

円形境界で接合する異質弾性体の 未接合領域近傍の解析に関する研究

平成 7 年 1 月

学位論文：博士(工学)1994-11

村 瀬 安 彦

目 次

第 1 章 序 論	1.
1.1 クラック解析の現状	1.
1.2 重み積分手法に基づく応力集中の有限化手法	11.
1.3 本研究の特徴	12.
1.4 本文の概要	16.
(参考文献)	19.
第 2 章 重み積分法	25.
2.1 従来の開口関数	25.
2.2 円形境界特有の重み積分関数	28.
2.3 重み付き積分法による新開口関数の誘導 (重み関数 2 次式)	32.
2.4 重み付き積分法による新開口関数の誘導 (重み関数 4 次式)	34.
2.5 重み付き積分法による新開口関数の誘導 (重み関数 3 次式)	36.
(参考文献)	38.
第 3 章 基本解析関数の一般形及び境界条件	39.
3.1 応力関数の一般形	39.
3.2 極座標系応力関数	40.
3.3 境界条件 (変位及び応力の接合条件)	42.
3.4 基本解析関数の一般形	43.
第 4 章 解析解の誘導と検討	53.
4.1 解析解の誘導	53.
4.2 解析解の検討	57.
4.3 エネルギー解放率 (J 積分)	69.
4.4 解析解の重ね合わせ	71.
第 5 章 単独クラックの計算例と考察	74.
5.1 集中ねじり力を受ける場合の計算例	74.
5.2 無限遠方で一様引張力を受ける場合の計算例	90.
5.3 考 察	106.
第 6 章 マルチクラックの計算例と考察	109.
6.1 マルチクラックの作成	109.
6.2 計算例	114.
6.3 考 察	122.
(参考文献)	123.

第 7 章	解析関数解と F E M による解析結果との比較検討	-----124.
	(無限遠方で一様引張力を受ける単独クラック)	
7.1	F E M のモデル化	-----124.
7.2	計算例 (解析関数解との比較検討) と考察	-----124.
第 8 章	結 論	-----127.
8.1	総 説	-----127.
8.2	解析関数解	-----128.
8.3	解の検討	-----128.
8.4	今後の展開	-----131.
	(参考文献)	-----132.
< 謝 辞 >		-----133.
記 号		-----134.
本論文に含まれる著者の発表論文ならびに口頭発表		-----136.

図の一覧表

図-1.1	クラックの形状（2次元の場合）	2.
図-1.2	従来の解析的な解	2.
図-1.3	コンクリート, 繊維補強コンクリートにおける開口部の応力	2.
図-1.4	Erdogan 等の解析モデル	6.
図-1.5	開口変位に関する多重曲面の形状	18.
図-2.1	研究対象モデル（円形境界で接合する異質弾性体）	25.
図-2.2	開口関数 実数曲面	26.
図-2.3	開口関数 虚数曲面	27.
図-2.4	重み関数	29.
図-2.5	新開口関数 実数曲面（開口部拡大）	33.
図-2.6	新開口関数 虚数曲面（開口部拡大）	33.
図-3.1	直交座標系と極座標系の応力関係	40.
図-3.2	直交座標系と極座標系の変位関係	40.
図-3.3	要素関数 $f_1(z)$ 実数, 虚数曲面	44.
図-3.4	要素関数 $f_2(z)$ 実数, 虚数曲面	45.
図-3.5	要素関数 $f_3(z)$ 実数, 虚数曲面	46.
図-3.6	要素関数 $f_4(z)$ 実数, 虚数曲面	47.
図-3.7	応力場の一例	49.
図-3.8	d s 部分にかかる外力	51.
図-4.1	解析モデル	58.
図-4.2	解 No.1 集中ねじり力	59.
図-4.3	解 No.2 集中ねじり力	59.
図-4.4	解 No.13 集中ねじり力	60.
図-4.5	解 No.14 集中ねじり力	60.
図-4.6	解 No.3 無限遠方で一様引張力	61.
図-4.7	解 No.4 無限遠方で一様引張力	61.
図-4.8	解 No.15 無限遠方で一様引張力	62.
図-4.9	解 No.16 無限遠方で一様引張力	62.
図-4.10	個々の解の開口形状	63.
図-4.11	解 No.5 2重ねじり力と単純ねじり力	65.
図-4.12	解 No.11 2重ねじり力と一様引張力	66.
図-4.13	解 No.19 4重ねじり力と一様引張力（複合応力を明示）	67.
図-4.14	解 No.19 4重ねじり力と一様引張力（応力と変位形状を明示）	68.
図-4.15	σ_r の曲率自乗和	73.

図-5.1	集中ねじり力を受ける場合の計算モデル	74.
図-5.2	応力 σ_r 全体形状, 開口部拡大	75.
図-5.3	応力 σ_θ 全体形状, 開口部拡大	76.
図-5.4	応力 $\tau_{r\theta}$ 全体形状, 開口部拡大	77.
図-5.5	変位 U_r 全体形状, 開口部拡大	78.
図-5.6	変位 U_θ 全体形状, 開口部拡大	79.
図-5.7	重み関数による応力 $\tau_{r\theta}$ の相違	81.
図-5.8	重み関数による開口形状 U_θ の相違	81.
図-5.9	ω の変化に伴う応力 $\tau_{r\theta}$ の変化	83.
図-5.10	ω の変化に伴う開口形状 U_θ の変化	83.
図-5.11	β の変化に伴う応力 $\tau_{r\theta}$ の変化	84.
図-5.12	β の変化に伴う開口形状 U_θ の変化	84.
図-5.13	ω の進展に伴う J の変化	87.
図-5.14	β の進展に伴う J の変化	87.
図-5.15	無限遠方で一様引張りを受ける場合の計算モデル	90.
図-5.16	応力 σ_r 全体形状, 開口部拡大	91.
図-5.17	応力 σ_θ 全体形状, 開口部拡大	92.
図-5.18	応力 $\tau_{r\theta}$ 全体形状, 開口部拡大	93.
図-5.19	変位 U_r 全体形状, 開口部拡大	94.
図-5.20	変位 U_θ 全体形状, 開口部拡大	95.
図-5.21	重み関数による応力 σ_r の相違	97.
図-5.22	重み関数による開口形状 U_r の相違	97.
図-5.23	ω の変化に伴う応力 σ_r の変化	99.
図-5.24	ω の変化に伴う開口形状 U_r の変化	99.
図-5.25	β の変化に伴う応力 σ_r の変化	100.
図-5.26	β の変化に伴う開口形状 U_r の変化	100.
図-5.27	ω の進展に伴う J の変化	103.
図-5.28	β の進展に伴う J の変化	103.
図-6.1	マルチクラック形状図 (計算モデル)	110.
図-6.2	マルチクラック 重み積分関数の作成概要	111.
図-6.3	新開口関数 実数曲面 (マルチクラック)	112.
図-6.4	新開口関数 虚数曲面 (マルチクラック)	113.
図-6.5	応力 σ_r (解 No.3) 全体形状, 開口部拡大	115.
図-6.6	応力 σ_θ (解 No.3) 全体形状, 開口部拡大	116.
図-6.7	応力 $\tau_{r\theta}$ (解 No.3) 全体形状, 開口部拡大	117.
図-6.8	変位 U_r (解 No.3) 全体形状, 開口部拡大	118.
図-6.9	変位 U_θ (解 No.3) 全体形状, 開口部拡大	119.

図 - 6 . 1 0	4 つの解の重ね合わせ結果 (クラック 3 ケ所)	-----120.
図 - 6 . 1 1	4 つの解の重ね合わせ結果 (クラック 2 ケ所)	-----121.
図 - 7 . 1	F E M 解析モデル	-----125.
図 - 7 . 2	変位 U_r F E M との比較	-----126.
図 - 7 . 3	応力 σ_x F E M との比較	-----126.

表 の 一 覧 表

表-1.1	研究の位置づけ（「クラック（亀裂）」に関する全体概要）	---- 13.
表-1.2	本研究の内容	----- 15.
表-3.1	$f_k(z)$ の組み合わせ Mode 関数 $g_1(z)$, $g_2(z)$	----- 50.
表-3.2	関数の次数と Type 別による $Q(z)$	----- 50.
表-3.3	面内力の総和と応力場との関係	----- 52.
表-4.1	解析解の一覧表（解 No.1～No.20）	----- 57.
表-5.1	重ね合わせに用いる係数	----- 74.
表-5.2	集中ねじり力 重ね合わせに用いる係数	----- 80.
表-5.3	クラック半区間 ω の変化に伴う重ね合わせ係数	----- 82.
表-5.4	process zone 区間 β の変化に伴う重ね合わせ係数	----- 82.
表-5.5	ω の進展に伴う重ね合わせ係数の変化（ $\beta = 10^\circ$ ）	----- 85.
表-5.6	β の進展に伴う重ね合わせ係数の変化（ $\omega = 20^\circ$ ）	----- 88.
表-5.7	重ね合わせに用いる係数	----- 90.
表-5.8	一様引張力 重ね合わせに用いる係数	----- 96.
表-5.9	クラック半区間 ω の変化に伴う重ね合わせ係数	----- 98.
表-5.10	process zone 区間 β の変化に伴う重ね合わせ係数	----- 98.
表-5.11	ω の進展に伴う重ね合わせ係数の変化（ $\beta = 10^\circ$ ）	-----101.
表-5.12	β の進展に伴う重ね合わせ係数の変化（ $\omega = 20^\circ$ ）	-----104.
表-6.1	重ね合わせに用いる係数	-----114.

第 1 章 序 論

1.1 クラック解析の現状

クラックを含む弾性体に外力が作用するとクラック先端に応力集中が発生するが、このような力学問題の研究は Griffith¹⁾, Westergaard²⁾, Irwin³⁾ 以来数多く発表されていて枚挙に暇がない程である。このような現状にも拘らず依然としてクラックの問題は新しいテーマであり、毎年多くの研究が報告されている。

土木工学の分野では鋼材のクラック、溶接欠陥、切欠きの問題は言うに及ばず、鉄筋コンクリートや最近脚光を浴びているファイバーコンクリートのクラックの問題、岩石中のクラックや地盤中の断層の問題にまで研究活動が広がっている。

多岐にわたる諸研究を網羅し尽くすことは不可能であるから、一様弾性体中のクラックおよびインターフェイスクラックの解析的研究に的を絞って簡単に従来のクラック解析の動向を述べる。なお、「重み積分法で応力集中を有限化させる解」に関する研究は著者等による独特なものであり、あまり例が見られないので別記する。

(1) 一様弾性体中のクラック

(a) 等方性 2 次元問題 (無限大の応力集中)

Griffith¹⁾, Westergaard²⁾は、図-1.1 に示すような 2 次元問題に対して X 軸上の σ_y が 図-1.2 の曲線①のようにクラック先端で無限大になる解を得た。これに対して Irwin³⁾は応力拡大係数 K というものを定義して有限板のクラックや自由辺のクラック先端の安全性を評価する方法を提案した。この K 値はクラック先端で無限大に発散する応力分布を無次元化するスケール・ファクターであるから K 値を用いることは形式的にもせよ Westergaard の無限大の応力集中を前提にしている。しかし K 値は簡潔な定数でありながらその物理的な意味は明解であり、クラックの安全性の指標として有力なパラメータであることが実験結果より認識されて広く活用されている。

長谷部等^{89)~93)}は半無限板の縁にある三角形切欠き、隅角部に丸みのある Y 字形帯板、無限板中にある矩形孔について、応力集中部から発生したクラックの応力解析を有理写像関数と Muskhelishvili の手法を用いて行い応力拡大係数を求めている。この研究では切欠き角度の相違による応力分布の特性、曲率半径と応力集中との関係等を考察し、切欠きの力学の一体系を確立しようとしている。

クラックの解析における他の 1 つの有用なパラメータは Rice⁴⁾によるエネルギー解放率 J である。この J は弾性限度内であれば K 値と関連付けられるが、塑性領域においてもクラック先端のひずみや応力度の不明確さを補うものであって、無限大の応力集中の不合理性に関する議論を回避し得るものであるからクラックの進展に対する有用なパラメータである。 J は多くの実験的研究でも活用されているが、たとえば Abeyaratne⁵⁾等によっても包括的な研究報告がなされている。

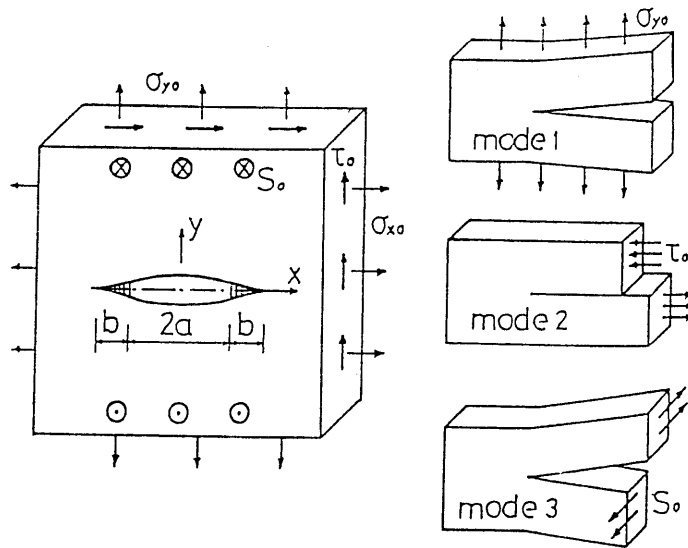


図-1.1 クラックの形状（２次元の場合）

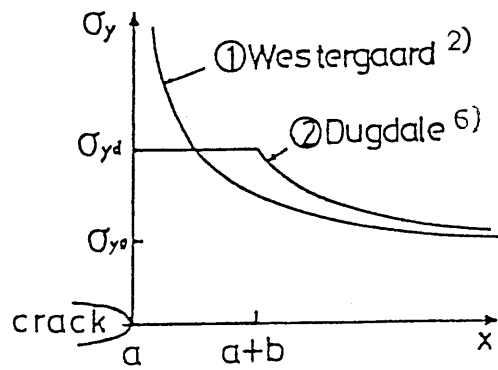


図-1.2 従来の解析的な解

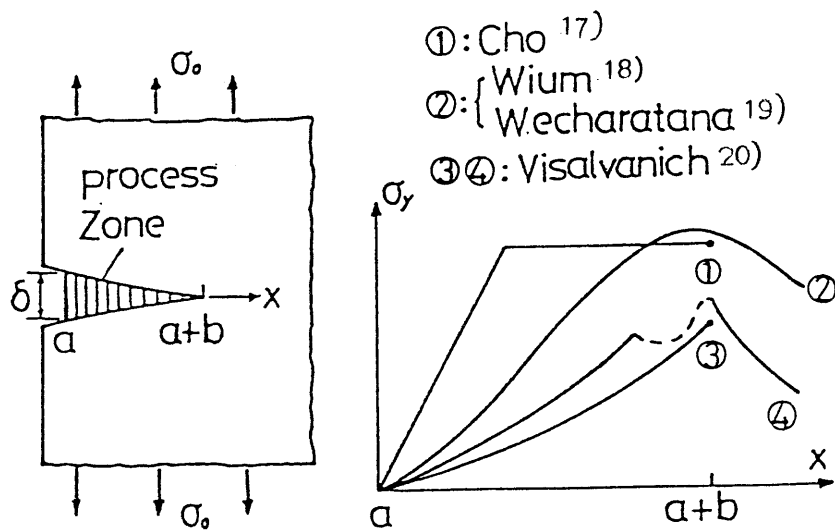


図-1.3 コンクリート，繊維補強コンクリート
における開口部の応力

(b) 等方性 2 次元問題 (有限応力)

クラック先端で無限大の応力度が生ずるのは不都合であるから σ_{ya} で打ち切られた応力歪み図を与える 図-1.2 の②で示される応力分布の関数を Dugdale⁶⁾が導いた。これは以後の多くの研究で引用されていて合理的な解であることが広く認められている。また、クラックの先端が有限な曲率を持つ円弧で構成されているならば応力集中は有限となり、この考え方を基本にした円孔、楕円孔に関する研究は多い。

土木工学の分野として代表的な建設材料であるコンクリートあるいは岩石・岩盤等は粒子の粗い混成材料である。このような材料におけるクラック周辺の応力集中はマクロ的な把握が必要であり、金属材料とは異なり穏やかに立ち上がって有限な応力分布になるものの方が有意義である。従って有限な応力集中に関する研究としてコンクリート関係の研究に注目する。

Carpinteri⁷⁾はコンクリート中のクラックに関する研究展望を紹介し、金属材料に適用される試験方法で多くの供試体の実験を行った結果をまとめている。Yu等⁸⁾はコンクリートと岩石に関する破壊力学の適用について研究の総括を行い、土木学会の破壊力学分科会⁹⁾は金属材料からコンクリート・地盤の破壊に至るまでの有意義な研究紹介を行っている。破壊力学の理論をコンクリートの分野へ始めて導入して実験を行ったのは Kaplan等¹⁰⁾であり、鉄筋コンクリートの壁体のクラック現象の解明にこの理論を導入したのは Romualdi と Batson¹¹⁾である。Glucklich¹²⁾はコンクリートのクラックの近傍の消散効果に着目して、これは周辺のマイクロクラックによるものであると報告している。Hillerborg¹³⁾¹⁴⁾等は一軸引張りにおける歪みの軟化特性を考慮して応力-歪み特性を表して fictitious crack model を提案しているが、これに関しては Reinhardt¹⁵⁾、Li¹⁶⁾等も詳細な研究を行っている。

これらの他に興味を引く実験的な研究としてつぎのようなものがある。Cho¹⁷⁾はコンクリートの自由辺より生ずるクラック部分の応力分布は Dugdale の方式よりは 図-1.3 の曲線①のような応力分布を仮定すると実験データと有限要素法の結果とはよく一致することを示した。

Wium¹⁸⁾はハイブリッド方式という数値解析法を活用して 図-1.3 の曲線②のような応力分布形を導いているが、これは特異点と K 値という従来の概念を大胆に打ち破って実験的に Dugdale に近づいたものとみなされよう。

他の一つはファイバーコンクリートのクラック部分の応力に関する実験的な研究であり、Wecharatana¹⁹⁾は 図-1.3 の曲線②を仮定するのが合理的であることを示し、Visalvanich等²⁰⁾は③と④の形状の耐力分布を実験データとして示している。いずれの実験データも有限要素法による解析結果と比較されていて、有限要素解析法の有効性が示されている。これらは共に著者の理論解の活用をの途を開いたものと言えよう。

(c) 3 次元弾性体中の円盤状クラック

無限に広がる 3 次元弾性体に円盤状クラックが存在する問題ではクラック面に垂直方向に一様引張りが作用する場合は厳密解を得ることができる。例えば宮本²¹⁾が示しているように回転楕円座標系で解く方法が最も適切である。その他 Kassir²²⁾、Smith²³⁾、Bell²⁴⁾、浪岡²⁵⁾も無限大の応力になる解を級数表示や他の関数を用いて導いて K を得

ている。Tsai²⁶⁾は Dugdale 方式の応力分布に対応したものを解いている。

Barenblatt²⁷⁾は 3 次元弾性体中の円盤状クラックの引張り問題において、開口させる限界荷重ということについて研究している。理論式に多少の近似法を導入することによって、クラック表面あるいは弾性体内に対称な集中力や分布外力を作用させてクラックの開口部分をさらに進展させるための限界荷重を求めている。

他方クラック面に平行方向のせん断力を受ける問題は難解であって完全な解は得られていないように思われる。高久田等²⁸⁾²⁹⁾は積分方程式の表示という形に至るまでは厳密であるが、実際の積分は不可能なために級数展開の第 1 項のみを示している。その他 Kassir³⁰⁾は 3 角級数解、Smith³¹⁾は Bessel 関数解、Krenk³²⁾は積分方程式と Bessel 関数とによる解によって近似解をそれぞれ導いている。

土田、内山³³⁾は有限な円筒状柱内に偏平楕円体状空かが含まれる問題を研究して厳密解を得ている。円盤状クラックに類似したものとして高久田等³⁴⁾はリング状円盤クラックの問題を解いている。その他石田等³⁵⁾は楕円状空かの引張り問題を体積力で解いている。Westmann³⁶⁾は半無限弾性体表面の円形の荷重や空隙の問題を解いている。これらはいずれも土木工学の分野においても興味ある問題である。

溶接部分の不溶接部や残留応力の問題を解くために Wu³⁷⁾は厚板の表面近傍の半円形状のクラック問題を実験値と代数式表示とで解いている。小林等³⁸⁾は半無限弾性体表面の半円盤状クラックの問題を積分方程式で表現して数値計算法によって K を求めている。

土木工学の分野で特に今後一層発展させたいと思われるものは高久田等²⁹⁾による 3 次元の無限 2 層間のインターフェイスクラックである。これはコンクリートの打ち継ぎ目、コンクリートと岩盤、地層間のクラックの問題として大いに期待されよう。この研究は厳密な積分が不可能のまま級数展開で近似解のみが与えられている。他の一つは Kassir³⁰⁾³⁹⁾による長方形板状クラックの問題である。これも断層や破碎帯の力学問題として大いに興味ある問題であるが、積分方程式に基づく数値計算あるいは Bessel 級数展開に依らざるを得ない。この 3 次元の問題も基本的には近似的に K を求めることに尽きる形式となっている。

(2) 有限要素法による数値解析

有限要素法は汎用の数値解析手段として非常に優れている。したがってクラック問題の解析においても広く利用されていて、鷺津等⁴⁰⁾による有限要素法ハンドブックに詳細に紹介されている。有限要素法による研究の方向はおおよそ 3 つに大別される。

その 1 つは直接法と名付けられている解析法であって、クラック先端周辺を単に小さい要素で覆って解析して無限大の応力集中を近似的に表すものである。その解析結果として K 値、J 積分等を推定するものであり、このような研究の例は宮本⁴¹⁾によるもの、Watwood⁴²⁾によるもの等である。しかし、この無限大の応力集中にこだわって有限要素法をその数値解析法としての特性に反して盲目的に活用しようとするのは、好ましい方向ではない。

第 2 の方向はハイブリッド法と呼ばれる手法であり、無限大の応力集中は解析関数の

特異関数で表して他の滑らかな応力関数成分で境界条件を満足するものを有限要素法で表現する解析法である。特異関数という考え方は、平板の曲げの影響面を求めるために Pucher⁴³⁾によって提案されたものであるが、これは Pain等⁴⁴⁾や Byskov⁴⁵⁾によってクラック応力集中用に改良された特異関数を用いるものである。Wium等¹⁸⁾はコンクリートの破壊現象の説明にこのような解析法を採用している。豊島等⁴⁶⁾は特異関数を重ね合わせつつK値を導く研究を行っている。Loo⁴⁷⁾は無無限大の応力ではなくクラック先端の塑性域を表現するための特異関数を定義してハイブリッド法を活用している。Henshall⁴⁸⁾と Barsoum⁴⁹⁾は特異関数を改良する代わりに、有限要素法で表されたクラック線上の接点の位置を特定の法則で強制的に移動させることによって特異点を構成する方法を提案している。

第3番目の方向はコンクリートにおけるクラックのように有限な応力集中を有限要素法で表現しようとするものであって、有限要素法の特性に合った解析方法である。これは実験結果を説明するために広く採用されていて、例えば Wecharatana¹⁹⁾は有限要素法で表された開口部の先端の接点に台形の引張り外力（開口を閉じる応力で Dugdale方式の応力分布を意味する）を作用させて数値計算をすると開口部の形も実験値と良く一致すると報告している。

（3）インターフェイスクラック

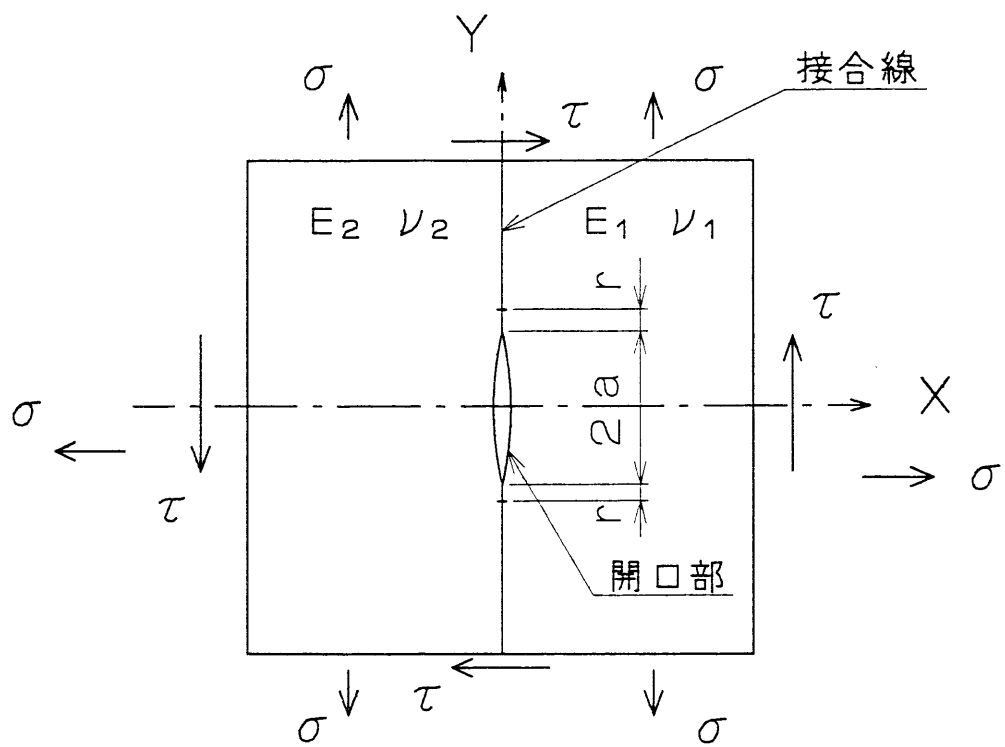
弾性係数の異なる2種類の弾性体が接合されている境界面に存在する未接合部分をインターフェイスクラック（接合面亀裂）と定義する。土木工学の分野ではこのインターフェイスクラックの問題に対応する力学モデルは多く、例えば鉄筋とコンクリートの剥離の問題を始めとして、鋼管と周りに打設されたコンクリートとの接触面の問題、岩盤上に打設されたコンクリート打設面の空隙周辺の応力集中問題等である。さらに鋼板相互の溶接接合でも厚さの異なる場合の未溶接部分は、板の厚さを剛さで表現した2次元問題として扱うと典型的なインターフェイスクラックの問題となる。

接合面に沿う未接合領域近傍の問題は現実的で重要な課題であって従来多くの研究者によって手掛けられてきたが、理論的な研究の成果は非実用的な解を与えるものがほとんどで現実の問題に適用するには不都合なものである。

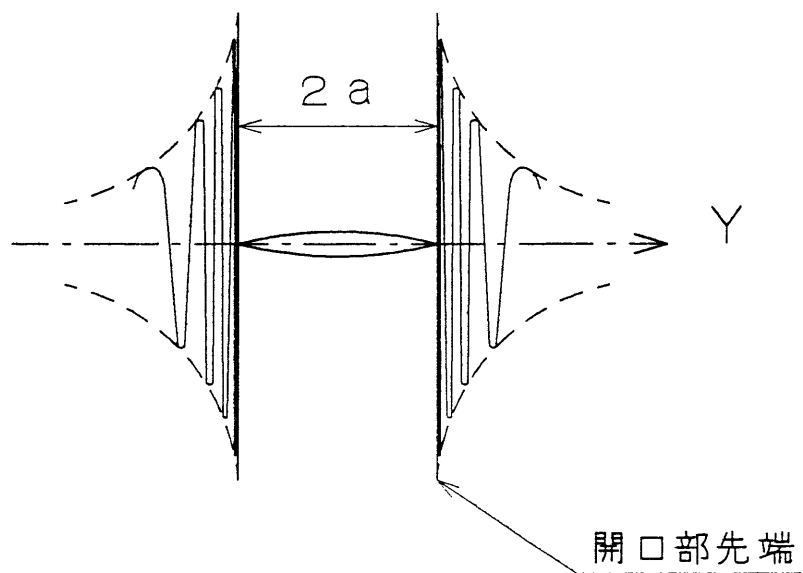
（a）直線インターフェイスクラック

直線状の接合面に関する研究の主なものを挙げると次のようになる。Williams⁵⁰⁾, Erdogan⁵¹⁾, England⁵²⁾, Rice⁵³⁾等は、剛さの異なる2つの半無限弾性平板がy軸上で接合され、クラックが接合線の $y \leq a$ において生じている場合の面内力問題（図-1.4参照）を理論的に解くことを試みて一応の理論解を得ている。その他接合面上に等間隔のクラックが無無限に存在する場合の解も研究されているが、それらの解はすべて次のような非現実的な難点を含んだものである。

クラックの軸に対して面内力が垂直（引張り）の場合もせん断の場合もクラック先端の応力集中は $(y-a)^{-0.5} \sin(\log(y-a))$ というオーダーの特異項を持つことが示されている。これは両方の弾性体が全く等しい（一様の無限弾性板である）場合の Westergaard の解の特異項 $(y-a)^{-0.5}$ と $y=a$ で集積点を持つ関数 $\sin(\log(y-a))$ の積である



(a) 解析モデル



(b) 応力集中形状

図 - 1.4 Erdogan等の解析モデル

から、『接合面クラックの問題ではクラック先端の応力集中は集積特異点の様相を示しさらにこの特異性のためにクラック先端部では開口変位はお互いにめり込む状況になる』ということの意味するものである。応力集中がこのように集積特異点を構成するのではあまりにも非現実的で活用することは望めない。

Atkinson⁵⁴⁾はこのような不合理な点を解消するために接合面に等方性の薄い中間層を想定して、クラックはこの薄い層内に生ずるものと仮定して Westergaard の解を適用することを提案している。さらに薄い中間層が左右の半無限弾性体の弾性定数を直線的に連結するような直交異方性体であるとする解析法も示しているが、これらは中間層を設定したものであるから仮想的な解である。

Comninou⁵⁵⁾⁵⁶⁾⁵⁷⁾はクラックの先端部に『せん断抵抗力は無いが、モード I の引張りでありながら圧縮応力が生じて開口はしないと想定した contact zone という部分』を設定して応力の集積性と変位のめり込みの不合理性を一応回避することに成功して多くの研究を報告している。しかし、解を得るための積分方程式は数値計算によって解き contact zone の区間の長さを与えているが、極めて小さいものとなって分子や原子のオーダーの長さとなっている。このような寸法は材質の均質性を保ち得ない大きさであるから有効性に疑問の残ることは否定できない。

Gautesen と Dundur⁵⁸⁾は Comninou の積分方程式を理論的に解くことに成功して同様な結果を示している。Atkinson⁵⁹⁾⁶⁰⁾は contact zone のモデルを Comninou とは異なる Mellin の変換を用いて誘導している。

Mak, Keer, Chen, Lewis 等⁶¹⁾は Comninou の contact zone ではせん断力が生じて相対変位を生じないとする no-slip モデルを設定して、フーリエ変換で応力関数を定義する手法で応力の集積特異点を解消して Westergaard の解に相当するものを得ている。

伊藤⁶²⁾は contact zone を設けない接合面クラックの問題をフーリエ変換で解くことを試みている。開口変位を直交関数で展開することを併用することによって応力の集積特異点を回避した解を得ている。

長谷部等⁹⁴⁾⁹⁵⁾は有限部で接合された異種材料接合問題を考え、集中力と集中偶力が作用する場合の接合端(剥離端)から材料中にクラックが発生または剥離が進展する条件を求めている。解析手法は有理写像関数を利用し、クラック発生条件は発生前の応力分布、クラック及び剥離のエネルギー解放率を用いている。

(b) 円形インターフェイスクラック

円形接合面に関する研究の主なものを挙げると次のようになろう。水嶋等^{63)~66)}は円孔を持つ充てん物が平板に挿入され、平板が引張りまたは圧縮を受けた場合、そして充てん物自体に荷重が作用する場合の応力分布を求めた。円孔と充てん物との接合条件としては両者の接触部において摩擦がない場合とある場合について解析している。

平島等^{67)~71)}は等方性体、異方性体の面内に円形の空孔または剛体介在物がある問題について、無限遠荷重、回転および任意の有限位置に集中力・集中偶力を作用させた場合の応力分布や応力拡大係数を求める解析解を誘導している。

山本等⁷²⁾⁷³⁾は弾性円板充てん物のはめ込まれた無限板に引張りまたは圧縮荷重が作

用し、充てん物と円孔の一部にすきまが発生する場合に接触領域や接触圧力分布に及ぼすはめ合い代、荷重および充てん物の材料定数の影響を明らかにした。

Perlman, Sihおよび Toya⁷⁴⁾は円形に接合されている異質弾性体の接合部にクラックが生じている2次元問題を考え、無限遠方で2軸荷重が作用している場合のクラック周りの応力と変位および応力拡大係数を求めた。またクラック進展にも言及し、Griffithの仮想仕事の原理からエネルギー解放率を求めている。

中西等⁷⁵⁾は破壊過程を解析する上で、複数のインターフェースクラックが生じている場合の干渉問題が重要であるとし、クラックが2ヶ所の場合の干渉についてクラックの大きさ、位置、荷重方向、材料定数などの応力拡大係数に及ぼす影響を調べた。具体的にはクラックが対象な位置に存在する場合、一方のクラックが大きくなるに従い他方のクラックの応力拡大係数が減少し、大きさの等しい2つのクラックが近づくと応力拡大係数が急激に増大する等の結果を得ている。

また、長谷部等⁷⁶⁾⁷⁹⁾⁹⁷⁾は2軸荷重を受ける円形剛体介在物に発生するはく離とクラックの連成問題と題し、ある位置まではく離が進展した時、さらにこのはく離が進展するのがあるいは、はく離端からクラックが生ずるのか等について写像関数を利用した報告を行っている。

円形クラックからの新たな展開として、楕円接合面クラック、角部を有する長方形およびひし形接合面クラック等の研究が考えられる。前者の例として、中西等⁷⁷⁾が楕円形剛体介在物問題を対象に、単独クラック(接合面に1ヶ所のクラック)、マルチクラック(接合面に複数のクラック)の応力拡大係数に及ぼすクラックの大きさ、位置、形状などの影響を一軸および2軸引張りの場合について報告している。

後者の例では、石川等⁷⁸⁾と長谷部等⁷⁹⁾の研究があげられる。石川等は短繊維強化材を念頭に Schwarz-Christoffel 変換を用いた写像関数により長方形の剛体強化材を扱い、接合面上に存在する単独クラック問題を Mushelishvili の方法を用いて2次元弾性論より解析した。

長谷部等はひし形剛体介在物を対象にクラック発生前、クラックが隅角部に対称あるいは非対称に2ヶ所、また片側に1ヶ所ある状態を平面弾性混合境界値問題として解析した。隅角部角度やクラックの大きさ、並びにポアソン比を変え、隅角部やクラック先端の応力の強さを求めて、クラック発展の可能性や進展特性について考慮した。

以上のように多くの研究は接合面クラックの応力の集積特異点の状況を持たない解を得るためにそれぞれ努力しているが、有限な応力集中を指向してはいない。ただ、単独クラックからマルチクラックへの展開、クラック相互干渉問題への新たな研究方向が見い出されつつある。

(4) まとめ

以上のように簡単な記述ではそれぞれの研究の本質を言及したことにはならないが、これらの諸研究はそれぞれ目的とした特定の方向へ向かうものとしては優れたものであり異論をはさむ余地のない研究である。これらの研究に対しておおよそ次のような方向が認められる。

(a) 第1の方向は 図-1.2 に示した Westergaard の無限大の応力集中を是認する解である。等方性2次元問題としてのクラック解析は最も広く研究されているが、2種類の等方性弾性体が接触する面のインターフェイスクラック、3次元弾性体中のクラック等の研究の解析的なものの多くはクラック先端に無限大の応力集中を持つ厳密解か、特異項の大きさを級数解で与える精度の高い解を導き出している。

(b) 第2の方向は Dugdale 方式の解である。クラックの開口モードⅠ,Ⅱ,Ⅲに対して特異点を持つ第1方向の解が既に得られている場合には次は Dugdale 方式の解を誘導するという方向が主流のように思われる。それぞれ得られたものは所定の目的にかなったものとして有意義なものであるが、クラック先端部分より応力度が穏やかに立ち上がるといような解析解は見当たらない。全て直立している応力分布であって 図-1.2 に示したそのものである。

(c) 第3はクラック先端部分の不確定現象をマクロに、エネルギー扱いで把握しようとするJ積分である。これはややもすると厳密さにおぼれ勝ちな高度な解析解に勝とも劣らない優れた考え方であり、理論的なもの、実験的なものが多数発表されている。

(d) 第4の項目として応力拡大係数 K の研究があげられる。これは実験を主体とした簡便で有用なものであり、実験結果の整理として広く活用されている。しかし、これは解析解としての Westergaard の特異項 $1/(\xi)^{1/2}$ を是認して、そのスケールファクタあるいは幅を設定する研究である。したがって実は第1の方向の一部分ともみなし得るものであろう。

(e) 第5の方向は有限要素法による数値解析的なものであり、弾塑性解析も可能であるから適用範囲が広い。多くの研究があるがそのほとんどは Dugdale 方式に合わせて直立する応力分布を主体としたものである。有限要素法は弾塑性の応力分布のように穏やかな変化を持つ応力解析に適しているが、特異点のような急変化する応力解析には不適當である。しかし、有限要素解析によって Westergaard 方式の応力集中を近似させて、特異点近傍の曲線の補間によって特異点としての応力拡大係数を求めるような研究が見受けられる。

(f) 第6の方向はインターフェイスクラックの問題である。インターフェイス形状は直線、円形、楕円形、角部を有した長方形、ひし形を対象としており、クラックの数も1ヶ所および複数ヶ所ある場合について応力計算および干渉問題について報告されている。発生する応力はクラック先端で集積特異点の様相を示している。

クラックの解析は機械学会関係で多くの研究が見られるが、これらのほとんどは金属材料のように均質でクラック先端部分の応力度の急変化や直立の勾配は不自然ではないような弾性材料に対するものである。このような境界条件の下では厳密な解が多岐に亘って研究されているわけであるが、コンクリート系材料、岩盤、地質材料等におけるマイクロクラックや断層部分、破碎帯にまで着目するならば、機械学会系の成果をそのまま適用することは不適當であることは断るまでもない。2層弾性体のインターフェイスクラックもコンクリートの打ち継ぎ目の空隙周辺の研究として有望ではあるが、クラック

周辺で無限大の応力が生ずるという解では好ましいものとは言えない。このような状況に基づいて土木建築工学系として汎用性のあるクラック解析方法の研究が望まれよう。

土木工学としてのクラックとは、上述したようにコンクリートや岩盤、土質等を想定して応力度が穏やかに増加しつつ有限な応力集中となり、同時に先端に開口変位も生じる区間を持つクラックのことであろう。従来の解析的な研究としては、このような分野が残されていたように思われる。

1.2 重み積分手法に基づく応力集中の有限化手法

『クラック先端の応力集中を滑らかで有限なものにすると同時に process zone 相当部分も構成するような一つの解析解を導く方法』として『開口長さに関する重み積分法』が中川, 段⁸⁰⁾によって提唱された。それ以来, 著者の研究に至るまでこの手法に基づくクラックの解析例のいくつかが公表されているので, その研究の概要を簡単に述べる。

(1) 一様弾性体中のクラック

(a) 2次元問題の Westergaard の解において, クラックの長さを表すパラメータを積分変数として, 適当な重み関数を乗じつつ一定区間にわたって積分することにより得られる応力関数を導いた(重み付き積分法と名付けている)。この手法によって開口変位と有限な応力集中が共存する区間が形成され, 同時にモード I と II に対して有限な応力分布が構成された⁸⁰⁾。

(b) 2次元のモード I の問題を対象としているが, Dugdale 方式を拡張して有限な勾配で応力度が立ち上がる場合の応力解を示している。これはファイバーコンクリートや岩盤中のクラック解析においてより有効である⁸⁰⁾。

(c) 2次元のモード I と II の問題を対象としているが, 複数のクラックが存在する場合の解析に適用可能な特異関数を導き, それを特異曲面法と名付けている。滑らかな開口も応力度も存在する単位曲面を多数重ね合わせて最小自乗法によって近似的に境界条件を満足させる方法である⁸¹⁾。

(d) 3次元無限弾性体中に厚さ 0 の円盤状クラックが存在する場合を対象としている。作用する力はクラック面に垂直方向一様引張り(軸対称)であって 2次元の重み積分法と同様な有限応力集中の変位関数を導いて計算例を示している。Dugdale 方式の解の重ね合わせ法を用いることによって導かれている。また, せん断を受ける場合について境界条件を満足する厳密理論解も導いている⁸²⁾。

(e) 2次元問題のモード I と 3次元の円盤状クラック問題のモード I の場合についてクラック進展に対するエネルギー解放率(J積分)を導いている。この研究では, 開口しつつ応力度も存在する process zone をクラック先端部分に設定しているので, エネルギー解放率としてクラック開口長さの進展に対する変化率と process zone 長さの進展に対する変化率を定義した⁸³⁾。

(2) 直線インターフェイスクラック

(a) 等方弾性体を対象として, クラックにおける開口変位は有限項のフーリエ級数で表現できると仮定し, 応力関数はクラック軸方向のフーリエ積分で表されるものとする。クラック先端の開口変位が勾配 0 で閉じ合う条件を付けることによって有限で滑らかな応力集中を構成する級数解を導いた⁸⁴⁾。

(b) 等方弾性体を対象として、クラック開口部と接合部との間に応力も変位も生ずる process zone と称する領域を設定した。応力および変位は複素関数で取扱い、クラック先端で集積特異点が現れない有限で滑らかな応力集中を構成する応力関数を導いた。作用外力はクラック面に平行な一様せん断力あるいはクラック面に垂直な一様引張力である⁸⁵⁾。

(3) 円形インターフェイスの平面応力問題

一様弾性体中にある円形剛体介在物の接合部にクラックが生じている場合の応力と変位を解析した。クラック先端に process zone を設定し、介在物中心に集中荷重 P を作用させた場合の解をフーリエ級数によって表されるものとして導いた⁸⁶⁾。

(4) コンクリートの破壊挙動

コンクリートの4点曲げ梁の全体的破壊挙動をシミュレートする手法を示している。過去に中川、段が提案した重み積分法を利用し、有限な応力集中は複素応力関数に基づいて求めている⁸⁷⁾⁸⁸⁾。

1.3 本研究の特徴

本研究の特徴は次のような点である。参考資料として近年のクラックに関する研究の全体概要を表-1.1に添付する。表-1.2は本研究の内容を示す。

(a) 弾性係数が異なる円形インターフェイス上にクラックを有する場合について、クラック先端部の応力集中形状を有限な大きさで表し得る応力関数と変位関数を導いた。開口形状も複数の解析解を組み合わせることにより、より自然な形に改善した。

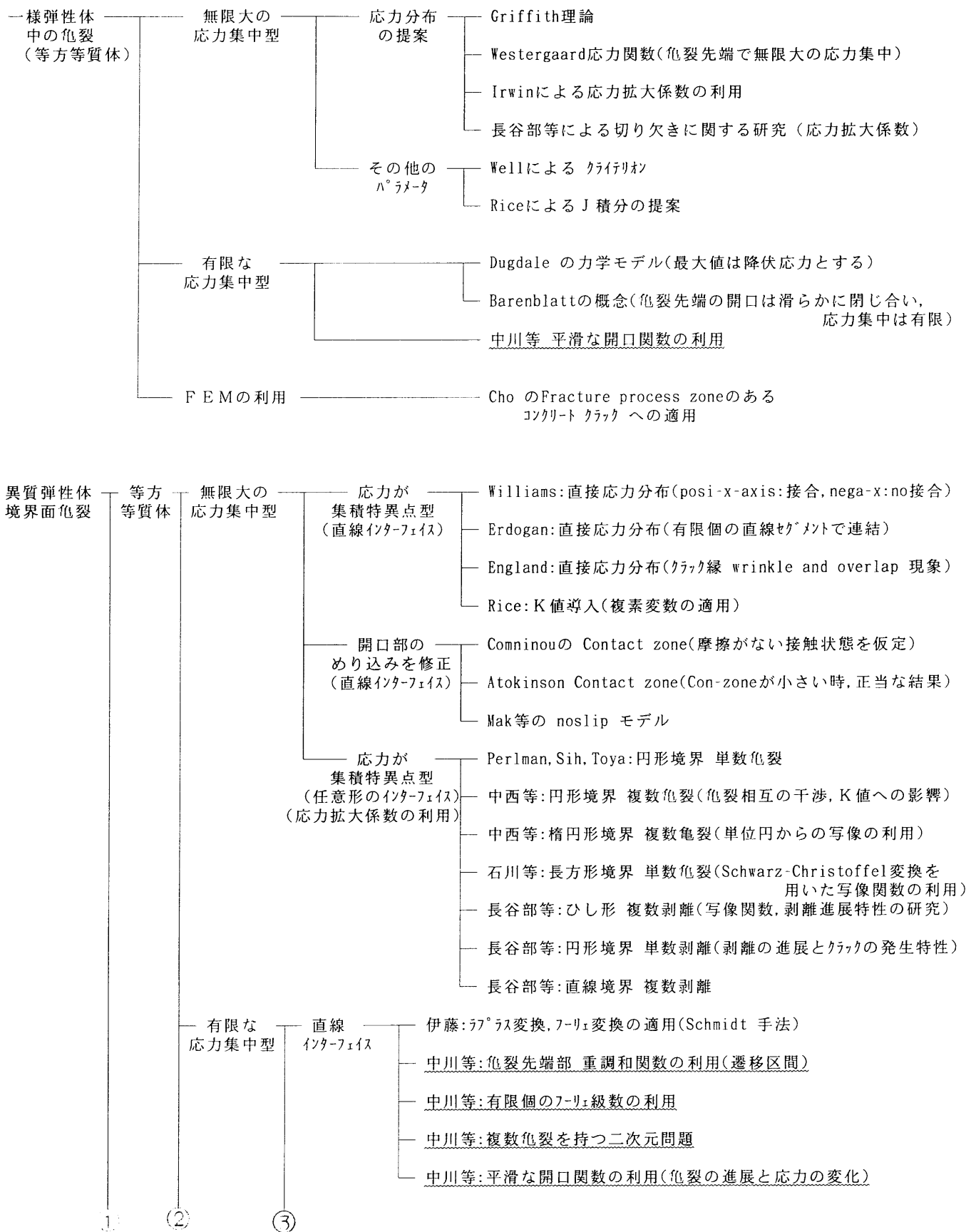
(b) クラック先端部に有限な応力分布を与える解を導き得た要因は、先端部に応力度と開口変位が共存する区間 (process zone) を設定したことであり、同時にその区間で中川等が以前から研究している重み積分法を利用したことである。重み積分では直線クラックの場合と異なり円形境界特有の重み関数を新たに見いだした。重み積分式は任意の次数式が可能であるが、2次式、3次式、4次式を用いて重み関数を定義した場合の応力関数、変位関数について比較検討を行った。

(c) 円形インターフェイス上にクラックを有する問題について、境界条件を満たす応力関数の一般解の構成法と応力関数群を見い出すことができた。一般解は開口部と process zone を含む新開口関数、境界条件を満たす要素関数、任意の応力場を表す基本解より構成される。

(d) 接合面上のクラック数については、単独クラック (クラック1ヶ所) およびマルチクラック (クラック複数ヶ所) に対し有限な応力集中を構成することができた。

(e) 求めた応力関数を検証する一手段として、クラック先端部分の不確定現象をエネルギーにて把握するJ積分を適用し、またFEM解析との比較検討を行った。

表-1.1 研究の位置づけ(「クラック(亀裂)」に関する全体概要)



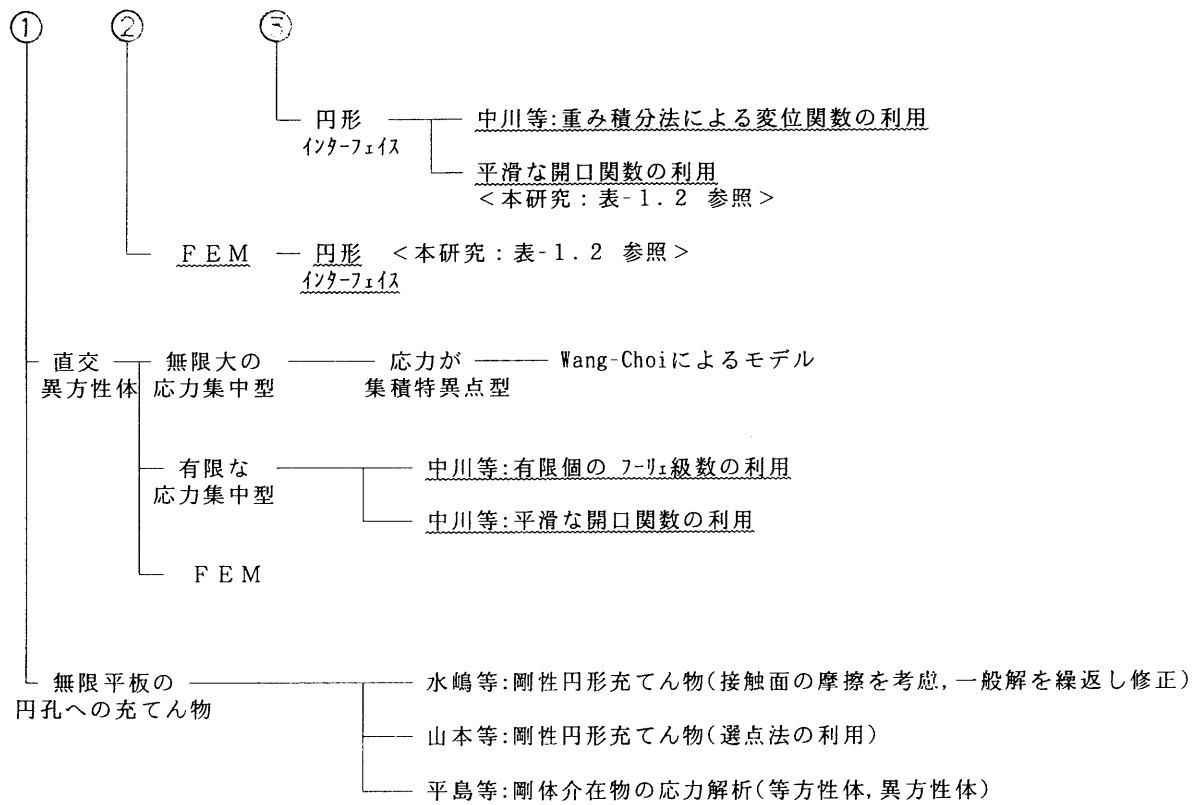
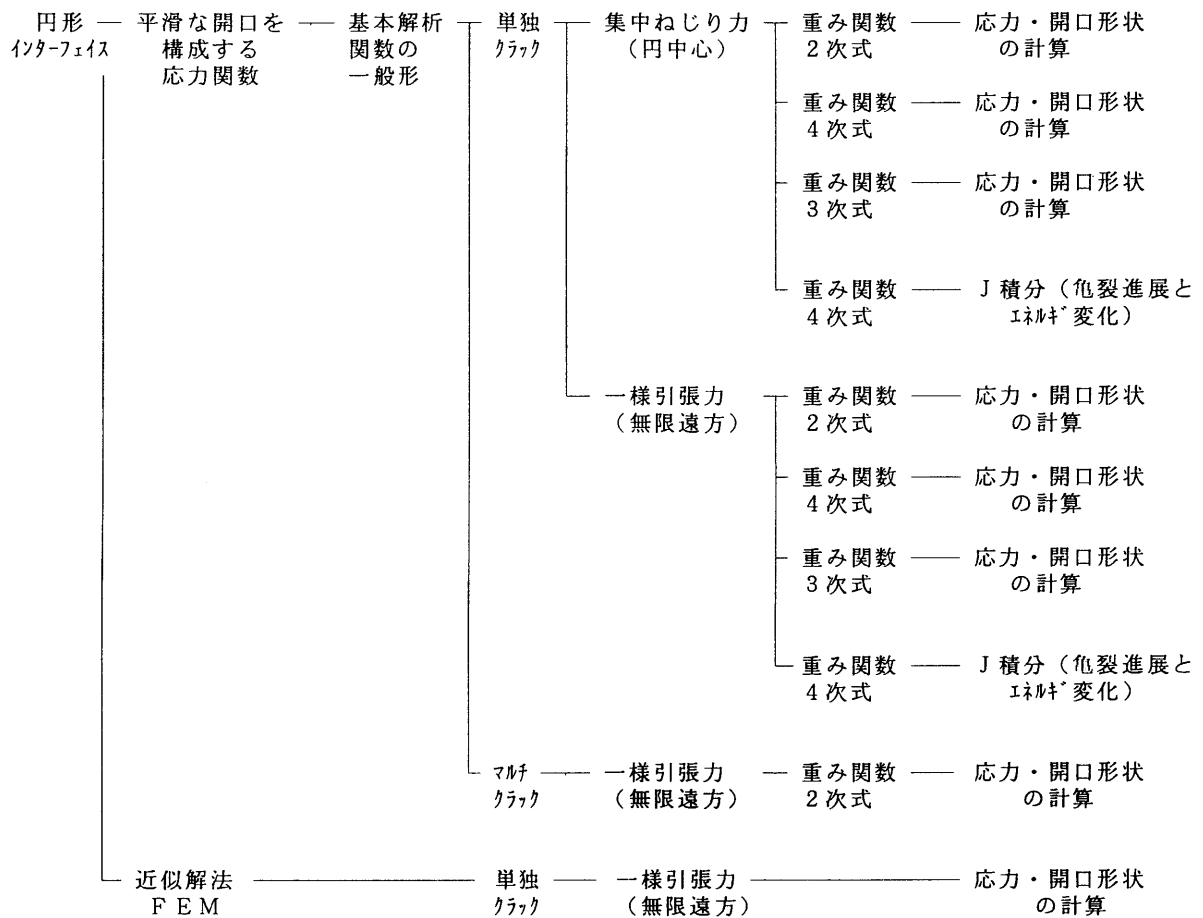


表-1.2 本研究の内容



1.4 本文の概要

本論は第2章から第7章までにわたって詳述されている。各章の計算例はなるべくクラックのパラメータが等しく相互に比較し易いように配慮されている。特にクラックの応力開口部分 ω （度）に対する process zone β （度）が大きくしてあるが、これは応力集中の形状特性がわかり易いように配慮したものである。

