

学位論文

直多角形アートギャラリー問題に関する研究
A Study of Rectilinear Art Gallery Problems

1999年1月

指導教授 後藤 宗弘

岐阜大学大学院工学研究科電子情報システム工学専攻

糟谷 咲子
Sakiko Kasuya

目次

| | | |
|-------|-----------------------------|----|
| 1 | 本論文の目的 | 1 |
| 2 | アートギャラリー監視問題 | 3 |
| 2.1 | 一般的なアートギャラリー監視問題 | 3 |
| 2.1.1 | はじめに | 3 |
| 2.1.2 | Chvátal の証明 | 4 |
| 2.1.3 | Fisk の十分性の証明 | 5 |
| 2.2 | 直多角形ギャラリーの監視問題 | 8 |
| 2.2.1 | はじめに | 8 |
| 2.2.2 | Kahn, Klawe, Kleitman らの証明 | 8 |
| 2.2.3 | O'Rourke の L 型領域分割アルゴリズム | 8 |
| 2.3 | その他のアートギャラリー問題 | 14 |
| 2.3.1 | 視程 (視界) による制限 | 14 |
| 2.3.2 | 多角形の形状による制限 | 14 |
| 2.3.3 | 監視員の種類による制限 | 16 |
| 2.3.4 | その他の監視問題 | 16 |
| 2.4 | まとめ | 19 |
| 3 | 視角に制限のある監視員の配置問題 | 20 |
| 3.1 | 舞台照明問題 | 20 |
| 3.2 | 視角 90 度の監視員の直多角形ギャラリーへの配置問題 | 21 |
| 3.2.1 | はじめに | 21 |
| 3.2.2 | Abello らの証明 | 23 |
| 3.3 | 長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム | 26 |
| 3.3.1 | はじめに | 26 |
| 3.3.2 | 長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム | 28 |
| 3.4 | まとめ | 35 |
| 4 | 衝立てのある直多角形の監視問題 | 36 |
| 4.1 | 視角 90 度の監視員の配置問題 | 36 |
| 4.1.1 | はじめに | 36 |
| 4.1.2 | 十分性の検証 | 38 |
| 4.1.3 | 必要性の検証 | 41 |
| 4.1.4 | 衝立ての位置による補正 | 45 |
| 4.1.5 | アルゴリズム | 47 |
| 4.2 | 視角 360 度の監視員の配置問題 | 49 |
| 4.2.1 | はじめに | 49 |
| 4.2.2 | 十分性の検証 | 49 |

| | | |
|-------|-------------|----|
| 4.2.3 | 必要性の検証 | 54 |
| 4.2.4 | 衝立ての配置による補正 | 54 |
| 4.2.5 | アルゴリズム | 55 |
| 4.3 | まとめ | 57 |
| 5 | 結びと今後の課題 | 58 |
| 5.1 | 結び | 58 |
| 5.2 | 今後の課題 | 59 |
| | 謝辞 | 60 |
| | 参考文献 | 61 |

図目次

| | | |
|----|---|----|
| 1 | $n = 4, 5, 6$ の多角形に対する監視員配置例. | 4 |
| 2 | Chvátal のくし型図形. | 5 |
| 3 | 多角形の三角形分割. | 6 |
| 4 | 3 色塗り分け. | 6 |
| 5 | n 辺直多角形の例. | 9 |
| 6 | $\lfloor n/4 \rfloor$ 人が必要な例. | 9 |
| 7 | 長方形 (a) と L 型図形 (b). | 10 |
| 8 | $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員を必ず必要とするギャラリの例. | 11 |
| 9 | 定理 1 の証明の説明図. | 12 |
| 10 | r が偶数で, R, L ともに奇数に分割できないギャラリー. | 12 |
| 11 | 星型多角形. | 15 |
| 12 | スパイラル型多角形. | 15 |
| 13 | 単調型直多角形. | 15 |
| 14 | 可動監視員の種類. | 16 |
| 15 | すべてのコーナに監視員を配置しても全体が監視できない例. | 21 |
| 16 | $n=10, r=3$ 直多角形への監視員配置例. | 22 |
| 17 | 水平奇数カットにより分割されたギャラリーに対応する木. | 24 |
| 18 | 補助線により, リフレクスを減らす手順. | 24 |
| 19 | 監視員の配置例. | 27 |
| 20 | 階段図形. | 28 |
| 21 | 条件を満たす 4 個のノードを発見できる図. | 30 |
| 22 | 図 21 の各々に対する監視員の配置法. | 31 |
| 23 | 説明図. | 33 |
| 24 | 説明図. | 34 |
| 25 | 例. | 35 |
| 26 | 次数 1, 2, 3, 4 のノードの例. | 37 |
| 27 | 衝立ての例. | 37 |
| 28 | サブギャラリーへの分割. | 38 |
| 29 | 木を囲む自然な直多角形. | 39 |
| 30 | 衝立てが壁に接している場合. | 39 |
| 31 | ノードの次数 1, 2, 3, 4 の木を囲む直多角形. | 40 |
| 32 | $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる 1 例. | 42 |
| 33 | くし型ギャラリー. | 42 |
| 34 | $m = 4v, 4v + 2$ の場合の衝立ての例. | 42 |
| 35 | 任意の m, n に対して $g = \lfloor (n+m)/4 \rfloor$ となる例. | 43 |
| 36 | 衝立て群. | 43 |
| 37 | $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (1). | 44 |

| | | |
|----|---|----|
| 38 | $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (2). | 44 |
| 39 | $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (3). | 45 |
| 40 | $n = 4u + 2, m = 4v + 2$ の場合. | 45 |
| 41 | 一直線上に並ぶ複数の単純衝立てが存在する場合. | 46 |
| 42 | 長方形分割によって分割されるサブギャラリーの壁上に衝立てがある場合. | 47 |
| 43 | 視角 360 度の監視員の配置位置. | 50 |
| 44 | 監視員を増やさない衝立ての配置例 (1). | 50 |
| 45 | 監視員を増やさない衝立ての配置例 (2). | 51 |
| 46 | 監視員を増やす衝立ての配置例. | 51 |
| 47 | 複数の衝立ての配置例. | 52 |
| 48 | 複数の衝立てのまとめ例 (1). | 52 |
| 49 | 複数の衝立てのまとめ例 (2). | 53 |
| 50 | 複数の衝立てのまとめ例 (3). | 53 |
| 51 | 複数の衝立ての配置例. | 53 |
| 52 | 必要な場合の例. | 54 |

表目次

| | | |
|---|--------------------|----|
| 1 | これまでに得られている結果のまとめ. | 18 |
|---|--------------------|----|

1 本論文の目的

n 個の辺で構成された多角形の内部を点光源でくまなく照射,あるいは監視員によって監視する際,何個の光源あるいは何人の監視員が必要かを問う問題は,一般にアートギャラリー監視問題とよばれている.この問題は文字通り実際のギャラリーなどに,監視員や監視カメラを配置して最小人数でくまなく内部を監視する配置を考慮する際に応用できる.また,照明により内部をくまなく照らすためのライトの配置を考える場合などにも応用できる.

ギャラリーを構成する多角形が一般の多角形の場合には, $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員(点光源)が必要でありかつ十分であることが証明されている.ただし $\lfloor x \rfloor$ は実数 x の整数部分である.また,多角形が互いに直交する辺で構成される,いわゆる n 辺直多角形である場合には, $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員が必要かつ十分であることが証明されている.

