶋正之, 好村忠三: “閉曲線情報処理による手書き英字認識”, 信学論 (D), **J59-D**, No.12, pp.889–896, Dec. (1976)
- [95] E. Persoon and K-s FU: “Shape Discrimination Using Fourier Descriptors”, IEEE trans on SYSTEM, MAN, and Cybernetics, **SMC-7**, No.3, pp.170-179, March (1977)
- [96] C.R. Giardina and F.P. Kuhl: “Accuracy of Curve Approximation by Harmonically Related Vectors with Elliptical Loci”, Computer Graphics and Image Processing, **6**, pp.277–285 (1977)
- [97] S. Impedovo, B. Marangelli and A.M. Fanelli: “A Fourier descriptor set or recognizing nonstylized numbers”, IEEE Trans on SYSTEM, MAN, and Cybernetics, **SMC-8**, No.8, pp.640–645, Aug. (1978)
- [98] 安居院猛, 中嶋正之, 松原清隆: “偏角関数のウォルシュスペクトルによる図形処理”, 信学論 (D), **J59-D**, No.6, pp.432–439, June (1979)
- [99] T. Pavlidis: “Algorithms for Shape Analysis of Contours and Waveforms”, IEEE trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **PAMI-2**, No.4, pp.301–312, July (1980)
- [100] T.P. Wallace and P.A. Wintz: “An Efficient Three-Dimensional Aircraft Recognition Algorithm using normalized Fourier Descriptors”, computer graphics and image processing, **13**, pp.99–126 (1980)
- [101] 宮武孝文, 松山隆司, 長尾真: “フーリエ記述子を用いたアフィン変換に不変な曲線の認識について”, 情報処理学会論文誌, **24**, No.1, pp.64–71, Jan. (1983)
- [102] J. Strackee and N.J.D. Nagelkerke: “On closing the fourier descriptor presentation”, IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **PAMI-5**, No.6, pp.660–661, Nov. (1983)
- [103] 横井茂樹: “幾何学的特徴の処理 (1)”, 「画像処理アルゴリズムの最新動向」, 別冊 O plus E, 新技術コミュニケーションズ, pp.51–57, November (1986)
- [104] 阿部圭一, 小川秀夫: “幾何学的特徴の処理 (2)”, 「画像処理アルゴリズムの最新動向」, 別冊 O plus E, 新技術コミュニケーションズ, pp.58–72, November (1986)
- [105] 鳥脇純一郎: “3次元画像のデジタル処理”, 「画像処理アルゴリズムの最新動向」, 別冊 O plus E, 新技術コミュニケーションズ, pp.84–107, November (1986)

- [106] 相原恒博, 大上健二, 松岡靖: “人間の横顔認識における P 形フーリエ記述子の有効成分の個数について”, 信学論, **J74-D-II**, No.11, pp.1486–1487, November (1991)
- [107] 東恒人: “P 形フーリエ記述形状の位相特性からの分析”, 信学論, **J75-D-II**, No.10, pp.1743–1746, October (1992)
- [108] L.H. Staib and J.S. Duncan: “Boundary finding with parametrically deformable models”, IEEE trans on pattern analysis and machine intelligence, **PAMI-14**, No.11, pp.1061–1075 (1992)
- [109] G. Szekely, A. Kelemen, C. Brechbuhler and G. Gerig: “Segmentation of 2-D and 3-D objects from MRI volume data using constrained elastic deformations of flexible Fourier contour and surface models”, Medical Image Analysis, **1**, No.1, pp.19–34 (1996)
- [110] I. Rothe, H. Susse and K. Voss: “The method of normalizatin to determine invariants”, IEEE trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **PAMI-18**, No.4, pp.366–376 (1996)
- [111] V.F. Ferrario, C. Sforza, G. Serrao, T. Frattini and C.D. Favero: “Shape of the human corpus callosum elliptic fourier analysis on midsagittal magnetic resonance scans”, Investigative Radiology, **31**, No.1, pp.1–5, Jan. (1996)
- [112] H. Iwata, S. Niikura, S. Matuura, Y. Takano and Y. Ukai: “Diallel Analysis of Root Shape of Japanese Radish (*Raphanussativus* L.) Based on Elliptic Fourier Descriptors”, Breeding Science, **50**, pp.73–80 (2000)
- [113] 新井康平, 瀬戸要, 中尾太郎: “同一帯域制限下におけるウェーブレットとフーリエ記述子による画像の幾何学的特徴記述の復元度の比較”, 日本写真測量学会誌, **40**, No.5, pp.63–67 (2001)