第2章： 重み積分法により開口関数を誘導しているが、クラック先端部に有限な応力集中を発生させるには process zone と称する応力も変位も生ずる区間を設定し、この区間内にて任意次数の重み関数からなる開口関数を求める必要がある。本章ではその手順を示し、重み式として2次式、3次式、4次式を選定している。

第3章： 境界条件を満足する基本解析関数の一般解の誘導である。開口部を現す開口関数、process zone での重み積分を示す重み関数、円周上の境界条件を満たす要素関数、応力場を現す基本解等からなる一般解の構成法について説明している。

第4章： 解析解の誘導とその検討手法について説明している。前章（第3章）で一般解を誘導済みであるが、本章では一般解を求めるにあたり具体的に解析解をどのように誘導したかについて詳説している。

得られた解析解の妥当性を検討する手法として、クラック先端部分の不確定部分をエネルギー的扱いで把握しようとするJ積分の値を計算し、それについて説明している。また、前章より複数の解析解を見いだすことができたが、より自然な応力・開口形状を得るための解の重ね合わせ手法についても説明している。

第5章： 集中ねじり力と無限遠方で一様引張力を受ける単独クラックについて計算例を示している。解の重ね合わせによる応力・開口形状、2次式、3次式、4次式の重み関数による応力・開口形状の相違、そして開口部分または process zone 部分のクラック進展に伴うエネルギー解放率（J積分）の変化について言及している。

第6章： マルチクラックの作成手順（解析関数の誘導）と無限遠方で一様引張力を受ける場合の計算例を示している。計算結果は単独クラックの場合と比較し、応力・開口形状ともに検討の余地が残されている。

第7章： 解析関数解と有限要素法による解析結果との比較検討を行っているが、対象は無限遠方で一様引張力を受ける単独クラックである。

第8章： 以上の結果をまとめて本研究の成果を述べている。

(付記) 開口変位について

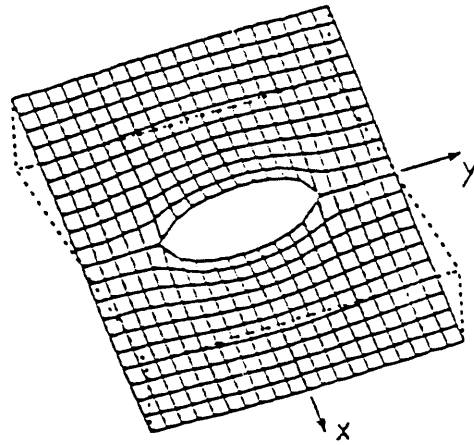
本研究では『開口変位と応力が共存する区間』という用語を頻繁に活用するが、現実的な変位や応力とそれらの数学的な表現とには多少の相違が存在するので、ここにその意味する所を簡単に図示して説明する。

現実的には鋼材のような延性材料ではクラックの開口部の垂直応力とせん断応力は0であり、その先端部には塑性領域が広がってクラック線上で連続的な塑性伸びが現れる。他方コンクリートのような材料においては開口部分の応力が0であることは同じであるが、その外側部分にはマイクロクラック等が集中することが観測されている。従ってこの部分の伸びや変位は必ずしも連続的なものではなく、マクロ的な表現を余儀なくされて process zone あるいは stress softening zone 等と呼ばれている。

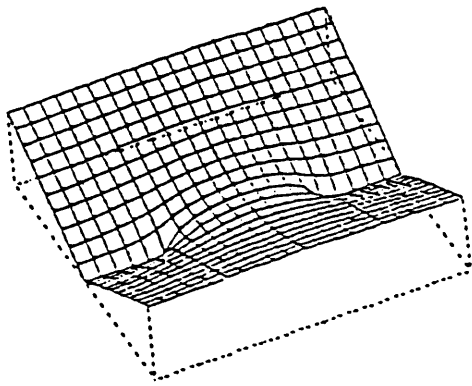
さて数学的に関数曲面として直線状のクラックにおける変位と応力を表現すると上記のような工学的なクラック先端の塑性域あるいは process zone は少々趣の異なるものとなる。重調和関数やその導関数は特異点で分岐して連続な多重曲面を構成しているが開口部のような飛躍を外見通りに生じているわけではない。クラック線に沿って余剰な多重曲面を切除する結果として開口部の食い違い変位を構成するのである(図-1.5(a)参照)。開口部分近傍の曲面は切断されなければ図-1.5(b₁)から(c₂)のようにそれぞれ別の曲面を連続的に構成しているのであるからクラック線上の多重曲面で応力がそれぞれ異なることも当然である。応力を表す曲面が偶然開口部で0になるならば従来の Westergaard の解に相当する。開口部の両端で降伏応力になっているのが Dugdale の解であるが、この降伏応力が生じている部分は変位が食い違いになっている開口部分であり、降伏応力部分も含めて全面で弾性領域になっている。開口部の食い違い変位や応力は関数曲面の複葉(多重曲面)の特性から構成されるので工学的に連続して広がる塑性変位や process zone と呼ばれる不連続なマイクロクラック群そのままは表現し得ない。工学的な塑性の伸びやマイクロクラック群による伸びは数学的には弾性変形による食い違い変位の相対変位量によって置換されて近似的に表現されることになる。

本研究における応力度と開口変位が共存する区間とは、変位の曲面が分岐する2つの特異点を結ぶ有限直線部分で応力度の曲面が完全には0にならずに両端部分で0以外の大きさになる所であるとする。この部分の弾性食い違い変位は現実の問題としては塑性伸びであるとみなすのである。

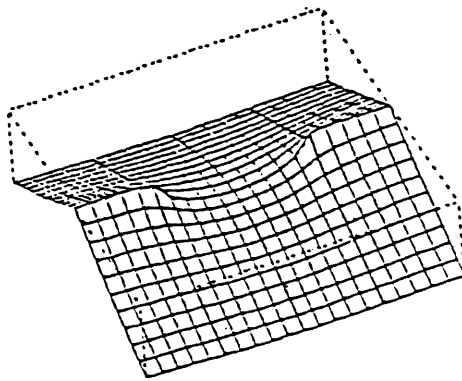
すなわち、工学的には応力が0の部分が開口(食い違い変位)部である。しかし数学的には食い違い変位が現れている部分は塑性変位や process zone も含むことになるので『開口変位と応力が共存する区間』がクラックの先端部に実現する。本研究では数学的な扱いを主とするので、開口部として応力も存在する部分も含めた食い違い変位の現れる部分を意味することにする。なおこのような区間が実現され得るのは対数分岐に基づくものであって、代数分岐からはこのようなものを構成することはできない。



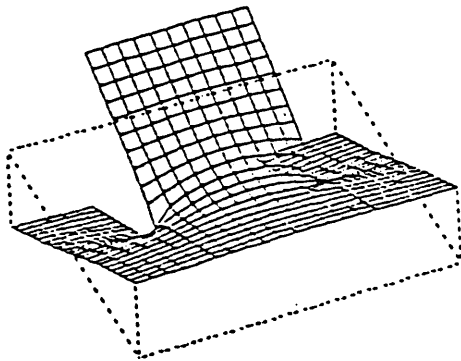
(a) 分岐による曲面



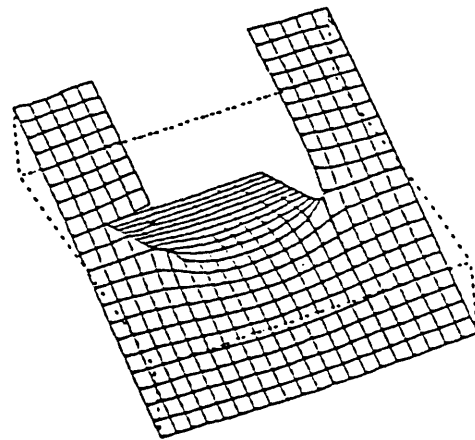
(b₁) $x < 0$ 側より開口部で連結する曲面



(c₁) $x > 0$ 側より開口部で連結する曲面



(b₂) y 軸上分岐の外側より連結する曲面



(c₂) y 軸上分岐の外側より連結する曲面

図-1.5 開口変位に関する多重曲面の形状

参 考 文 献

- 1) A.A.Griffith: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol.221, pp.163-168, 1920.
- 2) H.M.Westergaard: Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, 33, A-49-53, 1939.
- 3) G.R.Irwin: Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.24, pp.361-364, 1957.
- 4) J.R.Rice: A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J. of Applied Mech., Transactions of the ASME, Vol.35, pp.379-386, 1968.
- 5) R.Abeyaratne: On the Estimation of Energy Release Rates, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, Vol.50, pp.1923, 1983.
- 6) D.S.Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, pp.100-104, 1960.
- 7) A.Carpinteri: Application of Fracture Mechanics to Concrete Structure, J.Struct. Divi., Proc.ASCE, Vol.108, No.ST4, pp.833-848, 1982.
- 8) Yu Yaozhong, et al: The Development of Fracture Mechanics of Rock and Concrete in China (in Chinese), J. of Hydraulic Eng., No.9, pp.1-10, 1984.
- 9) 構造工学委員会構造力学小委員会破壊力学分科会: 土木工学における破壊力学の適用性, 土木学会論文集, 第380号, pp.13-26, 1987.
- 10) M.F.Kaplan: Crack Propagation and the Fracture of Concrete, J. of ACI, Vol.58, No.5, pp.591-610, 1961.
- 11) J.P.Romualdi and G.B.Batson: Mechanics of Crack Arrest in Concrete, J. Eng. Mech. Divi. ASCE, pp.147-167, 1963.
- 12) J.Glucklich: Fracture of Plain Concrete, J. Eng. Mech. Divi. ASCE, pp.127-136, 1963.
- 13) A.Hillerborg, et al: Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements, Cement and Concrete Research, Vol.6, pp.773-782, 1976.
- 14) A.Hillerborg: Analysis of Fracture by Means of the Fictitious Crack Model, Particularly for Fiber Reinforced Concrete, Inter. J. Cement Composites, Vol.2, No.4, pp.177-184, 1980.
- 15) H.W.Reinhardt: Crack Softening Zone in Plain Concrete under Static Loading, Cement and Concrete Research, Vol.15, pp.42-52, 1985.
- 16) V.C.Li and E Liang: Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites, J. Eng. Mech. ASCE, Vol.112, No.6, pp.566-586, 1986.

- 17) Kyu Zong Cho, et al: Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Eng. Mech. 110, 8, pp. 1174-1184, 1984.
- 18) D. J. W. Wium, et al: Hybrid Model for Discrete Cracks in Concrete, J. of Eng. Mech., 110, 8, pp. 1211-1229, 1984.
- 19) M. Wecharatana and S. P. Shah: A Modal for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, Cement and Concrete Research 13, 6, pp. 819-829, 1983.
- 20) K. Visalvanich and A. E. Naaman: Fracture Model for Reinforced Concrete ACI Journal, Title No. 80-14, pp. 128-138, 1983.
- 21) 宮本博: 三次元弾性論, 裳華房, 1967.
- 22) M. K. Kassir and G. C. Sih: Three-dimensional Stress Distribution Around An Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings, J. of Appl. Mech. Transactions of the ASME, Vol. 33, pp. 601-611, 1966.
- 23) F. W. Smith, A. S. Kobayashi and A. F. Emry: Stress Intensity Factors for Penny-shaped Cracks Part 1-Infinite Solid, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, pp. 947-952, 1967.
- 24) J. C. Bell: Stress from Arbitrary Loads on a Circular Crack, Inter. J. of Fracture, Vol. 1, No. 1, pp. 85-104, 1979.
- 25) 浪岡宏司, 進藤裕英, 渥美光: 接合面にき裂を有する二層複合材の軸対称問題, 日本機械学会論文集(A編) 46巻404号, 1980年.
- 26) Y. M. Tsai: Ductile Penny-shaped Crack in a Thick Transversely Isotropic Plate, Int. J. Mech. Sci., Vol. 26, No. 4, pp. 245-252, 1984.
- 27) G. I. Barenblatt: The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture General Ideas and Hypotheses Axially-symmetric Cracks, PMM 23, 3, pp. 434-444, 1959.
- 28) 高久田和夫: 接合面上に円形き裂を有する二層無限体のせん断, 日本機械学会論文集(A編) 45巻397号, pp. 1007-1015, 1979年.
- 29) 高久田和夫, 渋谷寿一, 小泉堯: 接合面上に円形き裂を有する二層無限体に関する非軸対称問題, 日本機械学会論文集(A編) 46巻401号, pp. 51-59, 1980年.
- 30) M. K. Kassir: Stress-intensity Factor for a Three-dimensional Rectangular Crack, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, Vol. 48, pp. 309-312, 1981.
- 31) R. N. L. Smith: Stress from Arbitrary Loads on a Penny-shaped Crack, Inter. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 20, pp. 2093-2105, 1984.
- 32) S. Krenk: A Circular Crack under Asymmetric Loads and Some Related Integral Equations, J. of Appl. Mech., Trans. of the ASME, Vol. 46, pp. 821-826, 1967.
- 33) 土田栄一郎, 内山豊美: 偏平回転楕円体状空かあるいは円形亀裂を有する円柱の引張り, 日本機械学会論文集(A編) 45巻393号, pp. 455-463, 1979年.
- 34) 高久田和夫, 渋谷寿一, 小泉堯: 接合面上にき裂を有する二層無限体の軸対称応

- 力解析, 日本機械学会論文集(A編) 46巻409号, pp.957-967, 1980年.
- 35) 石田誠, 野口博司: だ円板状内部き裂を持つ板の引張り, 日本機械学会論文集(A) 48巻431号, pp.888-898, 1982年7月.
- 36) R.A.Westmaan: Asymmetric Mixed Boundary-value Problems of the Elastic Half-space, J. of Appl. Mech., Transactions of the ASME, pp.411-417, 1965.
- 37) X.R.Wu and J.Carlsson: Welding Residual Stress Intensity Factors for Half-elliptical Surface Crack in Thin and Thick Plates, Eng. Fract. Mech., 19,3, pp.407-426, 1984.
- 38) 小林昭一, 西村直志: 積分方程式による表面クラック周辺の応力解析, 土木学会論文報告集 第288号, pp.57-65, 1977年8月.
- 39) M.K.Kassir: A Three-dimensional Rectangular Crack Subjected to Shear Loading, Int. J. of Solids and Struc., 18,12, pp.1075-1082, 1982.
- 40) 鷺津久一郎, 他4名: 有限要素法ハンドブック, 培風館, 1981.
- 41) H.Miyamoto: Application of Finite Element Method to Fracture Mechanics, Proc. of First Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol.1, Berlin, 1971.
- 42) V.B.Watwood: Finite Element Method for Predication of Crack Behavior, Nuclear Eng. and Design, Vol.2, No.2, pp.323-332, 1970.
- 43) A.Pucher: Uber die Singularitatenmethode an elastischen Platten, Ing. Archiv, Band, pp.76-100, 1941.
- 44) T.H.H.Pain, P.Tung and C.Luck: Elastic Crack Analysis by a Finite Element Hybrid Method, Proc. of 3rd Air Force Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Dayton, Ohio, 1971.
- 45) E.Byskov: The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements, Inter. J. of Fract. Mech., Vol.6, No.2, 1970.
- 46) 豊島史郎, 中西宏, 波田凱夫: 応力拡大係数の計算に用いる一つの要素モデルについて, 土木学会論文報告集 第327号, pp.163-166, 1982年11月.
- 47) F.T.C.Loo: Study of Elastic-Plastic Fracture Problem Using Finite Element Technique, J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Transactions of the ASME, Vol.106, pp.476-482, 1984.
- 48) R.D.Henshall and K.G.Shaw: Crack Tip Elements are Unnecessary, Inter. J. for Numerical Methods in Eng., Vol.9, 1973.
- 49) R.S.Barsoum: On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, Inter. J. for Numerical Methods in Eng., 1975.
- 50) M.L.Williams: The Stress around a Fault of Crack in Dissimilar Media, Bull. of Seismological Society of America, Vol.49, pp.199-204, 1959.
- 51) F.Erdogan: Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.403-410, 1965.
- 52) A.H.England: A Crack between Dissimilar Media, Trans.of the ASME, J. of

- Appl. Mech., 32, pp.400-402, 1965.
- 53) J.R.Rice and G.C.Sih: Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.418-423, 1965.
 - 54) C.Atkinson: On Stress Singularities and Interfaces in Linear Elastic Fracture Mechanics, Int. J. of Fracture, Vol.13, pp.807-820, 1977.
 - 55) M.Comninou: The Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl.Mech., 44, pp.631-636, 1977.
 - 56) M.Comninou: The Interface Crack in a Shear Field, Trans.of the ASME, J.of Appl. Mech., 45, pp.287-290, 1978.
 - 57) M.Comninou and D.Schmueser: The Interface Crack in a Combined Tension Compression and Shear Field, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 46, pp.345-348, 1979.
 - 58) A.K.Gautesen and J. Dundurs: The Interface Crack in a Tension Field, Trans. of the ASME., J. of Appl. Mech., Vol.54, pp.93-98, 1987.
 - 59) C.Atkinson: The Interface Crack with a Contact Zone (an Analytical Treatment), Int. J. of Fracture 18,3, pp.161-177, 1982.
 - 60) C.Atkinson: The Interface Crack with a Contact Zone (the Crack of Finite Length), Int. J. of Fracture Vol.19, pp.131-138, 1982.
 - 61) A.F.Mak, L.M.Keer, S.H.Chen and J.L.Lewis: A No-Slip Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., Vol.47, pp.347-350, 1980.
 - 62) S.Itou: Stresses around an Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol.25, No.4, pp.415-420, 1986.
 - 63) 水嶋巖, 浜田実, 赤土雄美: 剛性円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮, 日本機械学会論文集(A編) 44巻, 377号, pp.15-21, 1978年1月.
 - 64) 水嶋巖, 浜田実, 草野直史: 円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮, 日本機械学会論文集(A編) 45巻, 389号, pp.27-32, 1979年1月.
 - 65) 水嶋巖, 浜田実, 北川浩: 剛性円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮(摩擦がある場合), 日本機械学会論文集(A編) 48巻, 425号, pp.42-47, 1982年1月.
 - 66) 水嶋巖, 浜田実: 剛性円形充てん物を持つ無限平板の応力解析, 日本機械学会論文集(A編) 48巻, 436号, pp.1544-1550, 1982年12月.
 - 67) 平島健一, 木村清和, 広瀬幸雄: だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内面外問題の解析解とその応用(第1報, 等方性面内問題に対する基礎理論), 日本機械学会論文集(A編) 57巻, 540号, pp.211-218, 1991年8月.
 - 68) 平島健一, 木村清和, 広瀬幸雄: だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内面外問題の解析解とその応用(第2報, 等方性面内問題の数値計算例), 日本機械学会論文集(A編) 57巻, 542号, pp.238-244, 1991年10月.
 - 69) 平島健一, 佐藤晃一, 川久保昌平: だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内面外問題の解析解とその応用(第3報, 異方性面内問題に対する基礎理論), 日本機械学会論文集(A編) 58巻, 548号, pp.51-58, 1992年4月.

- 70) 平島健一, 荒田訓史, Toshio Mura: だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内面外問題の解析解とその応用(第4報, 等方性および異方性の平板曲げ問題に対する基礎理論), 日本機械学会論文集(A編) 58巻, 552号, pp.117-124, 1992年8月.
- 71) 木村清和, 平島健一, 広瀬幸雄: だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内面外問題の解析解とその応用(第5報, 等方性面外せん断問題に対する基礎理論と数値計算例), 日本機械学会論文集(A編) 58巻, 555号, pp.94-100, 1992年11月.
- 72) 山本照美, 津村利光: 円形剛体充てん物を持つ無限板の接触問題に対する一解法, 日本機械学会論文集(A編) 48巻, 432号, pp.1051~1057, 1982年8月.
- 73) 山本照美, 津村利光: 円形はめあい充てん物を含む無限板の引張り(圧縮), 日本機械学会論文集(A編) 52巻, 475号, pp.601~607, 1986年3月.
- 74) M.Toya: A Crack along the Interface of A Circular Inclusion Embedded in An Infinite Solid, J. Mech. Phys. Solids, Vol.22, pp.325-348, 1974.
- 75) 中西博, 鈴木恵, 馬川省吾, 赤崎智康: 円形介在物の界面はく離の応力拡大係数, 日本機械学会論文集(A編) 52巻, 479号, pp.1655-1662, 1986年7月.
- 76) 長谷部宣男, 山本泰幹, 中村卓次: 二軸荷重を受ける円形剛体介在物に発生するはく離とクラックの連成問題, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp.103-104, 1994年3月.
- 77) 中西博, 鈴木恵, 馬川省吾: だ円形剛体介在物の界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集(A編) 55巻, 516号, pp.1756-1762, 1989年8月.
- 78) 石川晴雄, 河野好秀: 長方形剛体介在物の界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集(A編) 58巻, 545号, pp.64-71, 1992年1月.
- 79) 上田稔, 長谷部宣男, 児島清隆, 中村卓次: ひし形剛体介在物の界面はく離進展特性の破壊力学的研究, 土木学会論文集, No.455/I-21, pp.45-54, 1992年10月.
- 80) 段樹金, 児嶋弘行, 中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No.374/I-6, pp.399-407, 1986年10月.
- 81) 堀晃芳, 段樹金, 中川建治: 亀裂を持つ板の曲げ問題の解析に適した特異関数, 土木学会論文集, No.374/I-6, pp.349-357, 1986年10月.
- 82) 段樹金, 中川建治: せん断力を受ける円盤状亀裂周辺で有限な応力集中を与える弾性解, 土質工学会論文報告集, Vol.28, No.1, pp.153-160, 1988年3月.
- 83) S.Duan, K.Fujii and K.Nakagawa: Finite Stress Concentrations and J-Integrals from Normal Loads on A Penny-shaped Crack, Eng. Fract. Mech., Vol.32, No.2, pp.167-176, 1989.
- 84) K.Nakagawa, T.Anma and S.Duan: A Mathematical Approach of the Interface Crack between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Fract. Mech., Vol.36, No.3, pp.439-449, 1990.
- 85) K.Fujii, K.Nakagawa, S.Duan and Y.Kato: Stress Function with Finite Magnitude of Stress Concentration around An Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol.47, No.6, pp.881-891, 1994.
- 86) K.Fujii, Y.Kato, S.Duan and K.Nakagawa: Stress Analysis around A Partially Bonded Rigid Cylinder in An Elastic Medium with Process Zones,

- Eng. Fract. Mech., Vol.45, No.1, pp.31-38, 1993.
- 87) K.Fujii, S.Duan and K.Nakagawa: A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam, Eng. Fract. Mech., Vol.40, No.1, pp.37-44, 1991.
- 88) K.Fujii, K.Nakagawa and S.Duan: A Mathematical Model of the Strain-softening Curve for Crack Extension, Eng. Fract. Mech., Vol.48, No.4, pp.505-514, 1994.
- 89) 長谷部宣男, 飯田字朗: 隅角部に丸みを有するY字形板の応力解析と応力集中係数, 日本機械学会論文集(A編) 47巻, 424号, pp.1347-1353, 1981年.
- 90) N.Hasebe and J.Iida: Intensity of Corner and Stress Concentration Factor, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol.109, pp.346-356, 1983.
- 91) J.Iida, N.Hasebe and T.Nakamura: Intensity of Corner in Fixed Edge of Thin Plate, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol.113, pp.1138-1146, 1987.
- 92) J.Iida, N.Hasebe and S.Matuura: Intensity of Corner in Fixed Edge of Plane Problem, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol.113, pp.1194-1207, 1987.
- 93) 長谷部宣男, 飯田字朗, 中村卓次: 平面及び薄板の曲げ問題における切欠きの力学, 構造工学論文集, Vol.35 A, pp.241-254, 1989年.
- 94) 長谷部宣男, 奥村幹也, 中村卓次: 集中偶力を受ける異材半無限板接合端に発生したクラック及び剥離, 材料, 39巻, pp.1405-1410, 1990年.
- 95) 奥村幹也, 長谷部宣男, 中村卓次: 有限部で接合された異材半平面の剥離端からのクラックや剥離の発生条件, 土木学会論文集, No.428/I-15, 1991年.
- 96) N.Hasebe M.Okumura and T.Nakamura: Stress Analysis of A Debonding and a Crack Around a Circular Rigid Inclusion, Inter. Jour. of Frac., 32, pp.169-183, 1987.
- 97) N.Hasebe M.Okumura and T.Nakamura: A Debonding and a Crack on a Circular Rigid Inclusion Subjected to Rotation, Inter. Jour. of Frac., 33, pp.195-208, 1987.

第 2 章 重み積分法

2.1 従来の開口関数

対象とするインターフェイスクラックのモデルは、図-2.1に示すように弾性係数が異なる材料が円周方向に沿って接合され中心軸から $|\theta| \leq \omega$ の境界部分 (z_1 から \bar{z}_1) が未接合になってクラックを構成しているものとする。このように z_1 から \bar{z}_1 に至る任意曲線に沿って開口を構成するような一つの関数は (複素関数の分岐を構成する)

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{z - \bar{z}_1}{z - z_1} \right) \right] = H_{0r} + i H_{0i} \quad \text{----- (2.1.1)}$$

$$\begin{aligned} z &= x+iy = re^{i\theta} & r &= \sqrt{x^2+y^2} & \text{----- パラメータ} \\ z_1 &= x_1+iy_1 = ae^{i\omega} & \bar{z}_1 &= x_1-iy_1 = ae^{-i\omega} & \text{----- 一定値} \end{aligned}$$

として表される。 z_1 , \bar{z}_1 が接合面の円周上の点なら、関数(2.1.1)式の実数部、虚数部はそれぞれ図-2.2, 図-2.3となる。図-2.3の虚数部曲面は開口部先端で0から π へ直立しているため、Erdogan¹⁾, Rice²⁾, Atkinson³⁾, England⁴⁾の研究で明かなように応力集中が集積特異点の形状を形成する結果となっている(上記の研究者等は式(2.1.1)の様な表現はしていないが結果的には同等である)。著者等の着想は『もし開口部先端における急激な飛躍(0から π へ直立)を滑らかに変換し得たならば関数の特性より応力集中は滑らかで有限なものになる』と言うものである。開口部先端を滑らかにする手法は段、中川等⁵⁾が既に一様な等方性弾性体あるいは異方性弾性体中のクラックの応力集中を有限で滑らかなものにする手法として活用した重み積分法が最も簡単であろう。

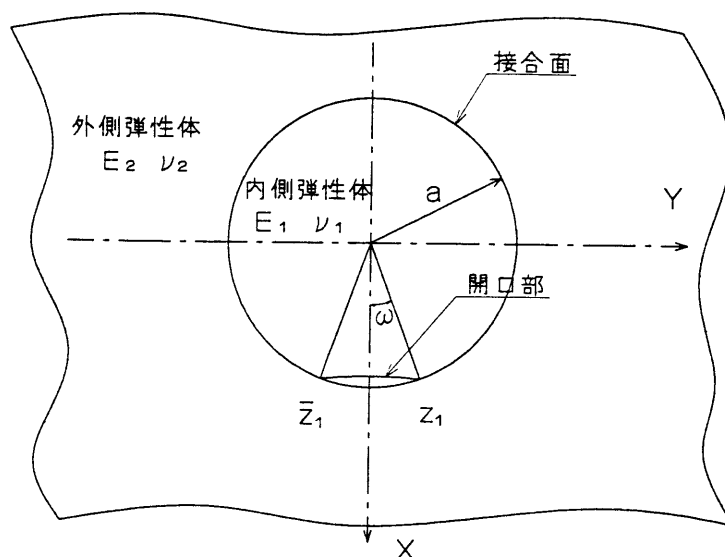
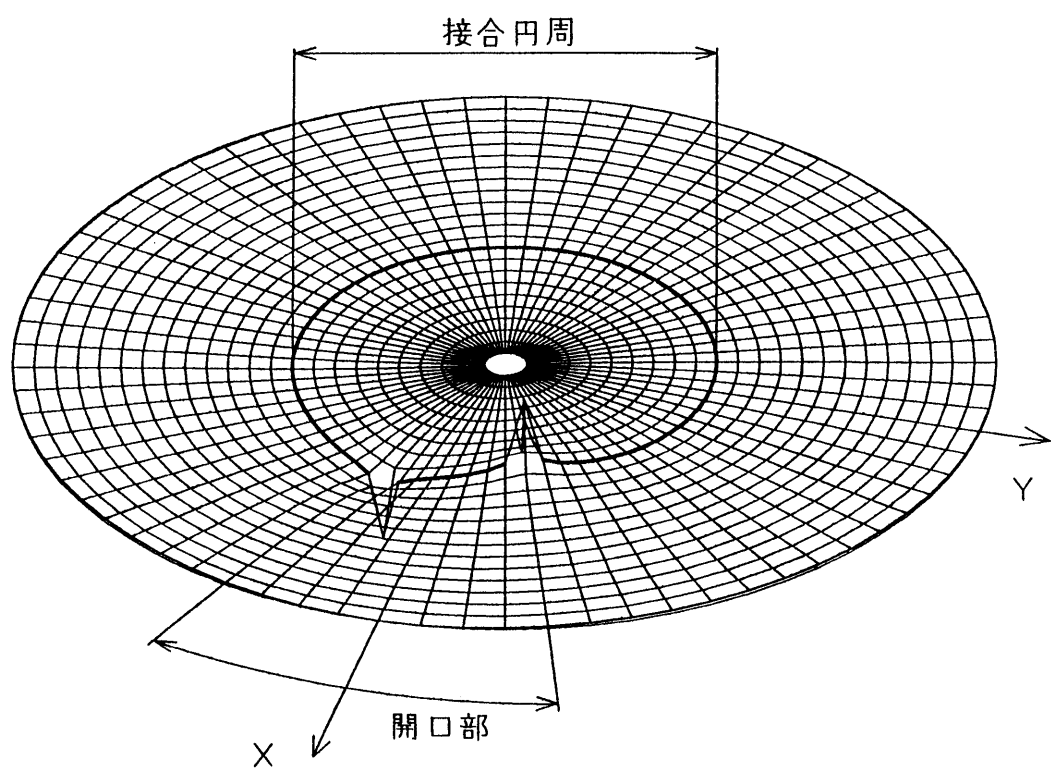
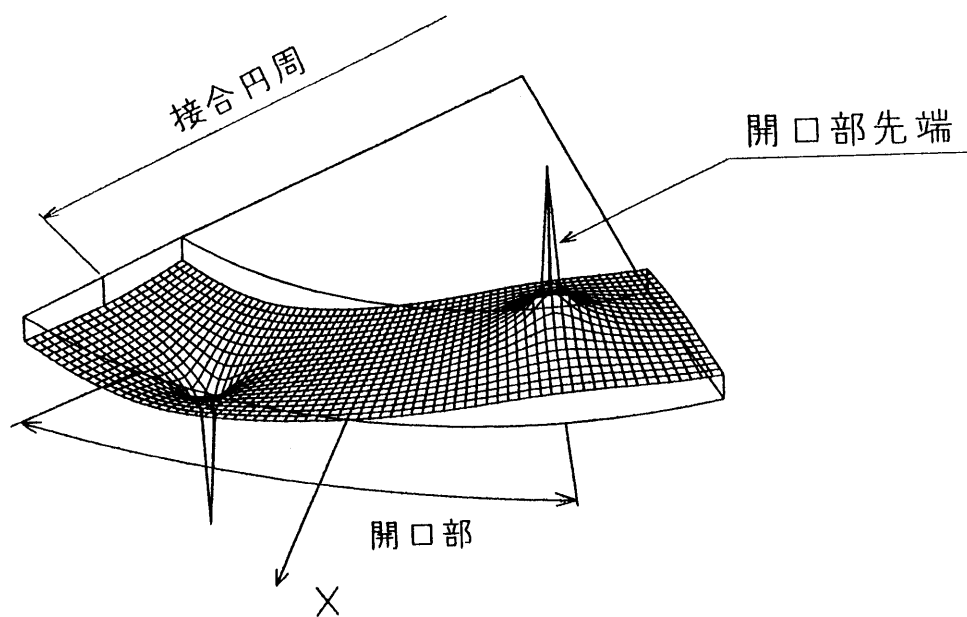


図-2.1 研究対象モデル (円形境界で接合する異質弾性体)

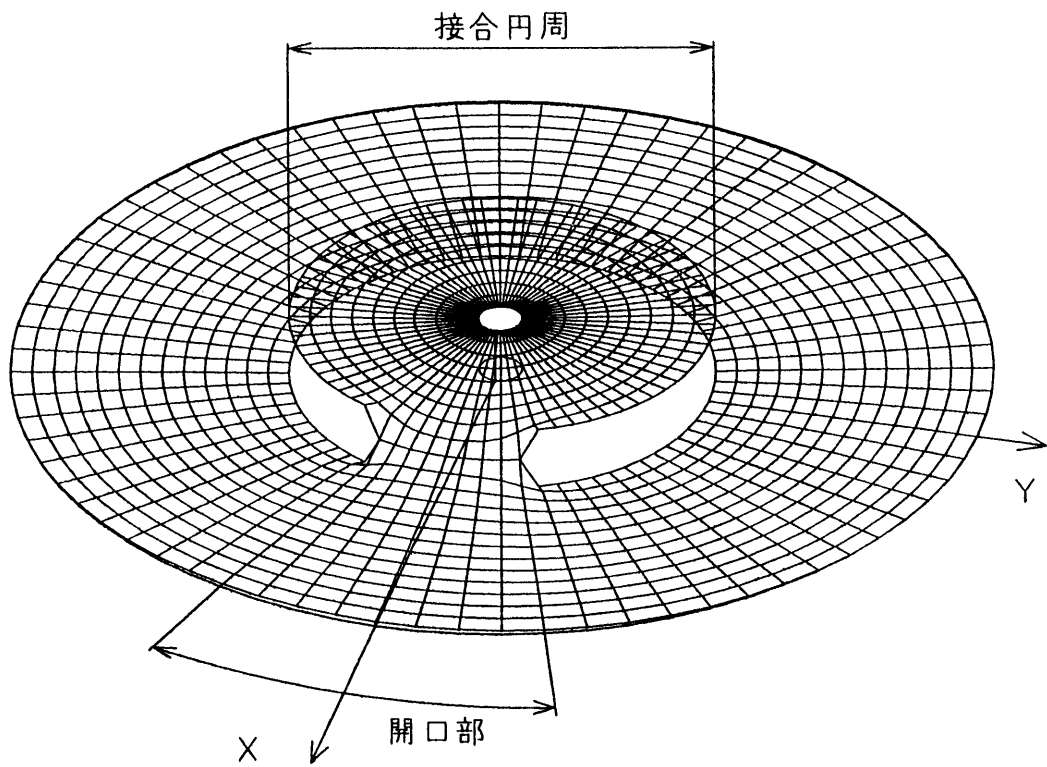


(a) 全体形状

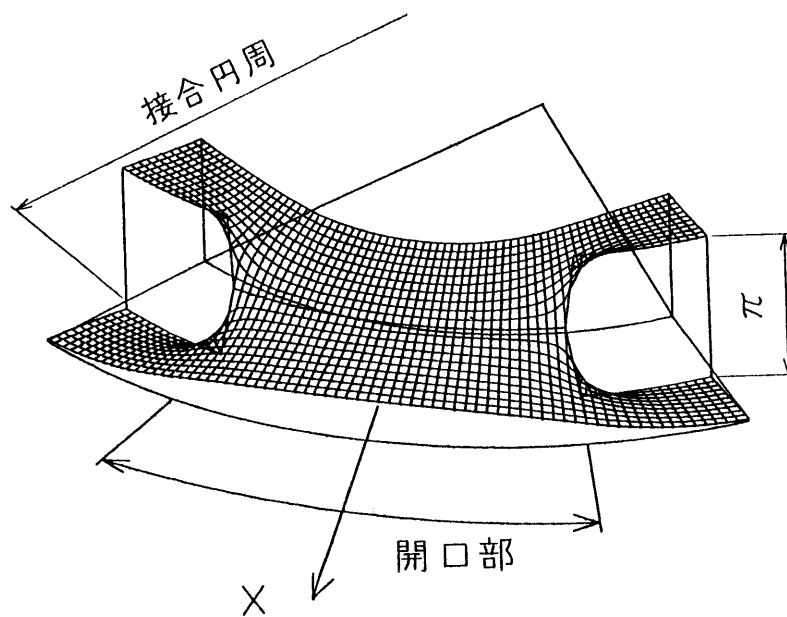


(b) 開口部拡大

図-2.2 開口関数 実数曲面



(a) 全体形状



(b) 開口部拡大

図-2.3 開口関数 虚数曲面

2.2 円形境界特有の重み積分関数

本研究ではクラック先端近傍の集積特異点領域を緩和する対策として、関数 $H_0(z)$ の開口先端位置を表す z_1, \bar{z}_1 を積分変数にし、重み積分を行なって好ましい関数 $H(z)$ を導いた。その手順を次に示す。

式(2.1.1)の z_1, \bar{z}_1 を指数関数表示で表わすと次式となる。

$$H_0(z, a, \omega) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{z - ae^{-i\omega}}{z - ae^{i\omega}}\right) = H_{0r} + iH_{0i} \quad \text{----- (2.2.1)}$$

重み積分の手法として、開口先端部分に process zone と定義した応力と変位がともに生ずる区間を設定し、この区間内で重み $\rho(t)$ によって $H_0(z, a, \omega)$ を積分する方式を採用する。

重み関数 $\rho(t)$ は図-2.4(1)に示す区間 $\omega < |\theta| < \omega + \beta$ ，すなわち $z_1 \sim z_2, \bar{z}_1 \sim \bar{z}_2$ 区間でのみ有効な n 次式とし、具体的には各区間毎に第1の重み関数 (ρ_{11}, ρ_{12})，第2の重み関数 (ρ_{21}, ρ_{22}) を利用する。ここでは重み関数は2次式で定義する。

(1) 第1の重み関数 (ρ_{11}, ρ_{12})

$$\rho_{11}(t) = c_{11}(t - z_1)(t - z_2) \quad (\omega < \theta < \omega + \beta) \quad \text{----- (2.2.2)}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{11}(t) dt = \frac{1}{6} c_{11}(z_1 - z_2)^3 = 1 \quad \text{----- (2.2.3)}$$

$$\rho_{12}(t) = c_{12}(t - \bar{z}_1)(t - \bar{z}_2) \quad \text{----- (2.2.4)}$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{12}(t) dt = \frac{1}{6} c_{12}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^3 = 1 \quad \text{----- (2.2.5)}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \omega 1 = \omega & \omega 2 = \omega + \beta \\ z_1 = ae^{i\omega 1} & z_2 = ae^{i\omega 2} \\ t = ae^{i\theta} & dt = iae^{i\theta} d\theta \end{array} \right\} \quad \text{----- (2.2.6)}$$

重みを区間 (z_1, z_2) で積分すると 1 になることが必要であり、次の照査を行う。式(2.2.6)を式(2.2.2)に代入する。

$$\begin{aligned} \rho_{11} dt &= c_{11} a^3 (e^{i\theta} - e^{i\omega 1})(e^{i\theta} - e^{i\omega 2}) e^{i\theta} i d\theta \\ &= -4c_{11} a^3 e^{i(\omega 1 + \omega 2 + 4\theta)/2} \sin\left(\frac{\theta - \omega 1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \omega 2}{2}\right) i d\theta \quad \text{-- (2.2.7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{11}} &= \frac{1}{6} (z_1 - z_2)^3 = \frac{1}{6} [a(e^{i\omega 1} - e^{i\omega 2})]^3 \\ &= \frac{8}{6} (i)^3 a^3 e^{3i(\omega 1 + \omega 2)/2} \sin^3\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right) \quad \text{----- (2.2.8)} \end{aligned}$$

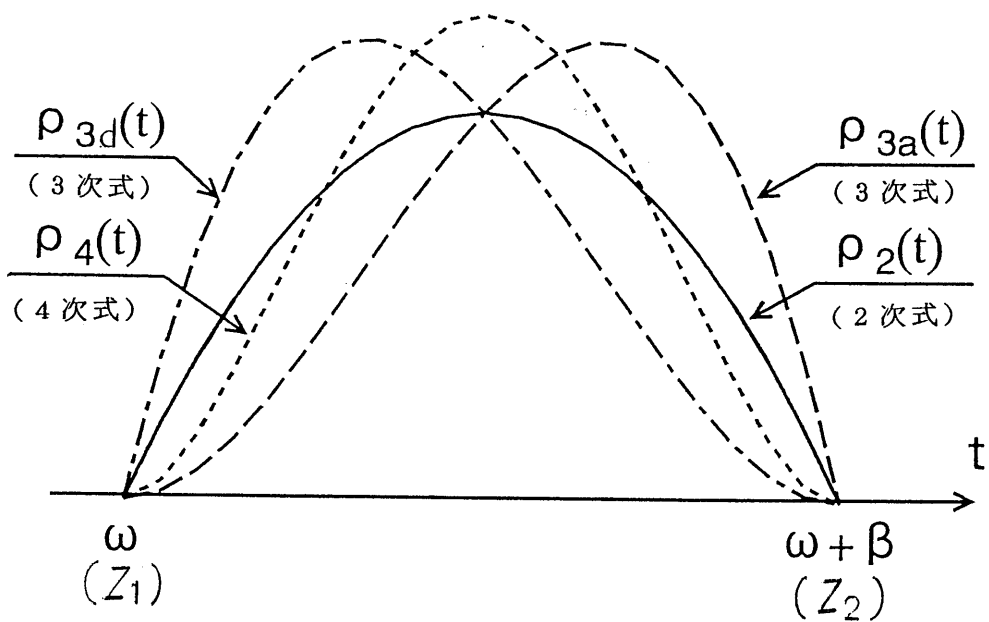


図-2.4 (1) 重み関数 (4 タイプ)

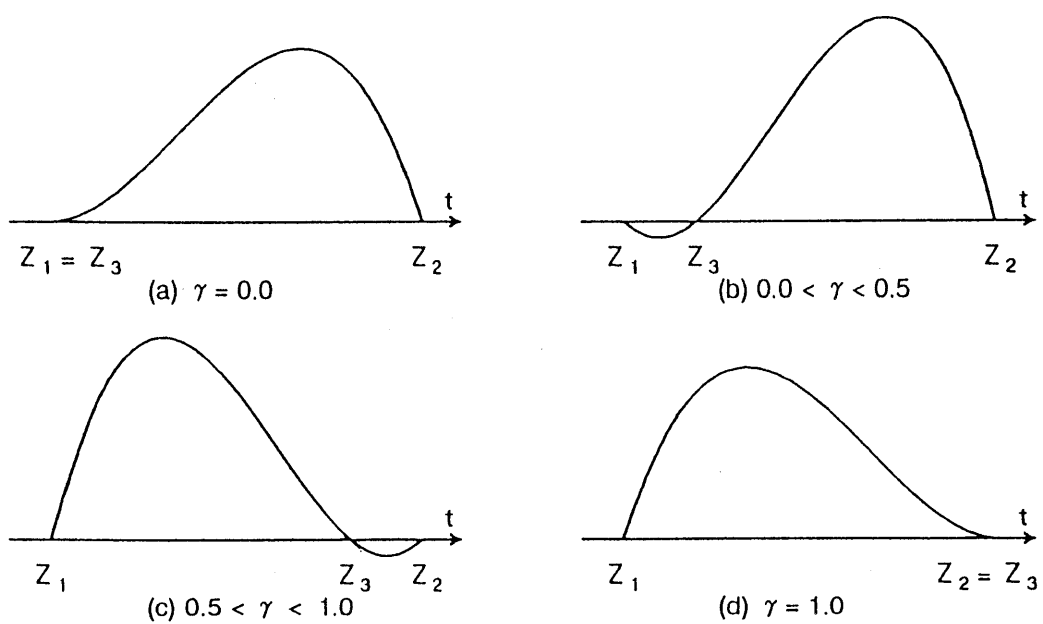


図-2.4 (2) 重み関数 3 次式

(Z_3 の位置による重み形状の変化)

$$\rho_{11}dt = \frac{3e^{i(2\theta-\omega_1-\omega_2)}}{\sin^3\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta-\omega_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\omega_2}{2}\right) d\theta \quad \text{-----} \quad (2.2.9)$$

式(2.2.9)より判るように ρ_{11} は実数部、虚数部ともに値を持つ。重みが虚数部を持つのは不都合であるから円周上で丁度虚数部の値を相殺するような第2の重み (ρ_{21} , ρ_{22}) を定義する。

(2) 第2の重み関数 (ρ_{21} , ρ_{22})

第1の重み関数に現れる虚数部を消滅させるには一般的に共役関数が利用されるが、共役関数を併用した場合『関数 $H(z)$ が調和関数である』という条件を乱す結果となる。このため、円周上 ($r=a$) で丁度虚数部の値を相殺するような新たな第2の重み関数 ρ_{21} を定義する。

$$\rho_{21}dt = c_{21} \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_1 \right) \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_2 \right) d \left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (t=ae^{i\theta}, \quad \omega < \theta < \omega + \beta) \quad \text{--} \quad (2.2.10)$$

$$\tau = \frac{a^2}{t} \quad d\tau = -\frac{a^2}{t^2} dt$$

$$\rho_{21}(\tau) = c_{21}(\tau - \bar{z}_1)(\tau - \bar{z}_2) \quad \text{-----} \quad (2.2.11)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{21}(\tau) d\tau = \frac{1}{6} c_{21}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3 = 1 \quad \text{-----} \quad (2.2.12)$$

ここで ρ_{21} について上と同様に照査を行う。

$$\rho_{21}dt = -c_{21}a^3(e^{-i\theta} - e^{-i\omega_1})(e^{-i\theta} - e^{-i\omega_2})e^{-i\theta} id\theta$$

$$= -4c_{21}a^3 e^{-i(\omega_1+\omega_2+4\theta)/2} \sin\left(\frac{\theta-\omega_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\omega_2}{2}\right) id\theta \quad \text{--} \quad (2.2.13)$$

$$\frac{1}{c_{21}} = \frac{1}{6} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3 = \frac{1}{6} [a(e^{-i\omega_1} - e^{-i\omega_2})]^3$$

$$= \frac{8}{6} (i)^3 a^3 e^{-3i(\omega_1+\omega_2)/2} \sin^3\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) \quad \text{-----} \quad (2.2.14)$$

$$\rho_{21}dt = \frac{3e^{-i(2\theta-\omega_1-\omega_2)}}{\sin^3\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)} \sin\left(\frac{\theta-\omega_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\omega_2}{2}\right) d\theta \quad \text{-----} \quad (2.2.15)$$

第1の重み ρ_{11} : 式(2.2.9)と第2の重み ρ_{21} : 式(2.2.15)の和をとると式(2.2.16)に示すように虚数部を相殺した重みが得られる。

$$\frac{\rho_{11}+\rho_{21}}{2} dt = \frac{3\cos(2\theta-\omega_1-\omega_2)}{\sin^3\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\omega_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta-\omega_2}{2}\right) d\theta \quad \text{----} \quad (2.2.16)$$

重み ρ_{12} についても相殺する ρ_{22} を定義する。

$$\rho_{22} dt = c_{22} \left(\frac{a^2}{t} - z_1 \right) \left(\frac{a^2}{t} - z_2 \right) d \left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (t = ae^{i\theta}, -\omega - \beta < \theta < \omega) \quad (2.2.17)$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{22}(\tau) d\tau = \frac{1}{6} c_{22} (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^3 = 1 \quad (2.2.18)$$

ρ_{22} についても式(2.2.13)から式(2.2.16)までと同様な処理を行うが、ここでは煩雑となるので割愛する。

2.3 重み付き積分法による新開口関数の誘導（重み関数 2 次式）

重み関数 2 次式を利用した新開口関数の誘導は，前節にて記述したので重み積分の結果のみを式(2.3.1)に示す。 $z_U = ae^{i\omega}$ ， $z_L = ae^{-i\omega}$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 H_2(z, a, \omega, \beta) &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \frac{1}{2} \log\left(\frac{z-z_L}{z-z_U}\right) \rho_{11} \rho_{22} dz_L dz_U \\
 &= \int_{z_1}^{z_2} \left[-\frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{11} - \frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{21} \right] dz_U \\
 &\quad + \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \left[\frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{12} + \frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{22} \right] dz_L \\
 &= \frac{1}{4c_0} \left[-\{3(z_1-z)-(z_2-z)\} (z_2-z)^2 \log(z_2-z) \right. \\
 &\quad + \{3(z_2-z)-(z_1-z)\} (z_1-z)^2 \log(z_1-z) \\
 &\quad + \{3(z_1-\frac{a^2}{z})-(z_2-\frac{a^2}{z})\} (z_2-\frac{a^2}{z})^2 \log(z_2-\frac{a^2}{z}) \\
 &\quad - \{3(z_2-\frac{a^2}{z})-(z_1-\frac{a^2}{z})\} (z_1-\frac{a^2}{z})^2 \log(z_1-\frac{a^2}{z}) \\
 &\quad \left. + 2(z_1-z_2) \{-(z_1-z)(z_2-z)+(z_1-\frac{a^2}{z})(z_2-\frac{a^2}{z})\} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4\bar{c}_0} \left[-\{3(\bar{z}_2-z)-(\bar{z}_1-z)\} (\bar{z}_1-z)^2 \log(\bar{z}_1-z) \right. \\
 &\quad + \{3(\bar{z}_1-z)-(\bar{z}_2-z)\} (\bar{z}_2-z)^2 \log(\bar{z}_2-z) \\
 &\quad + \{3(\bar{z}_2-\frac{a^2}{z})-(\bar{z}_1-\frac{a^2}{z})\} (\bar{z}_1-\frac{a^2}{z})^2 \log(\bar{z}_1-\frac{a^2}{z}) \\
 &\quad - \{3(\bar{z}_1-\frac{a^2}{z})-(\bar{z}_2-\frac{a^2}{z})\} (\bar{z}_2-\frac{a^2}{z})^2 \log(\bar{z}_2-\frac{a^2}{z}) \\
 &\quad \left. + 2(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \{(\bar{z}_1-z)(\bar{z}_2-z)-(\bar{z}_1-\frac{a^2}{z})(\bar{z}_2-\frac{a^2}{z})\} \right] \quad \dots (2.3.1)
 \end{aligned}$$

$$c_0 = (z_1 - z_2)^3 \quad \bar{c}_0 = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3$$

$H_2(z, a, \omega, \beta)$ の実数曲面，虚数曲面形状を図-2.5，図-2.6に示す。図より実数曲面の無限項が有限化していること，接合円周上で虚数曲面の 0 から $\pm \pi/2$ への立ち上がりが平滑化されていることが判定される。

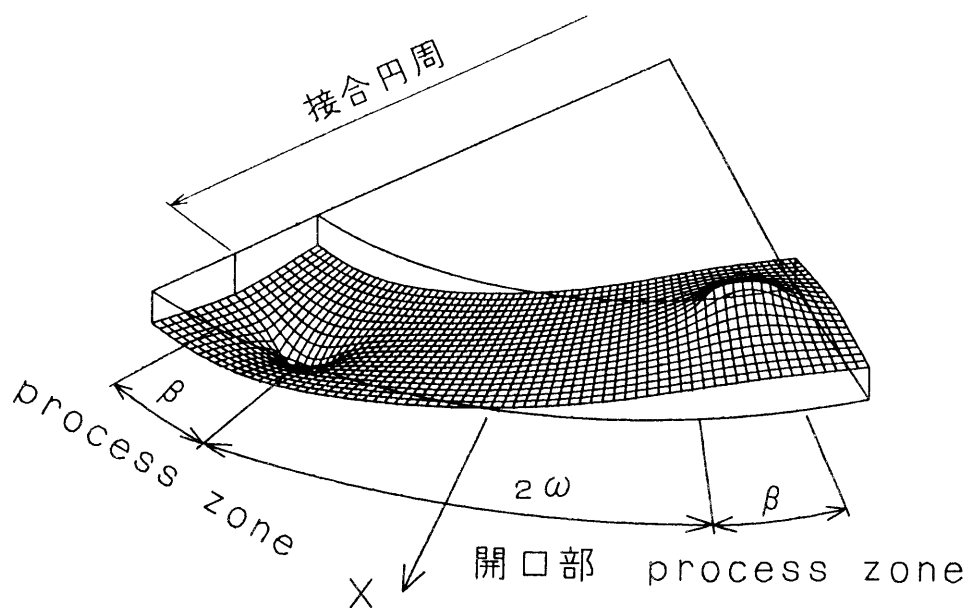


図-2.5 新開口関数 実数曲面 (開口部拡大)

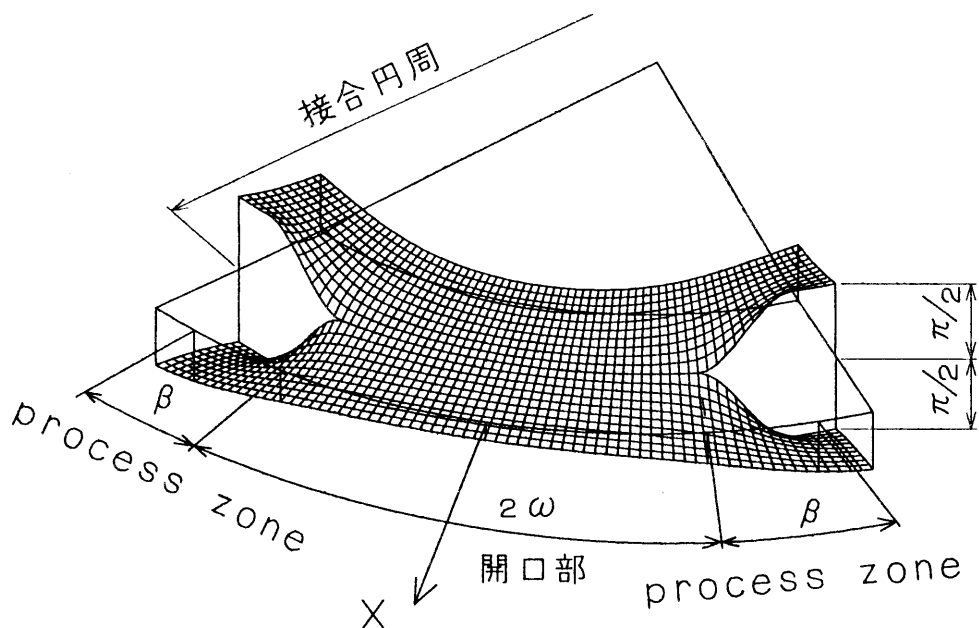


図-2.6 新開口関数 虚数曲面 (開口部拡大)