この他にもアートギャラリー監視問題は,現在,多種多様な制限を付加された条件の下で研究されている.本研究もまた,監視員の視覚やアートギャラリーの形にいくつかの制限を加えたアートギャラリー監視問題について,監視員の配置問題を考察することを目的としている.

本論文では,特に視野に制限を加えた条件下での配置問題について考察した.実際,監視員やライトを配置する上で,その視界が制限され妨げられることは多く起こることであり,監視員配置問題を実用化する際に,このような制限の下で配置を考えるのは,工学的に有意義なことであると思われる.

本論文では,まず2章においてアートギャラリー監視問題の定義と,種々の条件の下で得られている従来の結果,およびその証明の概要について述べる.アートギャラリー監視問題とは,どのようなことがらを対象にするのかという問題の定義と,従来得られている結果をまとめることは,本論文ではどのような対象について考察しているのかを明らかにし,本論文で明らかにされた事柄の位置付けをするために役立つとともに,それ以下に続く議論の基礎にもなる.

次に3章では視角に制限のある監視員の配置問題について述べる.一般的なアートギャラリー監視問題では,監視員は1度に全方位を監視できるものとし,その視角は360度であることを前提としている.しかし,実際の監視範囲が360度であることは,難しいと思われる.よって,視角に制限のある監視問題について,その背景と現在までの研究成果を述べた上で,直多角形ギャラリーに視角90度の監視員を配置する監視問題の証明と,できる限り少ない人数の監視員を配置することも考慮し,壁に $\lfloor n/4 \rfloor$ 人以下の監視員を具体的に配置するアルゴリズムを与える.

4章では,ギャラリー内に障壁が存在し,視界が妨げられる場合について述べる.ギャラリー内に衝立てなどが存在して,監視員の視界が妨げられることもまた監視問題の結果を実際の配置に利用する際に多く起こることであるから,

このような問題を考察することは有用である。ここでは特に直多角形ギャラリー内に、衝立てが壁に平行または垂直に配置される直衝立てが存在する場合について考察する。

まず初めに 4.1 節で視角 90 度の監視員を、衝立てのある直多角形ギャラリーに配置する問題について考察し、必要十分な監視員の人数が $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ であることを示す。ただし、 $m = 4p + 2q$ であり、衝立てを木とみたとき木の次数 4 のノードの個数を p 、それ以外のノードの個数を q としている。さらに衝立ての配置によっては、必要十分な監視員数より少ない人数で監視できる場合があるので、そのような場合を挙げ、少ない人数を配置して監視する方法について考察し、できる限り少ない人数で監視することができるように監視員を配置する手順を与える。

次に 4.2 節で視角が制限されない監視員を、同様に衝立てのある直多角形ギャラリーに配置する問題について考察し、視角 90 度の場合との違いについて述べる。特に衝立てが単純衝立てである場合について注目し、このとき監視員の視角が 360 度であることによって 90 度の場合に比べ、より少ない人数で十分であることを示し、単純衝立てが k 個存在するとき必要十分な監視員の人数が $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor$ であることを示す。さらに、視角 90 度の場合と同様にできる限り少ない人数で監視することができるように監視員を配置する手順を与える。

以上、特に 3 章、4 章は本論文で新しく得られた結果である。

最後に 5 章では、本論文の結果をまとめ、今後に残された問題のいくつかを述べている。

2 アートギャラリー監視問題

2.1 一般的なアートギャラリー監視問題

2.1.1 はじめに

アートギャラリー監視問題とは、どのようなことがらを対象にするのか、また、本論文ではどのような対象について考察しているのかを明らかにし、本論文で明らかにされた事柄の位置付けをするために、ここでは問題の定義と従来得られている結果をまとめて紹介する。

アートギャラリー監視問題は、1973 年に Victor Klee により提出された [2]。その一般的な問題は、 n 個の辺で構成された多角形領域の内部をアートギャラリーに見立てて、点光源あるいは監視員を配置し、点光源でくまなく照射、あるいは監視員により監視する際、何個の光源あるいは何人の監視員が必要かを問う問題であると定義される。

この問題は文字通り実際のギャラリーなどに監視員や監視カメラを配置して、最小人数でくまなく内部を監視する配置を考慮する際に応用できる。また、照明により内部をくまなく照らすためのライトの配置を考える場合などにも応用できる。

最初に必要な言葉を定義する。 n 個の互いに交差しない辺で構成される多角形を単純 n 多角形 (n simple polygon) と呼ぶ。多角形の辺により平面は、内部 (interior) と外部 (exterior) の 2 つの部分に分けられる。このうち多角形の内部をギャラリーという。単純 n 多角形の内角のうち 180 度より大きな角のものをコンケーブ (concave)、それ以外のものをコンベックス (convex) といい、両者をまとめて一般に頂点 (vertex) という。単純多角形は、コンベックスだけで構成されるコンベックス多角形と、コンケーブも存在する多角形とに二分される。

監視員 (guard) は、ギャラリー内の任意の点に配置されてギャラリー内を監視する。ここで内点 x から内点 y が可視である (監視可能である) とは、線分 xy が多角形の辺と交差しないときをいう。ただし、線分 xy と多角形の頂点が接するときは、頂点は視界をさえぎらないものとする。監視員は、固定された点であり、静止している。また、監視員はお互いに他の監視員の視界をさえぎらない。監視員の配置場所が特にギャラリーの頂点および壁の上だけに制限される場合を頂点監視員 (vertex guard) という。これに対し、配置場所に制限が無く任意の点に配置される監視員、すなわちギャラリーの壁と頂点ならびにギャラリー内部の任意の点に配置できる監視員を特に点監視員 (point guard) ともいう。監視員が 1 度に監視することのできる視野の角度を視角という。監視員は一度に全方位を監視できるものとし、その視角は 360 度である。

また、監視員数が必要である (necessary) とは、ある多角形に対して少なくともこれだけ必要であるという最低数であり、十分である (sufficient) と

