

氏名（本籍）	菱川 洋介（岐阜県）
学位の種類	博士（工学）
学位授与番号	甲第 390 号
学位授与日付	平成 22 年 3 月 25 日
専攻	電子情報システム工学専攻
学位論文題目	Fractional calculus on parabolic Bergman and Bloch spaces (放物型ベルグマン及びブロッホ空間上の分数冪微積分について)
学位論文審査委員	(主査) 山田 雅博 (教育学部准教授) (副査) 亀山 敦 山家 光男 室 政和

### 論文内容の要旨

本論文では、 $n+1$  次元実ユークリッド空間 ( $n$  は自然数) の上半空間を定義域とした、放物型ベルグマン空間と放物型ブロッホ空間の解析について述べている。

この研究の背景として、W.C.Ramey と H.Yi の研究が挙げられる。Ramey と Yi は、上半空間上の  $p$  乗可積分かつ調和な関数からなる調和ベルグマン空間と、それに関連する調和ブロッホ空間について、解析を行っている。彼らは、これらの空間を解析するための重要な道具として、空間上の再生公式という積分によって表現される公式を与えている。ヒルベルト調和ベルグマン空間 ( $p=2$ ) 上における再生核の一意的な存在はリースの表現定理によって直ちにわかるが、彼らはヒルベルト調和ベルグマン空間上の再生核を、上半空間上のポアソン核によって具体的に特徴付けている。また、一般の次数  $p$  における調和ベルグマン空間や調和ブロッホ空間でも、ポアソン核によって再生公式を与え、解析に役立てている。一方、西尾、下村、鈴木氏は、 $\alpha$  次の放物型作用素を導入した上半空間上の放物型ベルグマン空間と放物型ブロッホ空間について研究を行っている。彼らの定義したこれらの空間は、 $\alpha=1/2$  のときに Ramey と Yi の調和ベルグマン空間と調和ブロッホ空間になっている。彼らは、放物型ベルグマン空間と放物型ブロッホ空間上の再生公式を、放物型作用素の基本解によって与え、解析を行っている。

本研究では、放物型ベルグマン空間と放物型ブロッホ空間に分数冪微分を導入し、解析を行っている。特に、考える放物型ベルグマン空間には荷重がついており、この空間の解析に分数冪微分は必要不可欠であると捉えている。本研究の主結果は、放物型ベルグマン及びブロッホ空間上の再生公式を放物型作用素の基本解の分数冪微分によって与えたことである。

本論文の構成について紹介する。第 1 章では、必要となる記号の準備、放物型ベルグマン空間と放物型ブロッホ空間の定義、及び主結果について紹介する。分数冪微分の定義やその性質については第 2 章、放物型作用素の詳しい定義やその基本解の紹介、基本解の分数冪微分に関する基本的性質については第 3 章でそれぞれ準備する。放物型ベルグマン空間に関する研究は第 4・5 章で述べる。詳細として、主結果である放物型ベルグマン空間上の再生公式の証明、及びその応用を第 4 章、放物型ベルグマン空間上の共役関数に関する内容を第 5 章で述べる。放物型ブロッホ空間に関する研究は第 6・7 章で述べる。主結果である放物型ブロッホ空間上の再生公式の証明、及びその応用を第 6 章で述べる。第 7 章では、放物型ブロッホ空間のさらなる応用として、次数  $p=1$  の放物型ベルグマン空間の共役・前共役空間を特徴付ける。

最後に、本論文は論文目録に挙げる発表論文 1、2、及び参考論文 1 を基に作成している。

### 論文審査結果の要旨

本論文では、実ユークリッド空間の上半空間で定義された放物型ベルグマン及びブロッホ空間の解析に関する研究結果が述べられている。

最も古典的なベルグマン及びブロッホ空間は、複素平面の単位円板上の正則関数から作られる関数空間であった。これらの空間の解析に関する研究は、1980 年くらいから始まった。その後、これらの空間は、高次元の単位球上への拡張や、より一般的な複素平面内領域への拡張などが行われた。さらに、1995 年くらいには、実ユークリッド空間の上半空間の調和関数から作られる調和ベルグマン及びブロッホ空間へと拡張された。そして、2005 年には、調和関数のある種の放物型方程式の解と捉え、より一般

的な放物型方程式の解空間を扱うという方向性が提唱された。これにより、放物型ベルグマン及びブロッホ空間という新しい関数空間が導入され、それらの空間についての基本的で興味深い結果が示された。放物型ベルグマン及びブロッホ空間は、 $0 < \alpha \leq 1$  なる指数  $\alpha$  に依存してその要素が異なるが、 $\alpha = 1/2$  のときに調和関数となり、 $\alpha = 1$  のときに熱方程式の解となる。すなわち、放物型ベルグマン及びブロッホ空間は、調和ベルグマン及びブロッホ空間の概念を含み、さらにより広く一般的に定義された空間である。

申請者は、放物型ベルグマン及びブロッホ空間に、時間軸方向に関する分数冪微積分の理論を導入し、これらの関数空間の解析を行った。放物型ベルグマン及びブロッホ空間の解析では、これらの空間を定義している放物型方程式の基本解の性質を研究することが重要である。本論文では、放物型方程式の基本解の分数冪導関数を定義し、その性質や評価を研究し、基礎となる結果を示した。さらに、一般の放物型ベルグマン及びブロッホ関数の分数冪導関数についても、その性質や評価を研究した。申請者は、これらの研究を基礎として、放物型ベルグマン及びブロッホ空間の解析を行い、これらの空間上の分数冪導関数を用いた再生公式を与えた。この再生公式は、これまで知られていた通常の導関数を用いた公式の美しい一般化であり、この再生公式を応用した幾つかの結果も与えられた。

放物型ベルグマン及びブロッホ空間における未解決問題として、共役関数の解析があった。調和ベルグマン及びブロッホ空間では、共役調和関数の性質に興味を持たれることが多く、これらに関する研究も行われている。これらの結果を用いて、接方向導関数のノルム評価公式などが与えられている。しかし、放物型ベルグマン及びブロッホ空間では、共役調和関数に相当する概念の定義すら出来ていなかった。本論文では、分数冪微積分の理論と上で述べた再生公式とを用いて、放物型ベルグマン空間における共役関数の定義を整合的に行うことに成功した。さらに、共役関数の性質を研究し、接方向導関数のノルム評価公式が調和の場合の一般化として与えられることを示した。これらの結果は、導入された分数冪微積分理論の重要な応用の一つである。

本論文では、放物型ベルグマン及びブロッホ空間における分数冪微積分理論の別の応用として、これらの空間の双対空間の研究結果についても述べられている。さらに、 $p=1$  のときの荷重付き放物型ベルグマン空間において、荷重が異なる場合のパナッハ空間同型写像の対応関係についても明らかにしている。この対応関係は、調和ベルグマン及びブロッホ空間においても知られていなかったことである。

上で述べたこれらの研究結果は、査読付きの国際的な学術雑誌 1 編で公表され、また別の 1 編で公表されることが決定しており、博士論文として十分価値あるものと認められる。

### 最終試験結果の要旨

申請者が確立した、放物型ベルグマン及びブロッホ空間における分数冪微積分の理論は、各々の空間における再生公式を与え、さらには共役関数の解析に応用されている。最終試験においては、これらの研究結果の意義や重要性についての十分な説明があった。また、これらの研究結果は、査読付きの国際的な学術雑誌 1 編で公表され、また別の 1 編で公表されることが決定している。以上より、学位論文審査委員会では、本申請は十分に学位授与に値するものであり、合格と判定する。