2.4 重み付き積分法による新開口関数の誘導（重み関数4次式）

前節と同様に開口部先端に process zone を設定し、この区間内で重み $\rho(t)$ によって式(2.2.1)の $H_0(z, a, \omega)$ を積分する方式を採用し $H_4(z, a, \omega, \beta)$ を導く。重み関数 $\rho(t)$ は図-2.4(1)に示す区間 $\omega \leq |\theta| \leq \omega + \beta$ ，すなわち $z_1 \sim z_2$ 、 $\bar{z}_1 \sim \bar{z}_2$ 区間でのみ有効な4次式とし、具体的には2次式の重み関数と同様な表現法で第1の重み関数 (ρ_{11} , ρ_{12})，第2の重み関数 (ρ_{21} , ρ_{22}) を定義する。

(1) 第1の重み関数 (ρ_{11} , ρ_{12})

$$\rho_{11}(t) = c_{11}(t-z_1)^2(t-z_2)^2 \quad (t=ae^{i\theta}, \omega \leq \theta \leq \omega + \beta) \quad \text{--- (2.4.1)}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{11}(t) dt = \frac{-1}{30} c_{11}(z_1-z_2)^5 = 1 \quad \text{----- (2.4.2)}$$

$$\rho_{12}(t) = c_{12}(t-\bar{z}_1)^2(t-\bar{z}_2)^2 \quad (-\omega - \beta \leq \theta \leq -\omega) \quad \text{----- (2.4.3)}$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{12}(t) dt = \frac{-1}{30} c_{12}(\bar{z}_2-\bar{z}_1)^5 = 1 \quad \text{----- (2.4.4)}$$

(2) 第2の重み関数 (ρ_{21} , ρ_{22})

$$\rho_{21} = c_{21} \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_1 \right)^2 \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_2 \right)^2 d\left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (t=ae^{i\theta}, \omega \leq \theta \leq \omega + \beta) \quad \text{-- (2.4.5)}$$

$$\tau = \frac{a^2}{t} = ae^{-i\theta} \quad d\tau = -\frac{a^2}{t^2} dt$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{21}(\tau) d\tau = \frac{-1}{30} c_{21}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^5 = 1 \quad \text{----- (2.4.6)}$$

$$\rho_{22} = c_{22} \left(\frac{a^2}{t} - z_1 \right)^2 \left(\frac{a^2}{t} - z_2 \right)^2 d\left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (-\omega - \beta \leq \theta \leq -\omega) \quad \text{---- (2.4.7)}$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{22}(\tau) d\tau = \frac{-1}{30} c_{22}(z_2-z_1)^5 = 1 \quad \text{----- (2.4.8)}$$

(3) 新開口関数 H_4

重み ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{21} , ρ_{22} を利用した $H_0(z)$ の重み積分の結果を式(2.4.9)に示す。ここで $z_U = ae^{i\omega}$, $z_L = ae^{-i\omega}$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned} H_4(z, a, \omega, \beta) &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \frac{1}{2} \log\left(\frac{z-z_L}{z-z_U}\right) \rho_1 \rho_2 dz_L dz_U \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left[-\frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{11} - \frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{21} \right] dz_U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \left[\frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{12} + \frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{22} \right] dz_L \\
= & \frac{1}{4c_0} \left[\{ (z_2-z)^2 - 5(z_1-z)(z_2-z) + 10(z_1-z)^2 \} (z_2-z)^3 \log(z_2-z) \right. \\
& - \{ (z_1-z)^2 - 5(z_1-z)(z_2-z) + 10(z_2-z)^2 \} (z_1-z)^3 \log(z_1-z) \\
& - \{ (z_2 - \frac{a^2}{z})^2 - 5(z_1 - \frac{a^2}{z})(z_2 - \frac{a^2}{z}) + 10(z_1 - \frac{a^2}{z})^2 \} (z_2 - \frac{a^2}{z})^3 \log(z_2 - \frac{a^2}{z}) \\
& + \{ (z_1 - \frac{a^2}{z})^2 - 5(z_1 - \frac{a^2}{z})(z_2 - \frac{a^2}{z}) + 10(z_2 - \frac{a^2}{z})^2 \} (z_1 - \frac{a^2}{z})^3 \log(z_1 - \frac{a^2}{z}) \\
& + \frac{47}{60} \{ (z_1-z)^5 - (z_1 - \frac{a^2}{z})^5 \} \\
& - \frac{65}{12} \{ (z_1-z)^4(z_2-z) - (z_1 - \frac{a^2}{z})^4(z_2 - \frac{a^2}{z}) \} \\
& + \frac{55}{3} \{ (z_1-z)^3(z_2-z)^2 - (z_1 - \frac{a^2}{z})^3(z_2 - \frac{a^2}{z})^2 \} \\
& - \frac{47}{60} \{ (z_2-z)^5 - (z_2 - \frac{a^2}{z})^5 \} \\
& + \frac{65}{12} \{ (z_2-z)^4(z_1-z) - (z_2 - \frac{a^2}{z})^4(z_1 - \frac{a^2}{z}) \} \\
& - \frac{55}{3} \{ (z_2-z)^3(z_1-z)^2 - (z_2 - \frac{a^2}{z})^3(z_1 - \frac{a^2}{z})^2 \} \Big] \\
& - \frac{1}{4\bar{c}_0} \left[\{ (\bar{z}_2-z)^2 - 5(\bar{z}_1-z)(\bar{z}_2-z) + 10(\bar{z}_1-z)^2 \} (\bar{z}_2-z)^3 \log(\bar{z}_2-z) \right. \\
& - \{ (\bar{z}_1-z)^2 - 5(\bar{z}_1-z)(\bar{z}_2-z) + 10(\bar{z}_2-z)^2 \} (\bar{z}_1-z)^3 \log(\bar{z}_1-z) \\
& - \{ (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 - 5(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) + 10(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 \} (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^3 \log(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) \\
& + \{ (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 - 5(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) + 10(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 \} (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^3 \log(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}) \\
& + \frac{47}{60} \{ (\bar{z}_1-z)^5 - (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^5 \} \\
& - \frac{65}{12} \{ (\bar{z}_1-z)^4(\bar{z}_2-z) - (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^4(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) \} \\
& + \frac{55}{3} \{ (\bar{z}_1-z)^3(\bar{z}_2-z)^2 - (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^3(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 \} \\
& - \frac{47}{60} \{ (\bar{z}_2-z)^5 - (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^5 \} \\
& + \frac{65}{12} \{ (\bar{z}_2-z)^4(\bar{z}_1-z) - (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^4(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}) \} \\
& - \frac{55}{3} \{ (\bar{z}_2-z)^3(\bar{z}_1-z)^2 - (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^3(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 \} \Big] \quad \text{-----} \quad (2.4.9)
\end{aligned}$$

$$c_0 = (z_1 - z_2)^5 \quad \bar{c}_0 = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^5$$

$H_4(z, a, \omega, \beta)$ の実数曲面、虚数曲面ともに $H_2(z, a, \omega, \beta)$ とほぼ同じ形状であるため図示を省略する。

2.5 重み付き積分法による新開口関数の誘導（重み関数3次式）

前節と同様に開口部先端に process zone を設定し、この区間内で重み $\rho(t)$ によって式(2.2.1)の $H_0(z, a, \omega)$ を積分する方式を採用し $H_3(z, a, \omega, \beta)$ を導く。重み関数 $\rho(t)$ を区間 $\omega \leq |\theta| \leq \omega + \beta$, すなわち $z_1 \sim z_2, \bar{z}_1 \sim \bar{z}_2$ 区間でのみ有効な3次式とし、具体的には各区間毎に第1の重み関数 (ρ_{11}, ρ_{12}), 第2の重み関数 (ρ_{21}, ρ_{22}) を利用する。

2次式, 4次式との違いは $z_1 \sim z_2 (\bar{z}_1 \sim \bar{z}_2)$ 区間の間に任意点 $z_3 (\bar{z}_3)$ を設定することにより、多様な重み形状が表現できる点にある（図-2.4(2) 参照）。 z_3 は

$$\begin{aligned} z_3 &= ae^{i(\omega + \gamma\beta)} \\ &= z_1 + \gamma(z_2 - z_1) \quad (0 \leq \gamma < 0.5, 0.5 < \gamma \leq 1) \end{aligned} \quad \text{----- (2.5.1)}$$

と表される。

(1) 第1の重み関数 (ρ_{11}, ρ_{12})

$$\rho_{11}(t) = c_{11}(t - z_1)(t - z_2)(t - z_3) \quad (t = ae^{i\theta}, \omega \leq \theta \leq \omega + \beta) \quad (2.5.2)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{11}(t) dt = \frac{1}{12} c_{11}(z_1 - z_2)^3 (z_1 + z_2 - 2z_3) = 1 \quad \text{----- (2.5.3)}$$

$$\rho_{12}(t) = c_{12}(t - \bar{z}_1)(t - \bar{z}_2)(t - \bar{z}_3) \quad (-\omega - \beta \leq \theta \leq -\omega) \quad \text{---- (2.5.4)}$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{12}(t) dt = \frac{1}{12} c_{12}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_3) = 1 \quad \text{----- (2.5.5)}$$

(2) 第2の重み関数 (ρ_{21}, ρ_{22})

$$\rho_{21} = c_{21} \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_1 \right) \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_2 \right) \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_3 \right) d \left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (t = ae^{i\theta}, \omega \leq \theta \leq \omega + \beta) \quad \text{----- (2.5.6)}$$

$$\tau = \frac{a^2}{t} = ae^{-i\theta} \quad d\tau = -\frac{a^2}{t^2} dt$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{21}(\tau) d\tau = \frac{1}{12} c_{21}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 - 2\bar{z}_3) = 1 \quad \text{----- (2.5.7)}$$

$$\rho_{22} = c_{22} \left(\frac{a^2}{t} - z_1 \right) \left(\frac{a^2}{t} - z_2 \right) \left(\frac{a^2}{t} - z_3 \right) d \left(\frac{a^2}{t} \right) \quad (-\omega - \beta \leq \theta \leq -\omega) \quad \text{----- (2.5.8)}$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{22}(\tau) d\tau = \frac{1}{12} c_{22}(z_2 - z_1)^3 (z_1 + z_2 - 2z_3) = 1 \quad \text{----- (2.5.9)}$$

(3) 新開口関数 H_3

重み $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$ を利用した $H_0(z)$ の重み積分の結果を式(2.5.10)に示す。ここで $z_U = ae^{i\omega}$, $z_L = ae^{-i\omega}$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned}
H_3(z, a, \omega, \beta) &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \frac{1}{2} \log\left(\frac{z-z_L}{z-z_U}\right) \rho_{11} \rho_{22} dz_L dz_U \\
&= \int_{z_1}^{z_2} \left[-\frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{11} - \frac{1}{4} \log(z-z_U) \rho_{21} \right] dz_U \\
&\quad + \int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \left[\frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{12} + \frac{1}{4} \log(z-z_L) \rho_{22} \right] dz_L \\
&= \frac{1}{4c_0} \left[\{ (z_1-z)^2 - 2(z_2+z_3-2z)(z_1-z) + 6(z_2-z)(z_3-z) \} (z_1-z)^2 \log(z_1-z) \right. \\
&\quad - \{ (z_2-z)^2 - 2(z_1+z_3-2z)(z_2-z) + 6(z_1-z)(z_3-z) \} (z_2-z)^2 \log(z_2-z) \\
&\quad - \{ (z_1 - \frac{a^2}{z})^2 - 2(z_2+z_3-2\frac{a^2}{z})(z_1 - \frac{a^2}{z}) + 6(z_2 - \frac{a^2}{z})(z_3 - \frac{a^2}{z}) \} (z_1 - \frac{a^2}{z})^2 \log(z_1 - \frac{a^2}{z}) \\
&\quad + \{ (z_2 - \frac{a^2}{z})^2 - 2(z_1+z_3-2\frac{a^2}{z})(z_2 - \frac{a^2}{z}) + 6(z_1 - \frac{a^2}{z})(z_3 - \frac{a^2}{z}) \} (z_2 - \frac{a^2}{z})^2 \log(z_2 - \frac{a^2}{z}) \\
&\quad - \{ \frac{7}{12} (z_1-z)^2 - \frac{5}{3} (z_2+z_3-2z)(z_1-z) + 9(z_2-z)(z_3-z) \} (z_1-z)^2 \\
&\quad + \{ \frac{7}{12} (z_2-z)^2 - \frac{5}{3} (z_1+z_3-2z)(z_2-z) + 9(z_1-z)(z_3-z) \} (z_2-z)^2 \\
&\quad + \{ \frac{7}{12} (z_1 - \frac{a^2}{z})^2 - \frac{5}{3} (z_2+z_3-2\frac{a^2}{z})(z_1 - \frac{a^2}{z}) + 9(z_2 - \frac{a^2}{z})(z_3 - \frac{a^2}{z}) \} (z_1 - \frac{a^2}{z})^2 \\
&\quad \left. - \{ \frac{7}{12} (z_2 - \frac{a^2}{z})^2 - \frac{5}{3} (z_1+z_3-2\frac{a^2}{z})(z_2 - \frac{a^2}{z}) + 9(z_1 - \frac{a^2}{z})(z_3 - \frac{a^2}{z}) \} (z_2 - \frac{a^2}{z})^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\bar{c}_0} \left[\{ (\bar{z}_1-z)^2 - 2(\bar{z}_2+\bar{z}_3-2z)(\bar{z}_1-z) + 6(\bar{z}_2-z)(\bar{z}_3-z) \} (\bar{z}_1-z)^2 \log(\bar{z}_1-z) \right. \\
&\quad - \{ (\bar{z}_2-z)^2 - 2(\bar{z}_1+\bar{z}_3-2z)(\bar{z}_2-z) + 6(\bar{z}_1-z)(\bar{z}_3-z) \} (\bar{z}_2-z)^2 \log(\bar{z}_2-z) \\
&\quad - \{ (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 - 2(\bar{z}_2+\bar{z}_3-2\frac{a^2}{z})(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}) + 6(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_3 - \frac{a^2}{z}) \} (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 \log(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}) \\
&\quad + \{ (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 - 2(\bar{z}_1+\bar{z}_3-2\frac{a^2}{z})(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) + 6(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_3 - \frac{a^2}{z}) \} (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 \log(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) \\
&\quad - \{ \frac{7}{12} (\bar{z}_1-z)^2 - \frac{5}{3} (\bar{z}_2+\bar{z}_3-2z)(\bar{z}_1-z) + 9(\bar{z}_2-z)(\bar{z}_3-z) \} (\bar{z}_1-z)^2 \\
&\quad + \{ \frac{7}{12} (\bar{z}_2-z)^2 - \frac{5}{3} (\bar{z}_1+\bar{z}_3-2z)(\bar{z}_2-z) + 9(\bar{z}_1-z)(\bar{z}_3-z) \} (\bar{z}_2-z)^2 \\
&\quad + \{ \frac{7}{12} (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 - \frac{5}{3} (\bar{z}_2+\bar{z}_3-2\frac{a^2}{z})(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}) + 9(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_3 - \frac{a^2}{z}) \} (\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})^2 \\
&\quad \left. - \{ \frac{7}{12} (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 - \frac{5}{3} (\bar{z}_1+\bar{z}_3-2\frac{a^2}{z})(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}) + 9(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z})(\bar{z}_3 - \frac{a^2}{z}) \} (\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z})^2 \right] \\
&\quad \text{----- (2.5.10)} \\
c_0 &= (z_1-z_2)^3(2z_3-z_1-z_2) \quad \bar{c}_0 = (\bar{z}_1-\bar{z}_2)^3(2\bar{z}_3-\bar{z}_1-\bar{z}_2)
\end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1) F.Erdogan: Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, Trans.of the ASME, J.of Appl.Mech.,32, pp.403~410, 1965.
- 2) J.R.Rice and G.C.Sih: Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J.of Appl.Mech.,32, pp.418~423, 1965.
- 3) C.Atkinson: The Interface Crack with a Contact zone (an Analytical Treatment), Inter.J.of Fracture,19, pp.131~138, 1982.
- 4) A.H.England: A Crack between Dissimilar Media, Trans.of the ASME, J.of Appl.Mech.,32, pp.400~402, 1965.
- 5) 段樹金, 児嶋弘行, 中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No.374/I-6, pp.399~407, 1986年10月.

第 3 章 基本解析関数の一般形

及び境界条件

3.1 応力関数の一般形

本研究で対象とするのは二次元平面弾性問題であり、応力関数を複素変数 $z (=x+iy)$ で表される複素関数 ($\Psi(z)$ と $\Phi(z)$) で取り扱う。応力関数の一般形と応力および変位は次のように表される。

(1) 応力関数の一般形

$$W(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} \{ \bar{z} \Psi(z) + \Phi(z) \} \quad \text{----- (3.1.1)}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W(z, \bar{z}) = 0 \quad \text{----- 重調和関数}$$

$W(z, \bar{z})$ が重調和関数である条件を満たすには $\Psi(z)$, $\Phi(z)$ とともに複素定数とその共役定数は含んでよいが、複素変数 z と \bar{z} が同時に含まれてはならない。

(2) 応力関数

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) W \\ &= 2\Psi' - (\Phi'' + \bar{z}\Psi'') \end{aligned} \quad \text{----- (3.1.2)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) W \\ &= 2\Psi' + (\Phi'' + \bar{z}\Psi'') \end{aligned} \quad \text{----- (3.1.3)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) W \\ &= -i (\Phi'' + \bar{z}\Psi'') \end{aligned} \quad \text{----- (3.1.4)}$$

実際には σ_x , σ_y , τ_{xy} のそれぞれの実数部分を採用する。

(3) 変位関数

$$2G(U - iV) = \kappa \bar{\Psi} - \bar{z}\Psi' - \Phi' \quad \text{----- (3.1.5)}$$

U : X 軸方向の変位 V : Y 軸方向の変位

$G = \frac{E}{2(1-\nu)}$: せん断弾性係数, E : 弾性係数, ν : ポアソン比

$\kappa = 3-4\nu$: 平面ひずみ または $= \frac{3-\nu}{1+\nu}$: 平面応力

3.2 極座標系応力関数

本研究の解析対象は円形境界で異質弾性体が接合しているモデルであるため、便宜上直交座標系の応力関数 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, U, V$) を極座標系の応力関数 ($\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, U_r, U_\theta$) に変換する。

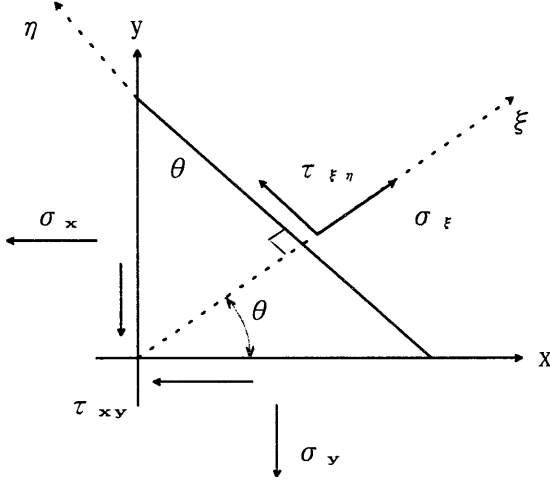


図-3.1 直交座標系と
極座標系の応力関係

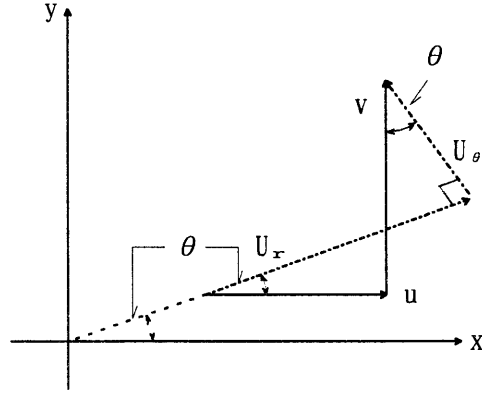


図-3.2 直交座標系と
極座標系の変位関係

(1) 応力関数 (極座標系) $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$

X-Y 座標系を θ 回転した座標系を $\xi-\eta$ 座標系とすると、X方向と Y方向のつり合い式は

$$\text{X方向: } \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta = \sigma_\xi \cos \theta - \tau_{\xi\eta} \sin \theta \quad \text{----- ①}$$

$$\text{Y方向: } \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta = \sigma_\xi \sin \theta - \tau_{\xi\eta} \cos \theta \quad \text{----- ②}$$

となる。

式①・ $\cos \theta$ + 式②・ $\sin \theta$ より

$$\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = \sigma_\xi = \sigma_r \quad \text{----- (3.2.1)}$$

三角公式より

$$\sigma_r = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \text{----- (3.2.2)}$$

式 (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) より

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Psi', \quad \sigma_x - \sigma_y = -2(\Phi'' + \bar{z}\Psi''), \quad \tau_{xy} = -i(\Phi'' + \bar{z}\Psi'') \quad \text{となるので}$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\Psi' - (\Phi'' + \bar{z}\Psi'')(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= 2\Psi' - e^{i2\theta}(\Phi'' + \bar{z}\Psi'')\end{aligned}\quad \text{----- (3.2.3)}$$

となる。式(3.2.1)の θ を $\theta + \pi/2$ として、

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \quad \text{----- (3.2.4)}$$

$$\begin{aligned}&= 2\Phi' + (\Phi'' + \bar{z}\Psi'')(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= 2\Phi' + e^{i2\theta}(\Phi'' + \bar{z}\Psi'')\end{aligned}\quad \text{----- (3.2.5)}$$

式② $\cdot \cos \theta$ - 式① $\cdot \sin \theta$ より

$$-(\sigma_x - \sigma_y)\sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tau_{\xi\eta} = \tau_{r\theta} \quad \text{--- (3.2.6)}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \\ &= (\Phi'' + \bar{z}\Psi'')(\sin 2\theta - i\cos 2\theta) \\ &= -ie^{i2\theta}(\Phi'' + \bar{z}\Psi'')\end{aligned}\quad \text{----- (3.2.7)}$$

が得られる。以上、応力はそれぞれの実数部分を採用することにする。

σ_r : 半径方向の応力 σ_θ : 円周方向の応力 $\tau_{r\theta}$: せん断応力

(2) 変位関数 (極座標系) U_r, U_θ

図-3.2 より

$$U_r = U \cos \theta + V \sin \theta \quad \text{----- (3.2.8)}$$

$$U_\theta = -U \sin \theta + V \cos \theta \quad \text{----- (3.2.9)}$$

$$\begin{aligned}U_r - iU_\theta &= (\cos \theta + i\sin \theta)U + (\sin \theta - i\cos \theta)V \\ &= e^{i\theta}(U - iV)\end{aligned}\quad \text{----- (3.2.10)}$$

式(3.1.5)より

$$\begin{aligned}2G(U_r - iU_\theta) &= e^{i\theta}2G(U - iV) \\ &= e^{i\theta}\{\kappa \bar{\Psi} - \bar{z}\Psi' - \Phi'\}\end{aligned}\quad \text{----- (3.2.11)}$$

U_r : 半径方向の変位 U_θ : 円周方向の変位
と定義される。

3.3 境界条件（変位および応力の接合条件）

応力関数が満足する最低限度の境界条件として次のものを設定する。

(a) クラック完全開口部分，すなわち $r=a$, $|\theta|<\omega$ 区間では応力が $\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$ である。このためには $|\theta|=\omega$ より $|\theta|=\omega+\beta$ に至る部分では応力が純虚数より複素数値になる必要がある。

(b) $|\theta|>\omega+\beta$ の接合面上（完全連続部）では応力も変位も連続，すなわち $\sigma_{r1}=\sigma_{r2}$, $\tau_{r\theta 1}=\tau_{r\theta 2}$, $U_{r1}=U_{r2}$, $U_{\theta 1}=U_{\theta 2}$ （内側：1，外側：2）でなければならない。応力と変位に関するこの条件を満足させるためには，関数条件として以下の項目が必要である。

① 接合面の内側，外側それぞれ同型関数を採用する。

② 内側，外側の変位を一致させるために新開口関数 $H(z)$ に係数 $(1+i\alpha)$ を乗じた項を持つ。

(c) process zone $\omega<|\theta|<\omega+\beta$ では σ_r , $\tau_{r\theta}$ が連続で開口変位 U_r , U_θ は滑らかである。

解析解は上記の境界条件を満たす解析関数 $\Psi(z)$ 及び $\Phi(z)$ を求めることに帰結する。

3.4 基本解析関数の一般形

前節の境界条件を満足し、任意の応力場を与える解析関数の一般形は次のように表される。

(1) 要素関数

円周接合面の境界条件を満足させる要因となる要素関数 $f_k(z)$ ($k=1\sim 4$) として、開口関数 $H(z)$ と bielastic constant α を使用し次のような関数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \cosh \{(1+i\alpha)H\} - \cosh \{(1-i\alpha)H\} = i2\sinh(H)\sin(\alpha H) \\ f_2(z) &= \sinh \{(1+i\alpha)H\} + \sinh \{(1-i\alpha)H\} = 2\sinh(H)\cos(\alpha H) \\ f_3(z) &= i\cosh \{(1+i\alpha)H\} + i\cosh \{(1-i\alpha)H\} = i2\cosh(H)\cos(\alpha H) \\ f_4(z) &= -i\sinh \{(1+i\alpha)H\} + i\sinh \{(1-i\alpha)H\} = 2\cosh(H)\sin(\alpha H) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

ここで $H(z)$ は式(2.3.1), 式(2.4.9), 式(2.5.10)で定義した新開口関数 $H_m(z)$ である。 α は bielastic constant であり, 円形境界内側の弾性定数 E_1, G_1, ν_1 と境界外側の弾性定数 E_2, G_2, ν_2 より

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \log \left\{ \frac{\frac{K_2}{G_2} + \frac{1}{G_1}}{\frac{K_1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} \right\} \quad \text{-----} \quad (3.4.2)$$

E : 弾性係数 G : せん断弾性係数 ν : ポアソン比

$$K = 3-4\nu \quad \text{-----} \quad \text{: 平面ひずみ} \quad (3.4.3)$$

$$K = (3-\nu)/(1+\nu) \quad \text{: 平面応力}$$

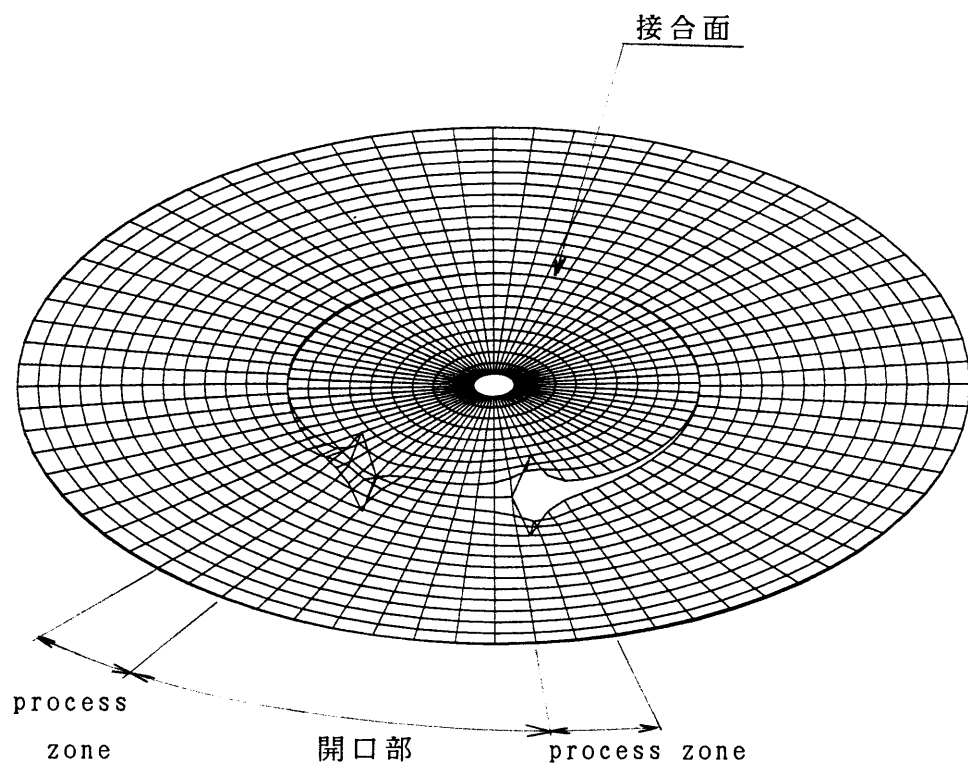
と定義されるものである。この $f_k(z)$ は応力関数の構成要素として境界条件を満足する最低限度の基本関数であるから本文では要素関数と名付ける。また, $f_k(z)$ の実数曲面, 虚数曲面形状を図-3.3～図-3.6に示す。

(2) 解析関数の一般形

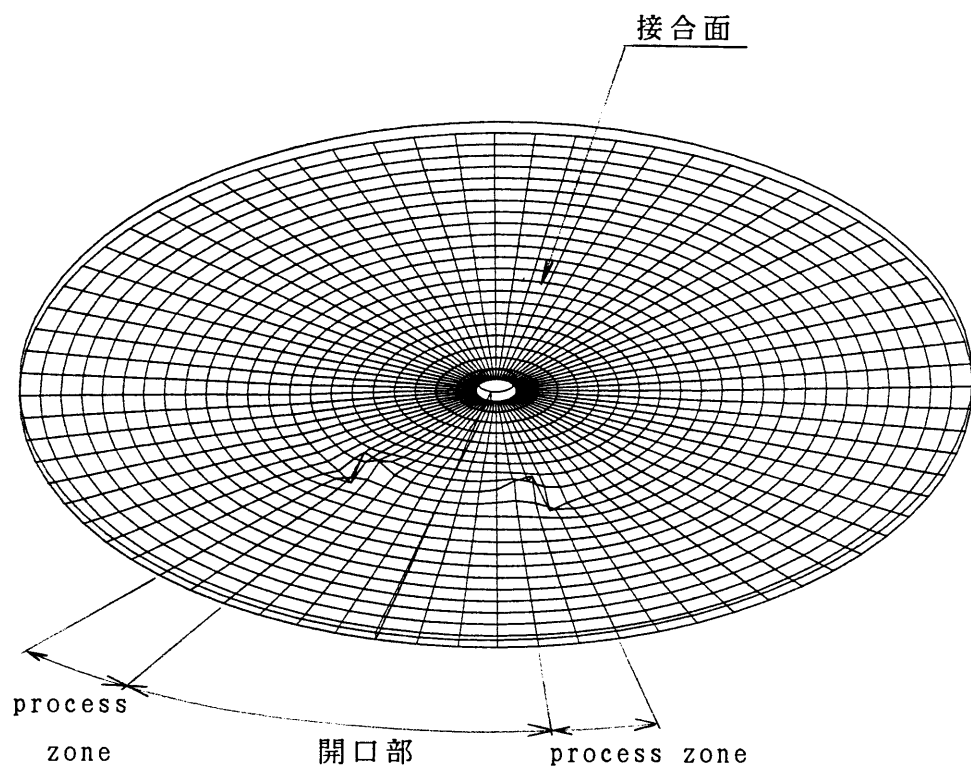
円形接合面の内側弾性体(E_1, G_1, K_1, ν_1)に対する $\Psi(z)$ と $\Phi(z)$ は

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= D_{11}\psi_1(z) + D_{12}\psi_2(z) \\ \Phi_1(z) &= D_{11}\varphi_1(z) + D_{12}\varphi_2(z) \end{aligned} \quad \text{-----} \quad (3.4.4)$$

であり, 外側弾性体(E_2, G_2, K_2, ν_2)に対しては

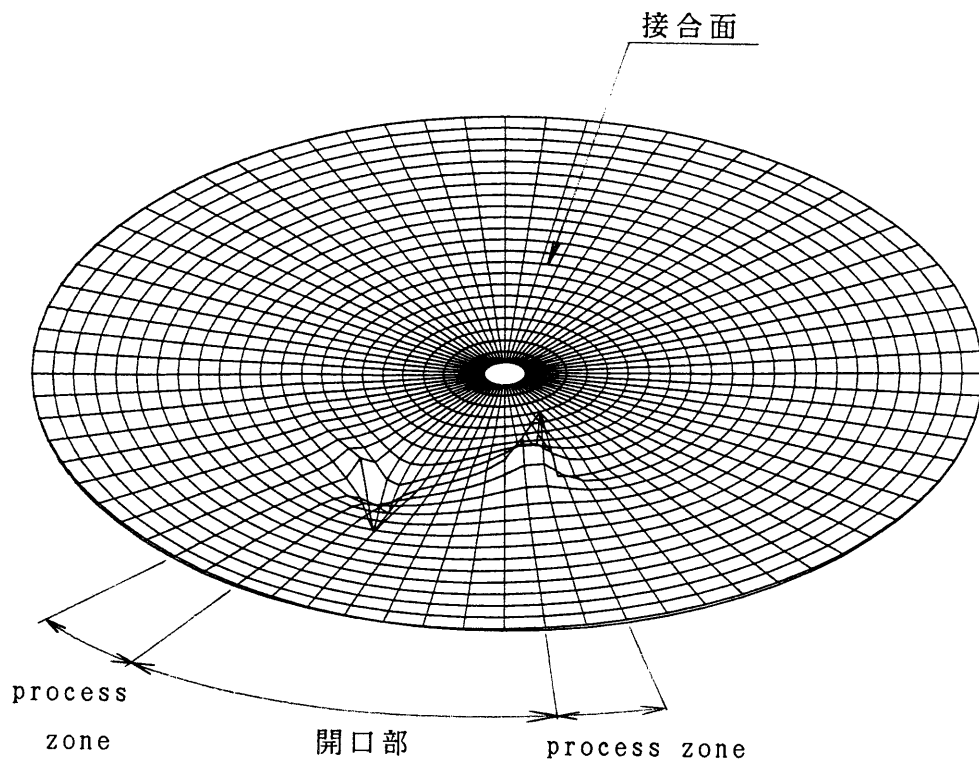


(a) 実数曲面

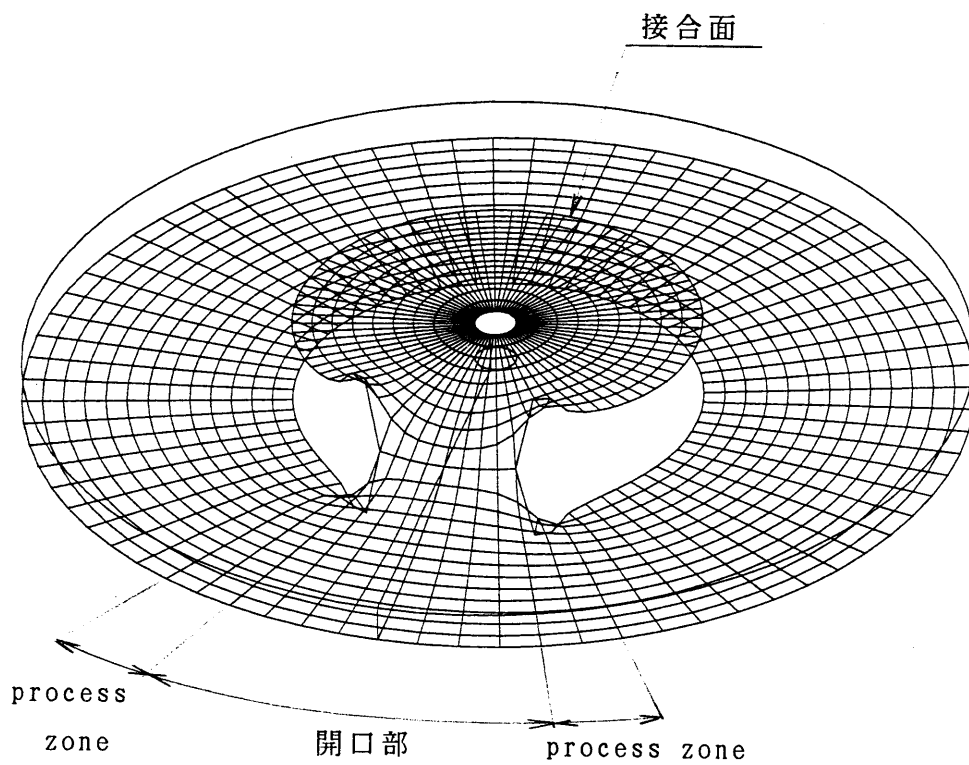


(b) 虚数曲面

図- 3 . 3 要素関数 $f_1(z) = i2\sinh(H)\sin(\alpha H)$

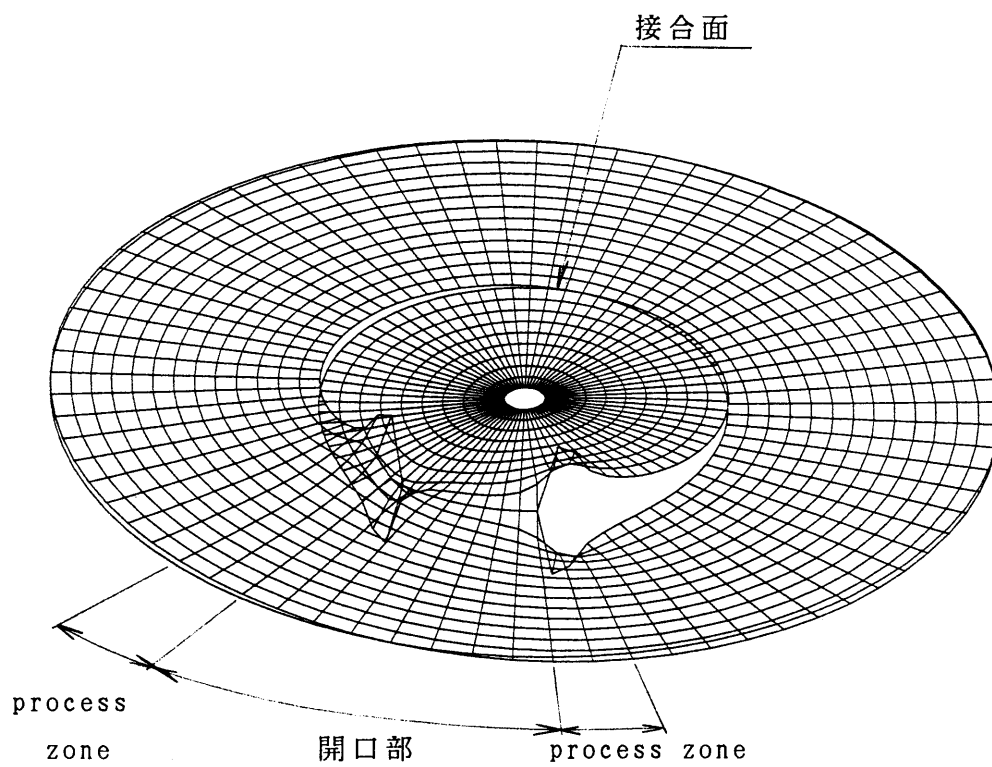


(a) 実数曲面

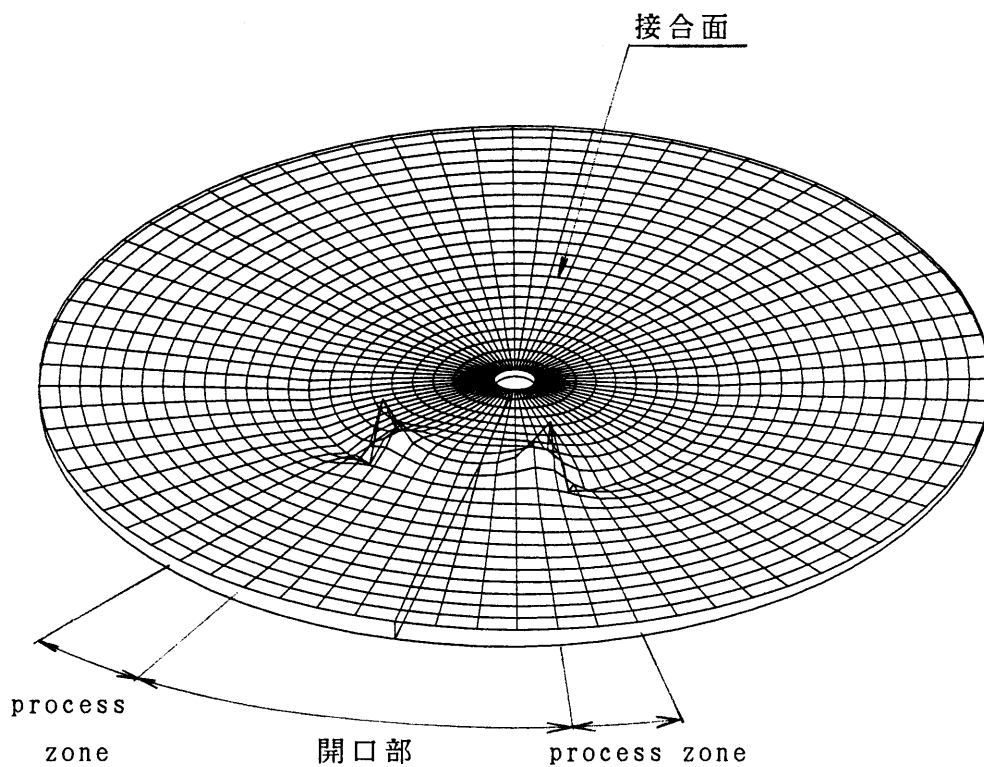


(b) 虚数曲面

図- 3 . 4 要素関数 $f_z(z) = 2\sinh(H)\cos(\alpha H)$

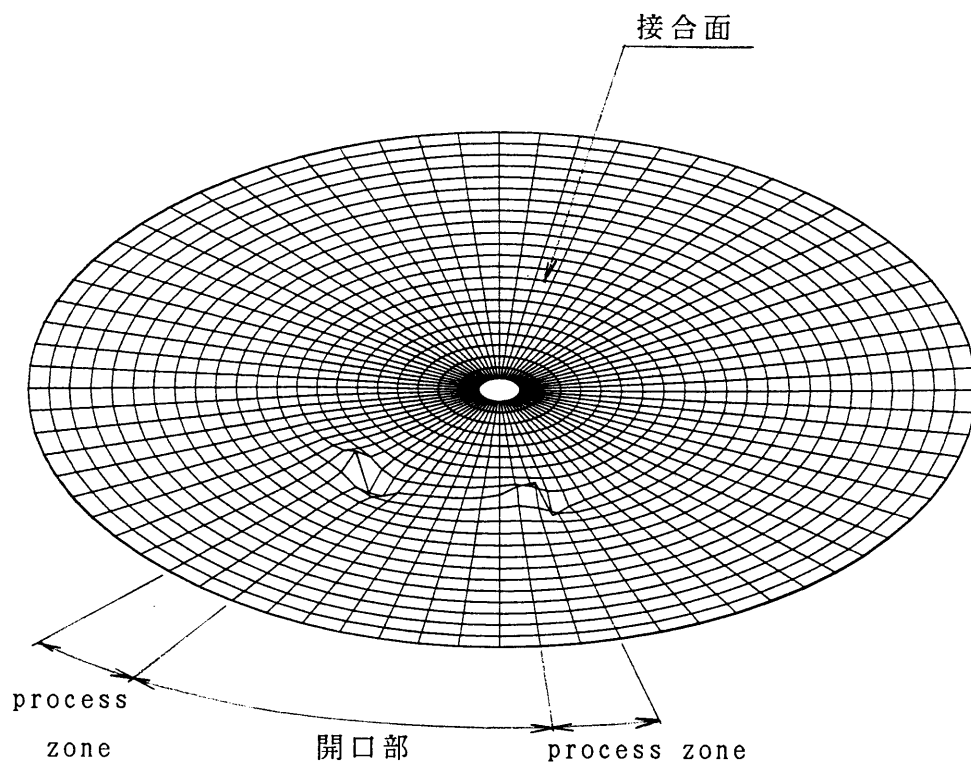


(a) 実数曲面

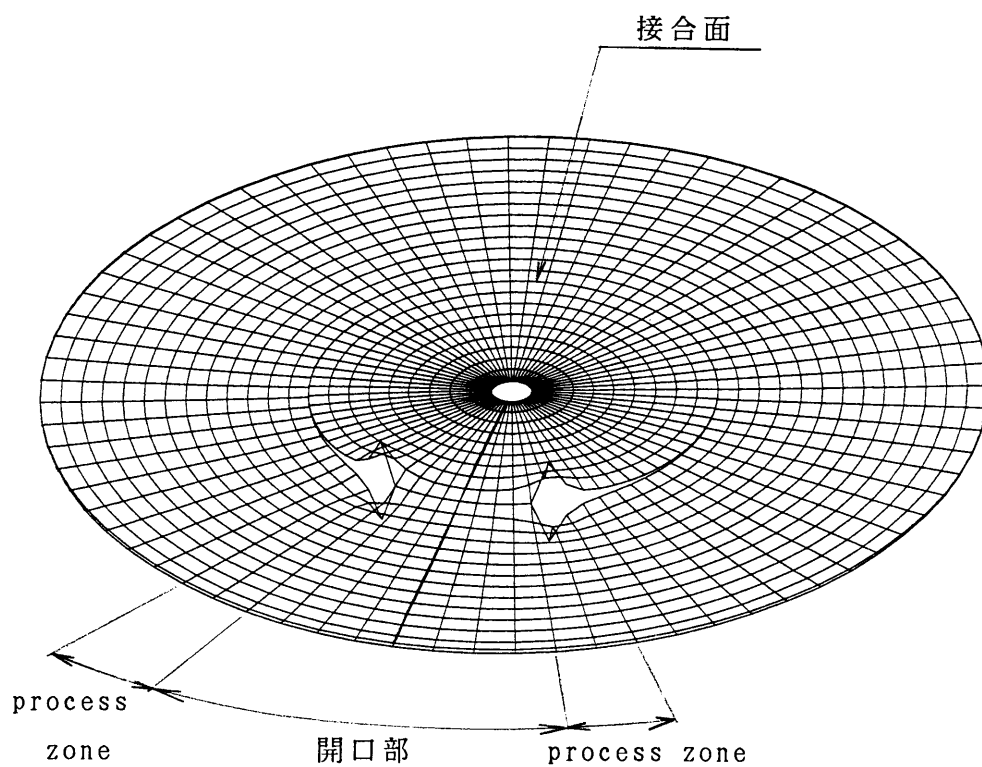


(b) 虚数曲面

図-3.5 要素関数 $f_s(z) = i2\cosh(H)\cos(\alpha H)$



(a) 実数曲面



(b) 虚数曲面

図- 3 . 6 要素関数 $f_4(z) = 2\cosh(H)\sin(\alpha H)$

$$\begin{aligned}\Psi_2(z) &= D_{21}\psi_1(z) + D_{22}\psi_2(z) \\ \Phi_2(z) &= D_{21}\varphi_1(z) + D_{22}\varphi_2(z)\end{aligned}\quad \text{-----} \quad (3.4.5)$$

と定義する。ここで $D_{11} \sim D_{22}$ は任意定数であって、接合面での応力度の連続性より $D_{11} = \pm D_{21}$, $D_{12} = \pm D_{22}$, 変位の連続性より

$$\frac{D_{11}}{D_{12}} = \pm \frac{\left(\frac{K_2+1}{G_2} + \frac{K_1+1}{G_1}\right)}{\left(\frac{K_2-1}{G_2} - \frac{K_1-1}{G_1}\right)} \tanh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad \text{-----} \quad (3.4.6)$$

となる。任意定数 $D_{11} \sim D_{22}$ を求める詳細な手順は次章（第4章）に記述する。

（3）基本解 ψ_j, φ_j, F_j

基本解 ψ_j, φ_j は対象とする構造モデルの任意の応力場を表す解であり、応力場としては 図-3.7 に示すように一様引張り・圧縮力, 集中ねじり, 任意の方向への集中力等が考えられる。本文では ψ_j, φ_j を求めるに当たり、一つの手法として次に示す2つの条件を前提に選定した。

（a）基本解 ψ_j, φ_j は $a, z, a/z$, または任意定数と関数 $F_j(z)$ の積で表し, F_j は円周接合面の境界条件を満たす要素関数 $f_k(z)$ を含む関数とする。

（b）応力関数一般解 $W = \bar{z}\psi + \varphi$ による応力成分が円周接合面で 0 となる ($z\bar{z}-a^2$) の項でまとめられ, その結果円周上の応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ が簡略な形で表されるような関数を選別する。

この結果, 得られた基本解を式(3.4.7)に示す。この解は一様引張り, 集中ねじり力の応力場を表す基本解である。

$$\left. \begin{aligned}\psi_1(z) &= zF_1(z) & \varphi_1(z) &= -a^2 F_1(z) \\ \psi_2(z) &= zF_2(z) & \varphi'_2(z) &= -a^2 F'_2(z) - 2\frac{a^2}{z} F_2(z)\end{aligned}\right\} \quad \text{-----} \quad (3.4.7)$$

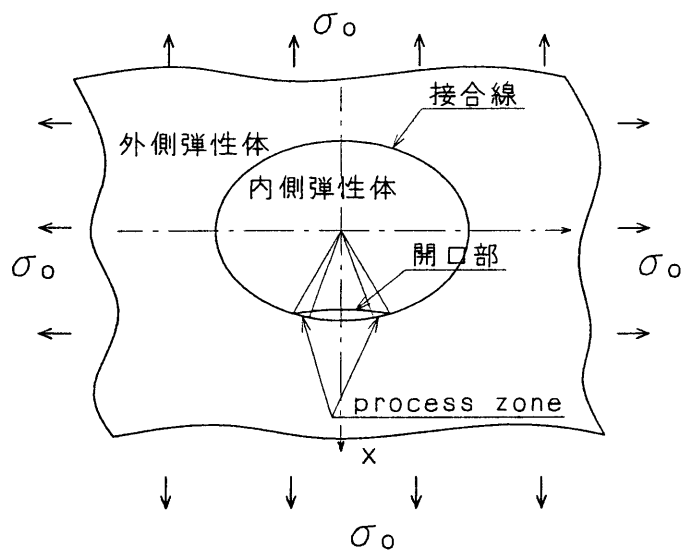
$\varphi'_2(z)$ より $\varphi_2(z)$ を導くことは困難であるが, 変位と応力度を決定するには $\varphi_2(z)$ は不要である。

関数 $F_j(z)$ は前述したように任意関数 $Q(z)$ と $f_k(z)$ の積で表されるが, 実際上は $f_k(k=1 \sim 4)$ を4つの Mode の組み合わせにより採用するため $g_j(z)$ と表現する。この組み合わせを 表-3.1 に示す。

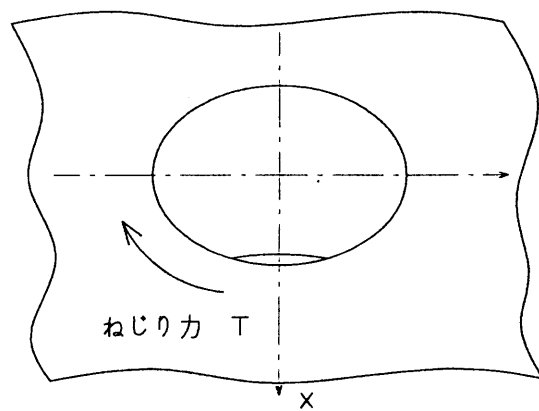
$$F_1(z) = Q(z)g_j(z) \quad F_2(z) = Q(z)g_j(z) \quad \text{-----} \quad (3.4.8)$$

$Q(z)$ は 上述した (a), (b) に示した基本解を求める条件を乱さない範囲の自由度を持った任意関数であり, 具体的には接合面上で実数となる関数とその条件を満たすことになる。その関数を 式(3.4.9) に示す。

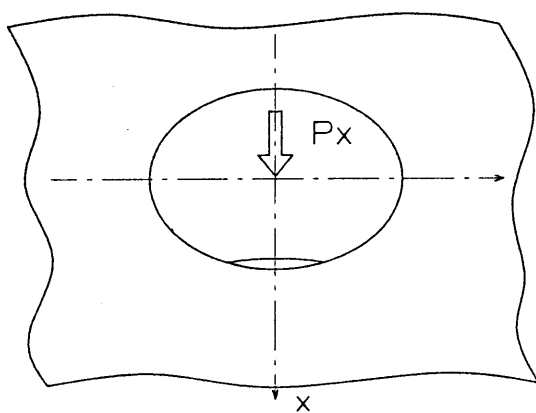
一様引張力



集中ねじり力



集中力 P_x



集中力 P_y

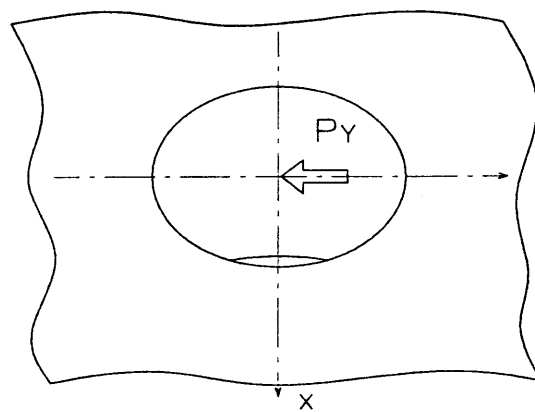


図 - 3.7 応力場の一例

$$\frac{z}{a} + \frac{a}{z} = 2\cos\theta \quad i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right) = -2\sin\theta \quad \text{----- (3.4.9)}$$

採用できる $Q(z)$ の一覧表を表-3.2に示す。

Mode と Type はどのような組み合わせを採用しても円周上のインターフェイスクラックとしての最低境界条件を満足する応力解が得られるが、 $Q(z)$ の高次のものは z が ∞ で発散する解となる。

表-3.1 $f_k(z)$ の組み合わせ Mode 関数 $g_1(z)$, $g_2(z)$

mode	$g_1(z)$	$g_2(z)$
1	$f_1(z)$	$f_2(z)$
2	$f_3(z)$	$f_4(z)$
3	$if_2(z)$	$if_1(z)$
4	$if_4(z)$	$if_3(z)$

表-3.2 関数の次数と Type 別による $Q(z)$

($F_1(z) = Q(z)g_j(z)$, $F_2(z) = Q(z)g_j(z)$)