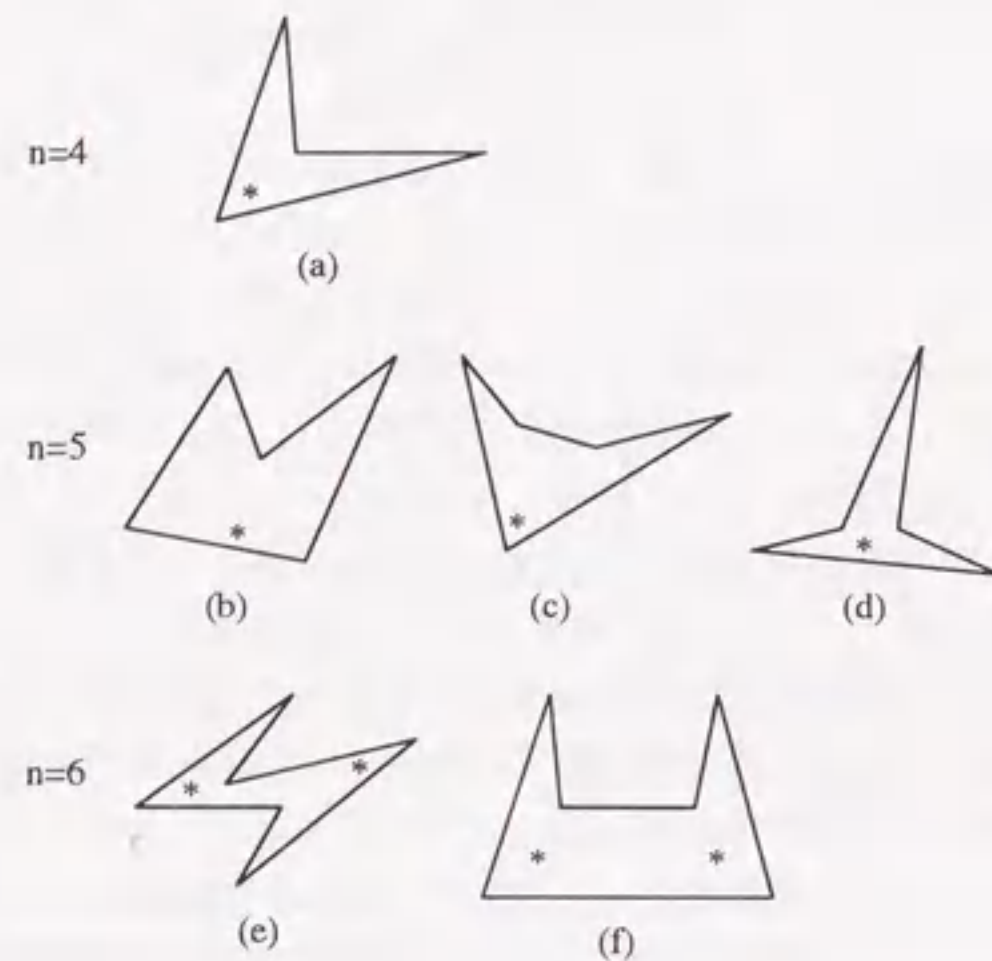


図 1: $n = 4, 5, 6$ の多角形に対する監視員配置例.

は、変数が n の、どんな形の多角形に対しても常に十分である数をいう。

一般的なアートギャラリー問題は、任意の多角形の場合に対し 3 色問題などに関連した組み合わせ問題として議論されており、 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員が必要にして十分であることが証明されている [1], [2]. ただし、 $\lfloor x \rfloor$ は実数 x の整数部分である。

2.1.2 Chvátal の証明

Vasek Chvátal は形状にも監視員の視角にも制限のない一般的なアートギャラリー問題に対し初めて以下のような解を与えている [2].

定理 1 Chvátal の定理

任意の単純 n 多角形に対し $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員が必要にして十分である。

以下にその証明の概略を述べる。直 n 多角形に配置される監視員数を $G(n)$ と表す。明らかに三角形は唯 1 人の監視員を要し、 $G(3) = 1$ である。また、四辺形は高々 1 つのリフレクスを持つのみであって、 $G(4) = 1$ である。五角形は高々 2 つのリフレクスを、六角形も高々 2 つのリフレクスを持つ。 $G(5) = 1$ 、 $G(6) = 2$ も同様に明らかである。図 1 は $n = 4, 5, 6$ の多角形に対する監視員配置の例である。図中の * は監視員の配置位置を示す

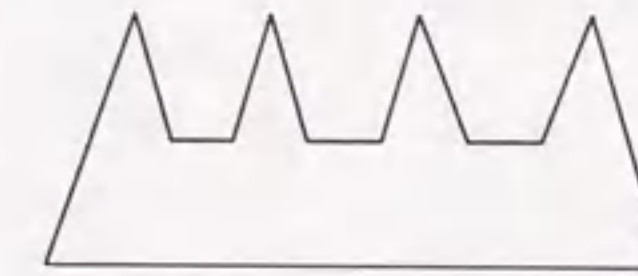


図 2: Chvátal のくし型図形.

$G(6) = 2$ の図を一般化することにより、 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人が常に必要な例を図示でき (図 2)、必要性が示される。

この図は Chvátal のくし型図形と呼ばれ、 k 本の突部を持ち、 $n = 3k$ である。突部 1 本につき 1 人の監視員を必要とするため、 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人が必要となる。

十分性については帰納法により証明されている。すなわち、 $n < N$ である全ての n に対し $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員が必要であることが成り立つと仮定したとき、 $n = N$ に対しても成り立つことが示されている。

2.1.3 Fisk の十分性の証明

Chvátal の十分性の証明は複雑で、多くの場合分けが必要なものであった。その後 1978 年に Fisk によって非常にシンプルな証明が与えられた。Fisk の証明は対角線による多角形の三角形への分割を用いており、非常に重要な概念を含んでいる [2], [3].

多角形の対角線とは、その多角形の隣り合わない 2 つの頂角間の線分であり、2 つの頂角が互いに他の一方を監視できるのは明らかである。互いに交わらない対角線により、どんな多角形も複数の三角形に分割できることが証明されている。このような分割を多角形の三角形分割 (triangulation) という。一般に与えられた多角形に対して何通りかの三角形分割が存在する (図 3)。この三角形分割が Fisk の十分性の証明の第一歩である。

次に、この三角形分割により得られた図をグラフとみなす。グラフの弧 (arc) は多角形の辺と対角線であり、節 (node) は多角形の頂角である。グラフの k 色塗りわけとは、弧によって接続されるどの 2 つのノードも同色でないよう、グラフのノードに色を割り当てることである。Fisk は、どんな三角形分割グラフも 3 色で塗り分けられることを主張した。

三角形の頂角は弧によって結ばれ、隣り合うノードには別の色が割り当てられていることから、三角形分割グラフの各々の三角形の頂角は全て、その異なる 3 色が割り当てられていることになる (図 4)。

第三に、得られた 3 色塗り分けされた頂点のうち、どれか使用数が最も少ない色の頂角に監視員を配置する。各々の三角形の頂角は全て、その異なる 3 色が割り当てられていることから、そのうちの 1 色を選べば全ての三角形

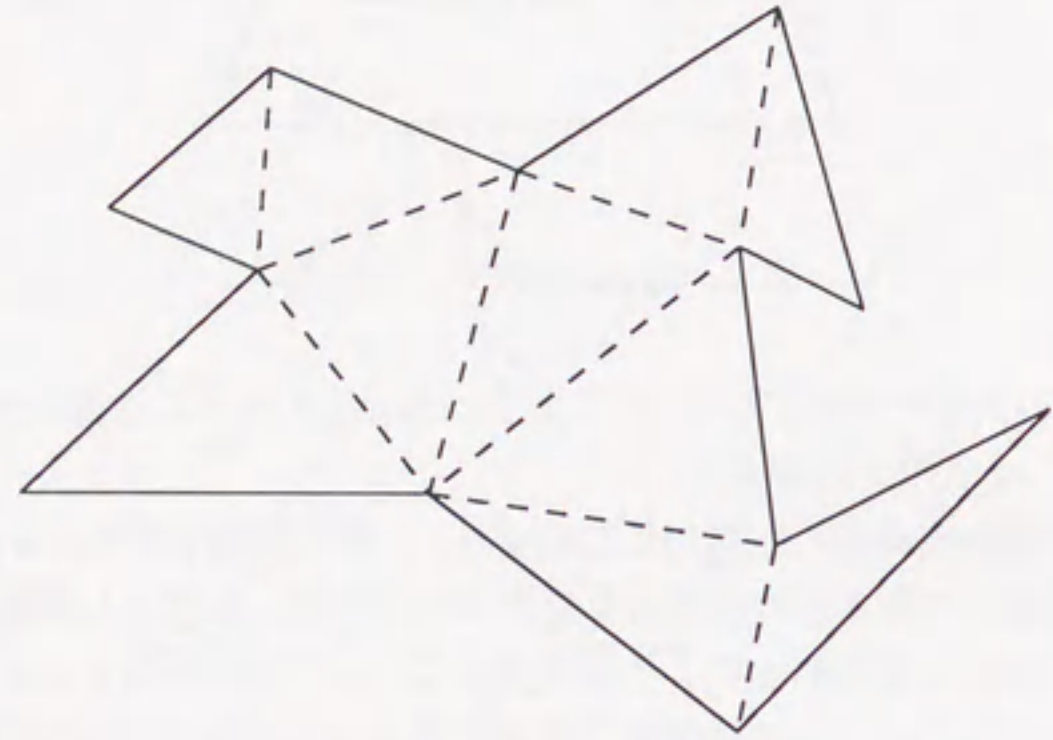


図 3: 多角形の三角形分割.