- [114] T.D. Bui, G.Y. Chen and L. Feng: “An orthonormal-shell-fourier descriptor for parid matching of patterns in image database”, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, **15**, No.8, pp.1213–1229 (2001)
- [115] H. Iwata, H. Nesumi, S. Ninomiya, Y. Takano and Y. Ukai: “Diallel Analysis of Leaf Shape Variations of Citrus Varieties Based on Elliptic Fourier Descriptors”, Breeding Science, **52**, pp.89–94 (2002)
- [116] D. Zhang and G. Lu: “Shape-based image retrieval using generic Fourier descriptor”, Signal Processing: Image Communication, **17**, pp.824–848 (2002)
- [117] A.E. Oirrak, M. Daoudi and D. Aboutajdine: “Affine invariant descriptors using Fourier series”, Pattern Recognition Letters, **23**, pp.1109–1118 (2002)
- [118] A.E. Oirrak, M. Daoudi and D. Aboutajdine: “Affine invariant descriptors for color images, using Fourier series”, Pattern Recognition Letters, **24**, pp.1339–1348 (2003)
- [119] 沖田聡一郎, 藤尾光彦, 浅野晃: “フーリエ記述子の離散化方法の比較とテキスチャ解析への応用”, PRMU2002-**254**, pp.67–72 (2003)
- [120] D. Zhang and G. Lu: “A comparative study of curvature scale space and Fourier descriptors for shape-based image retrieval”, Journal of Visual communication & image Representation, **14**, pp.41–60 (2003)
- [121] 大津展之: “パターン認識における特徴抽出に関する数理的研究”, 電子技術総合研究所研究報告, 第 **818** 号 (1981)
- [122] 柳井晴夫, 竹内啓: “射影行列・一般逆行列・特異値分解”, 東京大学出版会 (1983)
- [123] 奥野忠一, 久米均, 芳賀敏郎, 吉澤正: “多変量解析法”, 日科技連出版社 (1980)
- [124] B. Flury and H. Riedwyl: “多変量解析とその応用”, 田畑吉雄訳, 現代数学社 (1990)
- [125] 東京大学教養学部統計学教室編: “基礎統計学 III 自然科学の統計学”, 東京大学出版会 (1992)
- [126] R.A. Johnson and D.W. Wichern: “多変量解析の徹底研究”, 西田俊夫訳, 4. 多変量正規分布, 4.6 正規性の前提の評価, pp.170–182, 現代数学社 (1992)
- [127] 狩野裕, 市川雅教: “共分散構造分析 第 6 章共分散構造分析におけるブートストラップ法”, 第 7 回日本統計学会チュートリアルセミナー, July (1999)
- [128] 竹内啓編集: “統計学辞典”, III 汎用的方法, 15. 標本からのサンプリング, pp.473–480, 東洋経済新報社 (1989)

- [129] 電子情報通信学会編: “電子情報通信ハンドブック”, 3群 画像・音声・言語, 3-2編 パターン認識理論とコンピュータビジョン, pp.184-196, オーム社, Oct. (1998)
- [130] 志賀浩二: “固有値問題 30 講”, 朝倉書店, April (1991)
- [131] 武者利光, 岡本良夫: “逆問題とその解き方”, オーム社 (1992)
- [132] M.J. Schervish: “A Review of Multivariate Analysis”, *Statistical Science*, **2**, No.4, pp.396-433 (1987)
- [133] D. Duchene and S. Leclercq: “An optimal transformation for discriminant and principal component analysis”, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-10**, No.6, pp.978-983 (1988)
- [134] 若林哲史, 鶴岡信治, 木村文隆, 三宅康二: “小クラス分類問題における特徴選択に関する考察”, *信学論*, **J80-D-II**, No.1, pp.73-80 (1997)
- [135] M-H. Yang: “Kernel Eigenfaces vs. Kernel Fisherfaces: Face Recognition Using Kernel Methods”, *Proc. of Int'l Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition*, pp.215-220 (2002)
- [136] Q. Liu, R. Huang, H. Lu and S. Ma: “Face Recognition Using Kernel Based Fisher Discriminant Analysis”, *Proc. of Int'l Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition*, pp.197-201 (2002)
- [137] 渡辺慧: “認識とパターン”, 岩波新書, 東京 (1978)
- [138] 森俊二: “画像認識入門—形を認識する事始め—”, オーム社, 東京 (1988)
- [139] K. Fukunaga and D.M. Hummels: “Bayes Error Estimation Using Parzen and k-NN Procedures”, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **PAMI-9**, No.5, pp.634-643, Sep.(1987)
- [140] 市原清志: “バイオサイエンスの統計学”, 南江堂, pp.338-339 (1999)