次数	Type	$Q(z)$
1	1	1
	2	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)$
	3	$i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)$
	4	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)$
2	2	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2$
	3	$(i)^2\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)^2$
	4	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2(i)^2\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)^2$
⋮		⋮
n	2	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^n$
	3	$(i)^n\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)^n$
	4	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^n(i)^m\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)^m$

(4) 応力場の照査

基本解から得られる応力分布状況や開口形状から応力場の状況はほぼ判断できるが、数値的に確認するために円周に沿う面内力の分力（ここでは、X方向力、Y方向力、ねじり方向力）の円周に沿った総和と無限遠方での半径方向の応力 σ_r を検討し応力場を判定する。

(a) 面内力の分力の総和

任意円周上（半径 r ）の微小区間 ds に作用する X方向力を P_x 、Y方向力を P_y 、ねじり方向力（ねじりモーメント）を P_t とすると

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_r \cos \theta ds - \tau_{r\theta} \sin \theta ds \\ P_y &= \sigma_r \sin \theta ds + \tau_{r\theta} \cos \theta ds \\ P_t &= r \tau_{r\theta} ds \end{aligned} \right\} \text{----- (3.4.10)}$$

ここで $ds = r d\theta$ とし、それぞれの力の円周方向の総和を求めると

$$\left. \begin{aligned} \text{Sum}_X &= \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta \\ \text{Sum}_Y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta \\ \text{Sum}_T &= \int_0^{2\pi} (r \tau_{r\theta}) r d\theta \end{aligned} \right\} \text{----- (3.4.11)}$$

となる。

Sum_X : X方向力の総和

Sum_Y : Y方向力の総和

Sum_T : ねじり方向力の総和

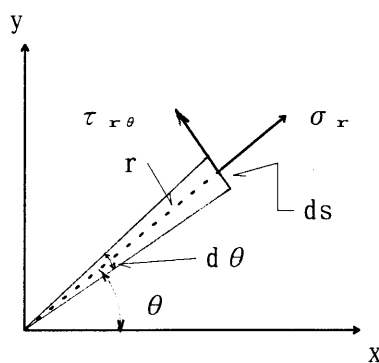


図-3.8 ds 部分にかかる外力

(b) 面内力の総和と応力場

面内力の総和と応力場との関係を次の表にまとめる。

表-3.3 面内力の総和と応力場との関係

	Sum_X	Sum_Y	Sum_T	無限遠方での σ_r
集中ねじり	0	0	有限値	0
無限遠方一様引張り, 圧縮	0	0	0	有限値
集中力 X 方向	有限値	0	0	0
集中力 Y 方向	0	有限値	0	0

第 4 章 解析解の誘導と検討

4.1 解析解の誘導

第 3 章第 4 節で記述した要素関数 $f_k(z)$ および基本解 $\psi_j, \varphi_j (j=1, 2)$ を利用し解析解を誘導する。解析モデルとして、中心に集中ねじり力を受ける単独クラックを対象とする。

(1) 第 1 の解析解

第 1 の解析解として、式(4.1.1)～(4.1.6)を選定する。

(a) 基本解 ψ, φ

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = D_1 z F_1 + D_2 z F_2 \quad \text{-----} \quad (4.1.1)$$

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' = D_1 (-a^2 F_1') + D_2 a^2 \left(-\frac{2}{z} F_2 - F_2'\right) \quad \text{---} \quad (4.1.2)$$

D_1, D_2 : 係数 a : 異なる弾性体の接合面半径

(b) 関数 $F(z)$

要素関数 $g_j(z)$ として表-3.1 より Mode=1 を採用する。関数 $Q(z)$ は表-3.2 より次数=1, Type=1 を採用する。

$$F_1(z) = Q(z) g_1(z) = f_1 \quad \text{-----} \quad (4.1.3)$$

$$F_2(z) = Q(z) g_2(z) = f_2 \quad \text{-----} \quad (4.1.4)$$

$$f_1 = \cosh\{(1+i\alpha)H\} - \cosh\{(1-i\alpha)H\} \quad \text{-----} \quad (4.1.5)$$

$$f_2 = \sinh\{(1+i\alpha)H\} + \sinh\{(1-i\alpha)H\} \quad \text{-----} \quad (4.1.6)$$

H : 重み積分後の新開口関数 α : 係数

(c) 解の誘導

解は第 3 章第 3 節の境界条件 (a), (b), (c) を満たす係数 D_1, D_2, α を求めることである。関数 ψ_1, φ_1 による接合面内側の応力と変位は

$$\sigma_{r11} = 4D_{11} \cosh(H_r) \sin(\alpha H_r) \cosh\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta11} = 4aD_{11} \{ \sinh(H_r) \sin(\alpha H_r) + \alpha \cosh(H_r) \cos(\alpha H_r) \} \cosh\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right)$$

$$U_{r11} = \frac{k_1 - 1}{2G_1} 2aD_{11} \cosh\left(\frac{\alpha \pi}{2}\right) \cosh(H_r) \sin(\alpha H_r)$$

$$U_{\theta 11} = -\frac{k_1+1}{2G_1} 2aD_{11}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)$$

$$\begin{aligned} H_r &: H \text{ の実数部} & H_i &: H \text{ の虚数部} \\ \sigma_r &: \text{半径方向の応力} & \tau_{r\theta} &: \text{せん断応力} \\ U_r &: \text{半径方向の変位} & U_\theta &: \text{円周方向の変位} \\ G &: \text{せん断弾性係数} & \nu &: \text{ポアソン比} \\ k_1 &= 3-4\nu_1 \end{aligned}$$

となり、関数 ϕ_1, φ_1 による接合面外側の応力と変位は次のようになる。

$$\sigma_{r12} = -4D_{12}\cosh(H_r)\sin(\alpha H_r)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$\tau_{r\theta 12} = -4aD_{12} \{ \sinh(H_r)\sin(\alpha H_r) + \alpha \cosh(H_r)\cos(\alpha H_r) \} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$U_{r12} = -\frac{k_2-1}{2G_2} 2aD_{12}\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\sin(\alpha H_r)$$

$$U_{\theta 12} = -\frac{k_2+1}{2G_2} 2aD_{12}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)$$

接合面内側と外側の応力は、 $D_{11} = -D_{12}$ より連続となる。関数 ϕ_2, φ_2 による接合面内側の応力と変位は

$$\sigma_{r21} = 4aD_{21} \{ \sinh(H_r)\cos(\alpha H_r) - \alpha \cosh(H_r)\sin(\alpha H_r) \} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$\tau_{r\theta 21} = -4D_{21}\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$U_{r21} = \frac{k_1+1}{2G_1} 2aD_{21}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\sin(\alpha H_r)$$

$$U_{\theta 21} = -\frac{k_1-1}{2G_1} 2aD_{21}\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)$$

であり、関数 ϕ_2, φ_2 による接合面外側の応力と変位は

$$\sigma_{r22} = 4aD_{22} \{ -\sinh(H_r)\cos(\alpha H_r) + \alpha \cosh(H_r)\sin(\alpha H_r) \} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$\tau_{r\theta 22} = 4D_{22}\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)$$

$$U_{r22} = \frac{k_2+1}{2G_2} 2aD_{22}\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\sin(\alpha H_r)$$

$$U_{\theta 22} = \frac{k_2-1}{2G_2} 2aD_{22}\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\cosh(H_r)\cos(\alpha H_r)$$

となる。接合線内側と外側の応力は、 $D_{21} = -D_{22}$ より連続となる。

ψ_1, φ_1 と ψ_2, φ_2 をそれぞれ単独に解析解とする場合は接合面上の変位の連続条件が満足されないので、両者を重ね合わせるにより条件を満たすようにする。

円周上の $|\theta| > \omega + \beta$ 部分の変位条件式を式(4.1.7)に示し、式(4.1.8)に行列式で具体的に示す。

$$\left. \begin{aligned} (u_{r11} + u_{r21}) - (u_{r12} + u_{r22}) &= 0 \\ (u_{\theta11} + u_{\theta21}) - (u_{\theta12} + u_{\theta22}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (4.1.7)}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k_2-1}{G_2} - \frac{k_1-1}{G_1} \right) \cosh \frac{\alpha \pi}{2}, & - \left(\frac{k_2+1}{G_2} + \frac{k_1+1}{G_1} \right) \sinh \frac{\alpha \pi}{2} \\ \left(\frac{k_2+1}{G_2} + \frac{k_1+1}{G_1} \right) \sinh \frac{\alpha \pi}{2}, & - \left(\frac{k_2-1}{G_2} - \frac{k_1-1}{G_1} \right) \cosh \frac{\alpha \pi}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1.8)$$

左辺の行列=0より、パラメータ α を定める式

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \log \left\{ \frac{\frac{k_2}{G_2} + \frac{1}{G_1}}{\frac{k_1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} \right\} \text{----- (4.1.9)}$$

が得られるが、 α は bielastic constant であり、 D_{11} と D_{21} の係数比は式(4.1.10)となる。

$$\frac{D_{11}}{D_{21}} = - \frac{- \left(\frac{k_2+1}{G_2} + \frac{k_1+1}{G_1} \right) \sinh \left(\frac{\alpha \pi}{2} \right)}{\left(\frac{k_2-1}{G_2} - \frac{k_1-1}{G_1} \right) \cosh \left(\frac{\alpha \pi}{2} \right)} \text{----- (4.1.10)}$$

(2) 第2の解析解

第2の解析解として、式(4.1.11)～(4.1.16)を選定する。

(a) 基本解 ψ, φ (ψ, φ は第1の解析解と同じ)

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = D_1 z F_1 + D_2 z F_2 \text{----- (4.1.11)}$$

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' = D_1 (-a^2 F_1') + D_2 a^2 \left(-\frac{2}{z} F_2 - F_2' \right) \text{--- (4.1.12)}$$

D_1, D_2 : 係数 a : 異なる弾性体の接合面半径

(b) 関数 $F(z)$

要素関数 $g_j(z)$ として表-3.1 より Mode=2 を採用する。関数 $Q(z)$ は表-3.2 より次数=1, Type=1 を採用する。

$$F_1(z) = Q(z) g_1(z) = f_3 \text{----- (4.1.13)}$$

$$F_2(z) = Q(z) g_2(z) = f_4 \text{----- (4.1.14)}$$

$$f_3 = i \cosh \{(1+i\alpha)H\} + i \cosh \{(1-i\alpha)H\} \quad \text{-----} \quad (4.1.15)$$

$$f_4 = -i \sinh \{(1+i\alpha)H\} + i \sinh \{(1-i\alpha)H\} \quad \text{-----} \quad (4.1.16)$$

(c) 解の誘導

第1の解と同様に照査を行うと、パラメータ α は式(4.1.9)を満足し D_{11} , D_{21} の係数比は次のようになる。

$$\frac{D_{11}}{D_{21}} = - \frac{\left(\frac{k_2+1}{G_2} + \frac{k_1+1}{G_1} \right) \sinh \left(\frac{\alpha \pi}{2} \right)}{\left(\frac{k_2-1}{G_2} - \frac{k_1-1}{G_1} \right) \cosh \left(\frac{\alpha \pi}{2} \right)} \quad \text{-----} \quad (4.1.17)$$

解析解の誘導例を記述したが、第3章第4節で述べたように表-3.1に示す $g_j(z)$ と表-3.2の $Q(z)$ の各々の組合わせに対しても同様に解析解を見い出すことができる。どの解析解においても α は bielastic constant の値を示し、係数比は $D_{11}/D_{21} = \pm 1$ となる。

4.2 解析解の検討

(1) 解析解の一覧表

主要な解析解の一覧表（表-4.1）を示す。

表-4.1 解析解の一覧表（解 No.1～No.20）

解 No.	要素関数 $g_1 \quad g_2$		$Q(z)$	F_1	F_2	応 力 場
1	f_1	f_2	1	g_1	g_2	集中ねじり力
2	f_3	f_4				一様引張力
3	if_2	if_1				
4	if_4	if_3				
5	f_1	f_2	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)$	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right) g_1$	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right) g_2$	2重ねじり力
6	f_3	f_4				+ 集中ねじり力
7	if_2	if_1				2重ねじり力
8	if_4	if_3				+ 一様引張力
9	f_1	f_2	$i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right)$	$i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right) g_2$	$i\left(\frac{z}{a} - \frac{a}{z}\right) g_1$	2重ねじり力
10	f_3	f_4				+ 集中ねじり力
11	if_2	if_1				2重ねじり力
12	if_4	if_3				+ 一様引張力
13	f_1	f_2	解 No. 5 \pm 解 No. 9			集中ねじり力
14	f_3	f_4	解 No. 6 \pm 解 No. 10			一様引張力
15	if_2	if_1	解 No. 7 \pm 解 No. 11			
16	if_4	if_3	解 No. 8 \pm 解 No. 12			
17	f_1	f_2	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2$	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2 g_1$	$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2 g_2$	4重ねじり力
18	f_3	f_4				+ 集中ねじり力
19	if_2	if_1				4重ねじり力
20	if_4	if_3				+ 一様引張力

(2) 解析解の検討

図-4.1に示す解析条件で求めた解析解の開口部周辺 ($r=a$, $|\theta| \leq 50^\circ$) における応力と変位を図-4.2～図-4.9に図示する。具体的に解析条件を記述すると、接合円周までの半径 $a=10\text{cm}$ 、クラックの角度 $2\omega=40^\circ$ 、process zone 部分の角度 $\beta=10^\circ$ (すなわち $|\theta| < 20^\circ$ がクラック部分に相当し $20^\circ \leq |\theta| \leq 30^\circ$ が process zone 部分に相当する)、内側弾性体の弾性係数比 $E_1/E_2=7$ 、内側弾性体のポアソン比 $\nu_1=0.3$ 、外側弾性体のポアソン比 $\nu_2=0.167$ とし、重み関数には2次式を用いる。

図-4.2は解 No.1 集中ねじり力が作用する場合の接合面上の応力と変位を示し、半径方向の応力 σ_r を図(a)に、せん断力 $\tau_{r\theta}$ を図(b)に、半径方向の変位 U_r を図(c)に、円周方向の変位 U_θ を図(d)に図示する。 U_r 、 U_θ については接合面内側の値を実線で接合面外側の値を破線で表す。

図-4.3 (解 No.2)、図-4.4 (解 No.13)、図-4.5 (解 No.14) は集中ねじり力が作用する場合、図-4.6 (解 No.3)、図-4.7 (解 No.4)、図-4.8 (解 No.15) 図-4.9 (解 No.16) は無限遠方で一様引張力が作用する場合の応力と変位図を表す。円周方向の応力 σ_θ は境界条件に関与しないのでここでは割愛する。

また、応力と変位の分布形状を把握することを主とするため数値、単位は省略する。

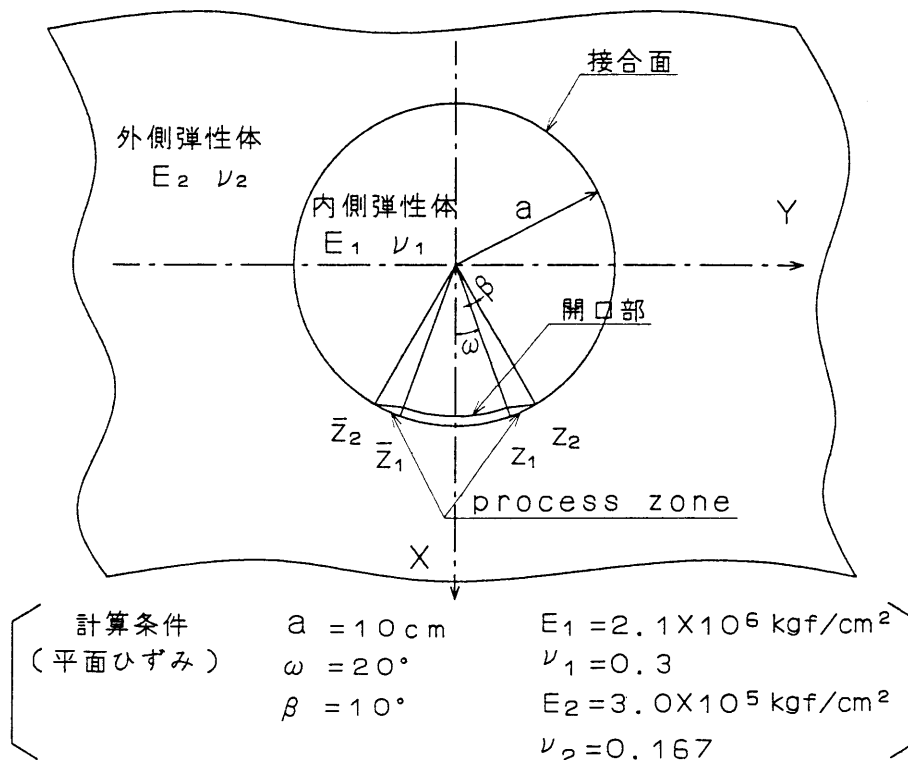
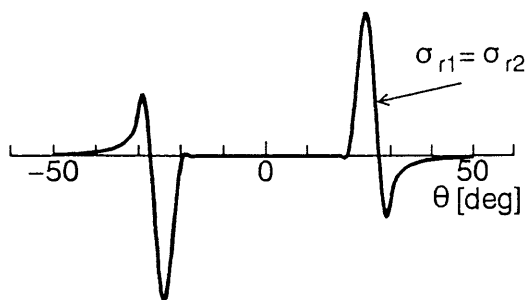
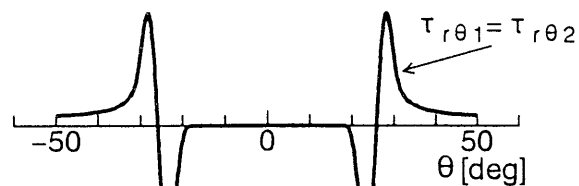


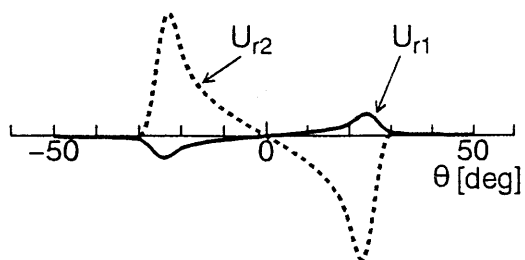
図 - 4.1 解析モデル



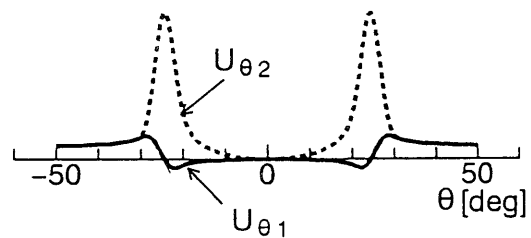
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$

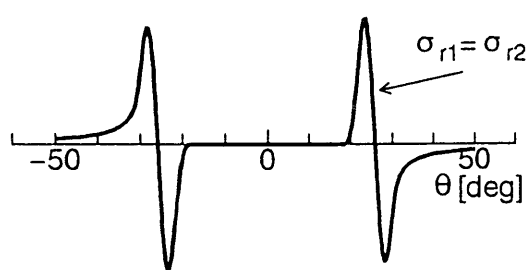


(c) U_r

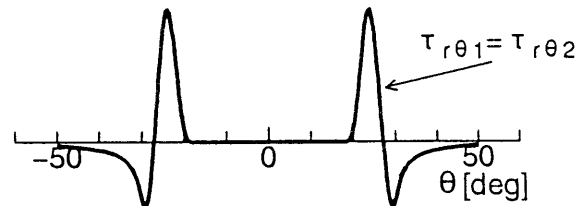


(d) U_{θ}

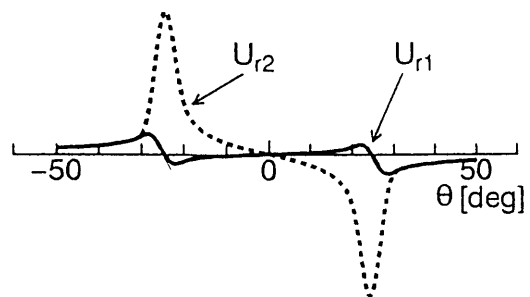
図-4.2 解 No.1 集中ねじり力



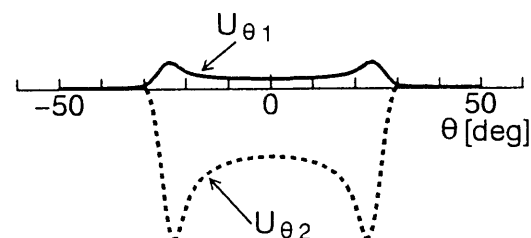
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$

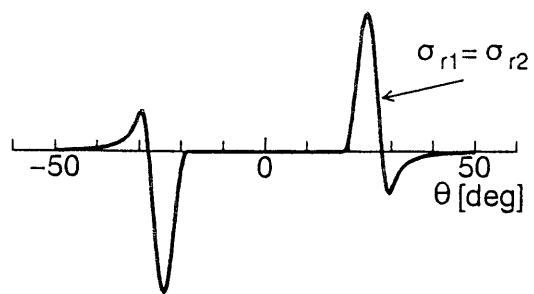


(c) U_r

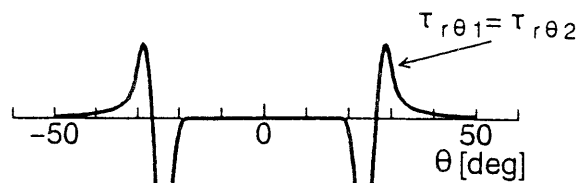


(d) U_{θ}

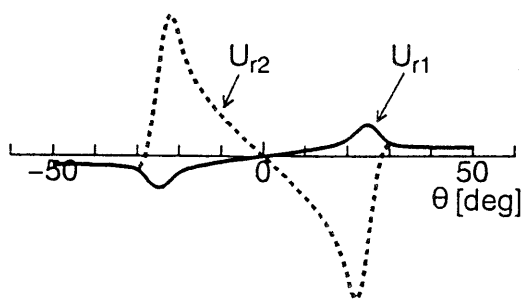
図-4.3 解 No.2 集中ねじり力



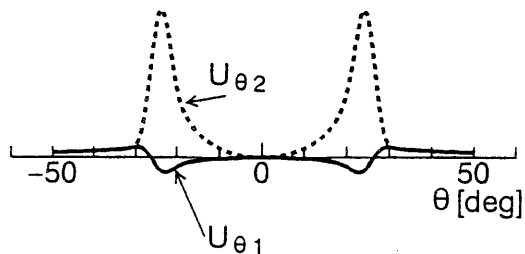
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$

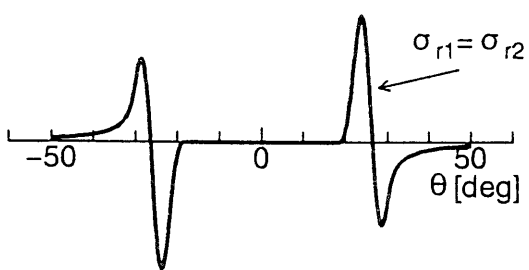


(c) U_r

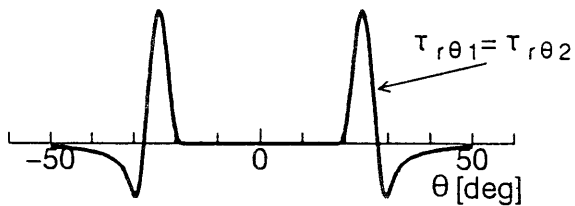


(d) U_{θ}

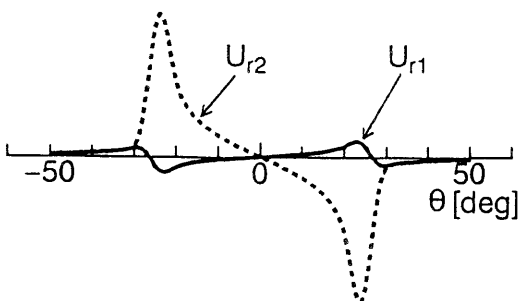
図-4.4 解 No. 13 集中ねじり力



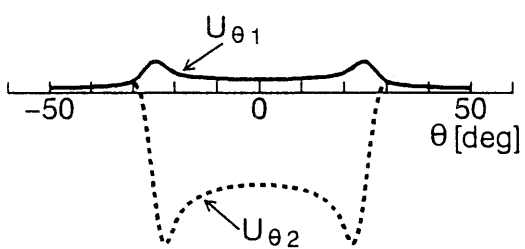
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$

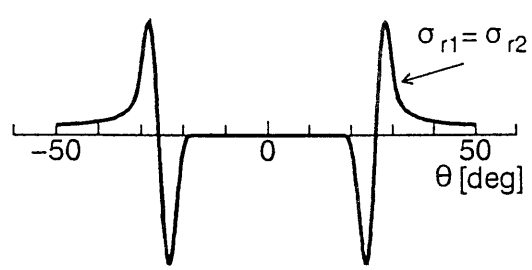


(c) U_r

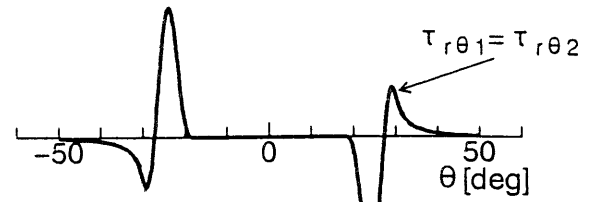


(d) U_{θ}

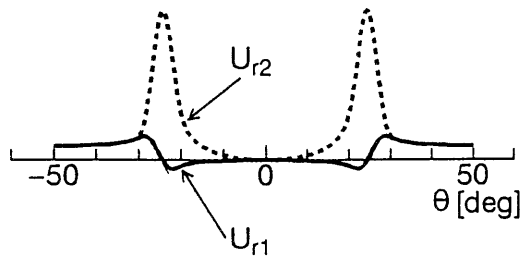
図-4.5 解 No. 14 集中ねじり力



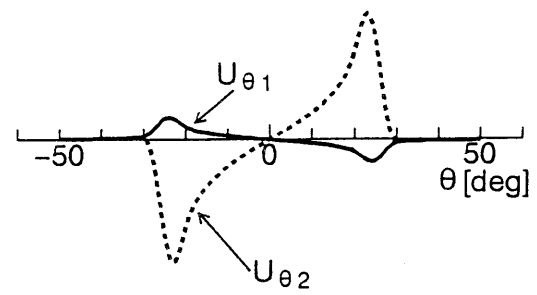
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$

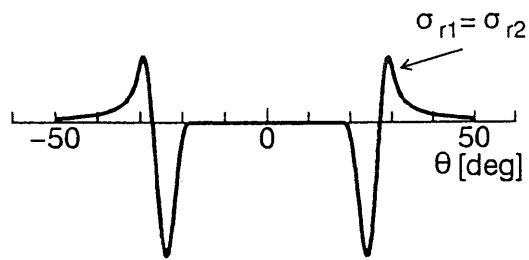


(c) U_r

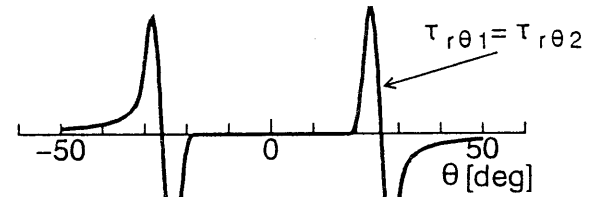


(d) U_θ

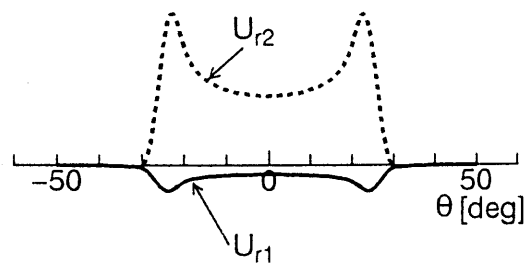
図-4.6 解No.3 無限遠方で一様引張力



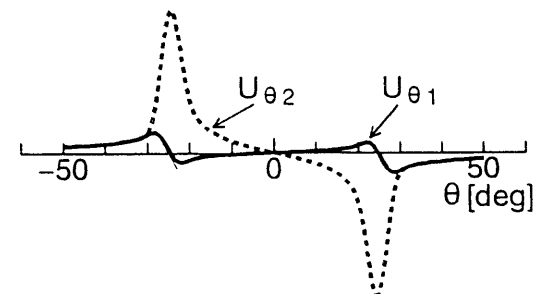
(a) σ_r



(b) $\tau_{r\theta}$



(c) U_r



(d) U_θ

図-4.7 解No.4 無限遠方で一様引張力

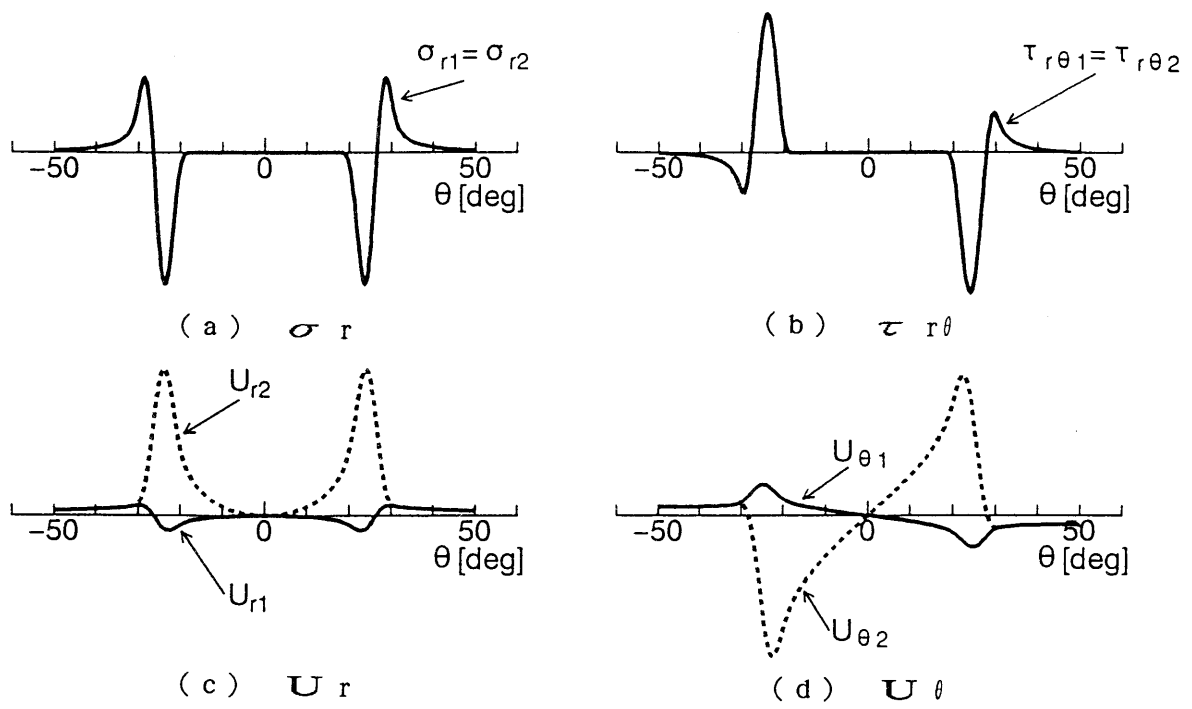


図-4.8 解No.15 無限遠方で一様引張力

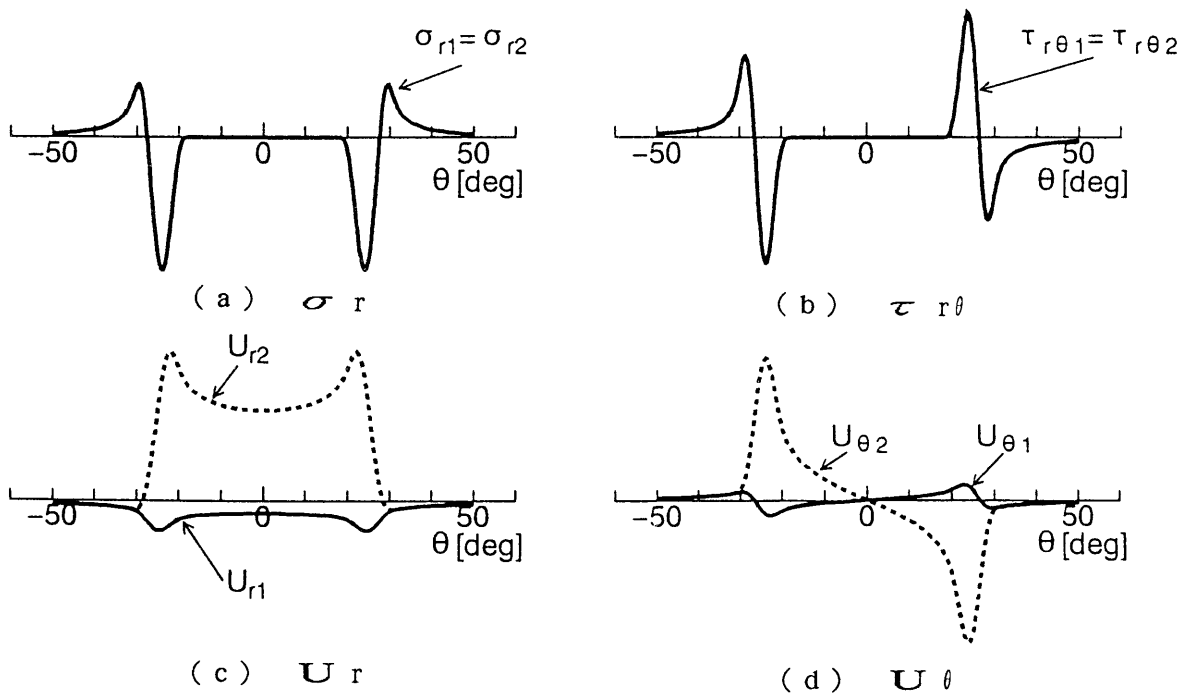


図-4.9 解No.16 無限遠方で一様引張力

図-4.2～図-4.9より解析解の全てが変位と応力の境界条件を満たしていて、応力集中も過去の研究例にみられる振動しながら無限大に発散する形状（集積特異点）を回避し有限で滑らかなものとなっている。開口変位は中央部より外側の方が大きいことが判り、剛性の異なる材料間に生じているクラックとしても不自然なものが多い。

また、開口形状として X 軸 ($\theta = 0$, 図-4.1 参照) に対して U_r が逆対称で U_θ が対称なもの（解 No.1,2,13,14）と、X 軸に対して U_r が対称で U_θ が逆対称なもの（解 No.3,4,15,16）の 2 種類に判別できる。二次元平面問題において面内力が作用する場合の基本的な開口モードとして、クラックに面内せん断が作用する場合とクラックに引張りが作用する場合がある。解 No.1,2,13,14 はクラックに面内せん断が、解 No.3,4,15,16 はクラックに引張りがそれぞれ作用している場合の解の一種であると推察される。円形境界上にクラックを有している本モデルでは、前者が円形領域でねじり力が作用する解析解（以下、ねじり解）、後者が無限遠方で半径方向（放射方向）に一樣引張力が作用する解析解（以下、一樣引張り解）の一種であると判断される。

（3）変位に関する問題点

前述したように図-4.2～図-4.9に示した解析解は全て変位と応力の境界条件を満たしているが、開口変位については一部問題点が残されている。解 No.3,4,15,16 は無限遠方で一樣引張力が作用する解析解であると判定しているが、半径方向の開口変位は図-4.10に示すように process zone 部分の変位がクラック中央部より大きくなる不自然さを現している。

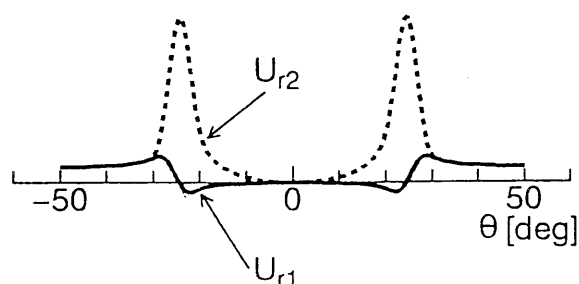


図-4.10 個々の解の開口形状

この不自然さを解消するため、同じ応力場を表す解析解を重ね合わせる手法を見いだした。これについては本章の第4節に詳説する。

（4）その他の解析解

前述した以外の解析解として、解 No.5,6,9,10 は円形領域中心に 2 重ねじり力と集中（単純）ねじり力が作用する複合応力場と想定され、解 No.7,8,11,12 は 2 重ねじり力と無限遠方で一樣引張力が作用する複合応力場と想定される。応力と変位の概要を図-4.11, 図-4.12に示すが円中心での 2 重ねじりの状況が判定できるのであろう。

また、解 No. 17, 18 は円形領域中心に 4 重ねじり力と集中（単純）ねじり力が作用し、解 No. 19, 20 は 4 重ねじり力と無限遠方で一様引張力が作用する複合応力場と想定される。解 No. 19 の応力と変位を図-4.13、図-4.14 に示すが、図-4.13 は円中心の 4 重ねじりをわかり易く表現した図である。また、図-4.14 は応力と変位の連続条件と process zone 近傍の応力形状の概要をわかり易くした図である。

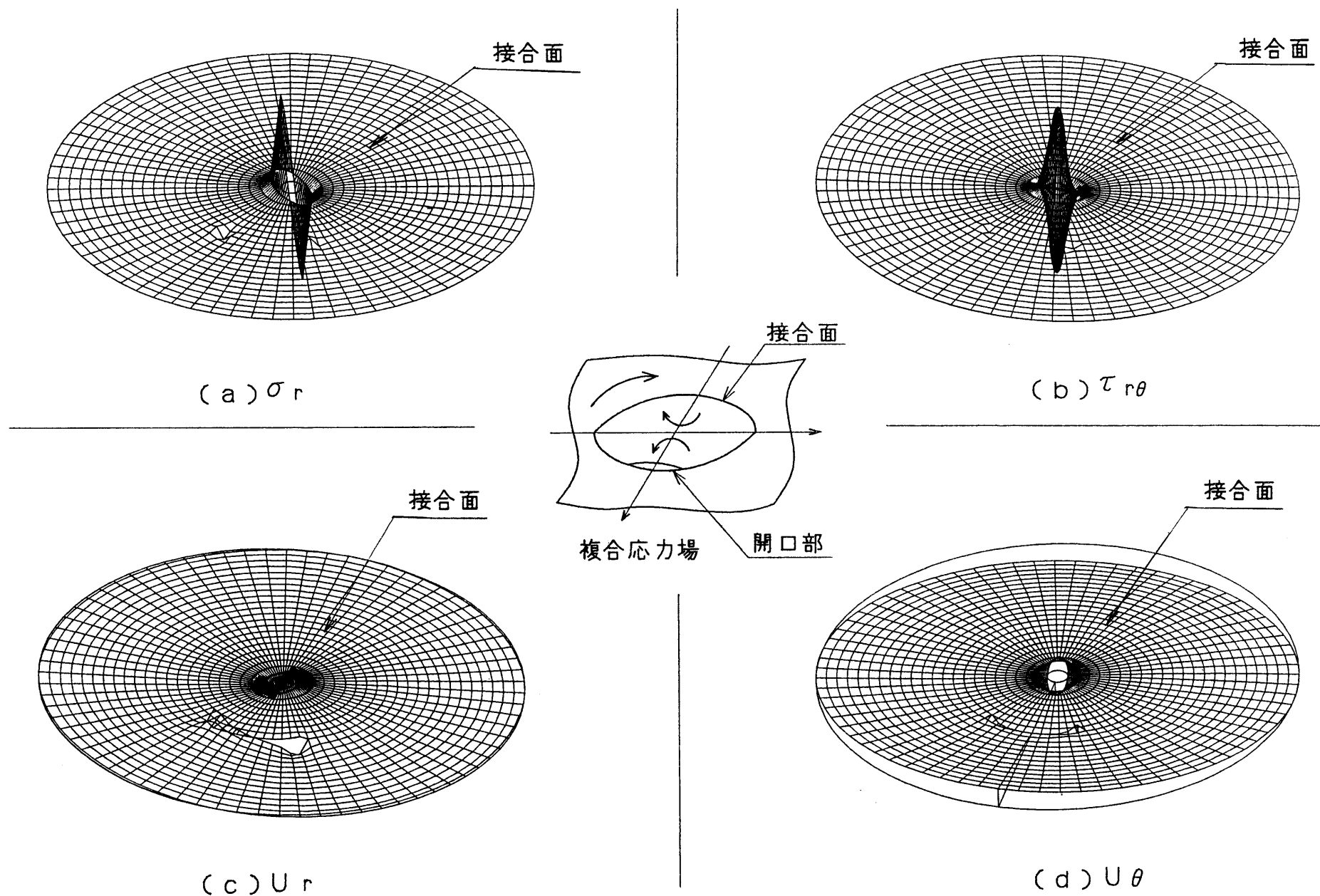


図-4.11 解 No.5 2重ねじり力と単純ねじり力

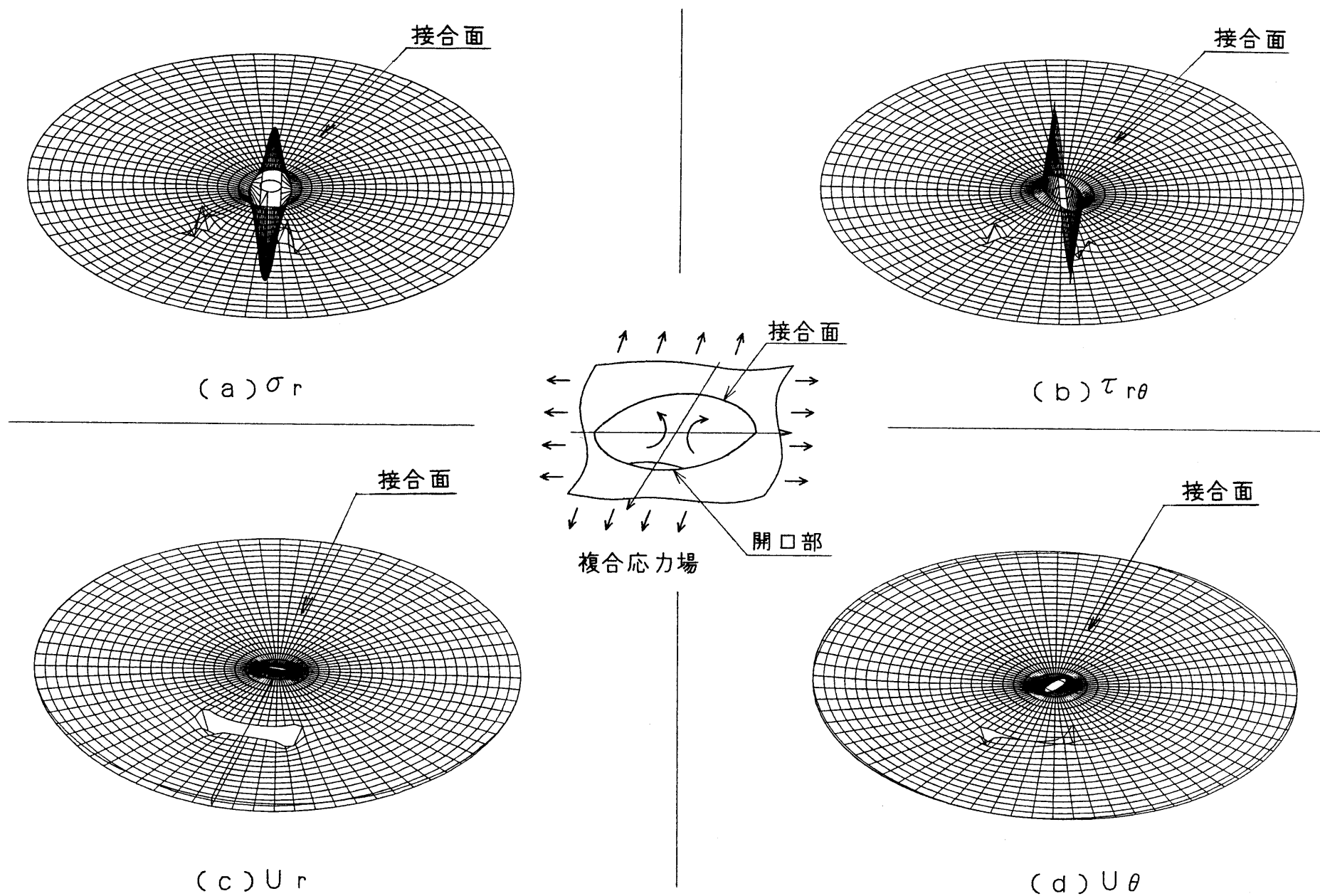


図-4.12 解 No.11 2重ねじり力と一様引張力

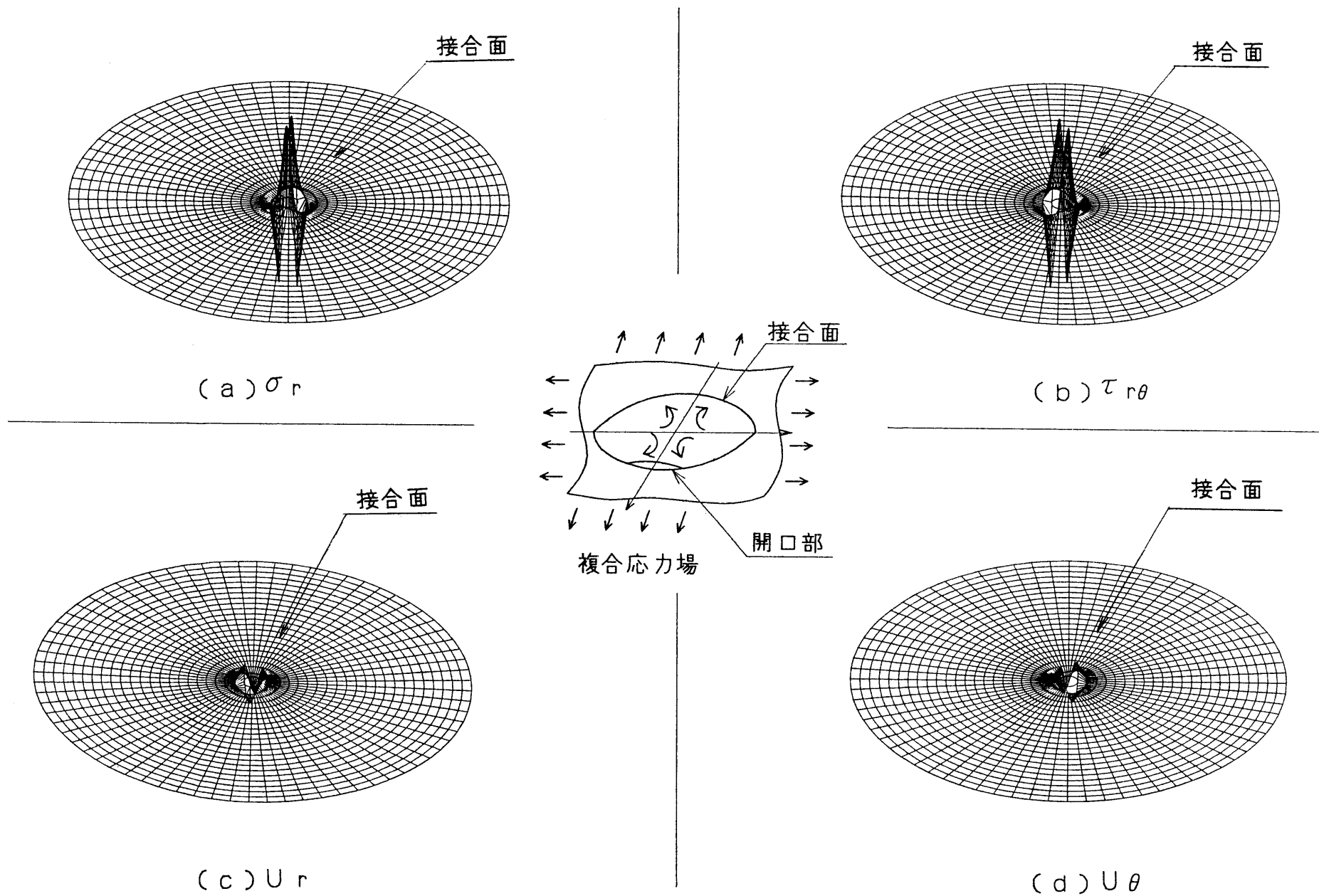


図-4.13 解 No.19 4重ねじり力と一様引張力(複合応力を明示)

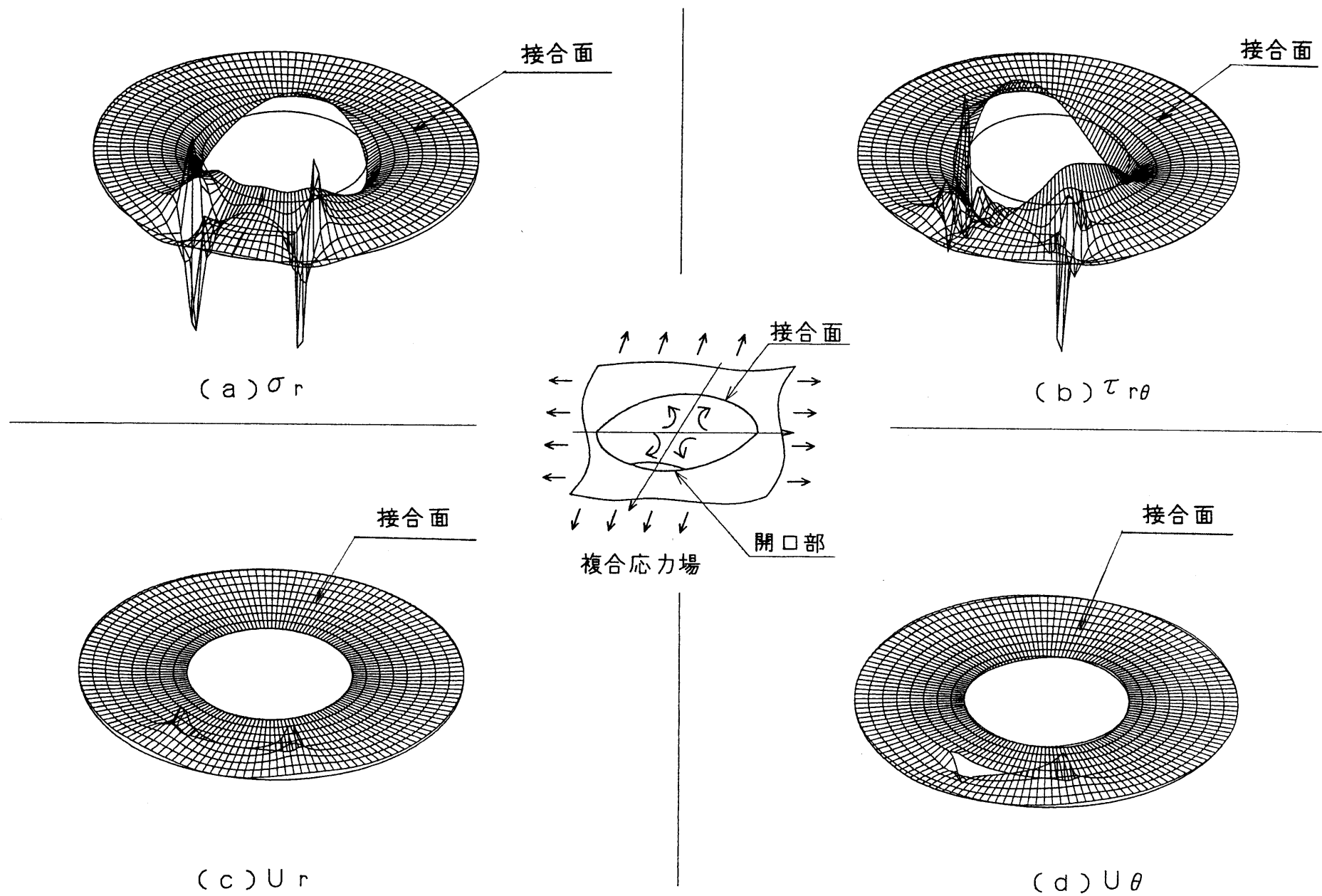


図-4.14 解 No.19 4重ねじり力と一様引張力(応力と変位形状を明示)

4.3 エネルギー解放率 (J 積分)

前節までは、クラック先端付近の応力および変位分布のみを扱ってきたが、この節ではクラックの成長に伴って起きるエネルギーの変化に着目する。一般に得られている結論は境界条件のもとでクラックが進展するとき、力学系のポテンシャルエネルギーは必ず減少することである。そしてクラックが単位面積だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギーはエネルギー解放率 (energy release rate) と呼ばれ、解放率を求める積分計算は J 積分と呼ばれている。

J とはクラックが $\Delta\omega$ だけ微小進展するについて process zone において解放される (費やされる) エネルギー ΔW をもって

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta\omega} = \frac{\partial W}{\partial \omega} \quad \text{----- (4.3.1)}$$

と定義される。J は単位面積あたりのエネルギーという次元を持つ量で [kgf/mm], [N/mm] 等の単位で表される。したがってクラック部分の単位長さに対し、そこに作用してクラックの進展に寄与する一般化力と解することもできる。

(1) エネルギー変化 ΔW

(a) ある外力が作用してクラック線上の開口変位が

r (半径) 方向の開口分布 $U_{r1}(\theta) \cdots \cdots \sigma_r$ の相対開口

θ (円周) 方向のズレ開口 $U_{\theta1}(\theta) \cdots \cdots \tau_{r\theta}$ の相対開口

となる場合の接合部近傍の内側と外側の相対変位を

$$U_1(\theta) = U_{r1}(a+\varepsilon, \theta) - U_{r1}(a-\varepsilon, \theta)$$

$$V_1(\theta) = U_{\theta1}(a+\varepsilon, \theta) - U_{\theta1}(a-\varepsilon, \theta) \quad \text{----- (4.3.2)}$$

但し $\varepsilon \rightarrow 0$ a : 接合円周半径

とする。

応力度分布は θ 軸上で $\sigma_{r1}(\theta)$, $\tau_{r\theta1}(\theta)$ とする。この場合には応力開放 ($\sigma_{r1}(\theta)=0$, $\tau_{r\theta1}(\theta)=0$) 区間を $|\theta| < \omega_1$ とし, process zone 区間を $\omega_1 \leq |\theta| \leq \omega_1 + \beta_1$ とする。