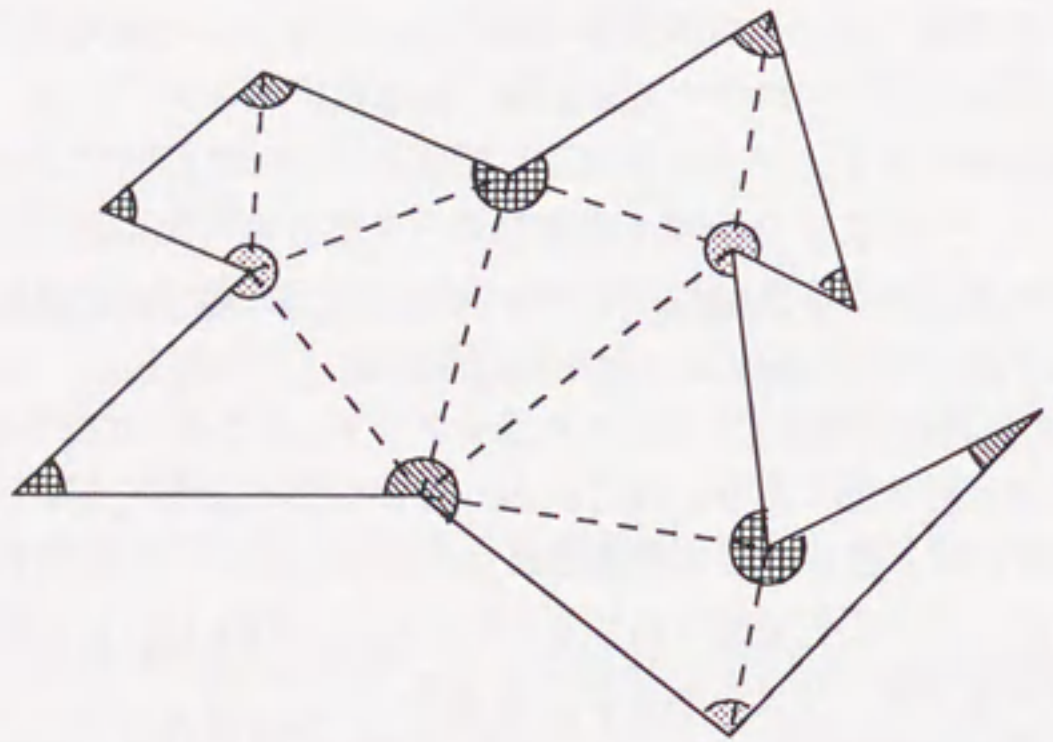


図 4: 3色塗り分け.

は必ずその色の頂角を持つ. よってそこへ監視員を配置すれば, 多角形領域内の全てを監視する事ができる.

最後に n 個の頂角が k 種類に分類されるとする. 分類された各々の種類に属する数 n_i が全て n/k 個より大きいとすると, その総和は n より大になる. よって, 少なくともどれか 1 つの種類の個数は, 必ず n/k 個より小さくなる. すなわち, 3 色に塗り分けられた頂角のうち, 使用数が最少な色の頂角は必ず $n/3$ 個より少なくなる. どの色を選んで監視員を配置しても領域内の全体を監視する事ができるのだから, その $n/3$ 個より少ない色の頂角に配置しても監視できる. 以上の議論から $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で十分であることが証明される.

以上が Chvátal と Fisk の証明の概要である.

2.2 直多角形ギャラリーの監視問題

2.2.1 はじめに

アートギャラリー問題とそれに関連する多角形分割問題の中の重要な一分野に直多角形ギャラリーの監視問題がある。

以下、本論文の主題にも関係しているため、直多角形ギャラリーの議論に必要な言葉の定義を与える。互いに直交する n 個の辺で構成される多角形を単純 n 直多角形 (simple rectilinear polygon with n edges) と呼ぶ (図 5 参照)。

単純 n 直多角形に含まれる内角は 90 度か 270 度である。前者をコーナー (corner), 後者をリフレックス (reflex), 両者をまとめて頂点 (vertex) という。

ギャラリーが単純 n 直多角形の場合には、必要十分な監視員の数が、 $\lfloor n/4 \rfloor$ 人であることが知られている [1], [2]。すなわち、直多角形に制限されたギャラリーでは一般の多角形のギャラリーの $3/4$ の監視員で監視可能となる。さらに、ギャラリーに h 個の穴がある場合でも、ギャラリー全体の辺数および穴を構成する辺数の総数が n であるとき $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の点監視員の数が必要にして十分であることが示されている [7], [9]。

これらは、監視員または照明の視角が点光源の場合と同様に、全方位に 360 度まで許される場合についての結果である。

2.2.2 Kahn, Klawe, Kleitman らの証明

直多角形ギャラリーの監視問題は、1980年に Kahn, Klawe, Kleitman (以降 KKK と書く) により最初に提案され、証明されている [1], [2]。必要性については Chvátal のくし型図形の直多角形版により示される (図 6)。

十分性については、Fisk の一般の多角形の三角形分割と同様に直多角形の分割を用いて証明される。すなわち、全ての直多角形は対角線によりコンベックスな四辺形に分割される。この結果得られるグラフは 4 色に塗り分けられるので、その頂点のうち、色の使用頻度の最も少ない頂点に監視員を配置すれば領域内部全体を監視可能となり、以下の定理を得る。

定理 2 KKK の定理

任意の単純直 n 多角形に対し $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員が必要にして十分である。

2.2.3 O'Rourke の L 型領域分割アルゴリズム

KKK らの十分性の証明は決して簡単なものではなく、複雑な議論を要する。1983年、O'Rourke は多角形をコンベックス四辺形ではなく L 型領域に分割する、よりシンプルな証明法を示した [1], [2]。