- [141] 竹内啓編: “統計学辞典”, III 汎用的方法, 7. 分散分析の諸問題. pp.397-411, 東洋経済新報社 (1989)
- [142] 武藤真介: “統計解析ハンドブック”, V. ノンパラメトリック検定, クラスカル・ウォリスの順位和検定と多重比較, pp.442-445, 朝倉書店 (1995)
- [143] C.R. Rao: “Linear statistical inference and its applications 2nd edition”, Jone Wiley & Sons, Inc., New York (1992)
奥野忠一訳: “統計的推測とその応用”, 東京図書 (1992)
- [144] 赤穂昭太郎: “[チュートリアル講演] カーネルマシン”, *信学技報*, **103**, No.228, NC2003-34(2003-7), pp.1-6, July (2003)
- [145] 栗田多喜夫: “サポートベクターマシン入門”, 産業技術総合研究所 脳神経情報研究部門資料 (2002)
- [146] B. Schölkopf and A.J. Smola: “Learning with Kernels”, The MIT Press, Cambridge (2002)
- [147] 前田栄作: “痛快! サポートベクトルマシン—古くて新しいパターン認識手法—”, *情報処理*, **42** 巻, 7 号, pp.676-683, July (2001)
- [148] 赤穂昭太郎, 津田宏治: “サポートベクターマシン基本的仕組みと最近の発展”, *数理科学*, **444**, pp.52-58, June (2000)
- [149] 津田宏治: “サポートベクターマシンとは何か”, *電子情報通信学会誌*, **83**, No.6, pp.460-466, June (2000)
- [150] A. Shashua: “On the Relationship Between the Support Vector Machine for Classification and Sparsified Fisher's Linear Discriminant”, *Neural Processing Letters*, **9**, pp.129-139 (1999)
- [151] 上田修功: “ベイズ学習 [I] —統計的学習の基礎—”, *電子情報通信学会誌*, **85**, No.4, pp.265-271 (2002)
- [152] 上田修功: “ベイズ学習 [II] —統計的学習の基礎—”, *電子情報通信学会誌*, **85**, No.6, pp.421-426 (2002)
- [153] 上田修功: “ベイズ学習 [III] —変分ベイズ学習の基礎—”, *電子情報通信学会誌*, **85**, No.7, pp.504-509 (2002)
- [154] 上田修功: “ベイズ学習 [IV・完] —変分ベイズ学習の応用例—”, *電子情報通信学会誌*, **85**, No.8, pp.633-638 (2002)

- [155] 坂野鋭: “パターン認識における主成分分析”, 統計数理, 第 49 卷, 第 1 号, pp.23–42 (2001)
- [156] 坂野鋭, 武川直樹, 中村太一: “核非線形相互部分空間法による物体認識”, 信学論, **J84-D-II**, No.8, pp.1549–1556 (2001)
- [157] P. Delicado: “Another Look at Principal Curves and Surfaces”, Journal of Multivariate analysis, **77**, pp.84–116 (2001)
- [158] 津田宏治: “ヒルベルト空間における部分空間法”, 信学論, **J82-D-II**, No.4, pp.592–599 (1999)
- [159] 前田英作, 村瀬洋: “カーネル非線形部分空間法によるパターン認識”, 信学論, **J82-D-II**, No.4, pp.600–612 (1999)
- [160] B. Schölkopf, A. Smola and K.-R. Müller: “Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigenvalue Problem”, Neural Computation, **10**, No.5, pp.1299–1319 (1998)
- [161] A.K. Jain, R.P.W. Duin and J. Mao: “Statistical Pattern Recognition: A Review”, IEEE Trans. pattern analysis and machine intelligence, **PAMI-22**, No.1, pp.4–37, Jan. (2000)
- [162] M.J. Schervish: “A Review of Multivariate Analysis”, Statistical Science, **2**, No.4, pp.396–433 (1987)
- [163] 高木幹雄, 下田陽久監修: “画像解析ハンドブック”, 東京大学出版会 (1993)
- [164] 田村秀行監修: “コンピュータ画像処理入門”, 日本工業技術センター編, 総研出版 (1996)
- [165] 谷口慶治編: “画像処理工学基礎編”, 共立出版, 東京 (1996)
- [166] 今里悠一, 大橋昭南: “医用画像処理”, 昭晃堂, 東京 (1993)
- [167] 長尾真: “デジタル画像処理”, 第 9 章デジタル幾何学, 近代科学社, 東京 (1978)
- [168] 河口洋一郎監修: “CG 入門”, 丸善, 東京 (2003)
- [169] 櫻井恵三, 小川恒一, 平塚彰: “図形処理入門-CAD/CG へのアプローチ-”, 朝倉書店, 東京 (2002)
- [170] 山口富士夫: “CAD 工学”, 情報数理シリーズ B-3, 培風館, 東京 (1998)
- [171] 金谷健一: “形状 CAD と図形の数学”, 工系数学講座 19, 共立出版, 東京 (1998)
- [172] 杉原厚吉: “グラフィックスの数理”, 情報数学講座 13, 共立出版, 東京 (1995)
- [173] G. Farin, 木村文彦監修, 山口泰監訳: “CAGD のための曲線・曲面理論 実践的利用法”, 共立出版 (1991)
- [174] 岸野文郎, 大野義夫, 北村喜文: “情報の可視化”, 岩波書店, 東京 (2001)
- [175] 魏大名, 矢田和弘, Roman Durikovic, 向井信彦, Carl Vilbrandt: “コンピューターグラフィックス”, 情報処理学会編集, オーム社, 東京 (2003)
- [176] 大野敏則: “ビギナーのための曲面モデリングセミナー”, <http://www.rhino3d.co.jp/>, 有限会社エムシースクエアド, (2001)