(b) 次に外力はそのまま開口部が

$$\omega_1 \rightarrow \omega_1 + \Delta\omega = \omega_2$$

あるいは $\beta_1 \rightarrow \beta_1 + \Delta\beta = \beta_2$ に増加 (進展) したとする。

これによる r 方向, θ 方向の相対変位はそれぞれ $U_2(\theta)$, $V_2(\theta)$ となり, 応力度も相応に $\sigma_{r2}(\theta)$, $\tau_{r\theta2}(\theta)$ となる。

(c) 外力は一定のままで $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ あるいは $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ となり

$$\left. \begin{array}{l} U_1(\theta) \rightarrow U_2(\theta) \\ V_1(\theta) \rightarrow V_2(\theta) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sigma_{r1}(\theta) \rightarrow \sigma_{r2}(\theta) \\ \tau_{r\theta1}(\theta) \rightarrow \tau_{r\theta2}(\theta) \end{array} \right\}$$

となることによって変化するクラック線上の外力仕事 ($\Delta U \cdot \sigma_r + \Delta V \cdot \tau_{r\theta}$) , すなわちエネルギー変化 ΔW は

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2 + \beta_2} [\{\sigma_{r1}(\theta) + \sigma_{r2}(\theta)\} \Delta U(\theta) + \{\tau_{r\theta 1}(\theta) + \tau_{r\theta 2}(\theta)\} \Delta V(\theta)] d\theta$$

$$\Delta U(\theta) = U_2(\theta) - U_1(\theta) \quad \Delta V(\theta) = V_2(\theta) - V_1(\theta) \quad \text{----- (4.3.3)}$$

と表される。式 (4.3.3) はクラック一端のみにおけるエネルギー変化である。ここで積分区間を $\omega_1 \leq \theta \leq \omega_2 + \beta_2$ としているが $|\theta| < \omega_1$ で応力度 $\{\sigma_r(\theta), \tau_{r\theta}(\theta)\}$ が 0 , $\omega_2 + \beta_2 < |\theta| \leq \pi$ で相対変位 $\{U_2(\theta), V_2(\theta)\}$ が 0 となり, 例え $|\theta| < \omega_1$, $\omega_2 + \beta_2 < |\theta| \leq \pi$ 区間で積分してもその区間の積分値は 0 となるので計算上積分区間が広がることは構わない。

(2) J の決定

本研究では $\Delta\omega$ (クラック部分) と $\Delta\beta$ (process zone 部分) の2つの進展が考えられるので, 次のように2種類の J を定義する。

(a) クラック部分が $\Delta\omega$ 進展した場合の J (= J a)

初期状態 (ω_1, β_1) における応力と変位 $\sigma_{r1}, \tau_{r\theta 1}, U_{r1}, U_{\theta 1}$, 進展後の状態 ($\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega, \beta_2 = \beta_1$) における応力と変位 $\sigma_{r2}, \tau_{r\theta 2}, U_{r2}, U_{\theta 2}$ を求めて

$$J a = \frac{\Delta W(\omega_1, \beta_1, \omega_2, \beta_2)}{\Delta\omega} \quad \text{----- (4.3.4)}$$

とする。

(b) process zone 部分が $\Delta\beta$ 進展した場合の J (= J b)

初期状態 (ω_1, β_1) における応力と変位 $\sigma_{r1}, \tau_{r\theta 1}, U_{r1}, U_{\theta 1}$, 進展後の状態 ($\omega_2 = \omega_1, \beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta$) における応力と変位 $\sigma_{r2}, \tau_{r\theta 2}, U_{r2}, U_{\theta 2}$ を求めて

$$J b = \frac{\Delta W(\omega_1, \beta_1, \omega_2, \beta_2)}{\Delta\beta} \quad \text{----- (4.3.5)}$$

とする。

4.4 解析解の重ね合わせ

本章第1節の解析解の一覧表より明かなように、同じ応力場を表し境界条件を満たす解析解を複数個誘導することができる。本研究では任意の応力場を対象とした場合、唯一性の解でなく多様な解を得る解析関数の一般形を見い出した。

正しい解を見い出す手法として、実構造モデルにて実験を行い実応力・実変位を求め、この結果と解析解を比較検討しそれに相当する解を正解とする手法もある。

本研究では本章2節に添付した図-4.2～図-4.9の開口変位（ねじり解における U_θ 、一様引張り解における U_r ）が process zone 部分においてクラック中央部（ $\theta = 0^\circ$ ）より大きくなる不自然な現象が生じている。これは process zone 部分に付加外力として面内曲げモーメントが作用している等の原因が考えられ、一般に実用的な解とは言えない。より実用的な解を得るためには、応力場を表す複数の解析解に所定の係数を乗じつつ重ね合わせることによって、個々の解の煩雑な付加外力を打ち消し、より合理的な応力状態の解析解を導くべきであろう。求めようとしている解析解は接合する材料の特性によって応力集中と開口の形状が異なると思われる。ここでは仮に誘導する解析解として、開口変位が滑らかにクラック中央部で極大となり単独の解析解より合理的と思われるものを求めてみよう。

解を重ね合わせる手法（個々の解に乗ずる係数を求める手法）として、次の4種類を検討した。

- ① エネルギー解放率 J_a を極値とする手法
- ② エネルギー解放率 J_b を極値とする手法
- ③ 開口変位差の自乗和（ $\Delta U_r^2 + \Delta U_\theta^2$ ）を極値とする手法
- ④ 応力度または開口変位の曲率の自乗和を極値とする手法

数値実験の結果よりねじり解には J_a を極値、一様引張り解では応力度 σ_r の曲率自乗和を極値とする係数を用いることが適すると判断された。

（1）エネルギー解放率 J_a を極値とする手法

（a）求めようとする応力および変位 σ, U

$$\begin{aligned}\sigma &= D_1 (\text{解1 } \sigma_1) + D_2 (\text{解2 } \sigma_2) + \dots + D_n (\text{解n } \sigma_n) \\ U &= D_1 (\text{解1 } U_1) + D_2 (\text{解2 } U_2) + \dots + D_n (\text{解n } U_n) \quad \text{--- (4.4.1)} \\ D_j \ (j=1 \sim n) &: \text{係数 (以下の説明では } n=4 \text{ とし記述する)}\end{aligned}$$

（b）クラックが $\Delta\omega$ 進展する場合のエネルギー変化は式(4.3.3)より

$$\left. \begin{aligned}p_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2 + \beta_2} \{ \sigma_{r i 1}(\theta) + \sigma_{r i 2}(\theta) \} \Delta U_j(\theta) d\theta \\ q_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2 + \beta_2} \{ \tau_{r \theta i 1}(\theta) + \tau_{r \theta i 2}(\theta) \} \Delta V_j(\theta) d\theta\end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4.4.2)}$$

(σ_{rik} , τ_{rik} , ΔU_j , ΔV_j の添字は i, j : 単独解の番号, $k=1$: 初期状態, $k=2$: クラック進展後の状態を表す) とすると

$$\Delta W = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12} & p_{13}+q_{13} & p_{14}+q_{14} \\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22} & p_{23}+q_{23} & p_{24}+q_{24} \\ p_{31}+q_{31} & p_{32}+q_{32} & p_{33}+q_{33} & p_{34}+q_{34} \\ p_{41}+q_{41} & p_{42}+q_{42} & p_{43}+q_{43} & p_{44}+q_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

と表せる。

(c) 係数 D_j の決定

ΔW を極値にする付帯条件として, 重み λ_j の自乗和一定という条件を設定する。

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 = C_0 \quad C_0: \text{任意} \quad \text{-----} (4.4.4)$$

これによって極値問題はラグランジエルの未定係数を ε とした

$$\Gamma = \Delta W + \varepsilon (C_0 - \sum \lambda_j^2) \quad \text{-----} (4.4.5)$$

の極値解析となる。式 (4.4.3) の正方行列部分を $[Q_{ij}]$ とすると

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} + \varepsilon (C_0 - \sum \lambda_j^2) \quad \text{-----} (4.4.6)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \text{-----} (4.4.7)$$

となり,

ε を固有値, λ_j を固有ベクトルとする行列 $[Q_{ij}]$ の固有値問題になる。

λ_j を係数とした応力値 σ とすると

$$\sigma = \lambda_1 (\text{解1 } \sigma_1) + \lambda_2 (\text{解2 } \sigma_2) + \dots + \lambda_n (\text{解n } \sigma_n)$$

と表され, その平均応力 σ_o' が指定する平均応力 σ_o になるように倍率 μ を決定する。

$$\mu = \frac{\sigma_o'}{\sigma_o} \quad \text{-----} (4.4.8)$$

係数 D_j は次のように決まる。

$$D_j = \mu \lambda_j \quad \text{----- (4.4.9)}$$

(2) 応力度または開口変位の曲率の自乗和を極値とする手法

(a) 求めようとする応力および変位 σ, U

$$\begin{aligned} \sigma &= D_1 (\text{解1 } \sigma_1) + D_2 (\text{解2 } \sigma_2) + \dots + D_n (\text{解n } \sigma_n) \\ U &= D_1 (\text{解1 } U_1) + D_2 (\text{解2 } U_2) + \dots + D_n (\text{解n } U_n) \quad \text{--- (4.4.10)} \\ D_j \ (j=1 \sim n) &: \text{係数 (以下の説明では } n=4 \text{ とし記述する)} \end{aligned}$$

(b) 応力の曲率自乗和

接合円周 θ 軸上の区間 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ における σ_r の曲率自乗和は

$$R = \sum_{k=0}^{N-2} \left[-\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \{ \sigma_{rk}(\theta) - 2\sigma_{rk+1}(\theta) + \sigma_{rk+2}(\theta) \} \right]^2 \quad \text{----- (4.4.11)}$$

N : 区間 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ の分割数

$$\Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{N}$$

$$\sigma_{rk+1}(\theta) = \sigma_{rk}(\theta + \Delta\theta)$$

と表される。 J_a を極値とする手法と同様に正方行列 $[Q_{ij}]$ の固有値問題を解くことによって係数を決める。ここで

$$RR_{ik}(\theta) = \sigma_{rik}(\theta) - 2\sigma_{rik+1}(\theta) + \sigma_{rik+2}(\theta)$$

とすると正方行列 $[Q_{ij}]$ は

$$[Q_{ij}] = \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \sum_{k=0}^{N-2} [\{RR_{ik}(\theta)\} \{RR_{jk}(\theta)\}] \quad \text{----- (4.4.12)}$$

i, j : 単独解の番号

と表される。

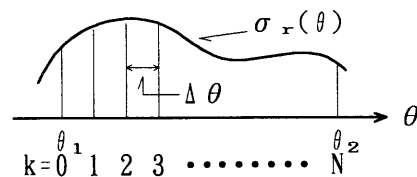


図-4.15 σ_r の曲率自乗和

第 5 章 単独クラックの計算例と考察

5.1 集中ねじり力を受ける場合の計算例

(1) 計算モデルと対象とする解析解

(a) 計算モデル

計算モデル（図-5.1 参照）は鋼の周りにコンクリートが打設された構造体を想定する。内側弾性体（領域 $r \leq a$ ）の弾性係数を $E_1 = 2.10 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu_1 = 0.3$ とし、外側弾性体（領域 $r > a$ ）の弾性係数を $E_2 = E_1/7$, $\nu_2 = 0.167$ としてクラック半区間 $\omega = 20^\circ$, process zone 区間 $\beta = 10^\circ$, 接合円周までの半径を $a = 10\text{cm}$ とし、接合円周上の平均応力 σ_0 が 1 kgf/cm^2 となるねじり力を作用させる。重み積分は最も滑らかな応力、開口形状が得られると想定される 4 次式を用いた。

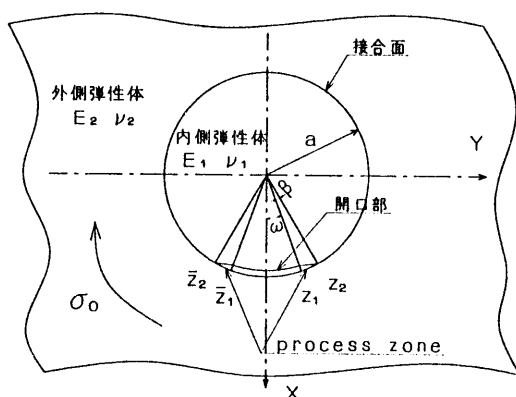


図-5.1 集中ねじり力を受ける場合の計算モデル

(b) 採用する解析解

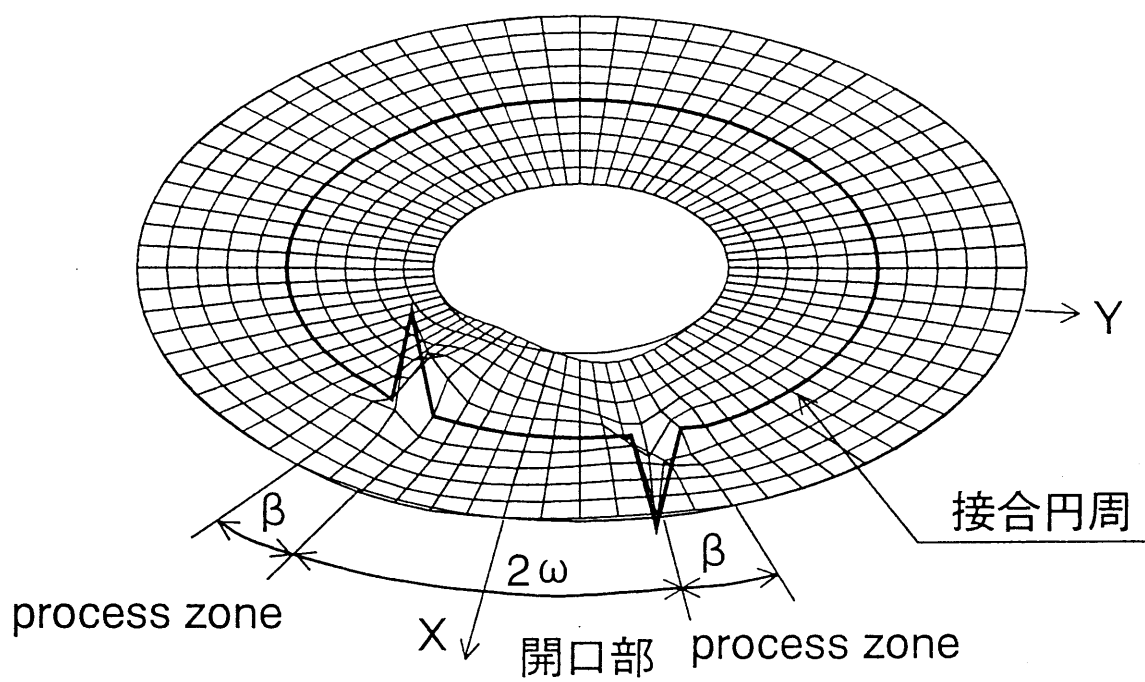
第4章第2節に示す解析解の一覧表の中から、集中ねじり力の応力場を示す解 No.1, 2, 13, 14 を採用する。実用的な解を得るため、エネルギー解放率 $J a$ を極値とする手法にて解を重ね合わせる。重ね合わせに用いる係数 $D_1 \sim D_4$ は表-5.1 に示す。

表-5.1 重ね合わせに用いる係数

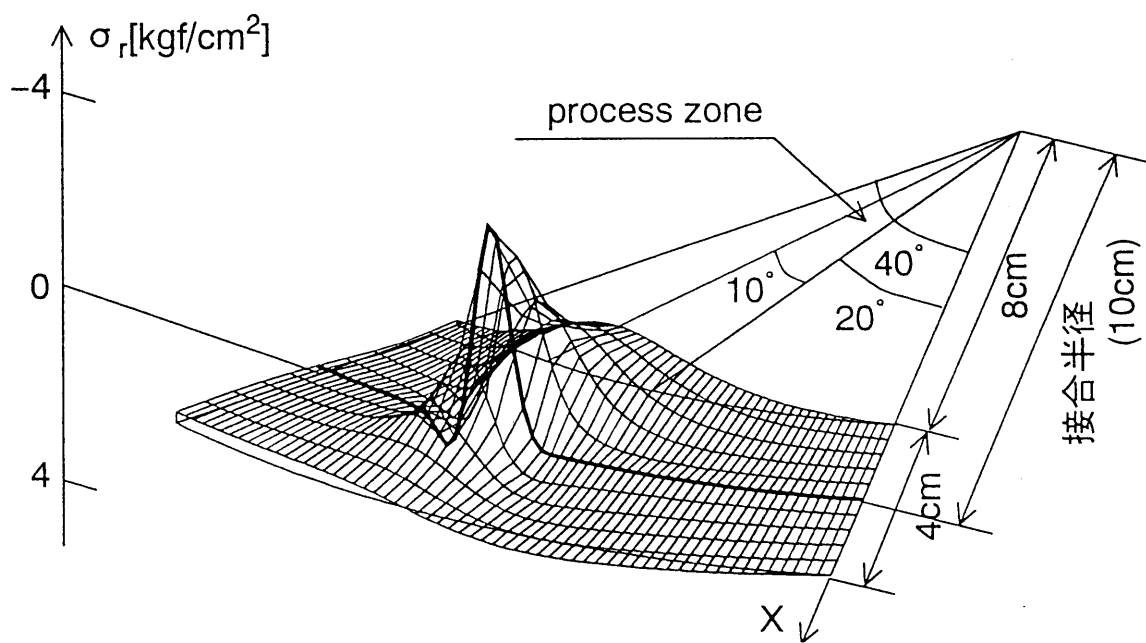
解 No.	D_i	重ね合わせ係数
1	D_1	0.23250
2	D_2	-0.05608
13	D_3	-0.23210
14	D_4	-0.03988

(2) 応力・開口形状（図-5.2～5.6）

図は解の特性を判り易くするため、全体形状（解析範囲 $5\text{cm} \leq r \leq 15\text{cm}$, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ）と開口部拡大（解析範囲 $8\text{cm} \leq r \leq 12\text{cm}$, $-40^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ ）の2種類とした。

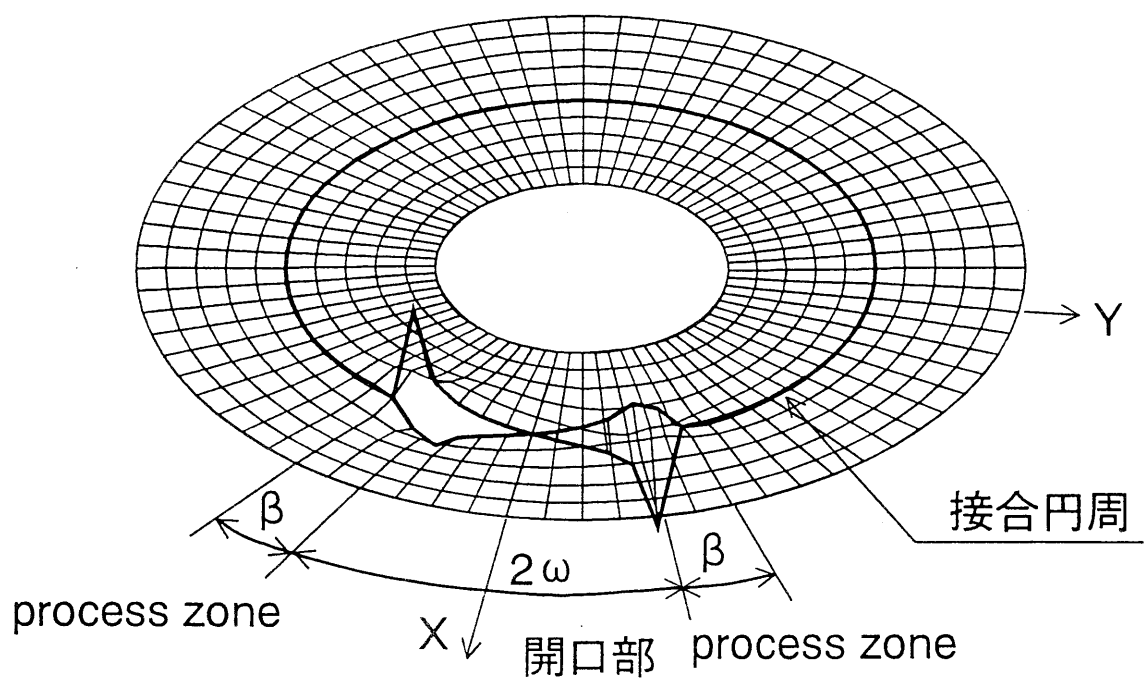


(a) 全体形状

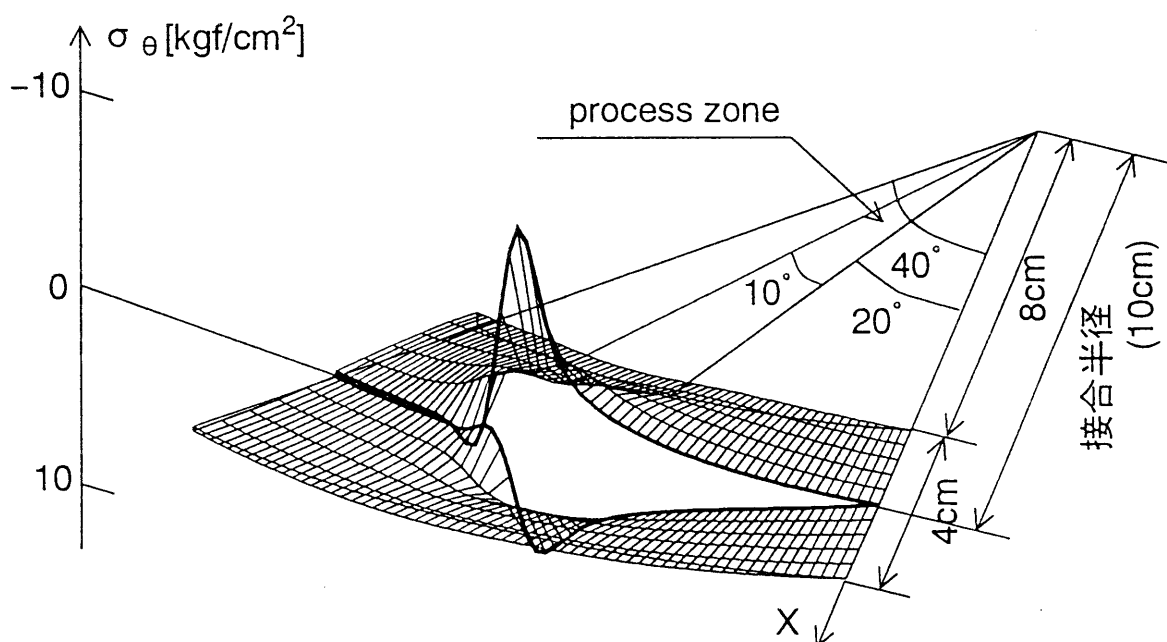


(b) 開口部拡大

図-5.2 応力 σ_r

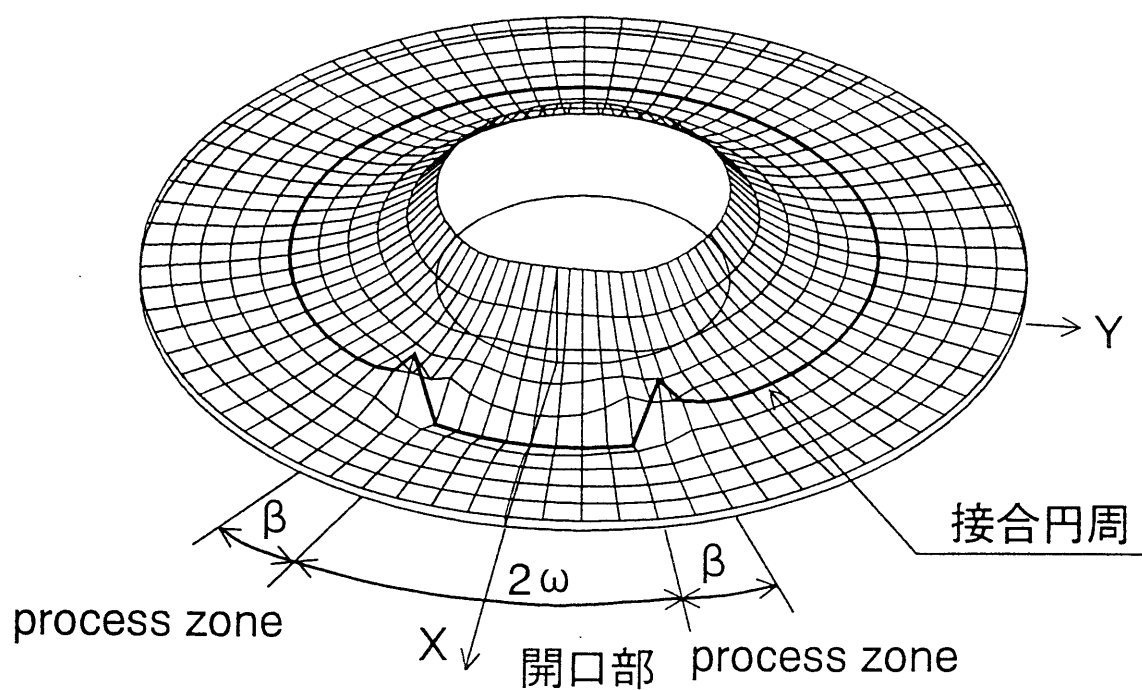


(a) 全体形状

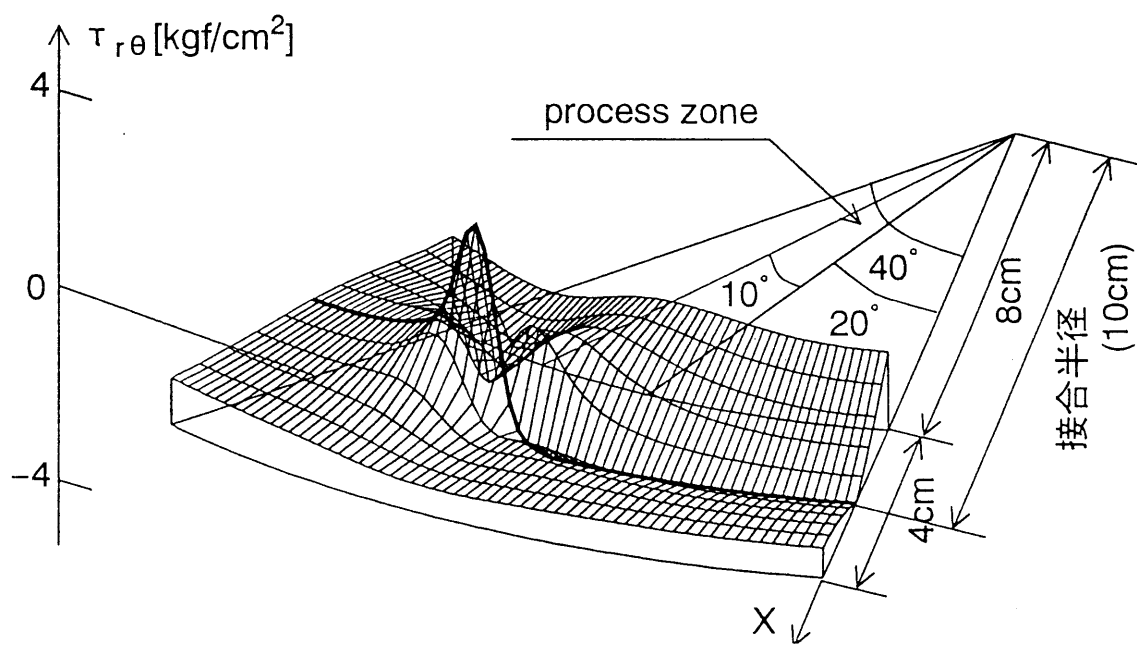


(b) 開口部拡大

図-5.3 応力 σ_{θ}

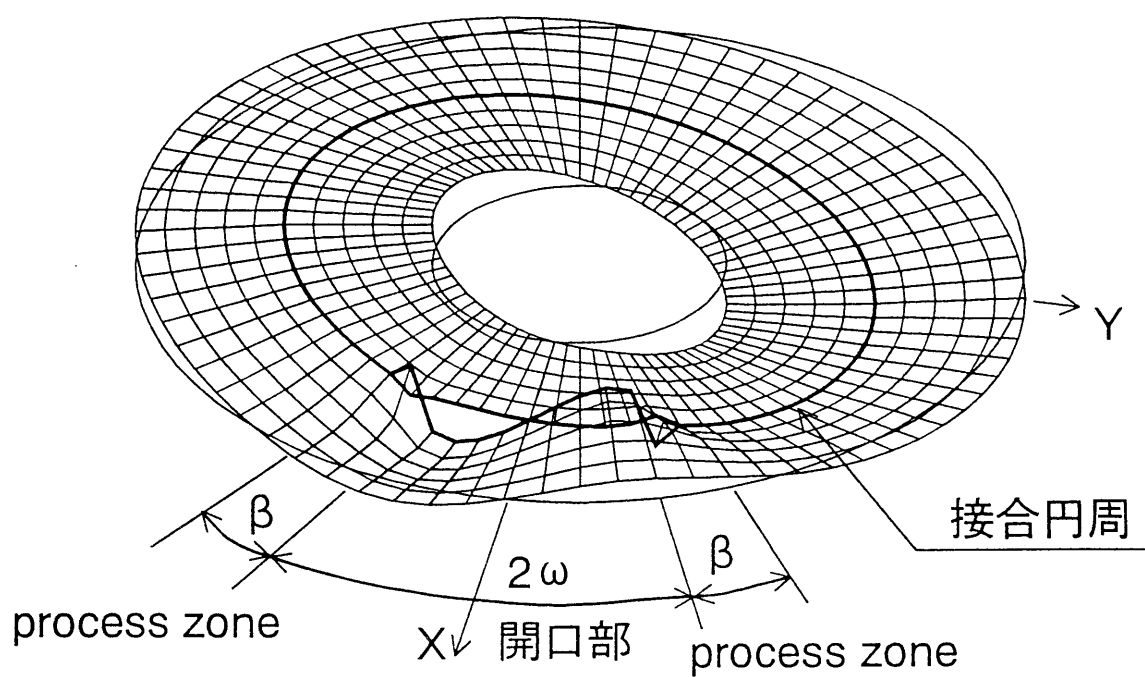


(a) 全体形状

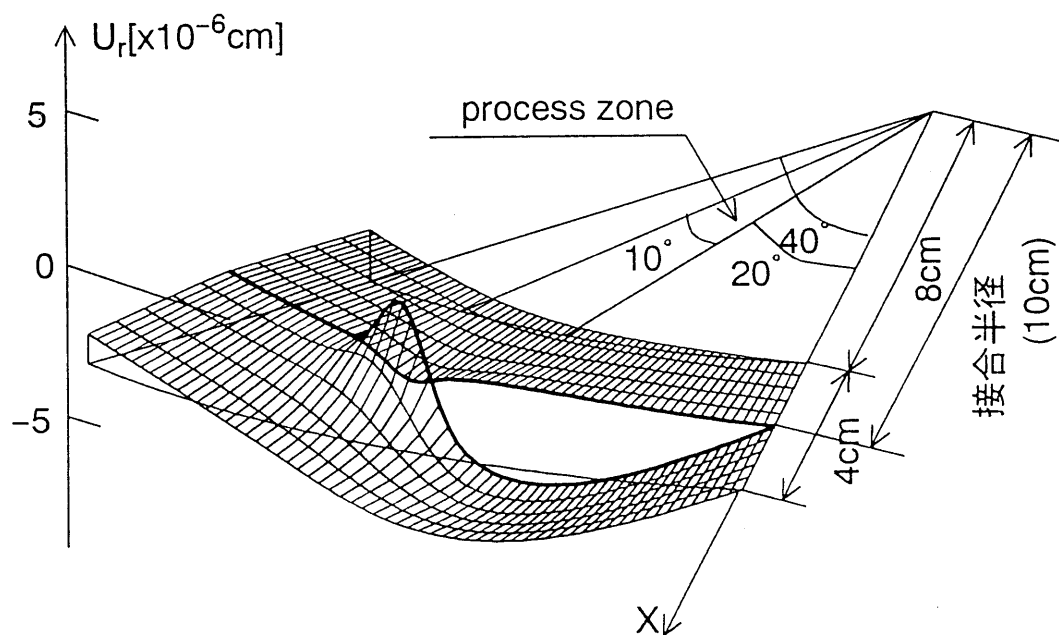


(b) 開口部拡大

図-5.4 応力 $\tau_{r\theta}$

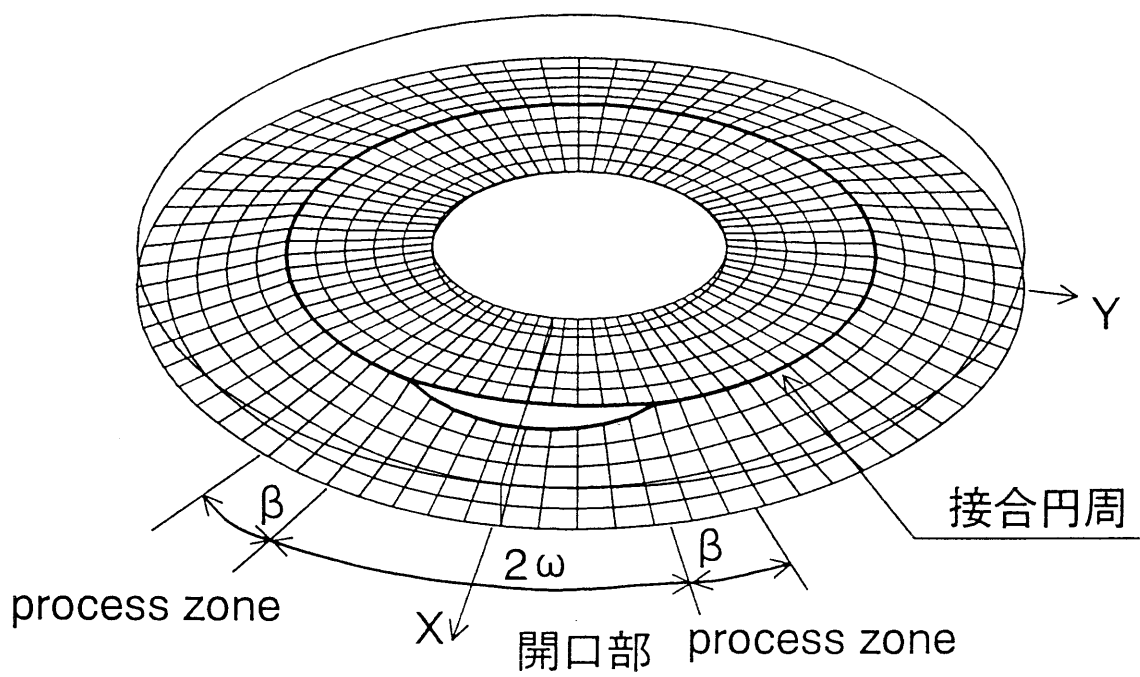


(a) 全体形状

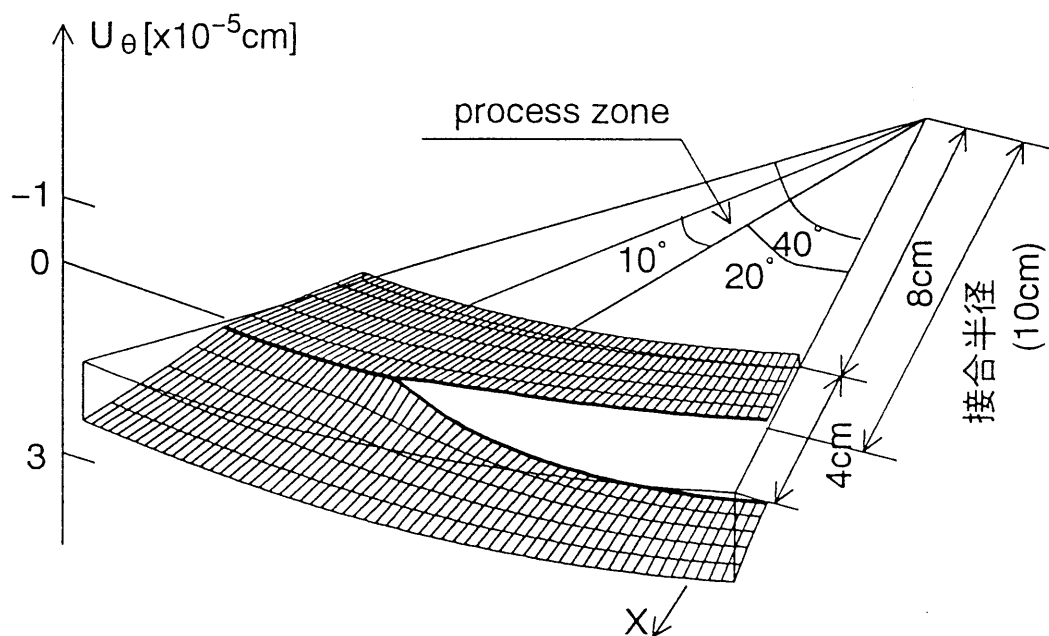


(b) 開口部拡大

図-5.5 変位 U_r



(a) 全体形状



(b) 開口部拡大

図-5.6 変位 U_θ

また図の判読をし易くするため、 σ_r 、 σ_θ 、 U_θ は下向きを正としてあるので注意を要する。

(3) 重み関数による応力・開口形状の相違 (図-5.7, 図-5.8)

比較に用いる重み関数としては、2次式、4次式、3次式(a)、3次式(d)の4種類を選定する(図-2.4)。これらの重みは process zone 部分において常に正であり、部分的に負となる重み(3次式(b), 3次式(c) 図-2.4 参照)に関しては本研究では省略する。

解析範囲を接合線の外側近傍における $10^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ とし、その他の解析条件は(1)(a)と同様とし、重ね合わせに用いる係数は表-5.2に示す。図示する応力、開口はせん断応力 $\tau_{r\theta}$ 、円周方向変位 U_θ を選ぶ。

表-5.2 集中ねじり力 重ね合わせに用いる係数

重み関数	D_1	D_2	D_3	D_4
2次式	0.23127	-0.06040	-0.23215	-0.03409
4次式	0.23250	-0.05608	-0.23210	-0.03988
3次式(a)	0.23318	-0.05730	-0.23223	-0.04405
3次式(d)	0.23146	-0.05664	-0.23209	-0.03369

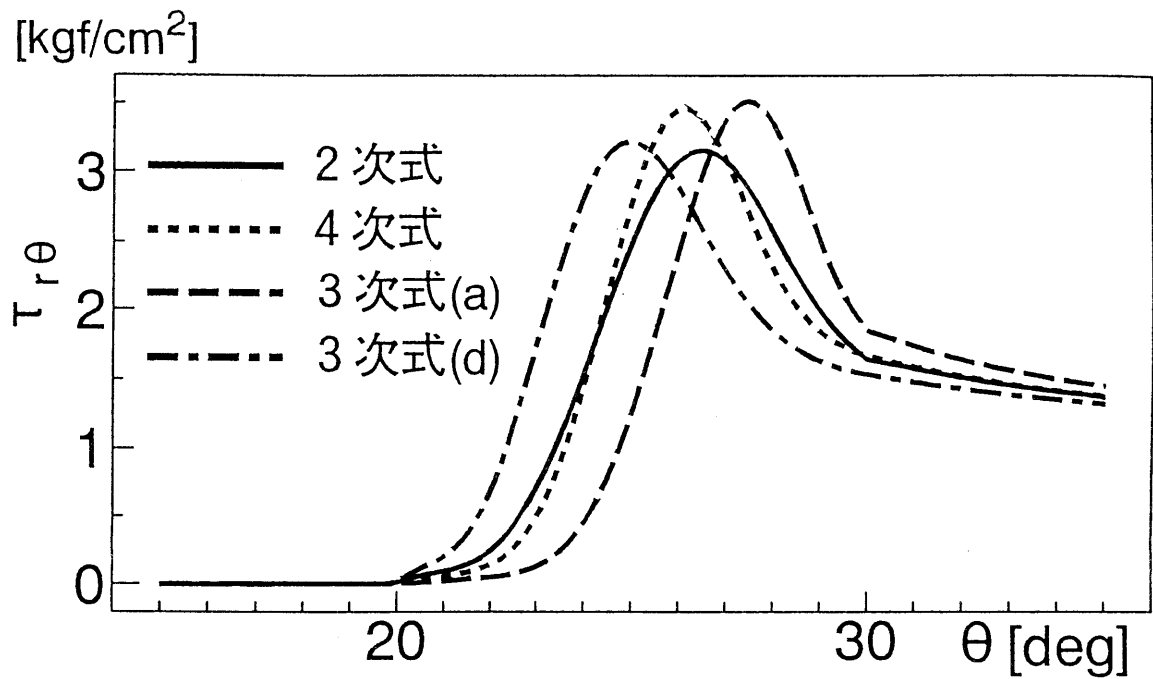


図-5.7 重み関数による応力 $\tau_{r\theta}$ の相違

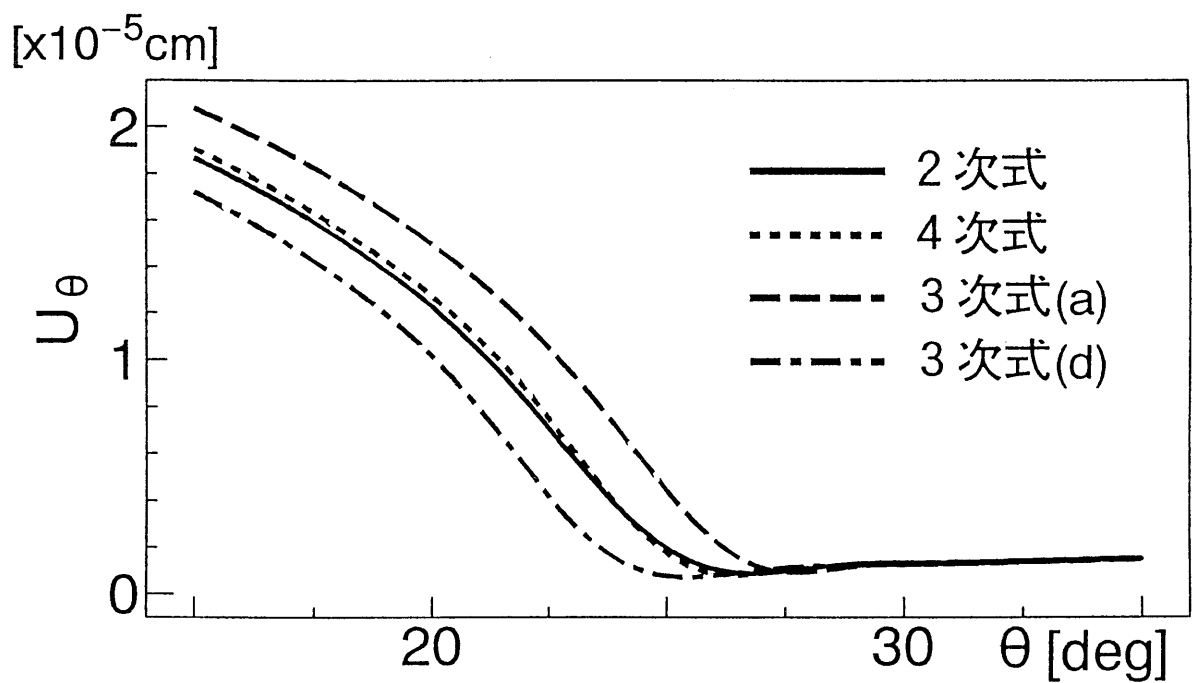


図-5.8 重み関数による開口形状 U_θ の相違

(4) クラック半区間 ω , process zone 区間 β の変化に伴う応力・開口の変化

(a) クラック半区間 ω の変化に伴う応力・開口の変化

process zone 区間 $\beta = 10^\circ$ を固定して、クラック区間 ω を $15^\circ \sim 25^\circ$ まで 2° 間隔で変化させた場合の応力 $\tau_{r\theta}$, 開口変位 U_θ を図-5.9, 図-5.10 に示す。また、この時用いる重ね合わせ係数を表-5.3 に示す。

(b) process zone 区間 β の変化に伴う応力・開口の変化

クラック半区間 $\omega = 20^\circ$ を固定して、process zone 区間 β を $5^\circ \sim 15^\circ$ まで 2° 間隔で変化させた場合の応力 $\tau_{r\theta}$, 開口変位 U_θ を図-5.11, 図-5.12 に示す。また、この時用いる重ね合わせ係数を表-5.4 に示す。

解析範囲は接合面の外側近傍における $10^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ とし、重み積分には4次式を用いる。その他の解析条件は(1)(a)と同様とする。

表-5.3 クラック半区間 ω の変化に伴う重ね合わせ係数

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.22902	-0.06252	-0.23337	-0.01232
	16	0.22958	-0.06102	-0.23315	-0.01797
	17	0.23029	-0.05954	-0.23290	-0.02365
	18	0.23091	-0.05826	-0.23265	-0.02914
	19	0.23167	-0.05712	-0.23238	-0.03455
	20	0.23250	-0.05608	-0.23210	-0.03988
	21	0.23336	-0.05524	-0.23183	-0.04506
	22	0.23432	-0.05441	-0.23152	-0.05027
	23	0.23535	-0.05359	-0.23118	-0.05551
	24	0.23642	-0.05301	-0.23086	-0.06056
	25	0.23759	-0.05234	-0.23048	-0.06575

表-5.4 process zone 区間 β の変化に伴う重ね合わせ係数

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.23467	-0.04175	-0.23175	-0.04761
	6	0.23409	-0.04549	-0.23196	-0.04518
	7	0.23360	-0.04869	-0.23208	-0.04330
	8	0.23317	-0.05146	-0.23213	-0.04185
	9	0.23281	-0.05391	-0.23214	-0.04073
	10	0.23250	-0.05608	-0.23210	-0.03988
	11	0.23220	-0.05812	-0.23205	-0.03917
	12	0.23197	-0.05988	-0.23196	-0.03874
	13	0.23176	-0.06149	-0.23184	-0.03846
	14	0.23160	-0.06290	-0.23169	-0.03838
	15	0.23145	-0.06425	-0.23154	-0.03836

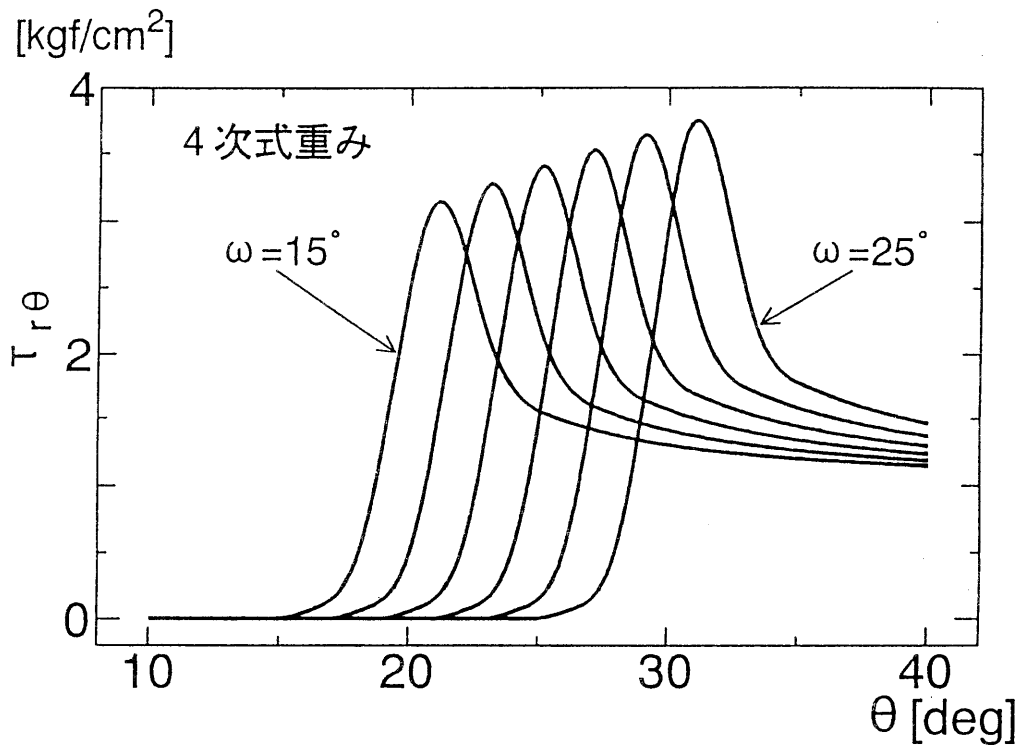


図-5.9 ω の変化に伴う応力 $\tau_{r\theta}$ の変化

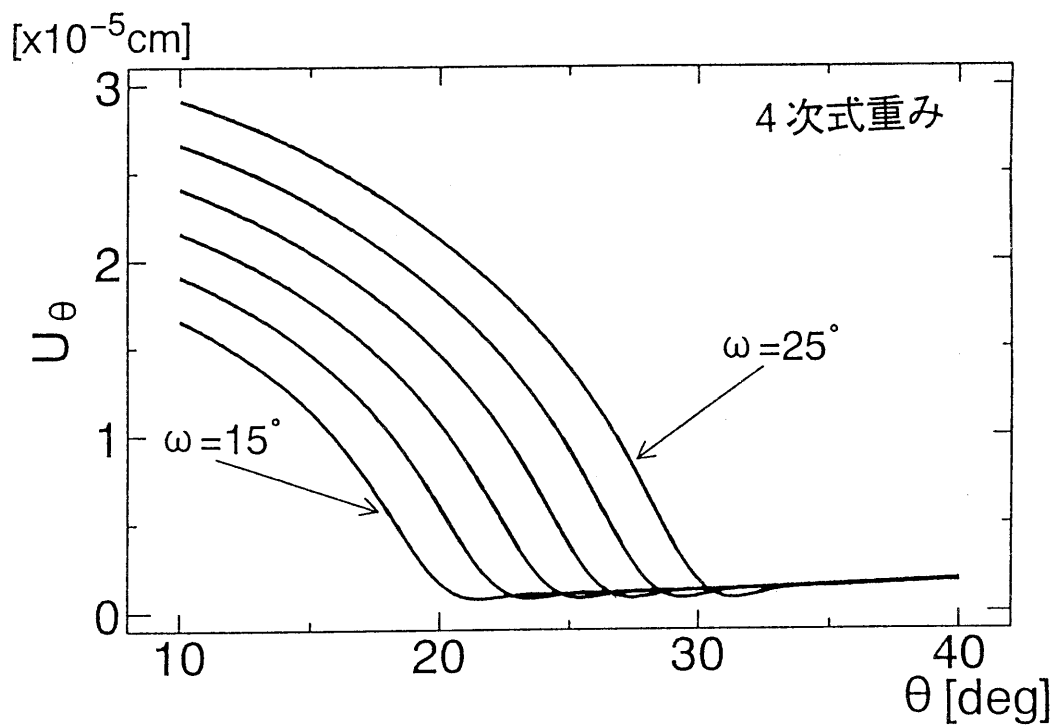


図-5.10 ω の変化に伴う開口形状 U_θ の変化

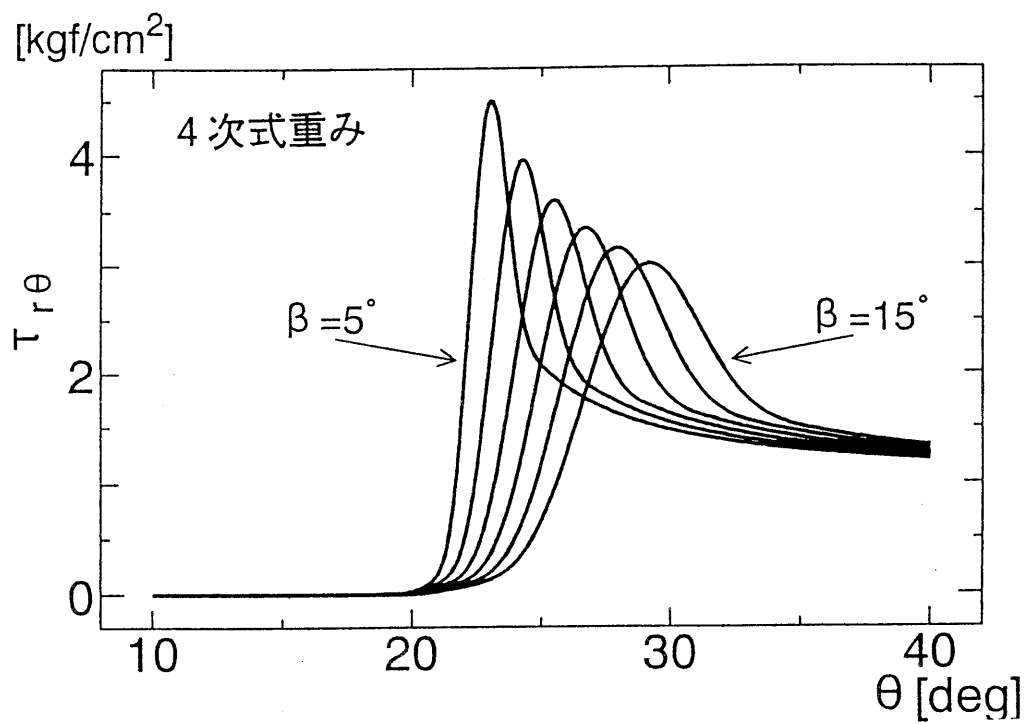


図-5.11 β の変化に伴う応力 $\tau_{r\theta}$ の変化

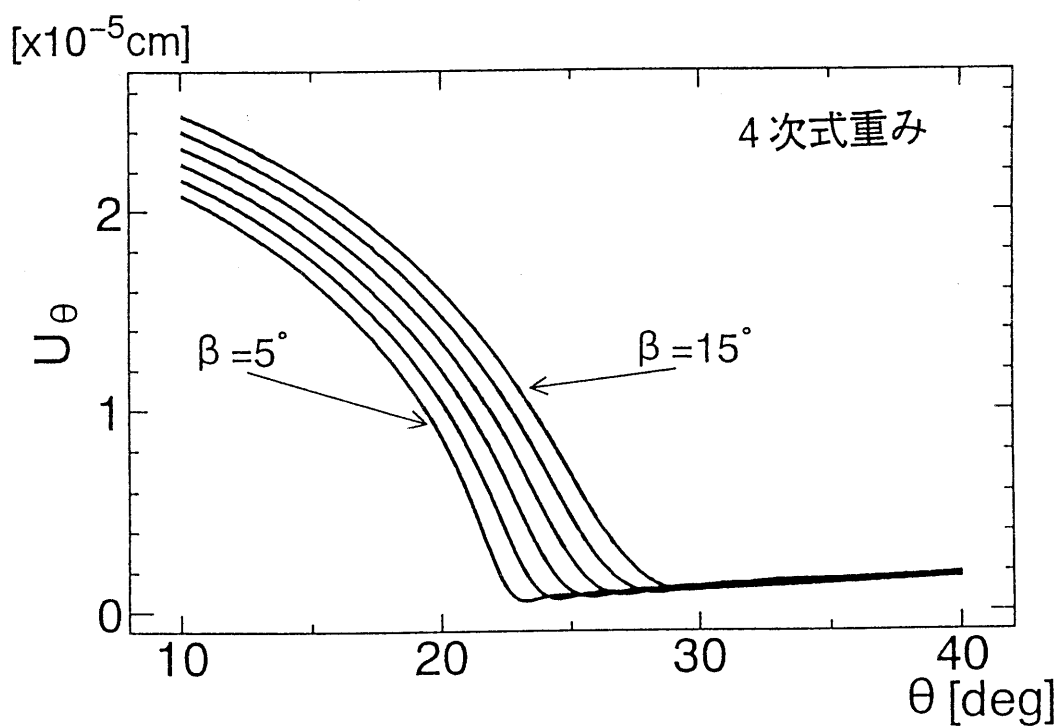


図-5.12 β の変化に伴う開口形状 U_θ の変化

(5) ω の進展および β の進展に伴う J_a , J_b の変化

(a) ω の進展に伴う J_a の変化 (図-5.13)