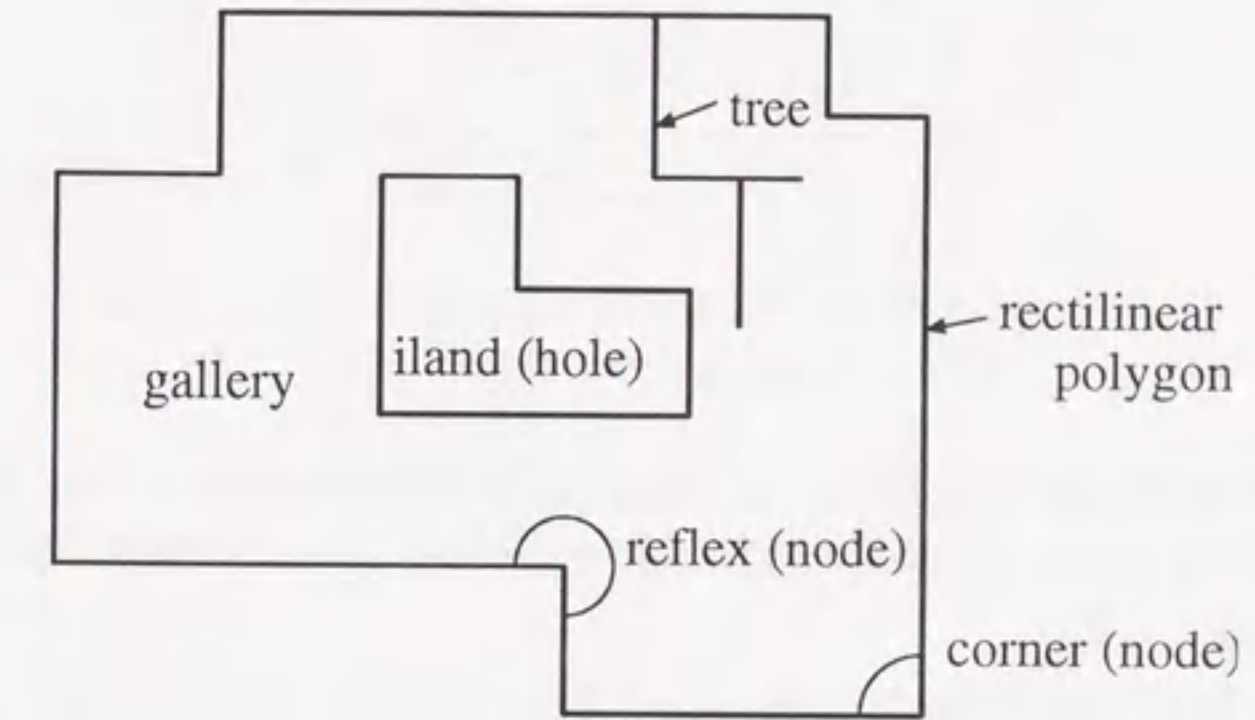


図 5: n 辺直多角形の例.

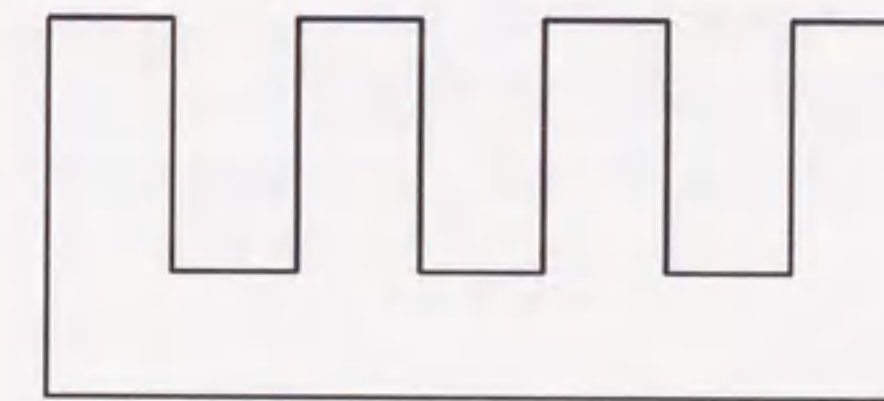


図 6: $\lfloor n/4 \rfloor$ 人が必要な例.

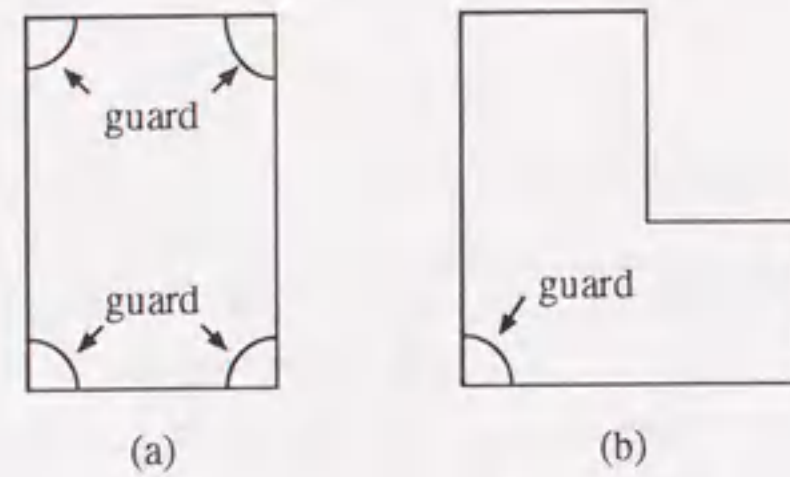


図 7: 長方形 (a) と L 型図形 (b).

以下にその証明の概略を述べる. 最初に必要な言葉の定義を与える. ここで使用される証明の手順は, 次の章以降で述べられる本論文の議論の展開の重要な基礎となる.

図 7 に示された領域 (a), (b) をそれぞれ, 長方形, L 型領域という. これらは図に示されたコーナーに監視員を配置すればそれぞれ 1 人の監視員で監視可能であることに注意する.

辺と頂点を合わせて壁という. リフレックスを始点とし伸長した補助線のなかには, リフレックスから壁にいたるものとリフレックスからリフレックスへ至るものがある. 前者を α 補助線, 後者を β 補助線と呼ぶ. 特に水平 (H), 垂直 (V) であることを明示する必要がある場合には, V- α , H- α , V- β , H- β 補助線などと書くことにする. 監視員はギャラリーの任意の場所へ配置できる point guard であるとする.

O'Rourke は, 水平あるいは垂直補助線と辺 (ギャラリーの壁) を自由に使って, ギャラリー内部を $\lfloor n/4 \rfloor$ 個の L 型領域, あるいは四角形に分割し, その各々に 1 人の監視員を配置することでギャラリー内をくまなく監視する事ができることから $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員が必要十分であることを示した.

以下が O'Rourke の示した結果とその証明である.

補助定理 1 r 個のリフレックスをもつ n 辺直多角形では

$$n = 2r + 4$$

が成立する.

定理 3 直 n 辺多角形のギャラリーにおいて, 一般に必要なとされる監視員の数は, $\lfloor n/4 \rfloor$ である. したがって

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2r+4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \quad (1)$$

となる.

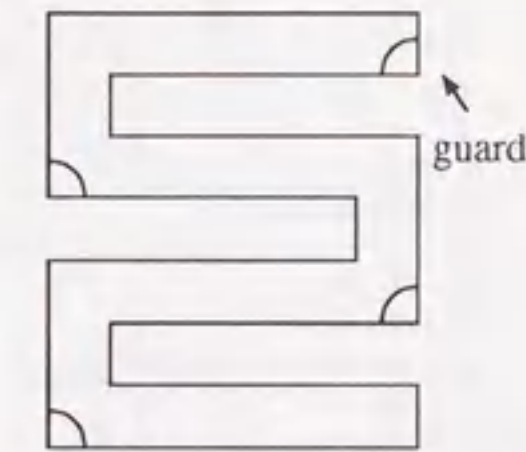


図 8: $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員を必ず必要とするギャラリーの例.

この結果は, ギャラリーが必ずしも島を含まない単純直多角形であることを要求していないが, ここでは単純 $n = 2r + 4$ 直多角形の場合について, 証明の概略を述べる.

証明 $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員が必要なギャラリーの例は, 容易に示すことができる (図 6, 図 8 参照).