クラック半区間 $\omega = 15^\circ$, process zone 区間 $\beta = 10^\circ$ を固定して, $\Delta\omega$ を $1' \sim 10'$ まで 1° 間隔で変化させた場合のエネルギー解放率 (J_a) の変化を図-5.13 に示す。また, その時の重ね合わせ係数を表-5.5 に示す。

(b) β の進展に伴う J_b の変化 (図-5.14)

クラック半区間 $\omega = 20^\circ$, process zone 区間 $\beta = 5^\circ$ を固定して, $\Delta\beta$ を $1^\circ \sim 10^\circ$ まで 1° 間隔で変化させた場合のエネルギー解放率 (J_b) の変化を図-5.14 に示す。また, その時の重ね合わせ係数を表-5.6 に示す。

J の変化は4種類の重み (2次式, 4次式, 3次式(a), 3次式(d)) について行い, 解析条件は (1)(a) と同様とする。

表-5.5 ω の進展に伴う重ね合わせ係数の変化 ($\beta = 10^\circ$)

表-5.5 付.1 2次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.22813	-0.06652	-0.23308	-0.00700
	16	0.22863	-0.06499	-0.23291	-0.01265
	17	0.22921	-0.06357	-0.23272	-0.01823
	18	0.22984	-0.06237	-0.23254	-0.02362
	19	0.23052	-0.06136	-0.23236	-0.02886
	20	0.23127	-0.06040	-0.23215	-0.03409
	21	0.23209	-0.05951	-0.23192	-0.03929
	22	0.23297	-0.05878	-0.23169	-0.04437
	23	0.23388	-0.05820	-0.23147	-0.04934
	24	0.23488	-0.05765	-0.23122	-0.05434
	25	0.23595	-0.05712	-0.23094	-0.05935

表-5.5 付.2 4次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.22902	-0.06252	-0.23337	-0.01232
	16	0.22958	-0.06102	-0.23315	-0.01797
	17	0.23029	-0.05954	-0.23290	-0.02365
	18	0.23091	-0.05826	-0.23265	-0.02914
	19	0.23167	-0.05712	-0.23238	-0.03455
	20	0.23250	-0.05608	-0.23210	-0.03988
	21	0.23336	-0.05524	-0.23183	-0.04506
	22	0.23432	-0.05441	-0.23152	-0.05027
	23	0.23535	-0.05359	-0.23118	-0.05551
	24	0.23642	-0.05301	-0.23086	-0.06056
	25	0.23759	-0.05234	-0.23048	-0.06575

表-5.5 付.3 3次式重み(a)の場合

		D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
ω [deg]	15	0.22952	-0.06259	-0.23355	-0.01753
	16	0.23013	-0.06128	-0.23331	-0.02301
	17	0.23080	-0.06011	-0.23305	-0.02839
	18	0.23152	-0.05912	-0.23280	-0.03363
	19	0.23232	-0.05812	-0.23252	-0.03891
	20	0.23318	-0.05730	-0.23223	-0.04405
	21	0.23408	-0.05664	-0.23196	-0.04908
	22	0.23506	-0.05600	-0.23165	-0.05414
	23	0.23613	-0.05538	-0.23131	-0.05922
	24	0.23723	-0.05491	-0.23099	-0.06419
	25	0.23839	-0.05458	-0.23067	-0.06909

表-5.5 付.4 3次式重み(d)の場合

		D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
ω [deg]	15	0.22838	-0.06365	-0.23309	-0.00570
	16	0.22887	-0.06192	-0.23292	-0.01156
	17	0.22943	-0.06037	-0.23273	-0.01727
	18	0.23004	-0.05899	-0.23253	-0.02285
	19	0.23074	-0.05768	-0.23230	-0.02839
	20	0.23146	-0.05664	-0.23209	-0.03369
	21	0.23227	-0.05565	-0.23185	-0.03898
	22	0.23316	-0.05469	-0.23157	-0.04429
	23	0.23409	-0.05389	-0.23130	-0.04947
	24	0.23509	-0.05319	-0.23101	-0.05459
	25	0.23613	-0.05265	-0.23073	-0.05961

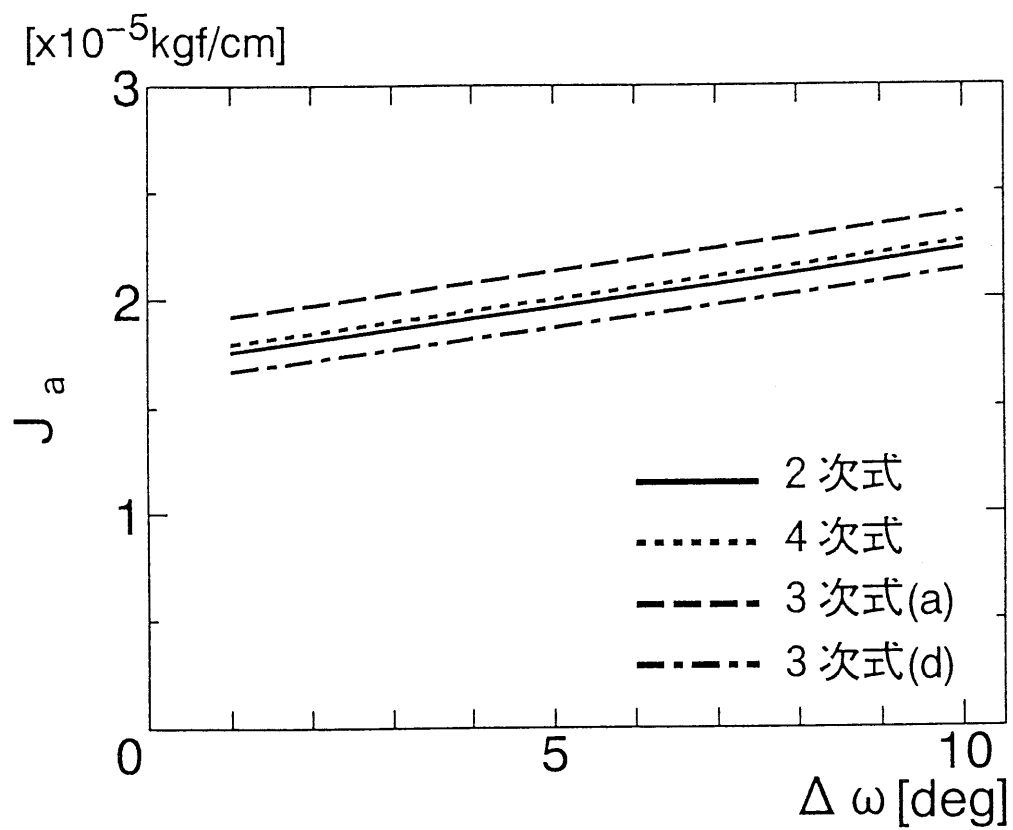


図-5.13 ω の進展に伴う J の変化

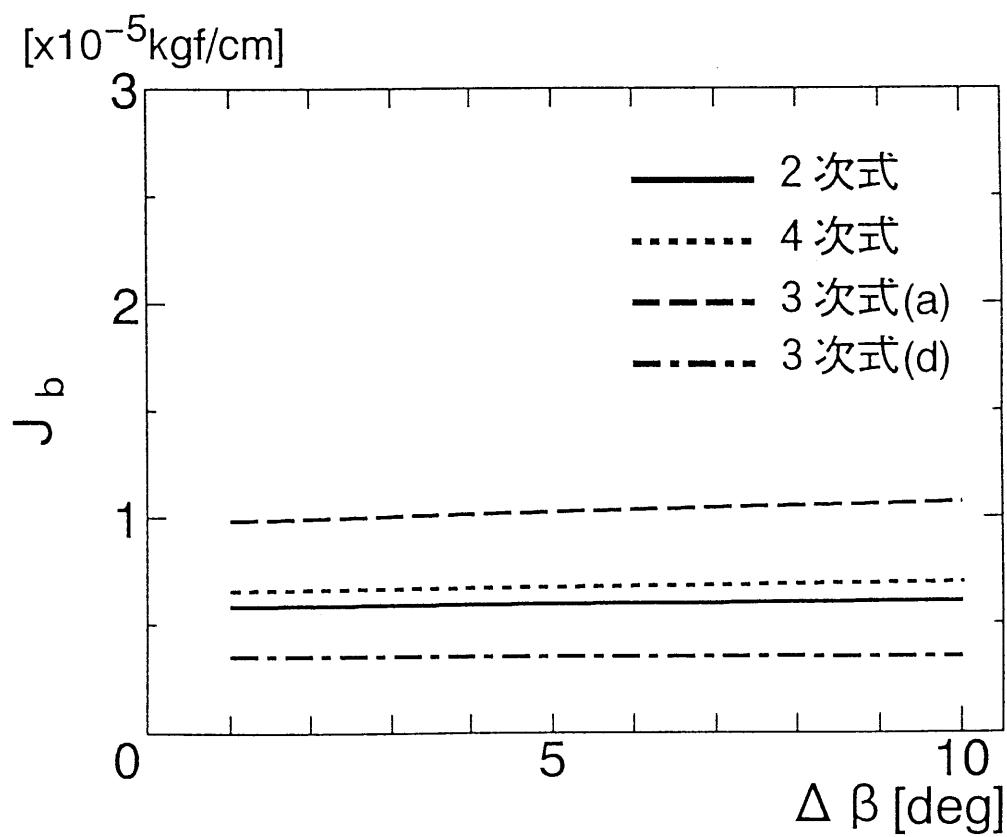


図-5.14 β の進展に伴う J の変化

表-5.6 β の進展に伴う重ね合わせ係数の変化 ($\omega = 20^\circ$)

表-5.6 付.1 2次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.23365	-0.04623	-0.23222	-0.04238
	6	0.23303	-0.04994	-0.23234	-0.03985
	7	0.23251	-0.05302	-0.23236	-0.03794
	8	0.23204	-0.05582	-0.23235	-0.03632
	9	0.23163	-0.05824	-0.23227	-0.03507
	10	0.23127	-0.06040	-0.23215	-0.03409
	11	0.23095	-0.06233	-0.23200	-0.03333
	12	0.23067	-0.06406	-0.23181	-0.03278
	13	0.23042	-0.06562	-0.23161	-0.03238
	14	0.23020	-0.06706	-0.23139	-0.03211
	15	0.23000	-0.06839	-0.23115	-0.03194

表-5.6 付.2 4次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.23467	-0.04175	-0.23175	-0.04761
	6	0.23409	-0.04549	-0.23196	-0.04518
	7	0.23360	-0.04869	-0.23208	-0.04330
	8	0.23317	-0.05146	-0.23213	-0.04185
	9	0.23281	-0.05391	-0.23214	-0.04073
	10	0.23250	-0.05608	-0.23210	-0.03988
	11	0.23220	-0.05812	-0.23205	-0.03917
	12	0.23197	-0.05988	-0.23196	-0.03874
	13	0.23176	-0.06149	-0.23184	-0.03846
	14	0.23160	-0.06290	-0.23169	-0.03838
	15	0.23145	-0.06425	-0.23154	-0.03836

表-5.6 付.3 3次式重み(a)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.23461	-0.04430	-0.23207	-0.04769
	6	0.23418	-0.04769	-0.23222	-0.04616
	7	0.23385	-0.05052	-0.23228	-0.04520
	8	0.23357	-0.05305	-0.23230	-0.04454
	9	0.23335	-0.05531	-0.23229	-0.04417
	10	0.23318	-0.05730	-0.23223	-0.04405
	11	0.23306	-0.05907	-0.23214	-0.04417
	12	0.23299	-0.06063	-0.23202	-0.04450
	13	0.23296	-0.06204	-0.23188	-0.04498
	14	0.23295	-0.06334	-0.23172	-0.04557
	15	0.23298	-0.06454	-0.23155	-0.04626

表-5.6 付.4 3次式重み(d)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.23429	-0.04137	-0.23176	-0.04522
	6	0.23359	-0.04529	-0.23198	-0.04205
	7	0.23297	-0.04866	-0.23209	-0.03942
	8	0.23244	-0.05154	-0.23212	-0.03729
	9	0.23194	-0.05418	-0.23219	-0.03540
	10	0.23146	-0.05664	-0.23209	-0.03369
	11	0.23104	-0.05880	-0.23200	-0.03228
	12	0.23065	-0.06078	-0.23189	-0.03104
	13	0.23030	-0.06253	-0.23174	-0.03004
	14	0.22996	-0.06422	-0.23158	-0.02910
	15	0.22964	-0.06578	-0.23141	-0.02828

5.2 無限遠方で一様引張力を受ける場合の計算例

(1) 計算モデルと対象とする解析解

(a) 計算モデル

計算モデル（図-5.15 参照）は前節と同様に鋼の周りにコンクリートが打設された構造体を想定する。内側弾性体（領域 $r \leq a$ ）の弾性係数を $E_1 = 2.10 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu_1 = 0.3$ とし、外側弾性体（領域 $r > a$ ）の弾性係数を $E_2 = E_1/7$, $\nu_2 = 0.167$ とし、クラック半区間 $\omega = 20^\circ$, process zone 区間 $\beta = 10^\circ$, 接合円周までの半径を $a = 10\text{cm}$ とし、無限遠方で平均応力（一様引張り応力） $\sigma_0 = 1 \text{ kgf/cm}^2$ となる一様引張力を作用させる。重み積分も前節と同様最も滑らかな応力、開口形状が想定される4次式を用いた。

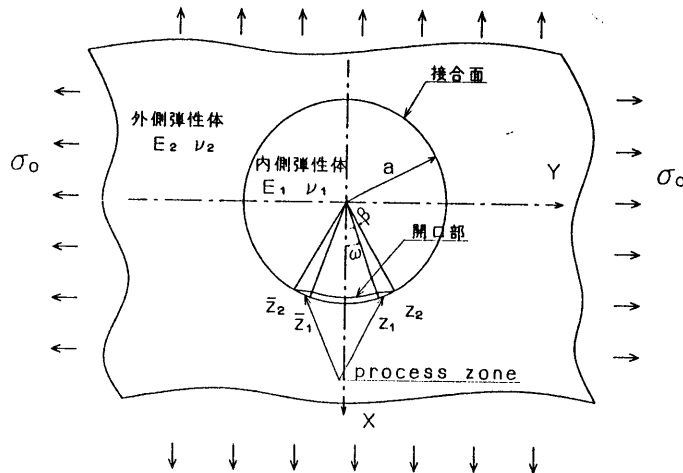


図-5.15 無限遠方で一様引張力を受ける場合の計算モデル

(b) 採用する解析解

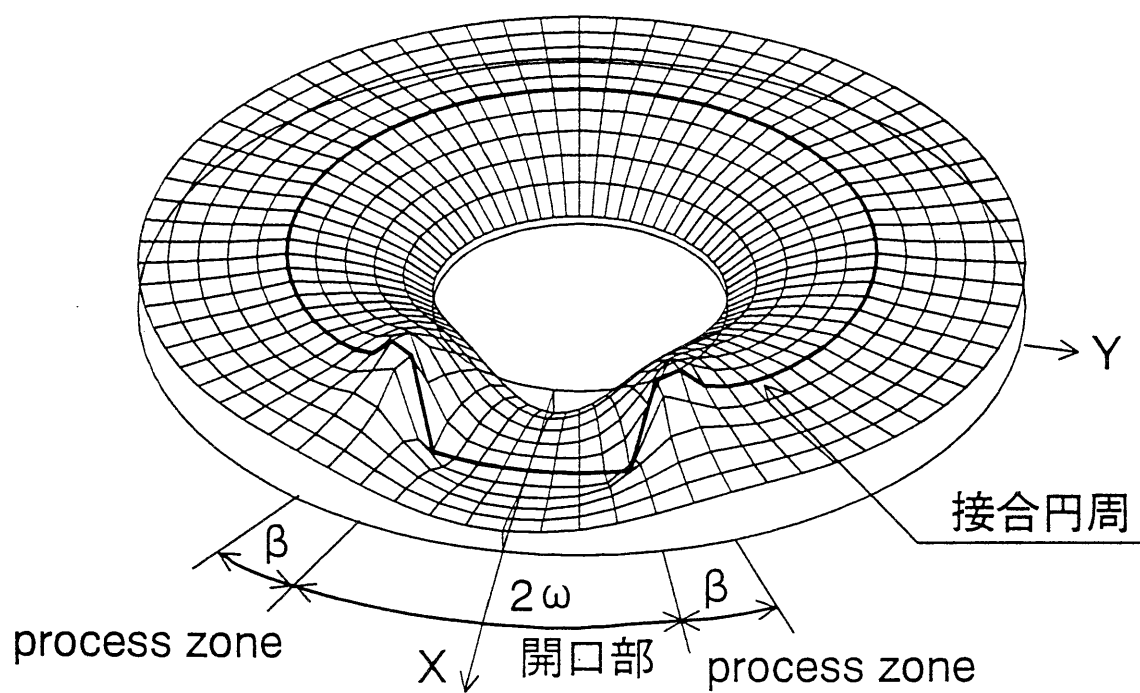
第4章第2節に示す解析解の一覧表の中から、一様引張力の応力場を示す解 No.3, 4, 15, 16 を採用する。実用的な解を得るため、応力度自乗和を極値とする手法にて解を重ね合わせる。重ね合わせに用いる係数 $D_1 \sim D_4$ は表-5.7 に示す。

表-5.7 重ね合わせに用いる係数

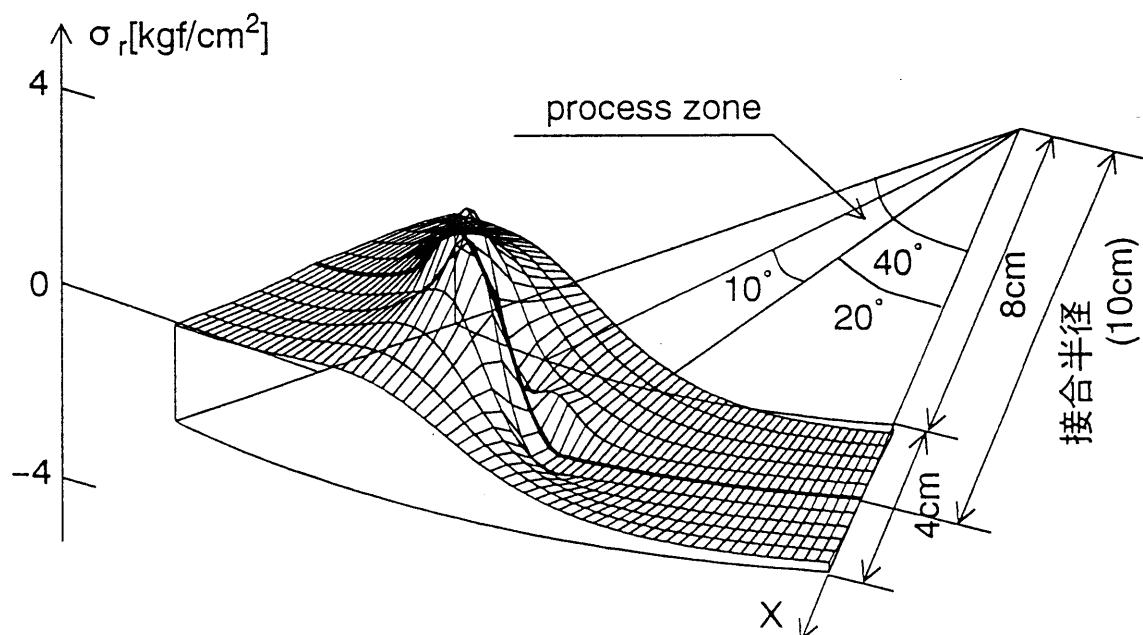
解 No.	D_i	重ね合わせ係数
3	D_1	0.28216
4	D_2	0.25984
15	D_3	-0.37190
16	D_4	-0.11002

(2) 応力・開口形状（図-5.16～図-5.20）

図は解の特性を判り易くするため、全体形状（解析範囲 $5\text{cm} \leq r \leq 15\text{cm}$, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ）と開口部拡大（解析範囲 $8\text{cm} \leq r \leq 12\text{cm}$, $-40^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ ）の2種類とした。また図の判読をし易くするため、 σ_θ , U_r , U_θ は下向きを正としてあるので注意が必要である。

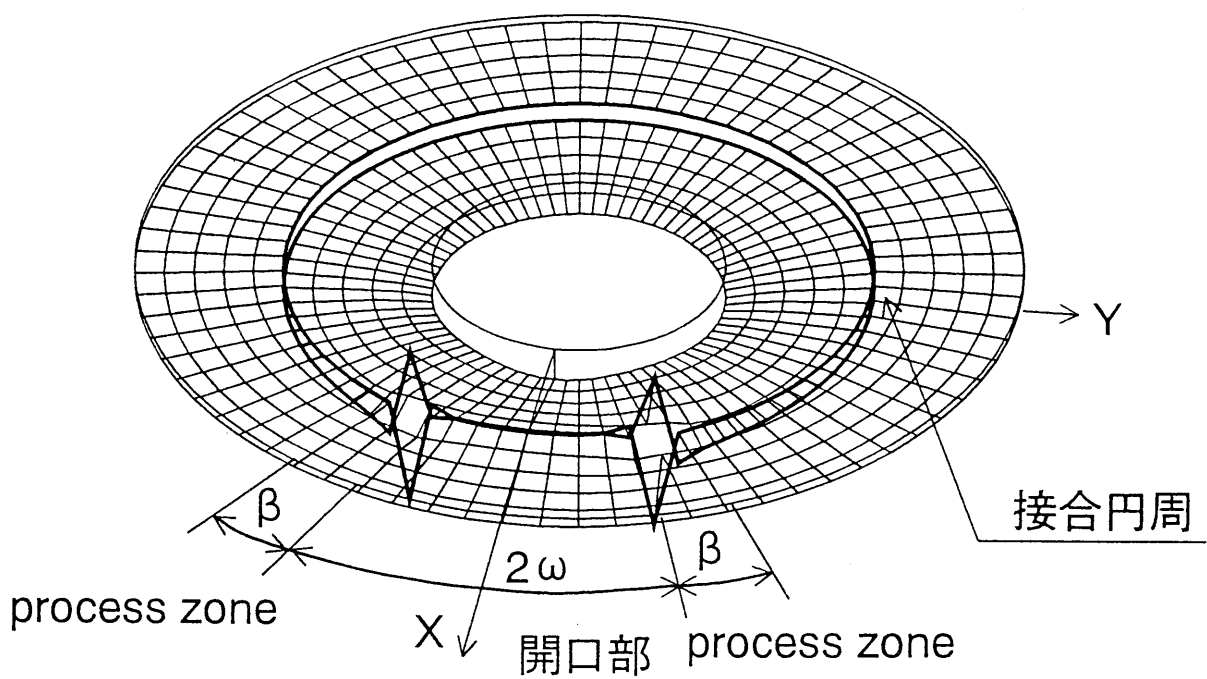


(a) 全体形状

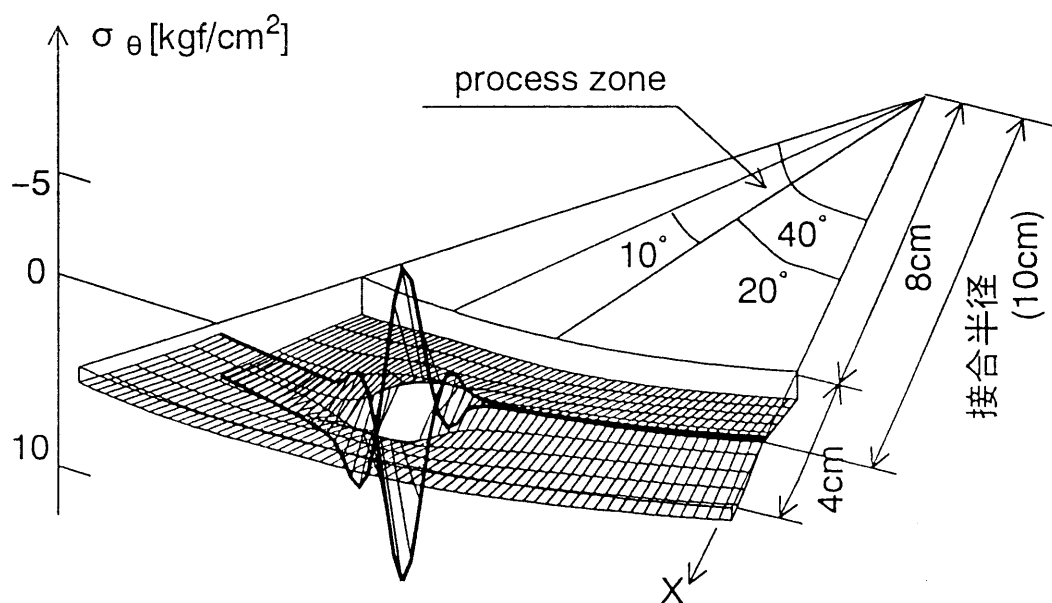


(b) 開口部拡大

図-5.16 応力 σ_r

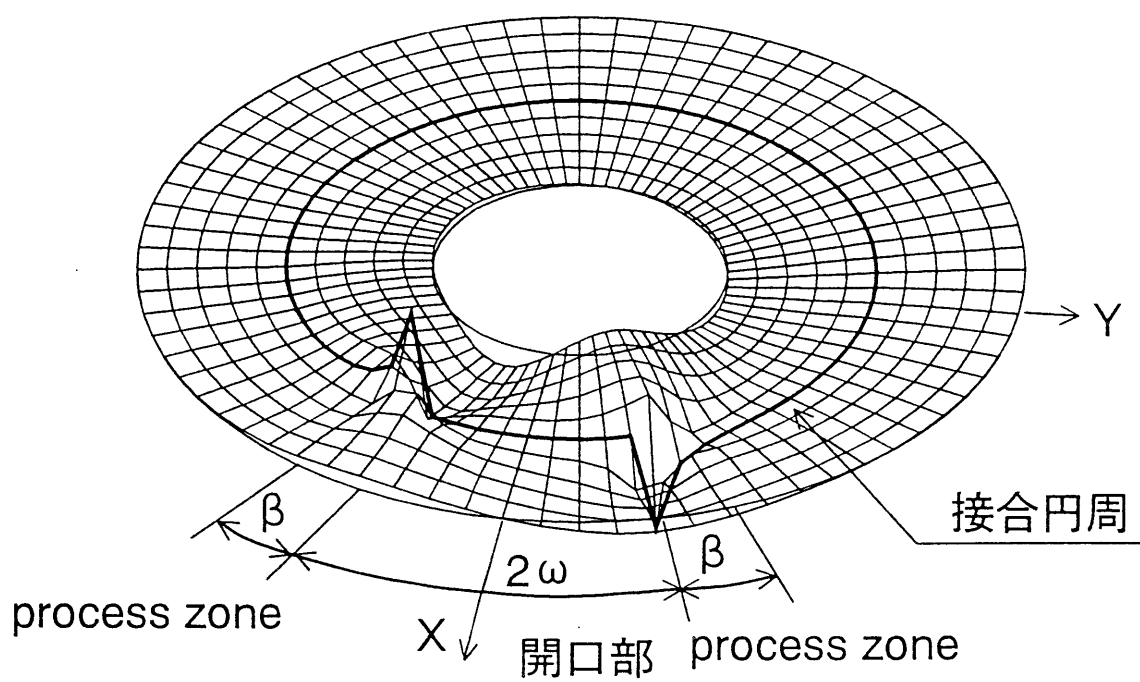


(a) 全体形状

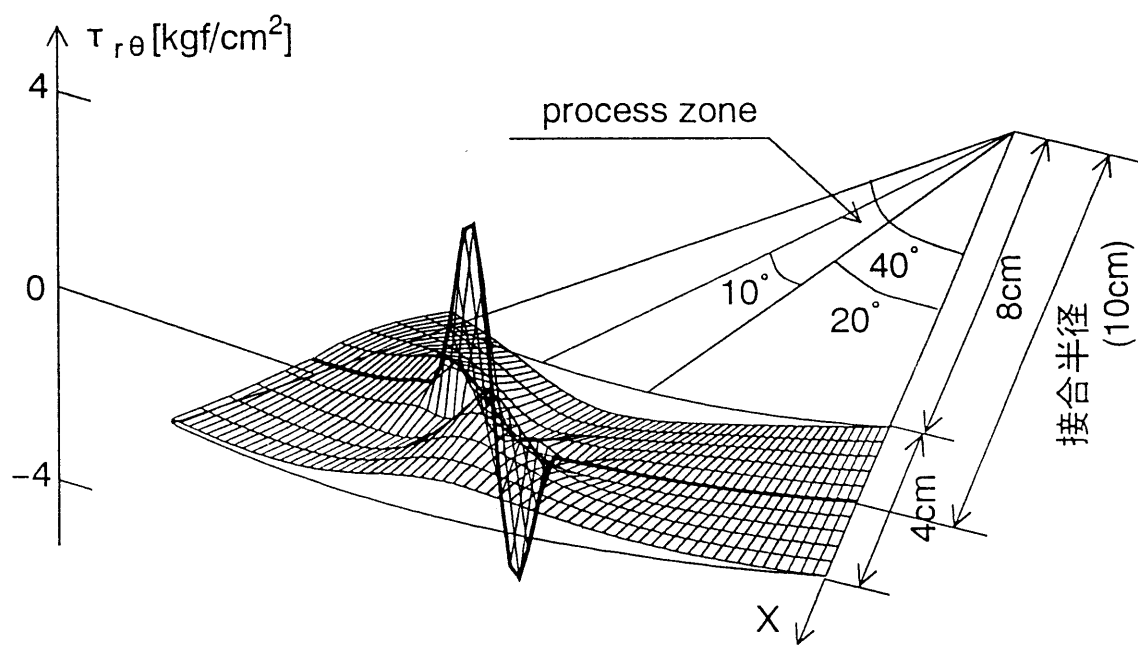


(b) 開口部拡大

図-5.17 応力 σ_{θ}

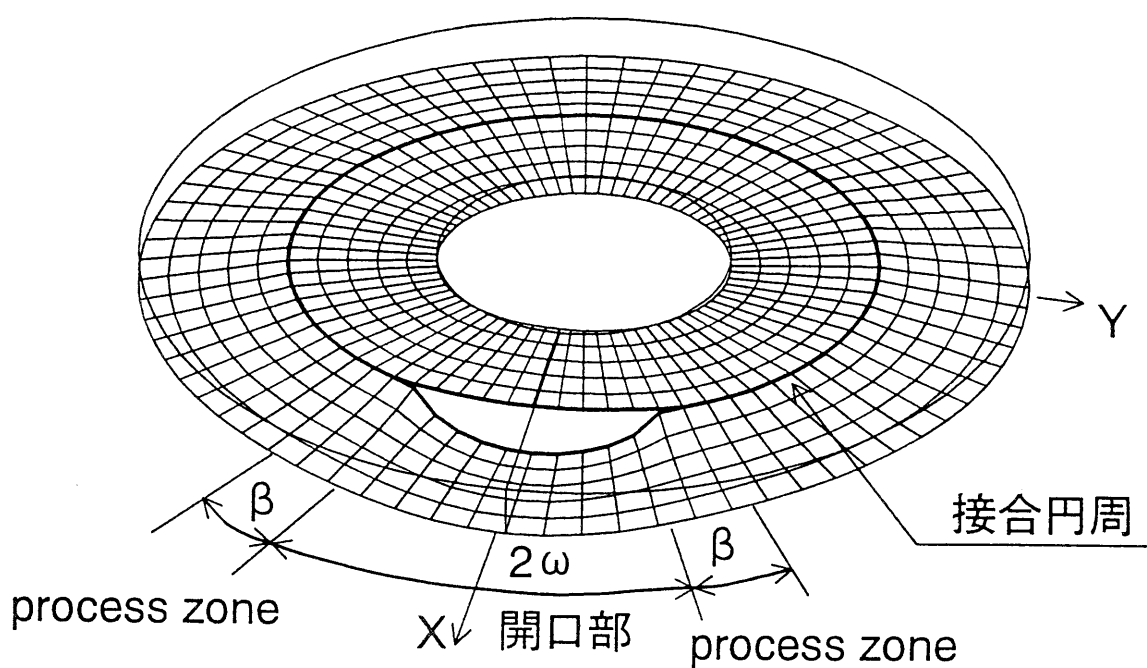


(a) 全体形状

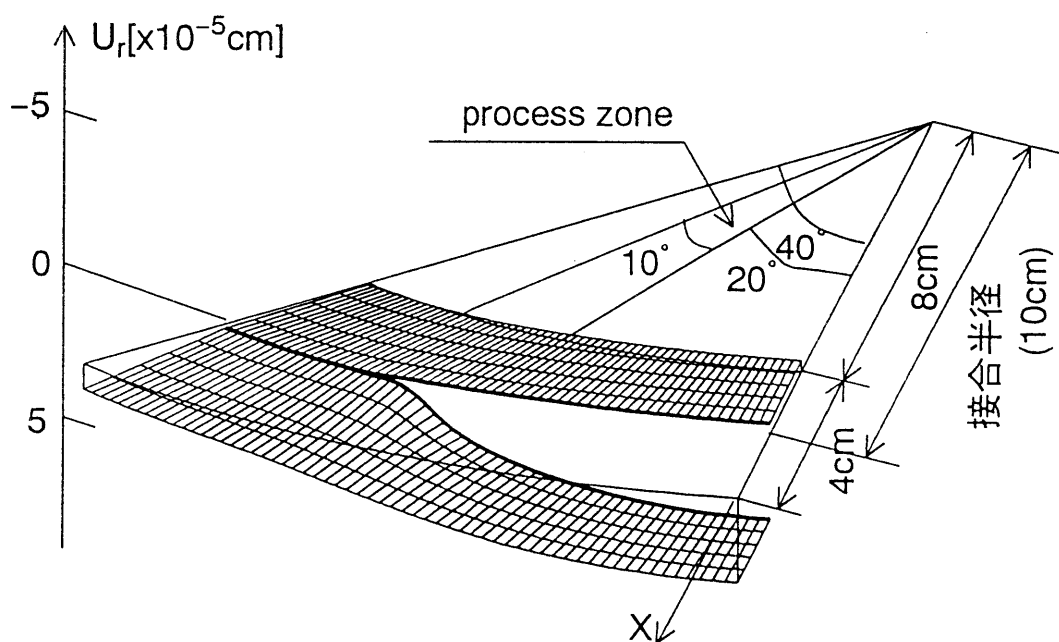


(b) 開口部拡大

図-5.18 応力 $\tau_{r\theta}$

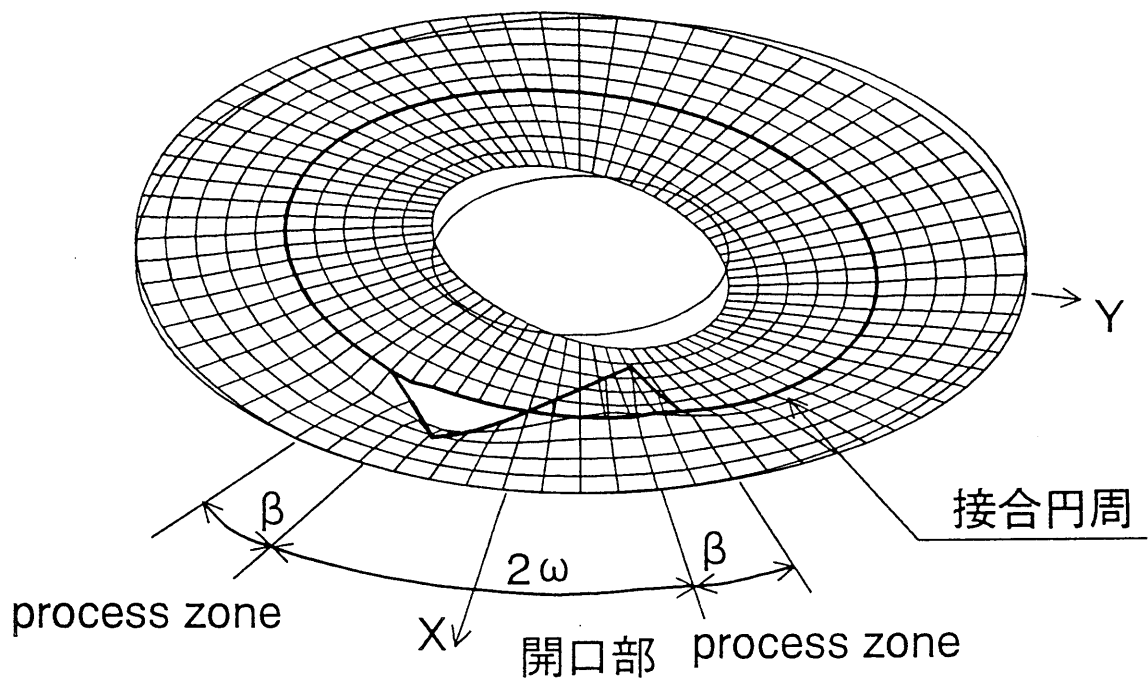


(a) 全体形状

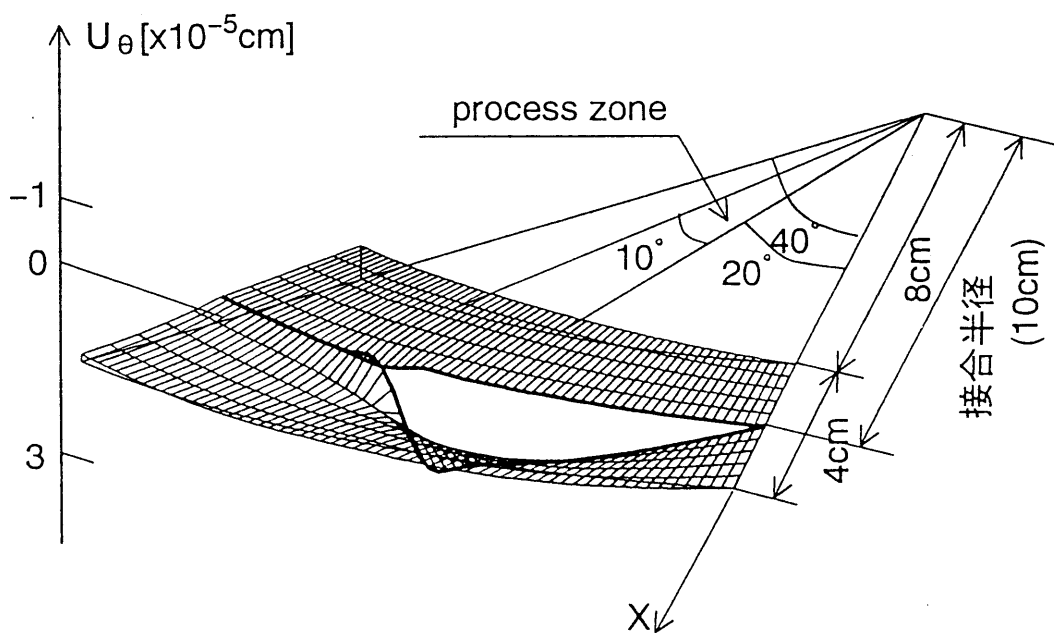


(b) 開口部拡大

図-5.19 変位 U_r



(a) 全体形状



(b) 開口部拡大

図-5.20 変位 U_θ

(3) 重み関数による応力・開口形状の相違 (図-5.21, 図-5.22)

比較に用いる重みとしては、2次式, 4次式, 3次式(a), 3次式(d)の4種類を選定する(図-2.4 参照)。これらの重みは process zone 部分において常に正であり, 部分的に負となる重み(3次式(b), 3次式(c) 図-2.4 参照)に関しては本研究では省略する。

解析範囲を接合線の外側近傍における $10^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ とし, その他の解析条件は(1)(a)と同様とし, 重ね合わせに用いる係数は表-5.8に示す。図示する応力, 変位は半径方向応力 σ_r , 半径方向変位 U_r を選ぶ。

表-5.8 一様引張力 重ね合わせに用いる係数

重み関数	D_1	D_2	D_3	D_4
2次式	0.29430	0.20504	-0.36471	-0.05782
4次式	0.28216	0.25984	-0.37190	-0.11002
3次式(a)	0.29466	0.19562	-0.35979	-0.04281
3次式(d)	0.28416	0.26148	-0.37349	-0.11626

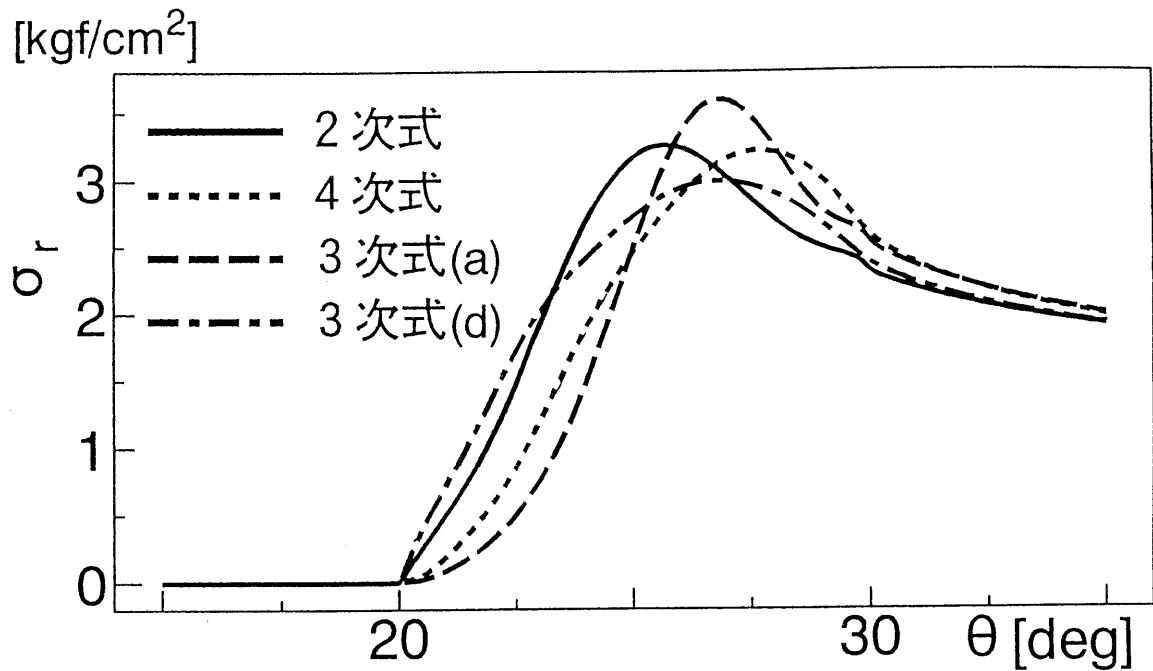


図-5.21 重み関数による応力 σ_r の相違

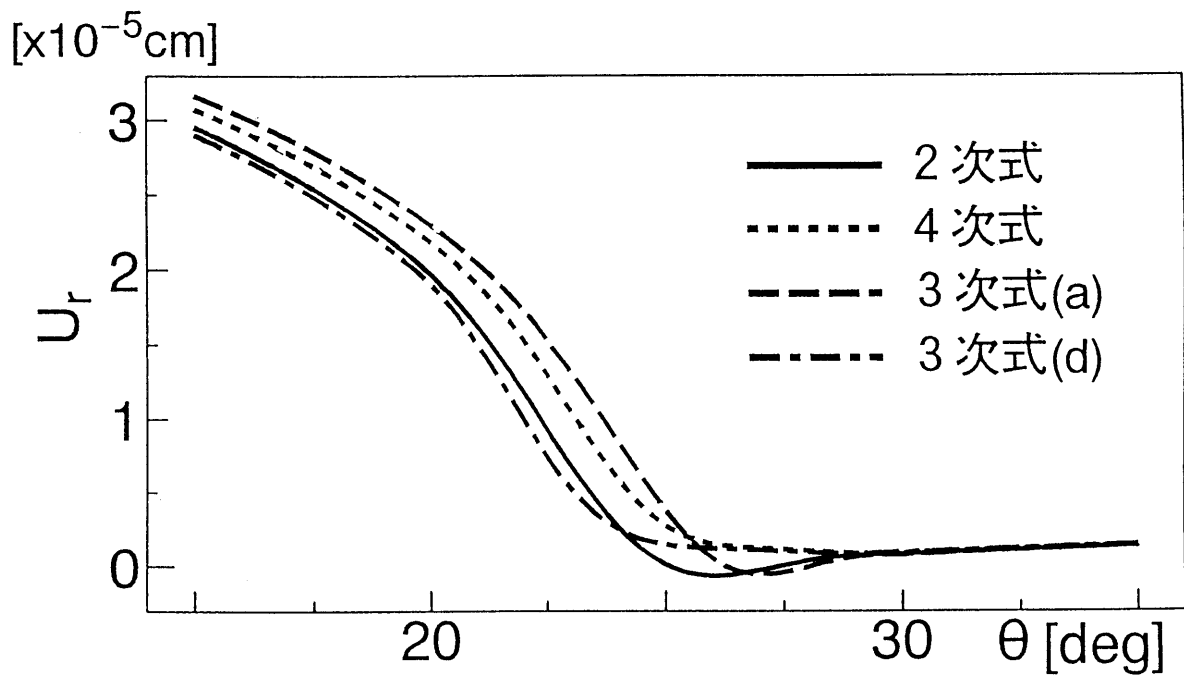


図-5.22 重み関数による開口形状 U_r の相違

(4) クラック半区間 ω , process zone 区間 β の変化に伴う応力・開口の変化

(a) クラック半区間 ω の変化に伴う応力・開口の変化

process zone 区間 $\beta=10^\circ$ を固定して、クラック区間 ω を $15^\circ \sim 25^\circ$ まで 2° 間隔で変化させた場合の応力 σ_r , 開口変位 U_r を図-5.23, 図-5.24 に示す。また, この時用いる重ね合わせ係数を表-5.9 に示す。

(b) process zone 区間 β の変化に伴う応力・開口の変化

クラック半区間 $\omega=20^\circ$ を固定して, process zone 区間 β を $5^\circ \sim 15^\circ$ まで 2° 間隔で変化させた場合の応力 σ_r , 開口変位 U_r を図-5.25, 図-5.26 に示す。また, この時用いる重ね合わせ係数を表-5.10 に示す。

解析範囲は接合面の外側近傍における $10^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ とし, 重み積分には4次式を用いる。その他の解析条件は(1)(a)と同様とする。

表-5.9 クラック半区間 ω の変化に伴う重ね合わせ係数

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.28984	0.28365	-0.37665	-0.16200
	16	0.28821	0.27826	-0.37588	-0.15091
	17	0.28663	0.27321	-0.37501	-0.14019
	18	0.28510	0.26848	-0.37406	-0.12982
	19	0.28361	0.26403	-0.37302	-0.11977
	20	0.28216	0.25984	-0.37190	-0.11002
	21	0.28076	0.25588	-0.37070	-0.10054
	22	0.27939	0.25215	-0.36941	-0.09133
	23	0.27806	0.24863	-0.36805	-0.08235
	24	0.27676	0.24530	-0.36662	-0.07361
	25	0.27550	0.24214	-0.36511	-0.06508

表-5.10 process zone 区間 β の変化に伴う重ね合わせ係数

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.29368	0.23148	-0.36307	-0.09793
	6	0.29112	0.23888	-0.36516	-0.10199
	7	0.28872	0.24521	-0.36706	-0.10503
	8	0.28644	0.25072	-0.36880	-0.10728
	9	0.28426	0.25555	-0.37041	-0.10891
	10	0.28216	0.25984	-0.37190	-0.11002
	11	0.28014	0.26365	-0.37329	-0.11070
	12	0.27818	0.26707	-0.37457	-0.11102
	13	0.27627	0.27013	-0.37577	-0.11101
	14	0.27441	0.27290	-0.37689	-0.11074
	15	0.27260	0.27539	-0.37792	-0.11022

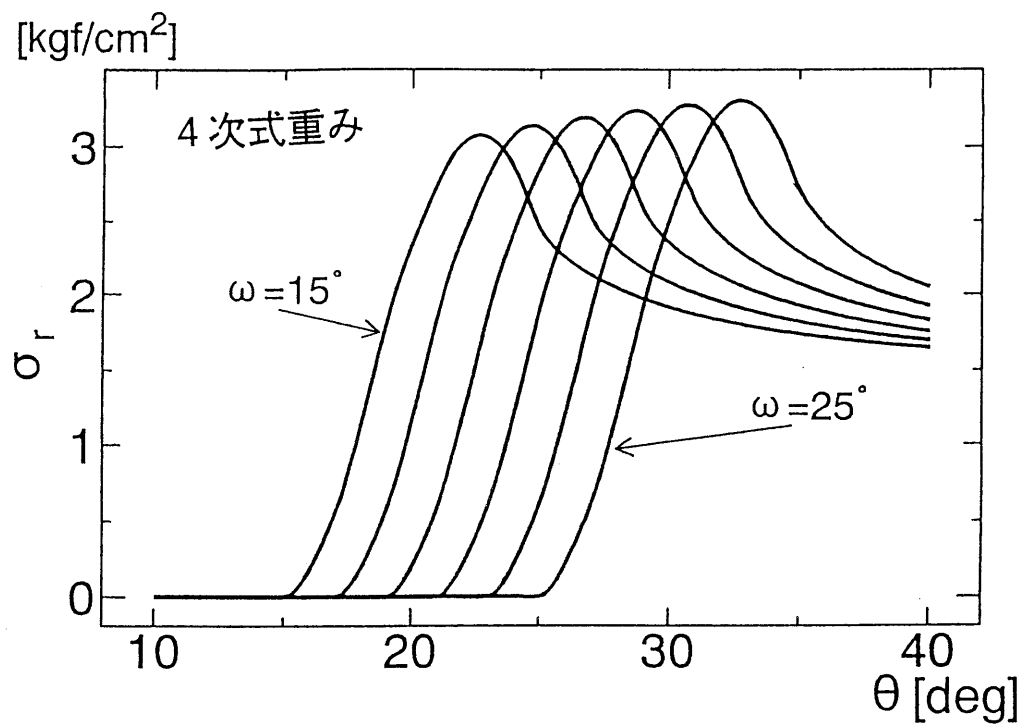


図-5.23 ω の変化に伴う応力 σ_r の変化

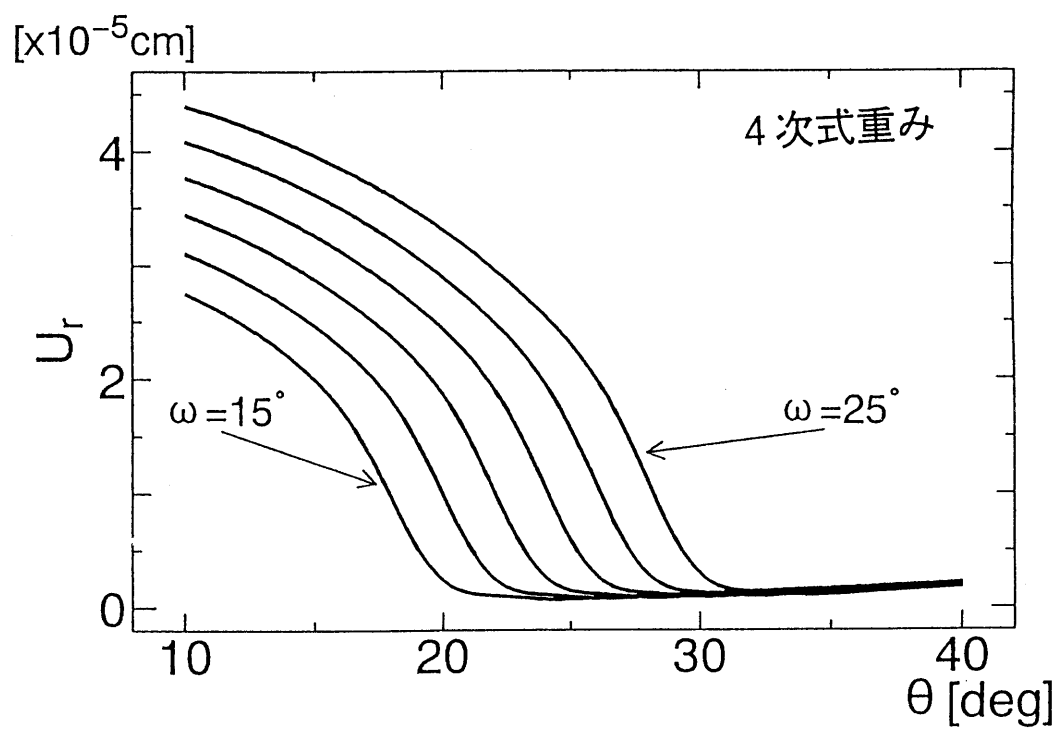


図-5.24 ω の変化に伴う開口形状 U_r の変化

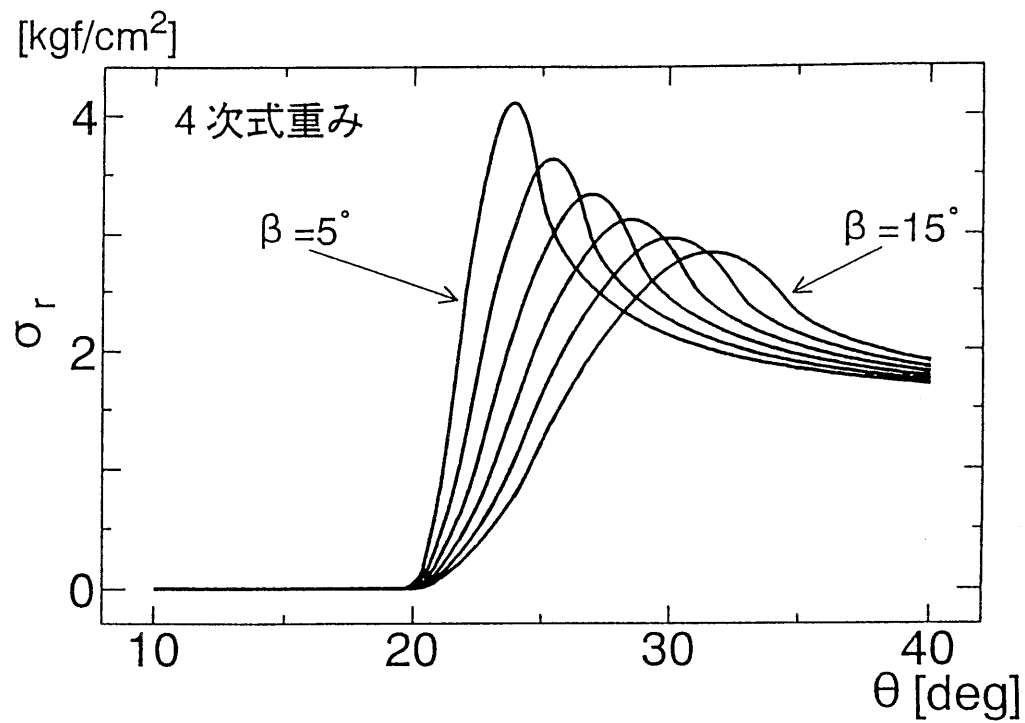


図-5.25 β の変化に伴う応力 σ_r の変化

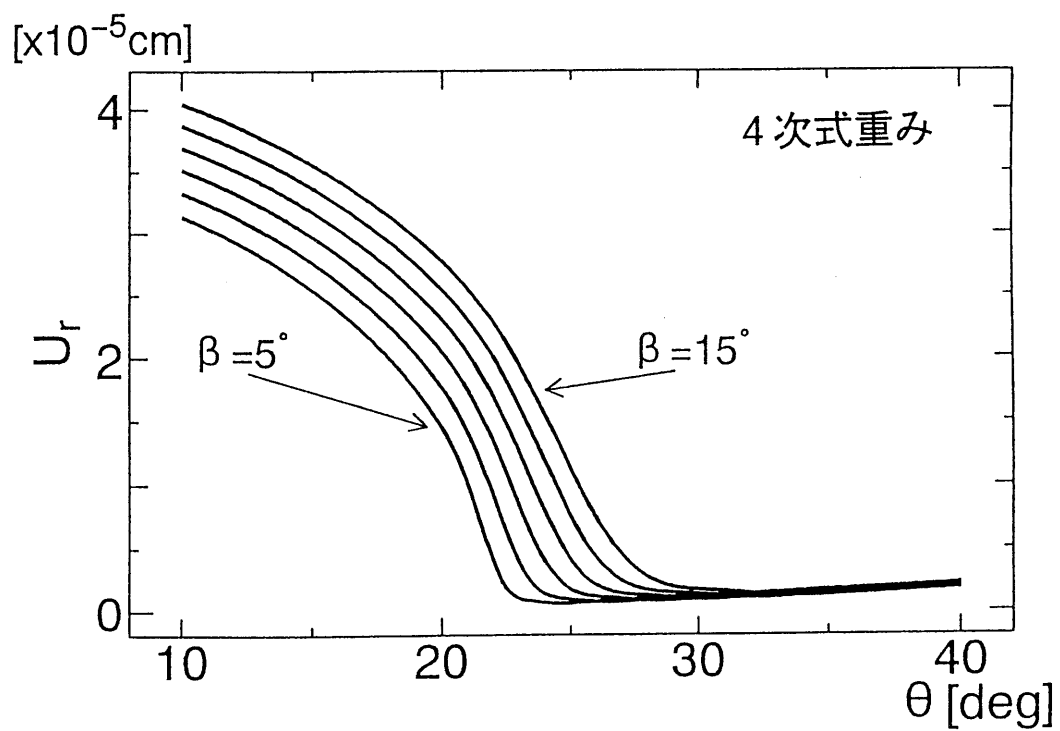


図-5.26 β の変化に伴う開口形状 U_r の変化

(5) ω の進展および β の進展に伴う J_a , J_b の変化

(a) ω の進展に伴う J_a の変化 (図-5.27)

クラック半区間 $\omega = 15^\circ$, process zone 区間 $\beta = 10^\circ$ を固定して, $\Delta\omega$ を $1' \sim 10^\circ$ まで 1° 間隔で変化させた場合のエネルギー解放率 (J_a) の変化を図-5.27 に示す。また, その時の重ね合わせ係数を表-5.11 に示す。

(b) β の進展に伴う J_b の変化 (図-5.28)

クラック半区間 $\omega = 20^\circ$, process zone 区間 $\beta = 5^\circ$ を固定して, $\Delta\beta$ を $1^\circ \sim 10^\circ$ まで 1° 間隔で変化させた場合のエネルギー解放率 (J_b) の変化を図-5.28 に示す。また, その時の重ね合わせ係数を表-5.12 に示す。

J の変化は 4 種類の重み (2 次式, 4 次式, 3 次式(a), 3 次式(b)) について行い, 解析条件は (1)(a) と同様である。

表-5.11 ω の進展に伴う重ね合わせ係数の変化 ($\beta = 10^\circ$)

表-5.11 付.1 2 次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.30114	0.21952	-0.37124	-0.09936
	16	0.29970	0.21623	-0.37004	-0.09062
	17	0.29830	0.21315	-0.36879	-0.08210
	18	0.29693	0.21026	-0.36748	-0.07380
	19	0.29560	0.20756	-0.36612	-0.06571
	20	0.29430	0.20504	-0.36471	-0.05782
	21	0.29303	0.20267	-0.36324	-0.05011
	22	0.29178	0.20047	-0.36173	-0.04257
	23	0.29056	0.19841	-0.36016	-0.03521
	24	0.28936	0.19649	-0.35854	-0.02802
	25	0.28819	0.19470	-0.35688	-0.02097

表-5.11 付.2 4 次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.28984	0.28365	-0.37665	-0.16200
	16	0.28821	0.27826	-0.37588	-0.15091
	17	0.28663	0.27321	-0.37501	-0.14019
	18	0.28510	0.26848	-0.37406	-0.12982
	19	0.28361	0.26403	-0.37302	-0.11977
	20	0.28216	0.25984	-0.37190	-0.11002
	21	0.28076	0.25588	-0.37070	-0.10054
	22	0.27939	0.25215	-0.36941	-0.09133
	23	0.27806	0.24863	-0.36805	-0.08235
	24	0.27676	0.24530	-0.36662	-0.07361
	25	0.27550	0.24214	-0.36511	-0.06508

表-5.11 付.3 3次式重み(a)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.30109	0.20873	-0.36673	-0.08294
	16	0.29974	0.20572	-0.36545	-0.07448
	17	0.29842	0.20291	-0.36411	-0.06625
	18	0.29714	0.20031	-0.36272	-0.05823
	19	0.29589	0.19788	-0.36128	-0.05042
	20	0.29466	0.19562	-0.35979	-0.04281
	21	0.29345	0.19353	-0.35825	-0.03539
	22	0.29227	0.19158	-0.35666	-0.02814
	23	0.29110	0.18978	-0.35502	-0.02106
	24	0.28995	0.18812	-0.35334	-0.01415
	25	0.28882	0.18658	-0.35161	-0.00740

表-5.11 付.4 3次式重み(d)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
ω [deg]	15	0.29143	0.29000	-0.37749	-0.17471
	16	0.28987	0.28350	-0.37693	-0.16212
	17	0.28837	0.27743	-0.37625	-0.15002
	18	0.28692	0.27176	-0.37544	-0.13836
	19	0.28551	0.26645	-0.37452	-0.12712
	20	0.28416	0.26148	-0.37349	-0.11626
	21	0.28284	0.25682	-0.37235	-0.10575
	22	0.28156	0.25243	-0.37111	-0.09558
	23	0.28032	0.24831	-0.36978	-0.08573
	24	0.27911	0.24444	-0.36835	-0.07617
	25	0.27794	0.24079	-0.36683	-0.06689

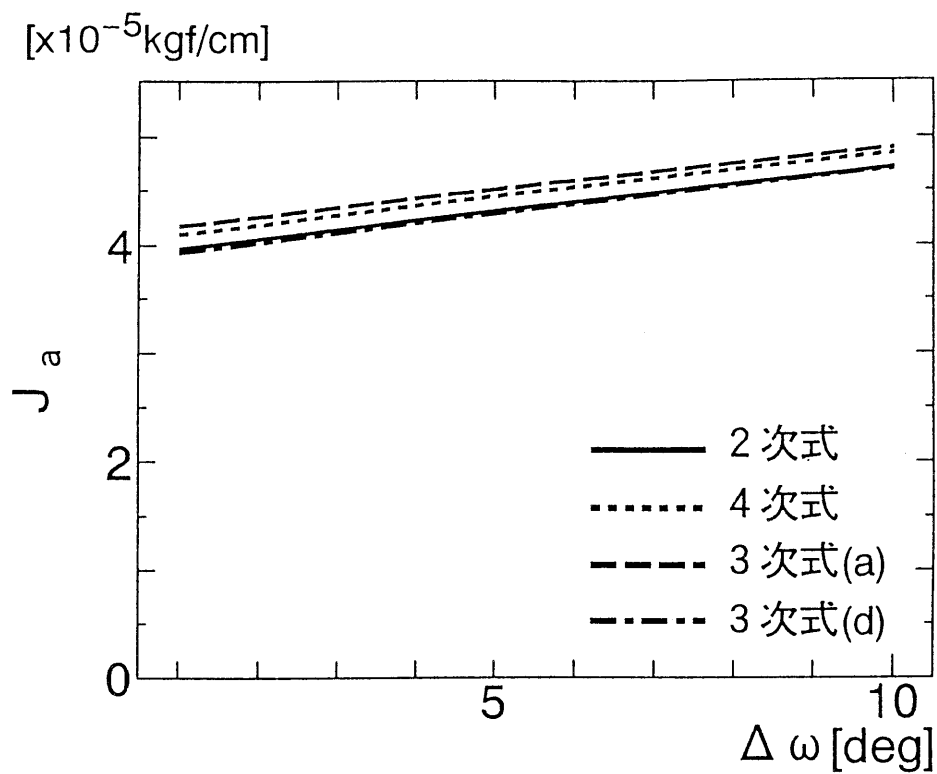


図-5.27 ω の進展に伴う J の変化

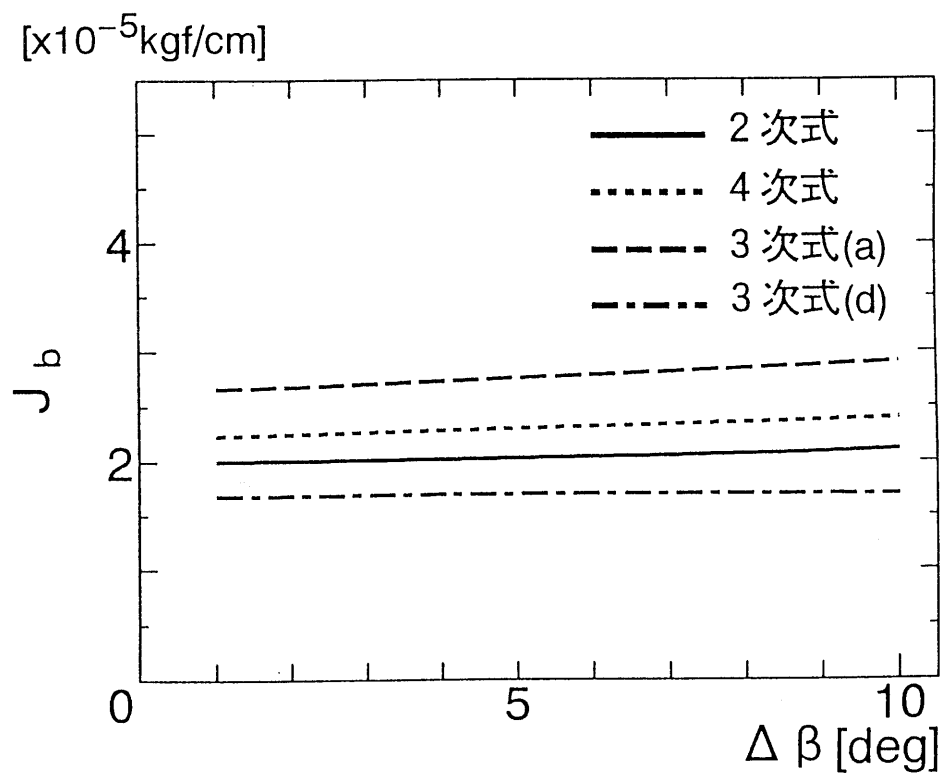


図-5.28 β の進展に伴う J の変化

表-5.12 β の進展に伴う重ね合わせ係数の変化 ($\omega = 20^\circ$)

表-5.12 付.1 2次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.30012	0.19902	-0.35805	-0.06921
	6	0.29891	0.20053	-0.35944	-0.06727
	7	0.29773	0.20183	-0.36080	-0.06508
	8	0.29657	0.20300	-0.36214	-0.06276
	9	0.29542	0.20407	-0.36344	-0.06033
	10	0.29430	0.20504	-0.36471	-0.05782
	11	0.29319	0.20592	-0.36592	-0.05522
	12	0.29209	0.20672	-0.36709	-0.05255
	13	0.29101	0.20745	-0.36821	-0.04983
	14	0.28995	0.20812	-0.36927	-0.04706
	15	0.28890	0.20873	-0.37028	-0.04424

表-5.12 付.2 4次式重みの場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.29368	0.23148	-0.36307	-0.09793
	6	0.29112	0.23888	-0.36516	-0.10199
	7	0.28872	0.24521	-0.36706	-0.10503
	8	0.28644	0.25072	-0.36880	-0.10728
	9	0.28426	0.25555	-0.37041	-0.10891
	10	0.28216	0.25984	-0.37190	-0.11002
	11	0.28014	0.26365	-0.37329	-0.11070
	12	0.27818	0.26707	-0.37457	-0.11102
	13	0.27627	0.27013	-0.37577	-0.11101
	14	0.27441	0.27290	-0.37689	-0.11074
	15	0.27260	0.27539	-0.37792	-0.11022

表-5.12 付.3 3次式重み(a)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.29936	0.19830	-0.35713	-0.06536
	6	0.29852	0.19718	-0.35762	-0.06026
	7	0.29760	0.19646	-0.35816	-0.05556
	8	0.29664	0.19603	-0.35871	-0.05115
	9	0.29566	0.19577	-0.35926	-0.04692
	10	0.29466	0.19562	-0.35979	-0.04281
	11	0.29365	0.19554	-0.36028	-0.03879
	12	0.29264	0.19549	-0.36073	-0.03481
	13	0.29163	0.19547	-0.36114	-0.03087
	14	0.29063	0.19546	-0.36149	-0.02697
	15	0.28963	0.19546	-0.36179	-0.02308

表-5.12 付.4 3次式重み(d)の場合

		D_1	D_2	D_3	D_4
β [deg]	5	0.29581	0.22597	-0.36280	-0.09422
	6	0.29328	0.23460	-0.36532	-0.09979
	7	0.29086	0.24233	-0.36764	-0.10465
	8	0.28855	0.24932	-0.36976	-0.10896
	9	0.28631	0.25568	-0.37171	-0.11280
	10	0.28416	0.26148	-0.37349	-0.11626
	11	0.28206	0.26680	-0.37512	-0.11936
	12	0.28003	0.27167	-0.37661	-0.12216
	13	0.27806	0.27614	-0.37797	-0.12468
	14	0.27615	0.28023	-0.37920	-0.12694
	15	0.27428	0.28398	-0.38031	-0.12896

5.3 考 察

(1) 解析解の形状(ねじり解, 一様引張力の重ね合わせ解)について

(図-5.2~図-5.6, 図-5.16~図-5.20)

(a) 境界線上の開口部において応力度 σ_x , $\tau_{x\theta}$ は完全に 0 となり, process zone では集積特異点の特徴は現れずに有限で滑らかな応力集中が構成されている。

(b) 境界線上で応力 σ_x , $\tau_{x\theta}$ は完全に連続している。 σ_θ は接合条件に関与していないので境界線上では不連続でも構わない。

(c) 応力(ねじり解における $\tau_{x\theta}$, 一様引張解における σ_x) 分布は単独の解析解を用いる場合には開口部先端に不自然な変動(ここでの変動とはせいぜい一周分でその形状も有限で滑らかなもので, 振動しながら無限大に発散する集積特異点形状とは根本的に性質を異とする)が少し現れるが, 解析解を複数個重ね合わせることによって極めて滑らかな応力分布が実現して不自然さは回避された。

(d) 変位 U_x , U_θ は接合部分で連続であり, 内側弾性体と外側弾性体とを比較すると外側の方が大きく異質弾性体間に生じたクラックの特性を表している。

(e) 外力によって生ずる変位(ねじり解における U_θ , 一様引張解における U_x) は解を重ね合わせることによって, 単独な解析解を用いるより滑らかな開口部が形成されより実用的なものとなった。

(f) 本研究で導いた解は完全な弾性解でありながらクラック先端周辺における応力と変位が共存する部分を表現できた。

(2) 重み関数 2 次式, 3 次式, 4 次式の特性(図-2.4)

① 2 次式と 4 次式は重みのピークポイントが process zone の中間にあり左右対称となる重み形状となっている。3 次式(a)は process zone 中間より接合部側に, 3 次式(d)は開口部側にそれぞれピークポイントが偏っており左右対称性はない。

② 重みのピークポイントの大きさは 2 次式より 4 次式の方が大きい。3 次式(a)と 3 次式(d)は同じ大きさであり, 2 次式と 4 次式の間にある。

③ 2 次式は process zone 両端(z_1, z_2)において単根であるが, 4 次式は process zone 両端で重根となっている。3 次式(a)は z_1 で重根となり, 3 次式(d)は z_2 で重根となる重みである。

④ 重み関数が両端($t=z_1, z_2$)で急勾配で立ち上がる(2 次式)か, 滑らかに立ち上がる(4 次式)かによって開口部先端の応力集中の形状が異なることが予測される。これを実証したのがこの例(図-5.7, 図-5.21)であり, 開口部先端の応力集中の立ち上がり状況が予測どおりとなっている。

(3) 重みによる応力・開口形状の相違(図-5.7, 図-5.8, 図-5.21, 図-5.22)

重みによる応力・開口形状の相違は, ねじり解と一様引張解で異なる傾向が現れている。

(a) ねじり解では 2 次式, 4 次式の左右対称の重みを用いた場合, 応力 $\tau_{r\theta}$ の最大値の大きさがわずかに違うもののほぼ同等の結果が得られた。両 3 次式では応力 $\tau_{r\theta}$ 変位 U_θ とともに立ち上がりの位置がずれてはいるが, 立ち上がりの位置, 応力の最大値の発生位置がともに process zone 内に存在し, 応力, 変位の最大値の誤差も 20% 以内に収まっている。

(b) 一様引張解では応力, 変位の立ち上がり位置の重みによる違いはあまりみられないが, 立ち上がり形状に多少の違いがみられる。応力 σ_r は z_1 (この計算例では, $\theta = 20^\circ$) で単根となる重み (2 次式, 3 次式(d)) を用いた場合と比較して z_1 で重根となる重み (4 次式, 3 次式(a)) を用いた方が滑らかな立ち上がり形状を示している。

変位 U_r は z_2 (この計算例では, $\theta = 30^\circ$) で単根となる重み (2 次式, 3 次式(a)) を用いた場合, z_2 で重根となる重み (4 次式, 3 次式(d)) を用いた場合と比較してわずかにめり込みの様相を呈している。応力, 変位の最大値はねじり解と同様に 20% 以内に収まっている。

以上の結果より, process zone の両端で重根となる重みを用いた場合の解析解が応力, 変位ともにより滑らかな立ち上がり形状を示すことがわかった。このため process zone 両端で重根となる 4 次式重みによって重み積分を施した解析解を計算例として示した。

重みによる応力, 変位が解析解 (単純ねじり, 一様引張力) の種類によっても異なる傾向を示しているのは当然である。荷重条件の違いも変化の要因であるが, 複数の解析解の重ね合わせに用いた係数の決定法の違いによる相違も考えられる。現段階では, 本計算例のような滑らかな開口変位を得ることが可能であると実証されたが, どのような材料特性のクラック問題にどのような重ね合わせ係数決定法を採用するのが最適かという問題が解決されていないので今後の研究が必要である。

(3) クラック半区間 ω の変化に伴う応力・開口形状の相違

(図-5.9, 図-5.10, 図-5.23, 図-5.24)

process zone 区間 ($\beta = 10^\circ$) は一定とし, 開口長さが進展する場合 ($\omega = 15^\circ \sim 25^\circ$) の計算例について考察する。

ねじり解, 一様引張り解にかかわらず ω が大きくなるに従って開口部先端の応力集中と開口変位はともに大きくなる傾向を示している。応力集中の大きさは process zone を含むクラック全体の大きさ (すなわち, $2\omega + 2\beta$) に対する process zone 区間の大きさの比に関連している。すなわちこの比 ($2\beta / (2\omega + 2\beta)$) が小さい程, 応力集中が大きく現れる傾向にあることがわかる。また, 開口変位は β が一定である場合, クラック全体の大きさが大きくなる程大きくなる結果が得られた。

(4) process zone 区間 β の変化に伴う応力・開口形状の相違

(図-5.11, 図-5.12, 図-5.25, 図-5.26)

開口部半区間 ($\omega = 20^\circ$) は一定とし, process zone 区間を変化させた場合 ($\beta = 5^\circ \sim 15^\circ$) の計算例について考察する。

この結果も(3)と同様にクラック全体に対する process zone 区間の比が小さい程開口部先端の応力集中が大きくなり、process zone 区間が 0 に近づけば開口部先端の応力集中は無限大へと発散する。開口変位も同様に ω が一定のもとでクラック全体の大きさが大きい程大きくなる結果が得られた。

また、開口部長さ ω を変化させる場合も process zone β を変化させる場合も変化率(2° 間隔)は同じであるが、変位の変化状況は process zone β を変化させる場合の方が小さい。これは process zone 区間が応力と変位が同時に存在する遷移区間であるため、完全な開口部分である ω が変化する場合と比較して変化状況が小さくなると判断される。

(5) エネルギー解放率(J 積分)について

(図-5.13, 図-5.14, 図-5.27, 図-5.28)

J a: 開口部長さ ω の進展に伴う J の変化

J b: process zone β の進展に伴う J の変化

(a) エネルギー解放率 J はねじり解、一様引張り解の両解析解とも J a, J b ともにほぼ直線変化になり、本研究で提案した解析解が破壊基準からも妥当な結果であると判断される。

(b) 両解析解とも J a は J b より大きな値となっている。

(c) 重みによる J の値の違いはあるものの、その直線変化の傾きは重みにかかわらずほぼ一定となった。

(d) 採用する重みの種類により J の値は異なっており、特にねじり解における J b (図-5.14 参照)に関しては3次式(a)と3次式(d)とで約3倍の違いが見られる。材料特性等によって重みの形状は異なるものであり、J の値もそれに伴い変化すると考えられる。J a より J b の方が重み形状による違いが大きいのは、重み積分する区間(process zone 区間 β)の変化による J であるためだと考えられる。

第 6 章 マルチクラックの計算例と考察

6.1 マルチクラックの作成

前章までは接合面に 1 つのクラックが生ずる単独クラックを対象としていたが、実際の構造体（鋼管または鋼製脚のアンカーボルトの周りにコンクリートが打設されている構造体等）を考えた場合、接合面上にクラックが 1 ヶ所のみ存在する例は少なく複数ヶ所に生じている例がより現実的である。クラックが複数ヶ所に存在している場合、クラックの位置、大きさ、そして荷重方向によるクラックの相互干渉が非常に重要な問題であり、また破壊過程を解析する上でも探求せねばならない研究項目である。

第 1 章第 1 節でも記述したが、接合面上のマルチクラックの問題は中西等¹⁾のクラックの干渉に関する研究が代表的なものであるが、発生する応力はクラック先端で集積特異点の様相を呈しておりこれを応力拡大係数で処理しているのが実状である。

本章では前章までの単独クラックでの研究手法をマルチクラックに拡大適用し、作成手順およびその結果について考察する。具体的なクラック数は 3 とし概要を図-6.1 に示す。

（1）重み積分関数 H

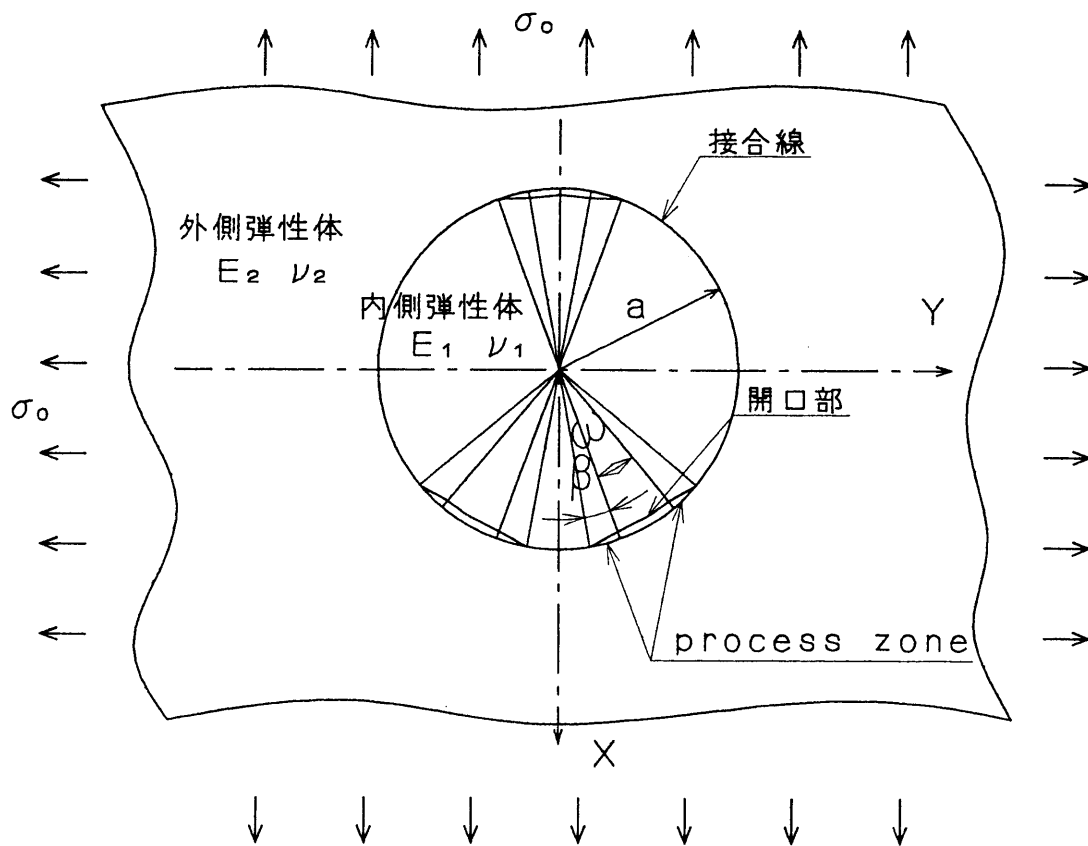
マルチクラックを構成する重み積分関数 $H(z)$ （新開口関数）は、第 2 章第 2 節に記述している単独クラックの重み積分関数を重ね合わせるにより作成できる。作成手順の概要を図-6.2 に示すが、基本は接合面上に 3 ヶ所の開口部（両端は process zone）を有する関数を構成することであり、具体的には異なる位置に開口部を持つ 3 つの単独クラックの新開口関数の和および差（ ± 1 ）により作成することができる。

作成した関数 $H(z)$ の実数曲面、虚数曲面形状を図-6.3、図-6.4 に示す。

（2）解析関数

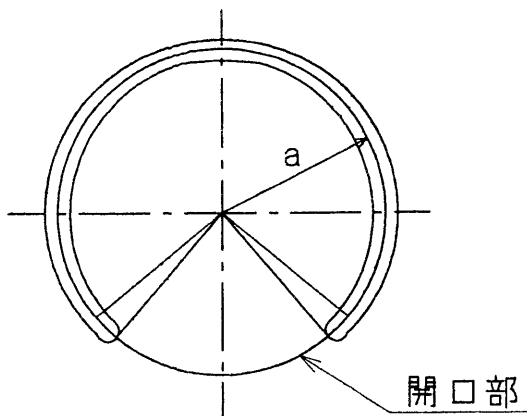
第 3 章では単独クラックの基本解析関数について詳述したが、この基本関数はそのままマルチクラックに対しても有効となり、個々の基本解は単独クラックと同じ集中ねじり力、一様引張力の応力場を現す。

この理由は、マルチクラックと単独クラックの関数上での相違は式(3.4.1) 要素関数 $f_i(z)$ に含まれる H 関数のみである。言い換えれば、接合面上での H 関数の構成に基づきクラック位置、クラック開口長さ、process zone 長さが決定されることになる。

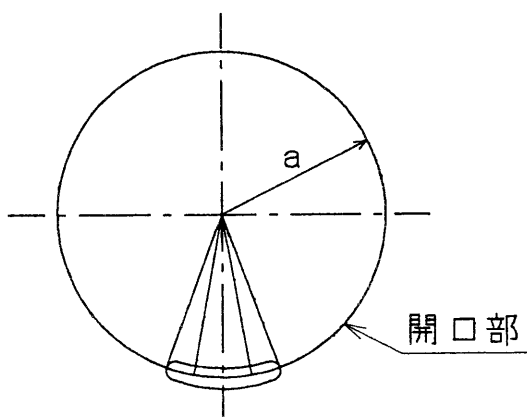


計算例 (平面ひずみ)	$a = 10 \text{ cm}$	$E_1 = 2.10 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
	$\omega = 20^\circ$	$\nu_1 = 0.3$
	$\beta = 10^\circ$	$E_2 = 3.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
	$\sigma_0 = 1 \text{ kgf/cm}^2$	$\nu_2 = 0.167$

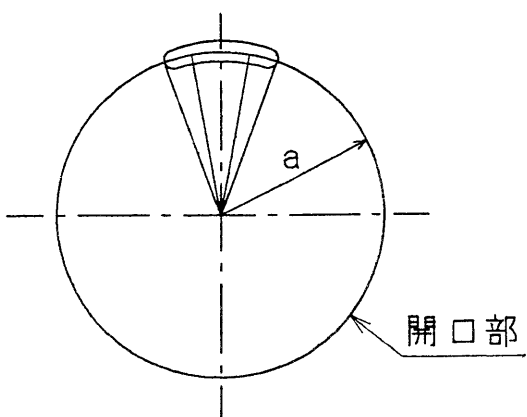
図-6.1 マルチクラック形状図(計算モデル)
(クラック3ヶ所)



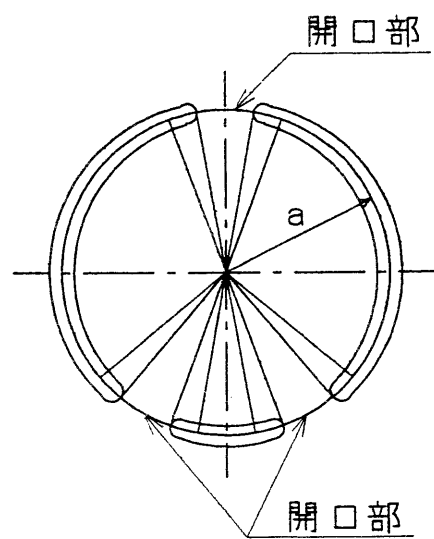
開口虚数曲面 (A)



開口虚数曲面 (B)

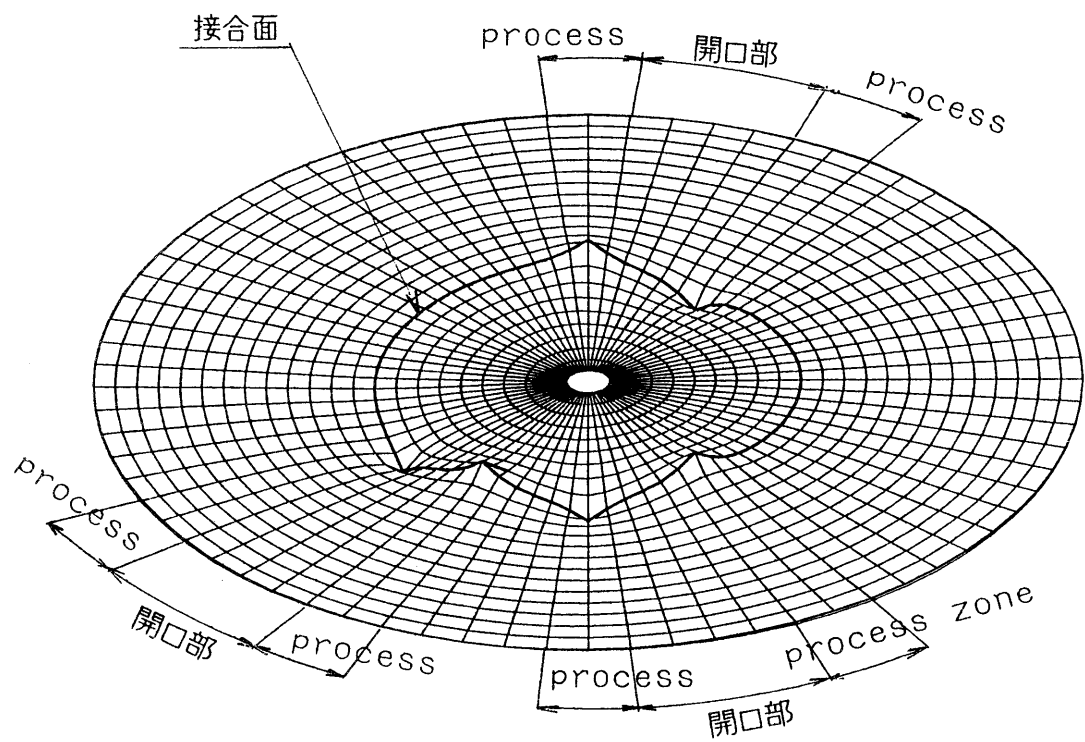


開口虚数曲面 (C)

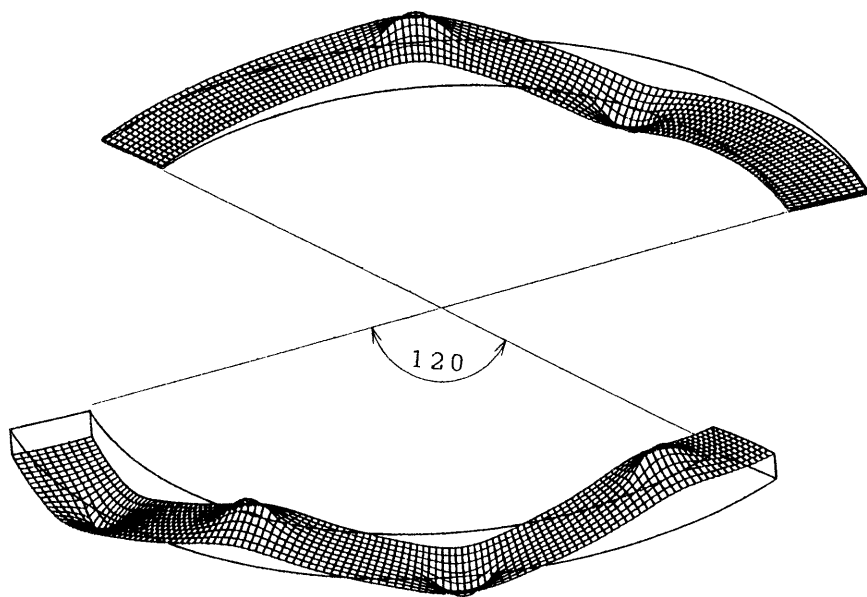


開口虚数曲面 (A + B - C)

図-6. 2 マルチクラック 重み積分関数の作成概要

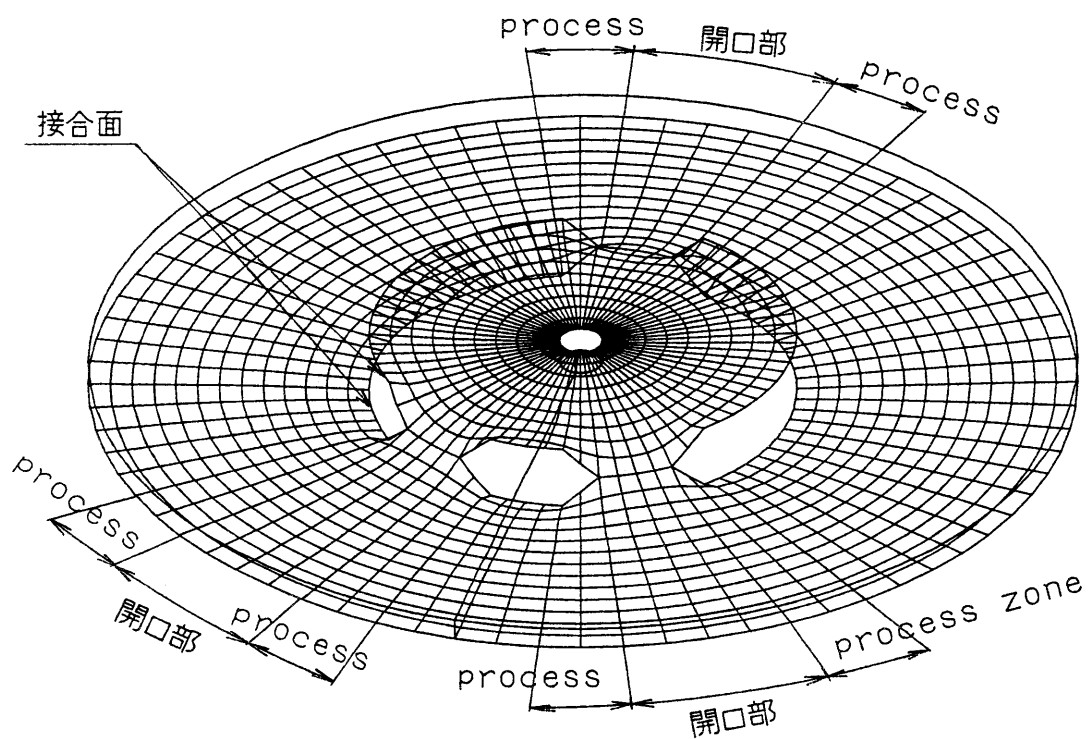


(a) 全体形状

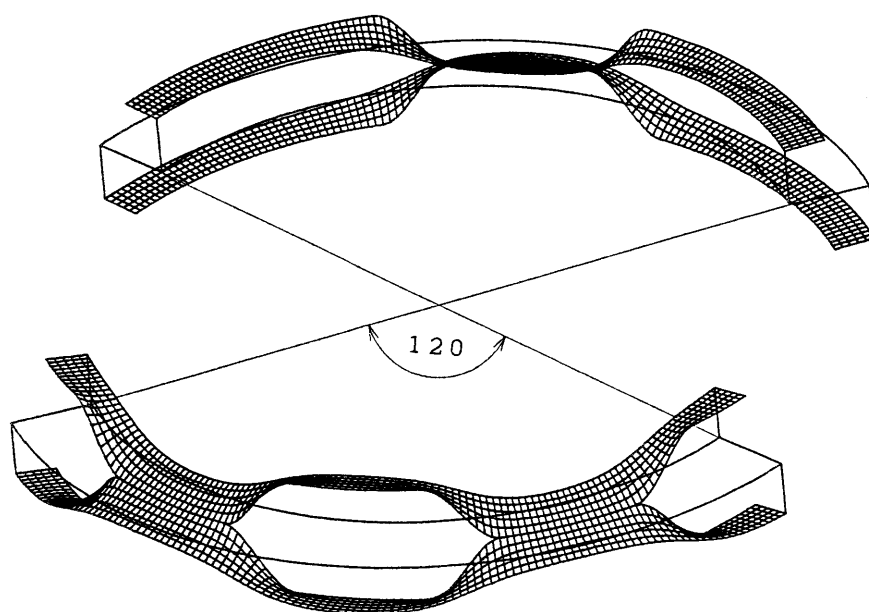


(b) 開口部拡大

図-6.3 新開口関数 実数曲面 (マルチクラック)



(a) 全体形状



(b) 開口部拡大

図-6.4 新開口関数 虚数曲面 (マルチクラック)

6.2 計算例

(1) 計算モデル

(a) 計算モデル

計算モデル（図-6.1 参照）は鋼の周りにコンクリートが打設された構造体を想定する。内側弾性体（領域 $r \leq a$ ）の弾性係数を $E_1 = 2.10 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ， $\nu_1 = 0.3$ とし，外側弾性体（領域 $r > a$ ）の弾性係数を $E_2 = E_1/7$ ， $\nu_2 = 0.167$ としてクラック個数は3ヶ所とする。3ヶ所ともに開口部区間 $\omega = 20^\circ$ ，process zone 区間 $\beta = 10^\circ$ とし，接合円周までの半径を $a = 10\text{cm}$ ，無限遠方で平均応力（一様引張応力） $\sigma_0 = 1 \text{ kgf/cm}^2$ となる一様引張力を作用させる。重み積分は2次式を用いた。

(b) 採用する解析解

第4章第2節に示す解析解の一覧表の中から，一様引張力の応力場を示す解 No.3, 4, 15, 16 を採用する。実用的な解を得るため，開口変位差の自乗和を極値とする手法にて解を重ね合わせる。

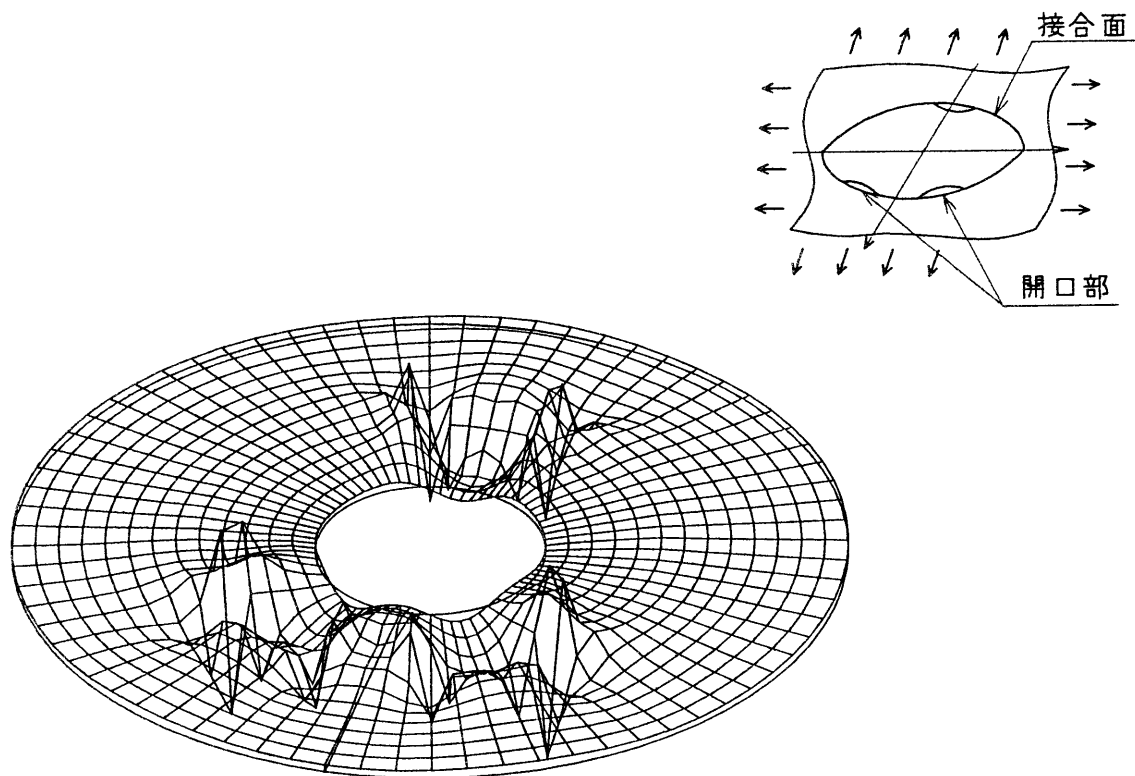
(2) 応力・開口形状（図-6.5～図-6.11）

図は解の特性を判り易くするため，全体形状（解析範囲 $5\text{cm} \leq r \leq 18\text{cm}$ ， $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ）と開口部拡大（解析範囲 $9.4\text{cm} \leq r \leq 10.6\text{cm}$ ， $-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ ， $120^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$ ）の2種類とした。具体的には解 No.3 について，応力 σ_r ， σ_θ ， $\tau_{r\theta}$ と変位 U_r ， U_θ の全体形状図及び開口部拡大図（図-6.5～図-6.9）を示す。

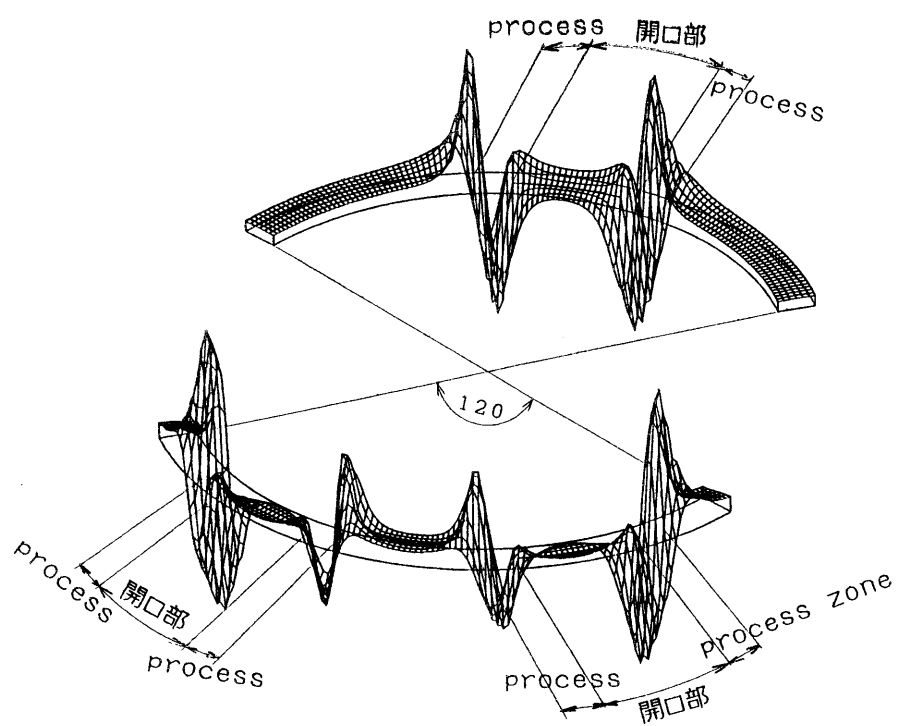
4つの解（解 No.3, 4, 15, 16）の重ね合わせ結果については，クラック3ヶ所の場合の応力 σ_r ，開口形状 U_r を図-6.10 に，クラック2ヶ所の場合を図-6.11 に示す。 σ_r は接合面上の値， U_r は接合面外側と内側の値の差（外側－内側）である。用いた重ね合わせ係数を表-6.1 に示す。

表-6.1 重ね合わせに用いる係数

	解 No.3	解 No.4	解 No.15	解 No.16
クラック3ヶ所	0.50025	-0.26431	-0.04268	0.05445
クラック2ヶ所	-0.10258	1.64680	-1.09910	-1.26990

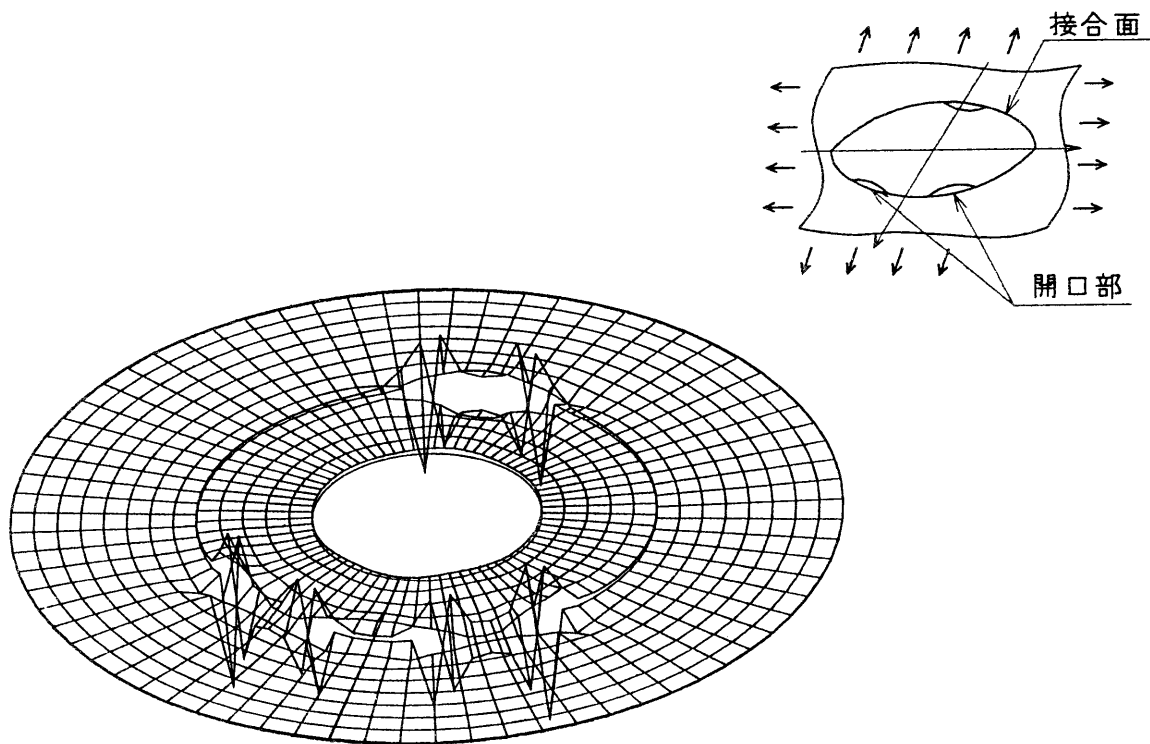


(a) 全体形状

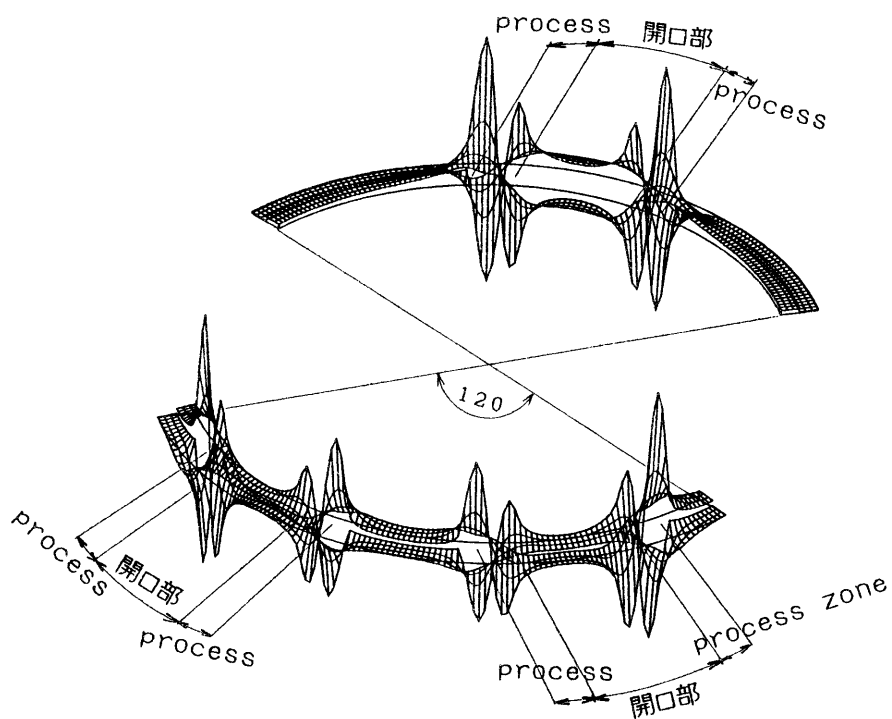


(b) 開口部拡大

図-6.5 応力 σ_r (解 No. 3)