よって十分性について以下に述べる. 与えられた n 辺ギャラリー領域 (r 個のリフレックスを含む領域) を, リフレックスから壁に水平あるいは垂直に伸び壁あるいはリフレックスに至る補助線で分割してゆき, $\lfloor r/2 \rfloor$ 回分割したときに, 全体がちょうど $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ 個の L 型領域あるいは四角形に分割されていれば, そのそれぞれは 1 人の監視員で監視できるから, この定理は証明されたことになる. ここで, 各リフレックスから補助線を引くことは, そのリフレックスが見かけ上なくなり, 壁のようになることであり, この補助線を引いて L 型領域, 四角形を構成するとき, 新しくリフレックスを作らなければよい. 以下の証明プロセスでは, 等価的に 2 つのリフレックスのうち 1 つは残し, 1 つは見かけ上消し去って, 1 つの L 型領域にするか, あるいは 2 つ共消し去って四角形を構成していることに注意する.

リフレックスを始点とする補助線による分割を次の手順で行う. まず 1 本の補助線でギャラリーを分割するとき, 分割されたそれぞれの領域に含まれるリフレックスの数を R, L とするとき, 一般には

$$r - 1 = R + L$$

が満たされる. すなわち, 1 つのリフレックスを消去して, 2 分割したから当然である. いま r が奇数であるとすると, $r - 1$ は偶数であるから, R, L がともに奇数になるように補助線を引くことにする (図 9 の fh, di). L, R がともに偶数になるようにしか補助線が引けないとき (図 9 の ch) には, 図 9 の gb, de のように, リフレックスからリフレックスへ達する補助線が引けるから, どちらか一方が奇数になるよう 2 つのリフレックスを消去して分割す

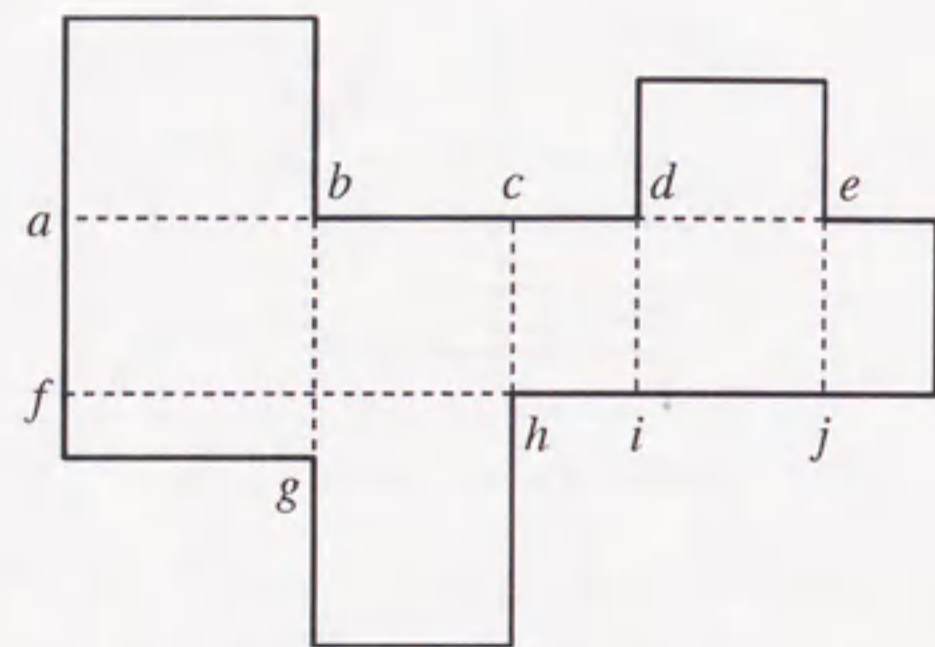


図 9: 定理 1 の証明の説明図.

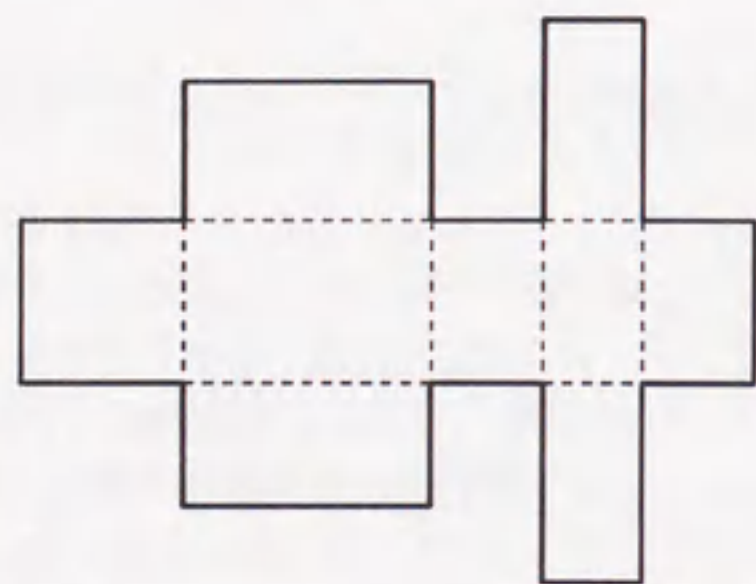


図 10: r が偶数で, R, L ともに奇数に分割できないギャラリ.

る. すなわち $r-2$ は奇数であるから, 奇数と偶数の対になるようにする.
 r が偶数の場合には, R, L をともに奇数にすることはできないので, いずれかが奇数になるように補助線で分割する.

しかし, どのリフレックスを選んで補助線を引いても壁に至る補助線が引けないときがある. 例えば図 10 のような場合である. この場合には, 2 つのリフレックスを消去することにより, R, L ともに偶数になるように分割する. この場合は, $r-2 = R+L$ である. 分割されたギャラリをサブギャラリと呼ぶ. この分割法をまとめると次のようになる.

ギャラリ分割プロセス

1. 与えられたギャラリあるいはサブギャラリのリフレックス数が奇数であるとする.

補助線によりともに奇数のリフレックスを含むサブギャラリに 2 分する.

そのような分割ができないときには, 2 つのリフレックスを補助線で結ぶことにより, 2 つのリフレックスを消去して, 偶数のリフレックスを含むリフレックスと奇数のリフレックスを含むサブギャラリに分割する.

2. 与えられたギャラリあるいはサブギャラリのリフレックス数が偶数であるとする.

補助線により奇数のリフレックスを含むサブギャラリと偶数のリフレックスを含むサブギャラリに分割する.

奇数個のリフレックスを含むサブギャラリができないときは, 2 つのリフレックスを消去して, 共に偶数のリフレックスを含むサブギャラリに分割する.

この操作をサブギャラリが図 2 に示された 2 種の図形のいずれかになるまで繰り返す.

図 7 の (a) が得られるのは最後に偶数個のリフレックスを含むサブギャラリであることに注意する. この分割アルゴリズムによって, 分割 1 回につき少なくとも 1 つのリフレックスが減少し, 最後に最悪の場合図 7 の (b) の図形のみで分割されて終了するときに最も多くのサブギャラリを得る場合なので, サブギャラリの数は $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ となり, 式 (1) が得られた. 以上の議論により $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ 人の監視員で十分であることが示され, 定理 3 が証明された.