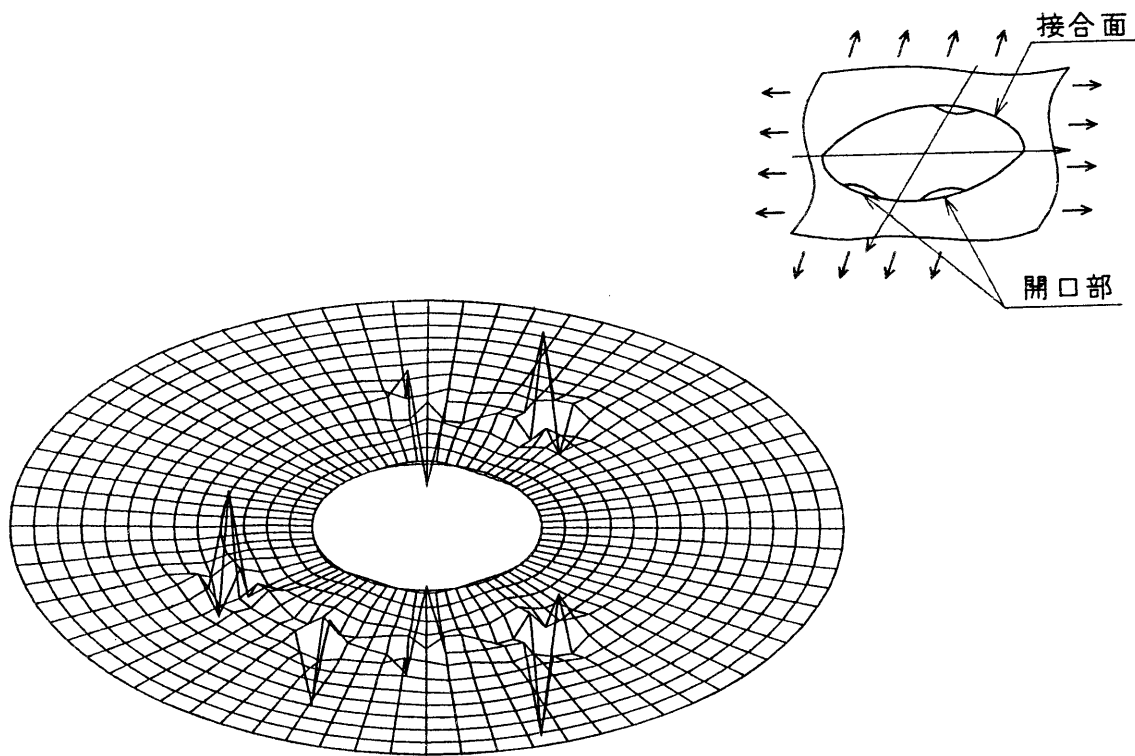


(a) 全体形状

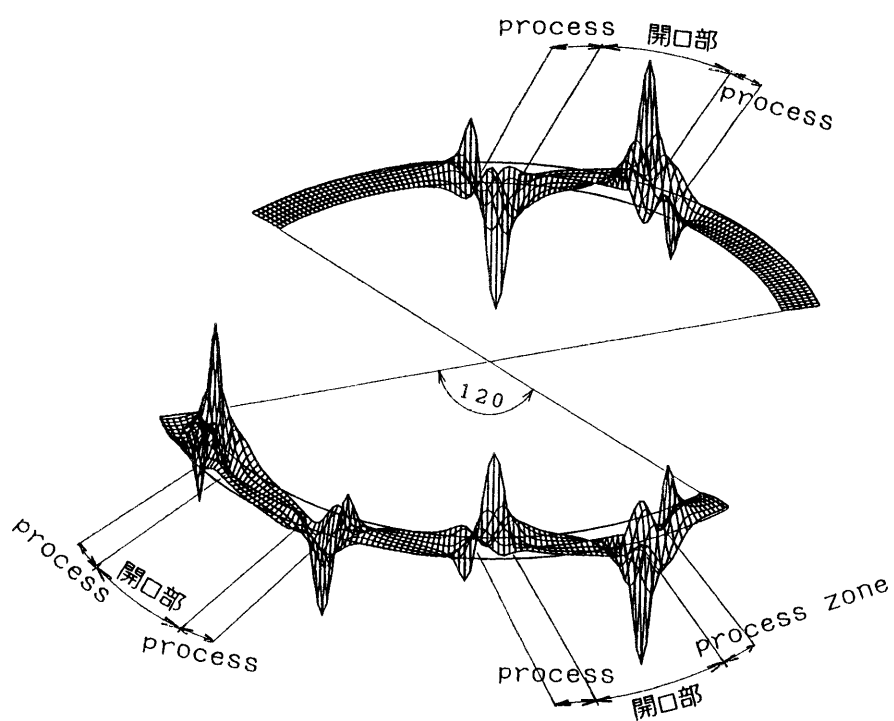


(b) 開口部拡大

図-6.6 応力 σ_θ (解 No. 3)

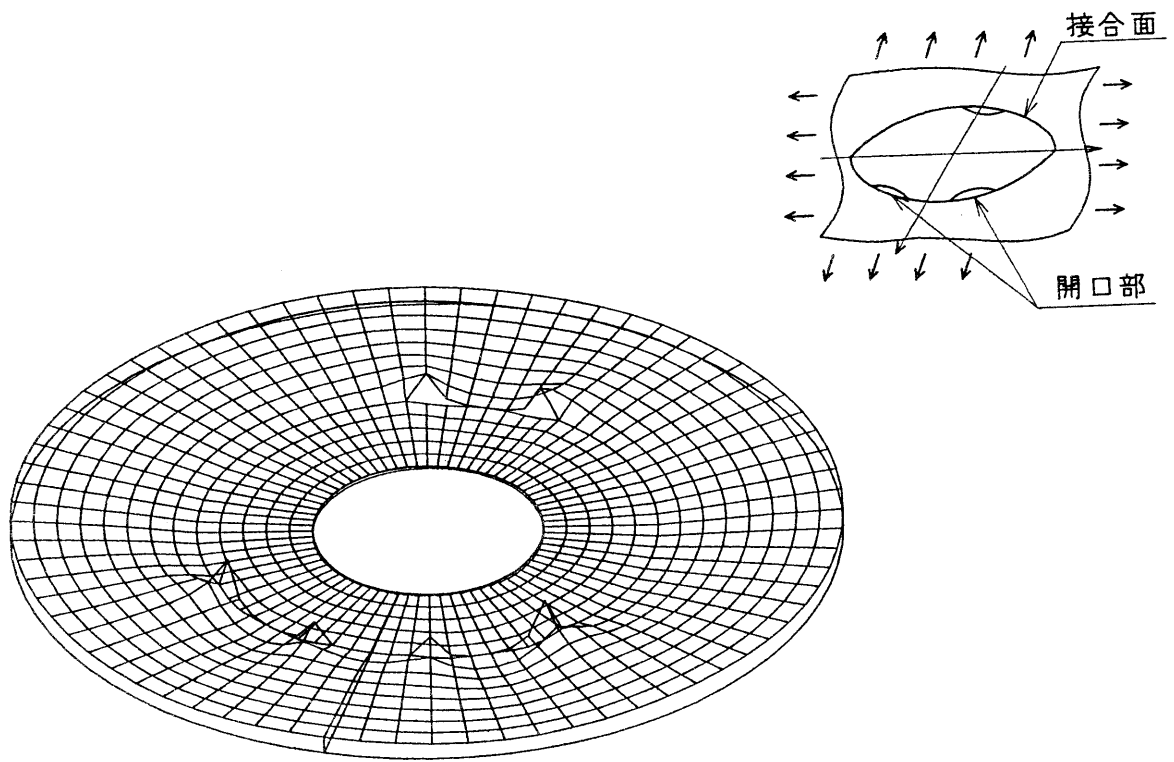


(a) 全体形状

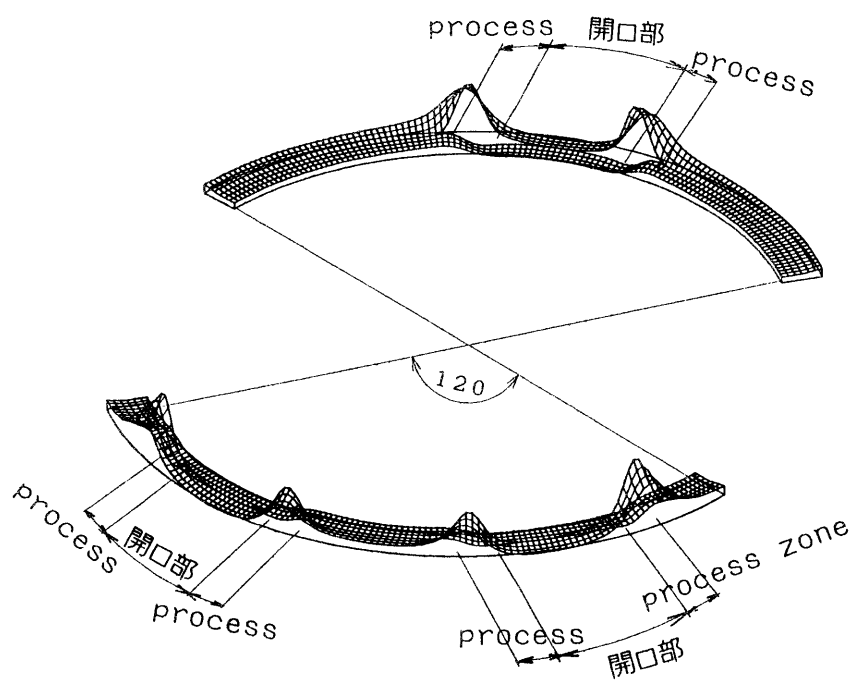


(b) 開口部拡大

図-6.7 応力 $\tau_{r\theta}$ (解 No. 3)

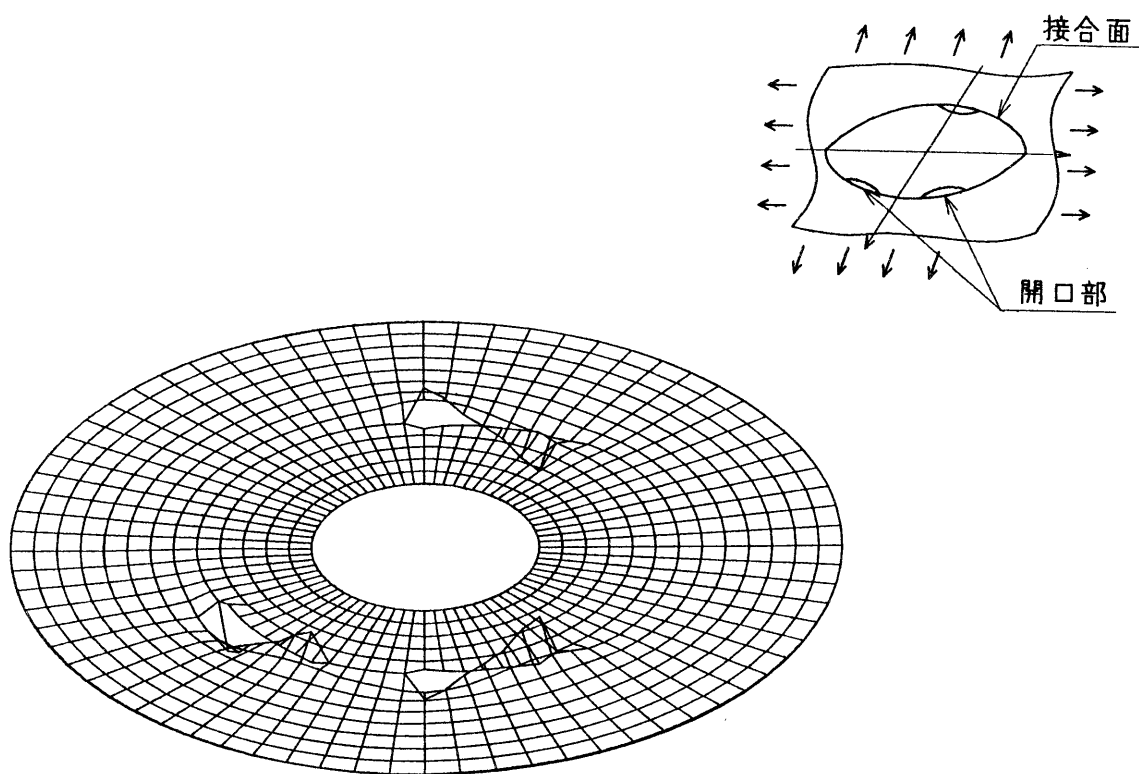


(a) 全体形状

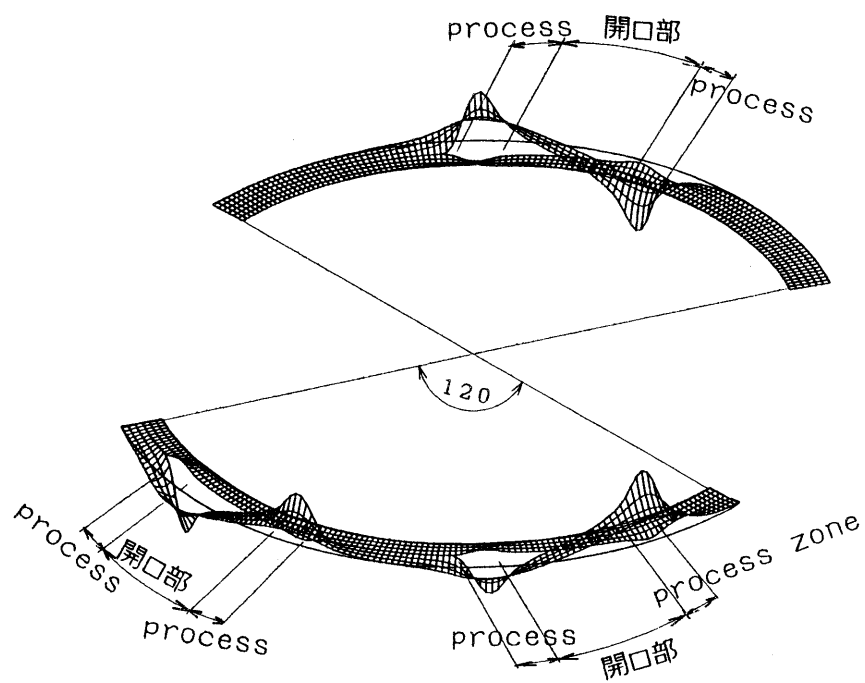


(b) 開口部拡大

図-6.8 変位 U_r (解 No. 3)

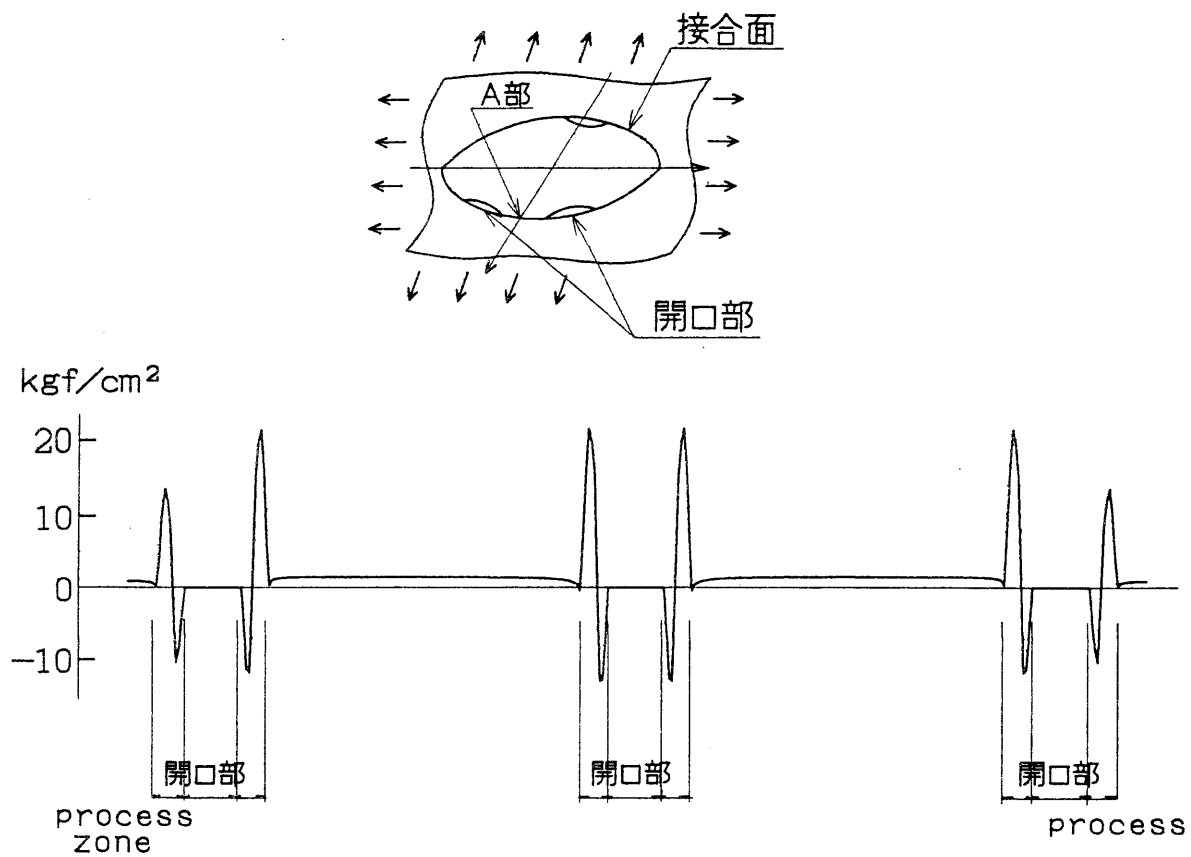


(a) 全体形状

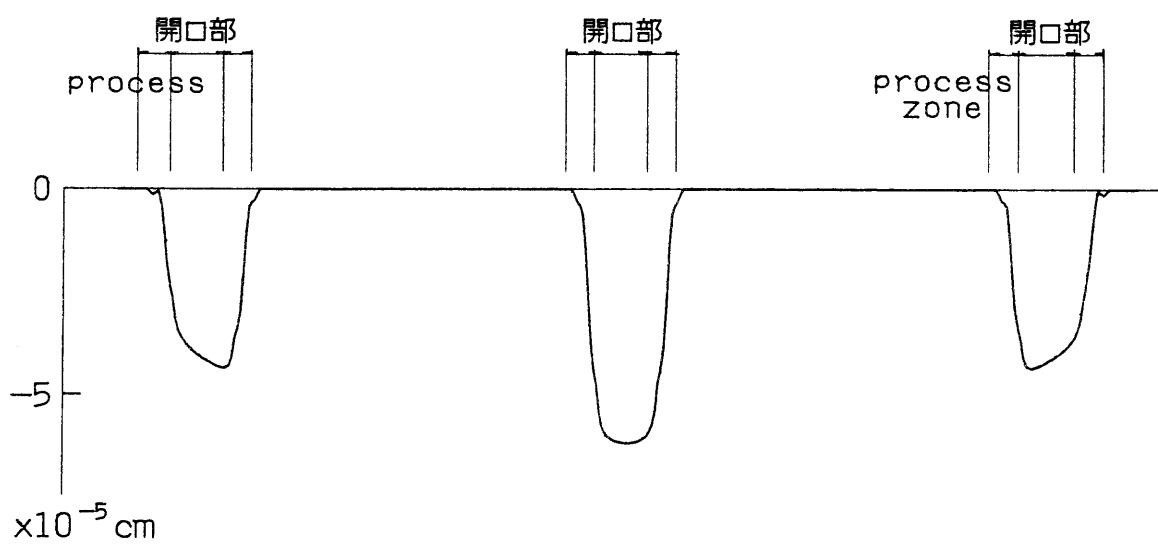


(b) 開口部拡大

図-6.9 変位 U_θ (解 No. 3)

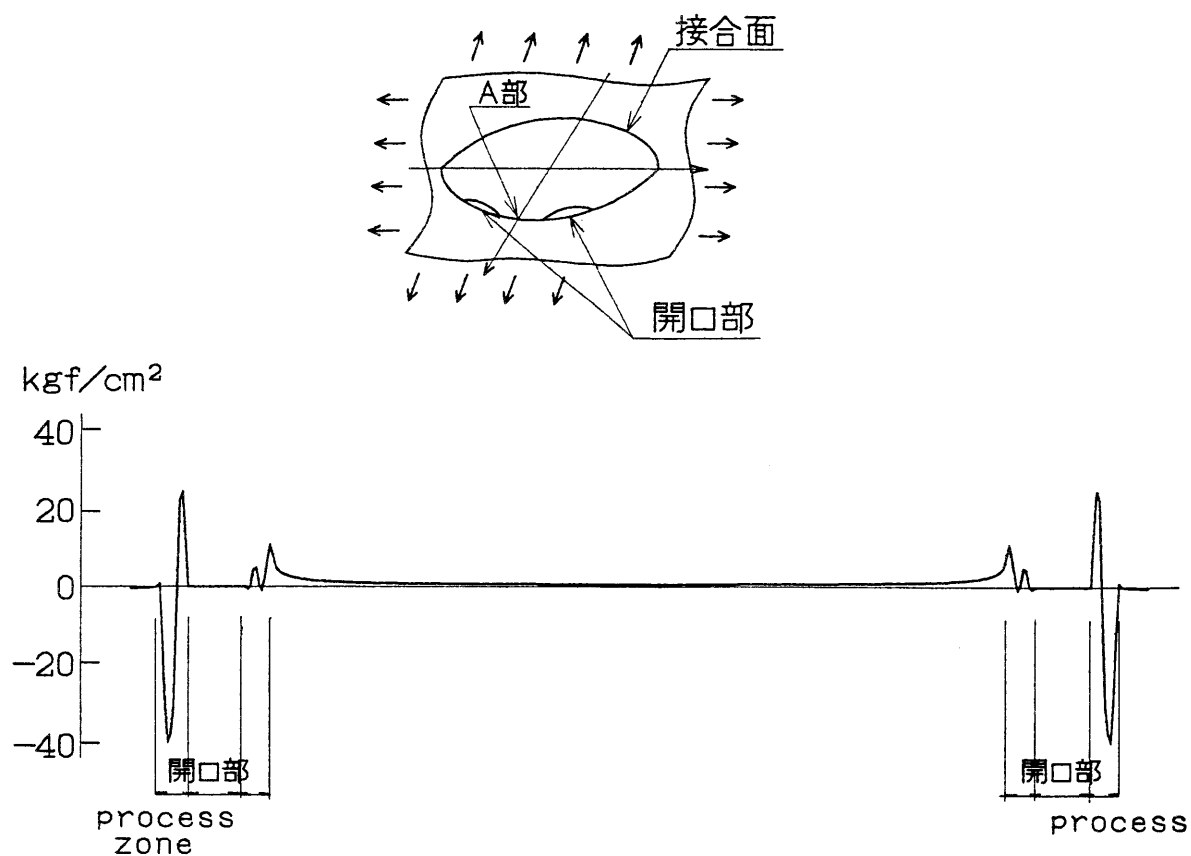


(a) 応力 σ_r (A部より展開)



(b) 変位 U_r (A部より展開)

図-6.10 4つの解の重ね合わせ結果 (クラック3ヶ所)



(a) 応力 σ_r (A部より展開)



(b) 変位 U_r (A部より展開)

図-6.11 4つの解の重ね合わせ結果 (クラック2ヶ所)

6.3 考 察 (図-6.5～図-6.11)

(a) 接合面上の開口部において応力度 σ_x , τ_{xy} は完全に 0 となり、process zone では集積特異点の特徴は現れずに有限で滑らかな応力集中が構成されている。

(b) 接合面上で応力 σ_x , τ_{xy} は完全に連続している。 σ_y は接合条件に関与していないので接合面上では不連続でも構わない。

(c) 応力 (一様引張解における σ_x) 分布は単独の解析解の場合、開口部先端に不自然な変動 (ここでの変動とはせいぜい一周分でその形状も有限で滑らかなもので、振動しながら無限大に発散する集積特異点形状とは根本的に性質を異とする) が少し現れている。

解析解を複数個重ね合わせる結果についてはクラック 2 ケ所と 3 ケ所の場合を示したが、両者とも不自然な応力分布となっている。この原因として、本研究では見いだしていない他の基本解があると考えられ、それらを重ね合わせるにより自然な応力分布形状が得られると推測できる。

(d) 変位 U_x , U_y は接合部分で連続である。単独の解析解の場合、内側弾性体と外側弾性体とを比較すると外側の方が大きく異質弾性体間に生じたクラックの特性を表している。しかし、クラック中央部より先端部の開口変位が大きな値を示すこと等の不自然な結果となっている。

解を複数個重ね合わせる結果についてはクラック 3 ケ所の場合、マイナス (内側の変位が大きくなる) の値となり、応力と同様改善の必要性がある。

(e) 本研究で導いた解はいくつかの点で検討の余地が残されているが、マルチクラックの場合においてクラック先端周辺における応力と変位が共存する部分を一応表現することができた。

ここに定義したマルチクラック用の関数 H は、以上によりそれぞれの境界条件を満足させることが実証された。したがって、接近したクラック相互間の影響効果を推定する手段として活用し得ると判定されるが、 $e^{\pm(1 \pm i\alpha)z} H$ に基づく要素関数 $f_i(z)$ の定義に未だ不十分な点があって、合理的と思われる応力分布や開口形状を導くまでには至らなかった。これは今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 中西博, 鈴木恵, 馬川省吾, 赤崎智康: 円形介在物の界面はく離の応力拡大係数, 日本機械学会論文集 (A 編) 52巻, 479号, pp.1655-1662, 1986年7月.

第 7 章 解析関数解と F E M による

解析結果との比較検討

(無限遠方で一様引張力を受ける単独クラック)

7.1 F E M のモデル化

解析解の妥当性を検証する一手法として、F E M (有限要素法) による数値計算結果との比較検討を試みた。

F E M 要素分割図を図-7.1 に示す。60cm x 60cm のモデルを考え、クラック周辺の最小要素サイズを 0.4cm 角とした。変位・応力ともに生ずる process zone 部分の設定方法については検討を要するが、トラス構造として対象部材要素の弾性係数を変えることにより process zone 相当部分に対応させることとした。具体的な接合状態として 2 つの例を考え、第 1 の例として process zone 全領域で弾性係数一定 ($E=21,000 \text{ kgf/cm}^2$)、第 2 の例としては接合部から開口部へ向かって弾性係数を漸変 ($E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \sim 210 \text{ kgf/cm}^2$) させた。

7.2 計算例 (解析関数解との比較検討) と考察

計算モデル (平面ひずみ) は解析解との比較検討をするため、構造体は鋼の周りにコンクリートが打設されたものを想定して、内側弾性体 (領域 $r \leq a$) の弾性係数を $E_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu_1 = 0.3$ とし、外側弾性体 (領域 $r > a$) の弾性係数を $E_2 = E_1/7$, $\nu_2 = 0.167$ とする。未接合部の区間 $|\theta| \leq \omega$, $\omega = 20^\circ$, process zone $\beta = 10^\circ$ とし、無限遠方で一様引張応力 $\sigma_0 = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$ を作用させた。

第 5 章第 2 節で行った解析解 (無限遠方で一様引張力を受ける場合の計算例) との比較 (変位 U_r は接合面内側と外側との相対差, 応力度 σ_r は接合面上の値) を図-7.2, 図-7.3 に示す。

F E M と解析解との比較では、変位 U_r が類似傾向を示しているが、 σ_r の形状はそれぞれ大きくなっているのがわかる。これは process zone の設定方法 (F E M) と 4 次式重み (解析解) としたことによる相違であり、いずれがより正しいものであるかを即断し得るものではない。このような仮定の相違、解析法の違いによって開口変位はこの程度に近似しても応力は相当に大きな違いを示すということを示していると判断すべきものであろう。

節点数 2039

要素数 1953

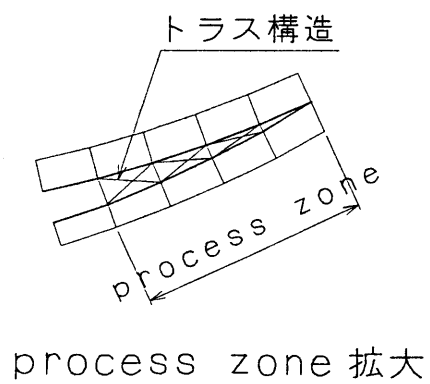
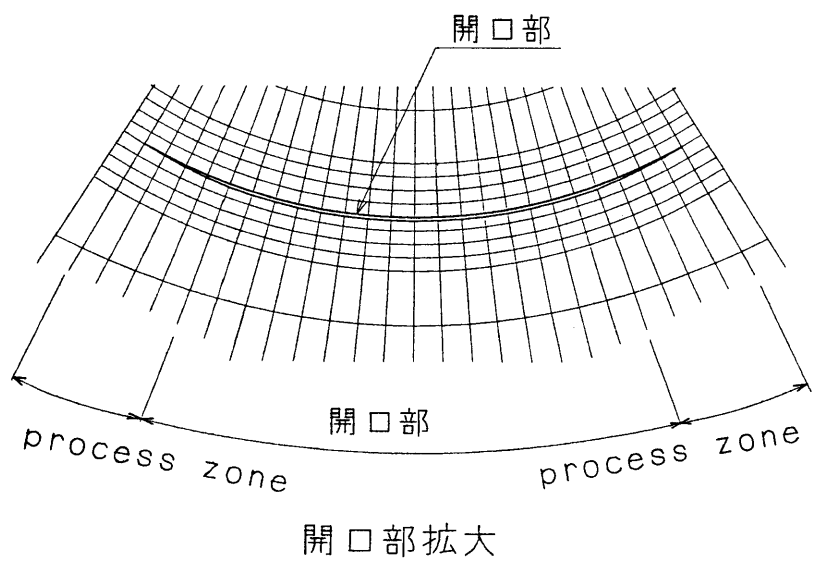
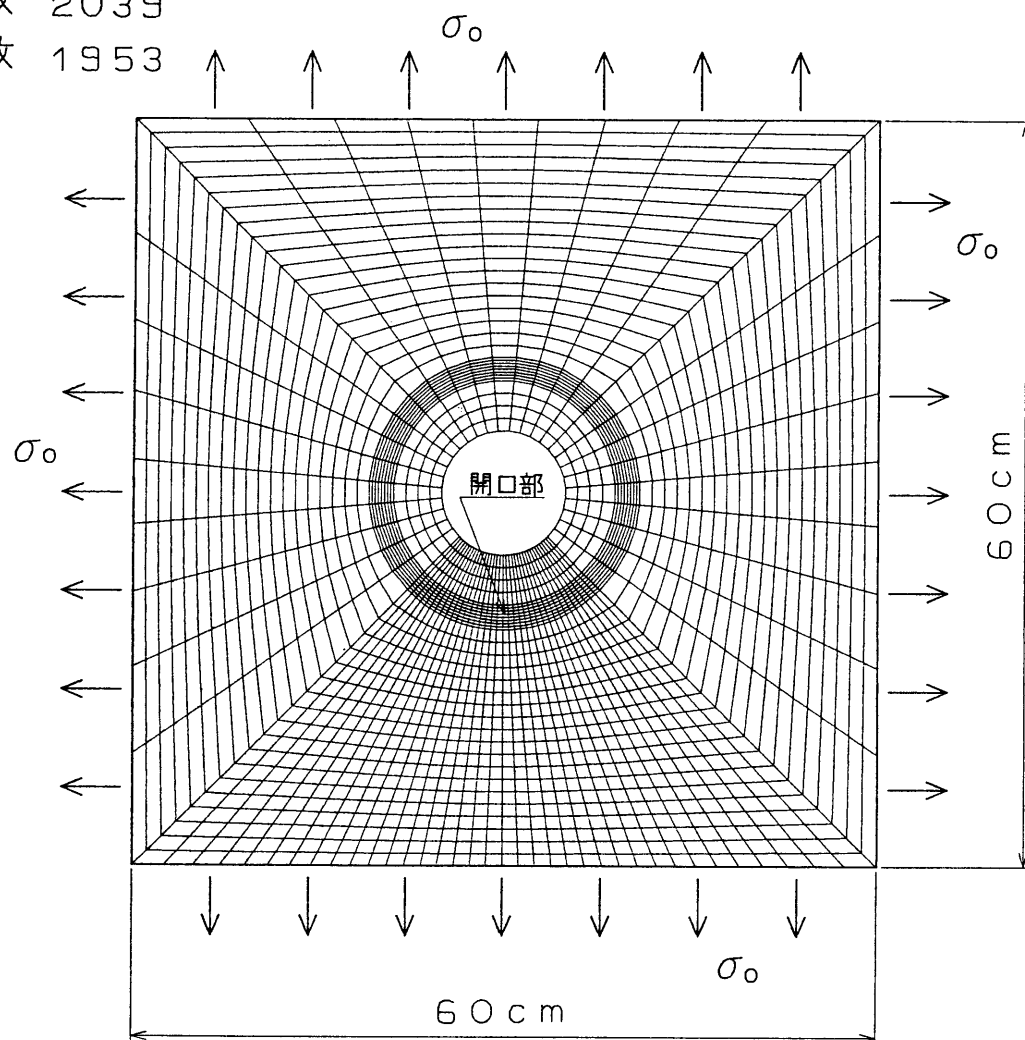


図 - 7.1 FEM 解析モデル

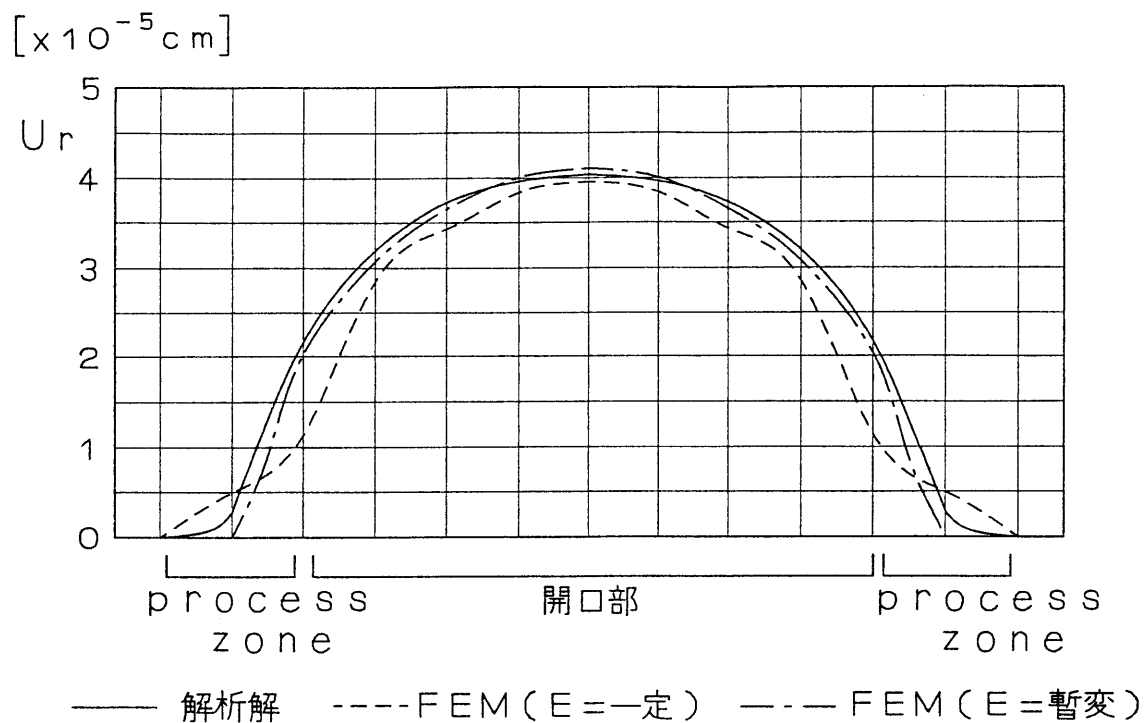


図 - 7.2 変位 U_r FEMとの比較 (接合面外側 - 内側)

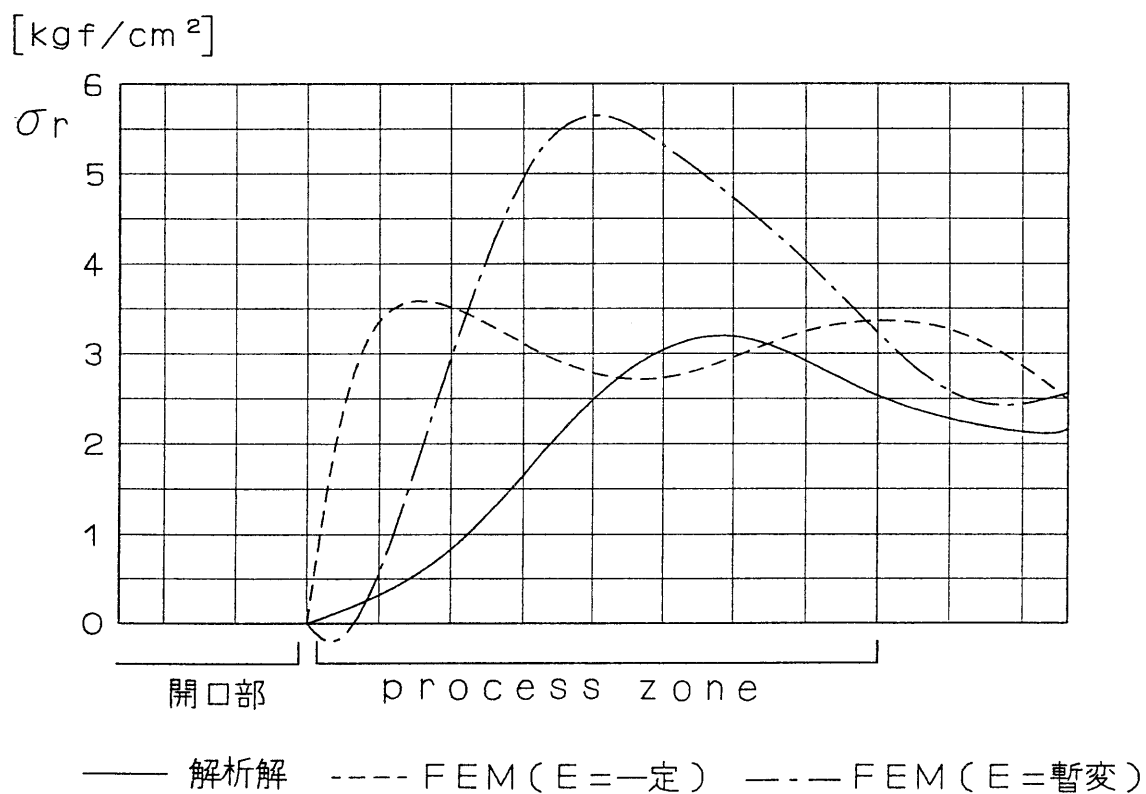


図 - 7.3 応力 σ_r FEMとの比較

第 8 章 結 論

8.1 総 説

本研究はモデル化されたクラック近傍の応力解析の一つの手法とそれによる解の一群について論じたものである。得られた解はいずれも応力関数や変位関数に基づいた線形の力学的条件を満足しているため理論解とも言えるが、実験データをもとにクラックの発生や進展のメカニズムを追求したものではないことを念頭に置かなければならない。設計や安全性の評価等の問題に対して本研究の解析方法を適用し、実用に供し得るような具体的な結論やデータを提示するのは今後の課題である。しかし、ここに述べる手法はクラック周辺部分の応力集中の解析方法としては有意義な解法である。各章には簡単な計算例を挙げて著者等の提案する解析方法の有効性を示したが、それらを本章において総括する。

(a) 重み積分法ではクラック先端部で滑らかな応力集中を得るために、2 次式、3 次式、4 次式による新開口関数を求めた。開口関数は利用する重み式により無限個の関数を誘導できるが、本論文の 3 種の重み式による解で重み形状に対する解の変化状況を推測することは可能であろう。

(b) 境界条件を満たす基本解析関数の一般形を求めることができた。これらは境界条件を満たすため理論解とも言えるが、解析関数の中には任意定数も含んでいるので限られた範囲内でありながら自由度を大きく含んだ一群の解と言えよう。応力場としては集中ねじり力、一様引張力を表す基本解を見い出した。

(c) 単独クラック（接合面上に 1 ケ所のクラック）については集中ねじり力および無限遠方で一様引張力を受ける解析関数を求め、具体的に計算例を示した。その中では process zone の設定と複数の解の重ね合わせによりクラック先端部の応力が有限となり自然な開口形状が現れているものを示し得た。

(d) クラックの応力および開口形状以外に、クラックの進展に伴って生ずるエネルギー変化にも注目した。開口部分の進展に伴うエネルギー解放率、process zone の進展に伴うエネルギー解放率ともに妥当な結果が得られている。

(e) マルチクラック（接合面上に複数ケ所のクラック）については単独クラックの開口関数を重ね合わせて開口を構成することにより求める手順を示し、計算例として無限遠方で一様引張力を受ける場合を示した。得られた解は境界条件は満たすものの応力、開口形状ともに単独クラックに比較し予想される滑らかな自然な形状を表す解が得られず検討の余地が残されている。

(f) 有限要素法と解析結果の比較では要素分割、process zone の設定等に検討の余地が残されているが、無限遠方で一様引張力を受ける単独クラックの開口形状について類似の結果が得られている。

8.2 解析関数解

ここに示したものは、円形接合面亀裂の解として応力集中の特異性（集積特異点）を回避し、有限で滑らかな応力分布を求める方法（併せて process zone 相当部分を実現する）を導き、そしてそれによる応力関数の一般解を示したものとみなされるべきであろう。

(a) 新開口関数 $H_m(z)$ の構成法は集積特異点を消滅させる手法そのものである。そして重み関数 $\rho_m(t)$ は $t = \omega$ と $t = \omega + \beta$ において穏やかな勾配で立ち上がり全体として滑らかな関数という条件のみ必要であり、接合材料および実際の応力分布に応じて任意に変化させ得るものである。

(b) 要素関数 $f_k(H_m)$ は応力関数の基本構成要素であって円周上で開口を形成し、接合面亀裂の境界条件を満足させる基本項である。 $k=1\sim 4$ は開口形状の対称と逆対称の解あるいは引張り、ねじり等の開口形状に対応したものである。

(c) z あるいは a/z を $F_j(z)$ に乗じて形成させる応力関数の基本解 ψ, φ は無限遠方での収束・発散の解あるいは応力の対称分布・逆対称分布という応力場を構成する基本型を意味する。 $Q(z)$ は $(z/a + a/z)$ または $i(z/a - a/z)$ の n 次数を用いるが、この項は境界円周上で $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ という実数値となる。複素数となると円形接合面の境界条件が乱されるので z 単独の級数は $Q(z)$ として採用できない。

(d) 如何なる重み関数を用いて $H_m(z)$ を構成するか、応力関数基本解の $F_j(z)$ を構成する $Q(z)$ としてどの Type を採用するか、何組の解析関数 ψ, φ をどのような手法で重ね合わせて解を設定するかは、解析対象とする材料と応力分布に応じて決められるべきであろう。

8.3 解の検討

(1) 応力集中の特性

2次元弾性問題としてのクラック先端部分の応力分布は次のような特性を備えている。

(a) 一様な弾性体中ではクラックの先端部分が有限な曲率を持つ開口を形成しているならば有限な応力集中となり、曲率が無限大になりながら応力と開口が併存する区間が存在しなければ（本研究で $\beta = 0$ ）応力集中は無限大になる。

(b) 異質弾性体接合面では先端部で曲率が無限大でさらに応力と開口が併存する区間が無い場合、応力集中は単に無限大であるだけでなく集積特異点の形状を呈す。

(c) 開口部分の先端に応力と開口が併存する区間が存在する（本研究におけるように $\beta \neq 0$ である）場合は、特異点は緩和されて有限な応力分布が形成されるようになる。

(d) 接合面の接合部分における変位の連続条件（bielastic constant α を決定する条件式）は、開口変位と応力の併存区間を設けない場合も本研究のように設定する場合も併存区間を含めて同じ条件式が成立し、接合線が円形でも直線状でも変化しない。

(2) process zone

本研究の応力と開口変位が併存するという区間 β は現実には process zone あるいは stress softening zone と呼ばれている部分に相当するが、この部分について次の事柄を強調したい。

(a) 鋼材の場合、現実的にこの部分は降伏応力が現れて大きな塑性伸びの生じている領域であり、開口ではないとされている。コンクリートや岩盤のような材料の場合はマイクロクラックが発生している領域である。

(b) これに対して本研究では Dugdale¹⁾の解と同様に応力関数はすべて全領域で弾性解よりなっていて、歪とは別に大きな開口変位を伴っている。この開口変位は弾性変形によって構成されているにも拘らず、塑性伸びが大きく耐力が低下し始めている状態を近似的に表しているとみなし得よう。このような区間を設けて実験結果と数値解とを一致させる研究の報告例は Cho²⁾等 あるいは Wium³⁾ 等である。これらの研究の数値解析は有限要素法によるものであるが本研究の応力関数の方がより簡単にかつ詳細な数値結果を提供し易い。

(C) Dugdale では平均応力が如何なる大きさでも応力分布はクラック先端で一定の降伏応力へ直立している（無限大の応力勾配）が、本研究の解によるものは緩やかな勾配で有限な応力が現れる。これは Wecharatana⁴⁾ 等あるいは Visalvanich⁵⁾ が行っているファイバコンクリートのクラックの実験的研究に有効な解析手法を提供することになろう。さらに種々の材料特性の相違に対応して、応力集中と開口の形状に合わせた重み関数の設定や関数の重ね合わせが可能であることを示し得た。

(3) マルチクラック

(a) 本研究では、クラック位置およびクラック先端の応力形状は新開口関数 $H(z)$ の定義（実数曲面、虚数曲面の形状）に基づき決定される。この考え方のもとに、複数ヶ所にクラックが生ずるマルチクラック用の新開口関数 $H(z)$ を単独クラックの開口関数を重ね合わせるにより誘導することができた。

(b) マルチクラックも単独クラックと同じ数の解析解（基本解析関数の一般形は単独クラック、マルチクラックともに同じ）を得たが、複数個の解による重ね合わせの結果は応力形状・開口形状ともに不自然な結果となった。マルチクラックの場合、クラック相互の複雑な干渉問題が新たに生ずることになり、本研究では見いだしていない新たに解析解を探索し、これらを重ね合わせるにより自然な結果が得られると考えられる。

(4) 解の検証

計算例によって次のような結論が導かれた。

(a) 3 種類の重み関数による計算結果からは関数の相違による大きな値の変化は見られない。これは高次の関数においても同様と考えられる。

(b) 解析解を検証する一手法として FEM 解析との比較およびエネルギー解放率を求

めた。解析解と F E M 解とはモデル化状況が異なるので検討の余地が残されているが、この程度の一致で解の妥当性は示されたと考える。また、開口部、process zone それぞれが単位量進展した場合を想定したエネルギー解放率には大きな相違は現れないことが示された。この面からも一応の解の妥当性が示されたと考える。

数値シミュレーション等で破壊の過程を追跡するような場合は、重み関数を如何なるものにするべきか判断が困難であろう。しかし、エネルギー論的に破壊過程を判断しつつ進行させる場合は応力分布の形にあまりこだわる必要がないと推測される。

8.4 今後の展開

本研究では異質弾性体の未接合領域近傍の問題で、不合理な特異点無く滑らかな応力集中を与える弾性解を導き得た。この解は未接合部の先端部分で大きな開口変位を伴うので、実際には塑性域を伴って現れる変形状態の1つを現実的な応力分布の弾性解で近似的に表現できることを示したものである。しかし、解析方法は各弾性体の物理的な材料特性（破壊機構）を考慮せずに、全領域を弾性体とみなして数学的に導き得る応力関数を導くことに主眼を置いたものである。したがって解析解として表現する可能性を示し得ても実際の現象を説明し得たものではない。関数 $H_0(z)$ の重み積分において重みを変えることに依って応力集中の形状を微妙に変更し得る自由度が存在して確定的なことは決定し難いこと、 β の大きさを如何なる値とするべきかと言う問題等が重要な問題として残されている。視点を変えると重み関数の形状を変更することによって如何なる応力分布にも対応し得ることになる。

今後の展開として次のような事が考えられる。

（1）新たな基本解の探求

（a）面内集中力等の応力場を表す基本解

本研究では集中ねじり力、無限遠方で一様引張力が生じる基本解を求めたが、円形領域内での面内集中力 $P_x=1$, $P_y=1$ を作用させた場合の解を見いだす必要がある。

（b）新たな重ね合わせ解

マルチクラックの解析解は応力・開口形状ともに不自然な形状を示しているので、新たな重ね合わせ解の探求等改善の余地が残されている。

（2）実用面での検討

本研究では解析関数の妥当性がある程度示されたと考えられ、次のような実用面への展開が必要であろう。

実構造物にクラックが発生した場合、クラック位置及び開口形状の調査を放射線透過試験を利用して行い、これらより安全性、耐荷性を想定しているのが実状である。クラック開口形状の大きさ等により先端部分の応力推定を行い、クラック進展の可能性、耐荷力の算定等を行う研究が今後必要であろう。

（3）解析対象モデルへの展開

本研究では等方等質体の円形接合面上の単独クラック、マルチクラックを対象モデルとしたが、新たに次のようなモデルが考えられる。

（a）楕円形接合面上に単独クラック、マルチクラックが存在する場合

（b）直交異方性体の円形接合面上に単独クラック、マルチクラックが存在する場合

（c）円形接合面に対して放射状にクラックが存在する場合

参 考 文 献

- 1) D.S.Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, pp.100-104, 1960.
- 2) K.Z.Cho, et al: Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Eng. Mech. 110,8, pp.1174-1184, 1984.
- 3) D.J.W.Wium, et al: Hybrid Model for Discrete Cracks in Concrete, J. of Eng. Mech. 110,8, pp.1211-1229, 1984.
- 4) M.Wecharatana and S.P.Shah: A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, Cement and Concrete Research 13,6, pp.819-829, 1983.
- 5) K.Visalvanich and A.E.Naaman: Fracture Model for Reinforced Concrete, ACI Journal, Title No.80-14, pp.128-138, 1983.

謝

辞

本論文は、著者が平成4年4月に岐阜大学博士後期課程に入学後現在に至るまでの3年間に行った「円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の解析に関する研究」の成果をまとめたものである。本論文の執筆にあたって、内容はもちろんのこと、論文の構成および章立て等をはじめ細部に至るまで懇切丁寧かつ御熱心に御指導、御教示賜りました岐阜大学教授 中川建治先生には心より厚く御礼を申し上げます。

また、3年間の長きに渡り岐阜大学博士後期課程での研究の機会を賜りました佐藤鉄工株式会社の佐藤助九郎会長、佐藤恒夫社長、青柳啓一専務取締役、大石順一取締役に厚く御礼申し上げます。

そして、本論文をまとめるにあたり著者の視野を広げる上で大変貴重な御教示、御助言を賜りました岐阜大学教授 小柳 洽先生、六郷恵哲先生、岐阜大学助教授 奈良 敬先生に厚く御礼を申し上げます。

さらに、華北水利水電学院（中国）副教授 段 樹金先生、著者の所属する施設構造学講座助手の藤井康寿先生、そして当時岐阜大学大学院の学生であった八谷豊幸氏には本論文の作成にあたり御助力を賜りました。ここに厚く御礼を申し上げます。

最後に佐藤鉄工株式会社開発室の落合正利室長をはじめ室員の方々には研究業務を行うにあたり御協力を頂くと共に御迷惑をおかけしました。心より感謝いたします。

岐阜大学 河村三郎先生、井上 肇先生、宇野尚雄先生、宮城俊彦先生、森本博昭先生をはじめ土木工学教室の先生方には常日頃から心温かく見守って頂くと共に励まして頂きました。御礼を申し上げます。

このように、本論文は到底著者ひとりで成し遂げられるものではなく多くの方々の御指導、御教示、御助言、御協力があってはじめてまとめられたものであることを銘記して謝辞とします。

記 号

X, Y	: 2次元直交座標
ξ, η	: "
a	: 接合面までの半径
E	: 引張りおよび圧縮の弾性係数
G	: セン断弾性係数
ν	: ポアソン比
$Z = X + iY$: 複素変数
$Z = X - iY$: 共役複素変数
ω	: 開口部分 (角度)
β	: process zone 部分 (角度)
H_o	: 開口関数
H_{or}, H_{oi}	: 開口関数の実数曲面, 虚数曲面
ρ_m	: 重み積分関数 (2次式, 3次式, 4次式)
H_m	: 重み積分後の開口関数 (新開口関数)
H_{mr}, H_{mi}	: 重み積分後の開口関数の実数曲面, 虚数曲面
$W(z, z)$: 応力関数の一般形を示す重調和関数
Ψ_i, Φ_i	: 応力関数の一般形に含まれる複素関数
f_k	: 境界条件を満たす要素関数
α	: bielastic constant
D_{ij}	: 解析関数の一般形を示す時に用いられる任意定数
ψ_j, φ_j	: 応力場を表す基本解 (複素関数)
F_j	: 応力場を表す基本解 $F_j = Q(z) g_j(z)$
$Q(z)$: 基本解 F_j に含まれる関数
$g_j(z)$: 基本解 F_j に含まれるモード関数 ($= f_k$)
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: 添字に示す応力方向成分
U	: X軸方向の変位
V	: Y軸方向の変位
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$: 添字に示す応力方向の成分
U_r, U_θ	: 添字に示す変位方向の変位
P_x, P_y, P_t	: 添字に示す方向の分力
$\text{Sum}_X, \text{Sum}_Y$: X方向, Y方向の分力の総和
Sum_T	: ねじり方向の "

J	:	J 積分 (エネルギー解放率)
J_a	:	開口部が $\Delta\omega$ 進展した場合のエネルギー解放率
J_b	:	process zone が $\Delta\beta$ 進展した場合のエネルギー解放率
D_i	:	第 4 章では複数解を重ね合わせる時の各解に乗ずる係数
ε	:	第 4 章 極値問題を解析する時の固有値
λ_j	:	” の固有ベクトル
R	:	” の自乗和
σ_o	:	計算例にて利用する作用荷重 (ねじり力, 一様引張力)

本論文に含まれる著者の発表論文ならびに口頭発表

1. 村瀬安彦, 中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No.483/ I -26, pp.41-49, 1994.
2. Y.Murase, S.Duan and K.Nakagawa: Stress Analysis around A Circular Interface Crack between Dissimilar Media Loaded by Uniform Tension at Infinity, Eng. Frac. Mech., Vol.48, No.3, pp.325-337, 1994.
3. Y.Murase, T.Hachiya, S.Duan and K.Nakagawa: Introduction of Stress Functions around A Circular Interface Crack between Dissimilar Materials, < Eng. Frac. Mech. 投稿中 >
4. 村瀬安彦, 中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp.61-62, 1993.
5. 村瀬安彦, 八谷豊幸, 中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力解析と一考察(一様引張り), 土木学会第48回年次学術講演会 I, pp.1348-1349, 1993.
6. 村瀬安彦, 八谷豊幸, 中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の亀裂近傍の応力関数の構成法, 土木学会第49回年次学術講演会 I -A, pp.612-613, 1994.