2.3 その他のアートギャラリー問題

前節までに一般的なアートギャラリー問題ならびに直多角形ギャラリーに対する監視問題の定義と結果、その証明の概要を述べた。アートギャラリー問題は他にも種々の制限の下で議論され、表1のような結果が知られている [2], [4], [7], [8], [9], [10], [11]. 表中の n は辺の数または頂角の数であり、 r はリフレクス角の数、 h は穴の数である。

2.3.1 視程 (視界) による制限

視程 (視界) (visibility) による制限とは監視員が要求される監視範囲のことである。前節までに述べた問題では多角形の内部領域を監視することを目的としている。これに対し Derick Wood と Joseph Malkelitch は、ほぼ同時に興味深い問題を提案した。

ひとつは要塞問題 (Fortress Problem) と呼ばれ、多角形の外部を監視する問題であり、もうひとつは刑務所中庭問題 (Prison Yard Problem) と呼ばれ、多角形の内部と外部の両方を同時に監視する問題である。刑務所中庭問題に対しては、監視員の必要十分数は推量されているのみであって証明されおらず未解決問題として現在研究されている。

2.3.2 多角形の形状による制限

監視する領域としては、前節までにあげた一般的な多角形ならびに直多角形の他にも多種の形状について考察されている。特に重要なものとしては、星 (star) 型、スパイラル (spiral) 型、単調 (monotone) 型がある。

星形多角形とは核 (kernel) と呼ばれる領域内部のある1点から領域内の全体を監視可能な多角形をいう (図11)。

スパイラル型多角形とは、高々1つのリフレクス連鎖 (reflex chain) しかもたない多角形をいう (図12)。ここでリフレクス連鎖とは隣り合う頂角がリフレクスであるような頂角が2つ以上連続する頂角の組を言う。図12では、4個の連続するリフレクスで構成されるリフレクス連鎖が1組のみ存在する。

単調型 (monotone) 多角形とは、ある方向に固定されたどんな直線に対しても、同一直線に2箇所以上交わることのない多角形をいう。特に単調型直多角形は水平、垂直方向の任意の直線に対して2箇所以上交わらない図形である。図13 (a) は単調型直多角形である。いっぽう図13 (b) は、水平方向の直線に対して、2箇所で交わるため単調型直多角形でない。

領域内部に穴 (島) のある多角形についても研究されている。この問題は、アートギャラリー問題の分野でも有名な現在研究中の1分野である。多角形は、

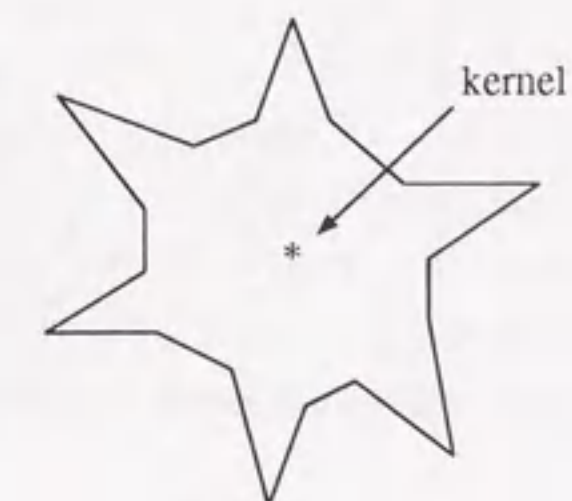


図 11: 星型多角形.

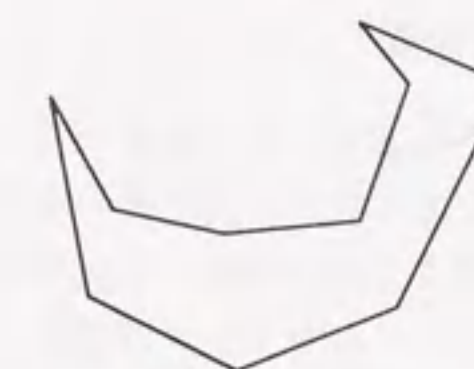


図 12: スパイラル型多角形.

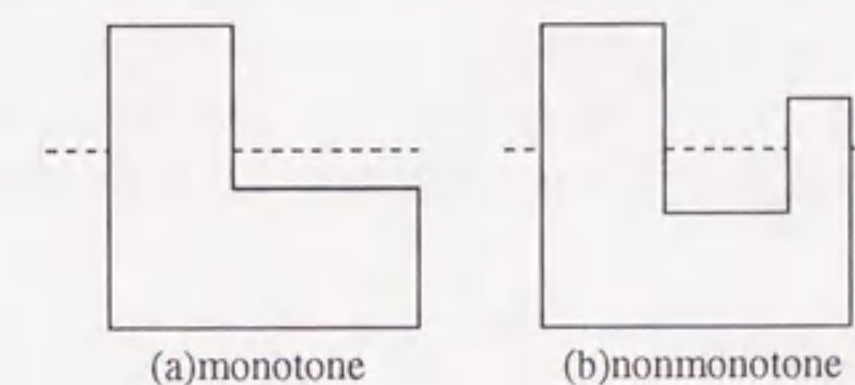


図 13: 単調型直多角形.

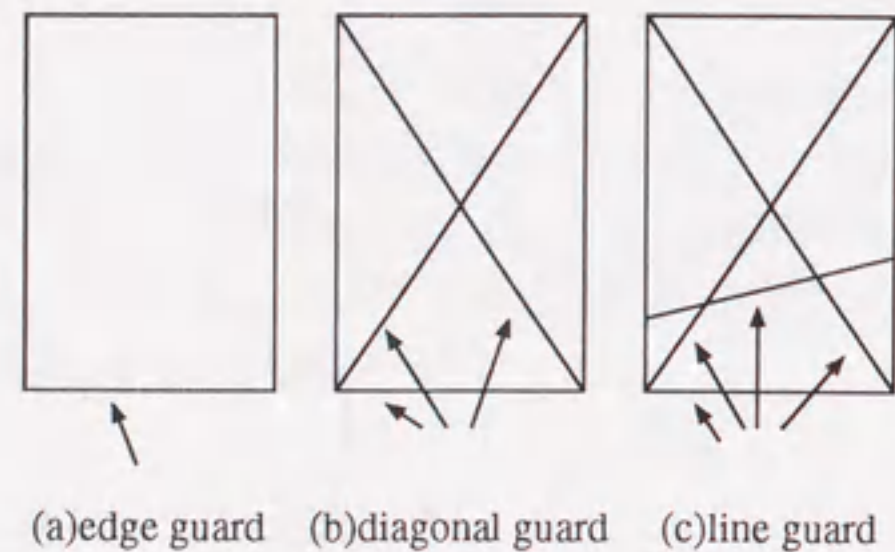


図 14: 可動監視員の種類.

いくつかの穴である多角形領域を内部に持つ。ギャラリーと穴は交わらず、穴の中は空である。穴のある場合についての監視問題は未解決であり、特別な条件の下で現在多くの結果が提出されているが、引き続き研究がなされている。

2.3.3 監視員の種類による制限

監視員の種類についても多種研究されている。与えられる多角形のさまざまな形状について議論するのではなく、監視員の能力を変更して配置問題を考察するという別の形の問題は Toussaint によって提案された。

最初に提案された一般的なアートギャラリー問題における監視員は静止して固定位置に配置されるものであった。point guards は多角形領域内部の任意の点に固定して配置され、vertex guards は多角形領域の境界上に固定して配置される。

これらに対し Toussaint の提案した監視員は領域内部の線分を巡回することができ、可動監視員 (mobile guards) と呼ばれる。可動監視員は巡回できる可動性の程度によって幾何的に 3 種類に分類される (図 14)。

edge guards は多角形の辺上 (端点も含む) を巡回する。diagonal guards は辺または内部の対角線上を巡回する。line guards は領域内に完全に含まれる線分上を巡回する。これらの監視問題は現在、部分的な場合のときのみ解明されており一般的な問題としては未解決問題として研究が続けられている。

2.3.4 その他の監視問題

これまで述べた他にも多種多様な監視問題が提案され議論されている。たとえば多角形で表される領域内すべての平面を監視する一般的なアートギャラリー監視問題に対し、いくつかの線分が存在するときに、その線分のみを監

視する問題なども研究されている。

また、平面ではなく 3 次元の立体で表されるギャラリー内部を監視する問題もある。監視対象が 3 次元の場合については、まだほとんど解明されていない。

監視領域内部に線分や点で表される障害物が存在する場合に対する監視問題や、鏡が存在する場合の監視問題についても研究されつつある。

また、監視員ではなくサーチライトで館内に潜む賊を発見、あるいは追い詰める問題も考察されている [5], [6]。

さらに近年、監視員の視角を限定した監視問題が注目され、現在、この種の未解決問題が広く研究され多くの結果が提出されている。

表 1: これまでに得られている結果のまとめ.

| 視程 (視界) | 多角形の形状 | 穴 | 監視員 | 必要数 | 十分数 |
|---------|-----------|-----|-----------|---|---|
| 内部 | 任意 | 0 | vertex | $\lfloor n/3 \rfloor$ | |
| | | | | | r |
| | | 1 | vertex | $\lfloor (n+1)/3 \rfloor$ | |
| | | h | vertex | $\lfloor (n+h)/3 \rfloor$ | $\lfloor (n+2h)/3 \rfloor$ |
| | | 0 | diag epts | $\lfloor n/4 \rfloor$ | |
| | | 0 | edge | $\lfloor (n+1)/4 \rfloor$ | $\lfloor n/3 \rfloor$ |
| | | 0 | edge epts | $\lfloor 2n/7 \rfloor$ | $\lfloor n/3 \rfloor$ |
| | 星, 渦巻, 単調 | 0 | vertex | $\lfloor n/3 \rfloor$ | |
| | | | | | $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ |
| | 星 | 0 | line | | 1 |
| | | 0 | diagonal | | 2 |
| | | 0 | edge | $\lfloor n/5 \rfloor$ | $\lfloor n/3 \rfloor$ |
| | | | | | $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ |
| | 渦巻 | 0 | diagonal | $\lfloor (n+2)/5 \rfloor$ | |
| | 単調 | 0 | line | $\lfloor (n+2)/5 \rfloor$ | |
| | 直多角形 | 0 | vertex | $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor r/2 \rfloor + 1$ | |
| | | 1 | vertex | $\lfloor n/4 \rfloor$ | |
| | | 2 | point | $\lfloor n/4 \rfloor$ | |
| | | h | point | $\lfloor n/4 \rfloor$ | |
| | | h | vertex | $\lfloor n/4 \rfloor$ | $\lfloor (n+2h)/4 \rfloor$ |
| | | h | vertex | | $\lfloor n/3 \rfloor$ (for $h \geq n/6$) |
| | | 0 | diagonal | $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$ | |
| 外部 | 任意 | 0 | vertex | $\lceil n/2 \rceil$ | |
| | | 0 | point | $\lceil n/3 \rceil$ | |
| | 直多角形 | 0 | vertex | $\lfloor n/4 \rfloor + 1$ | |
| 内部+外部 | 任意 | 0 | vertex | $\lceil n/2 \rceil$ | $\lfloor 2n/3 \rfloor$ |
| | | | | | $\lfloor n/2 \rfloor + r$ |
| | 直多角形 | 0 | | $\lceil n/4 \rceil + 1$ | $\lfloor 7n/16 \rfloor + 5$ |
| | 線分 | 0 | point | | $\lfloor 2n/3 \rfloor$ |
| | | 0 | vertex | | n |

2.4 まとめ

以上, アートギャラリー監視問題の定義と, 種々の条件の下で得られている従来の結果, およびその証明の概要について述べた.

ここで紹介されたように, アートギャラリー監視問題は現在, 多種多様な制限を付加された条件下で研究がなされている. 次章以降では, 特に視野に制限を加えた条件下でのアートギャラリー監視問題について, 監視員の配置問題を考察する. これらは本論文で新たに得られた結果である [14], [15], [16].

3 視角に制限のある監視員の配置問題

一般的なアートギャラリー問題では監視員の視角は 360 度であって、全方向を 1 度に監視できることが前提となっていた。その後、制限された視野角を持つ静止した監視員で領域内を監視する問題が提示された [4], [12], [13]。アートギャラリー問題を実用化するには、監視範囲が 360 度であることは難しいと思われる。よって本論文でも視角に制限のある監視員の配置問題について述べる。

はじめに 3.1 節と 3.2 節で、このような視角に制限のある監視問題について、その背景と現在までの研究成果を述べる。次に 3.3 節で、本論文で新たに得られた成果である、視角が 90 度に制限された監視員を、より少ない人数で配置するためのアルゴリズムを述べる。

3.1 舞台照明問題

1992 年に Urrutia により舞台照明問題 (stage illumination problem) と呼ばれる問題が示された。この問題は、与えられた平面状の線分を床ライト (floodlight) で照明することがイメージされている。すなわち、各々の開口部のサイズが与えられている幾つかの床ライトがあり、その全てが線分に対して同一方向側の平面状に固定され、固定軸を中心にライトが回転可能であるとき、線分をくまなく照らすライトの最終的な位置を効率的に得るアルゴリズムを見つけよというものである。ここでライトの開口とは、ライトの照らすことが可能な範囲であり監視員の視角に相当する。

さらに、平面を照らす問題にも拡張され、多角形領域を舞台に見立てて床ライトによってくまなく照らすとき、開口がどれだけの床ライトが何個必要かを求める問題として定式化された。

一般の多角形では、現在まだ最小上界である必要十分な数は与えられていない。開口 180 度のライトの場合には、境界上に配置されるなら $\lfloor 3n/5 \rfloor + c$ 個、内部の任意の点に配置されるなら $\lfloor n/3 \rfloor + c$ 個で十分であろうことが予想されている (ただし c は定数)。開口 180 度のライトを内部の任意の点に配置する場合に $\lfloor 2(n-3)/5 \rfloor$ で十分であるという上限が、現在得られている最小上界である。

3.2 視角 90 度の監視員の直多角形ギャラリーへの配置問題

3.2.1 はじめに

単純 n 直多角形のギャラリーに関して、監視員の視野を 360 度ではなく 90 度に限定することは、ギャラリーが直多角形であることから自然な要求であり、実用的である。

「 n 辺の直多角形で構成される領域の内部に視角 90 度の監視員を配置し、内部の任意の点を監視できるようにするためには、何人の監視員をどのように配置すればよいか。」

という問題は、監視員をギャラリー内の任意の位置に配置することが許されるならば、すでに解決されている。すなわち、視角を限定しない場合に、 $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員が必要十分であることを証明した過程では、ギャラリー内部を $\lfloor n/4 \rfloor$ 個の L 型領域、あるいは四辺形に分割している [1]。そして、その各々に 1 人の監視員を配置することで証明を完成させている。ところが、その各々の領域は視角 90 度の 1 人の監視員でも監視可能であるから、ギャラリー全体を監視するのに視角 90 度の $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員で十分であることになる。しかも、それだけの人数が必要とされる n 辺直多角形が存在することも示すことができる。

ところが、この証明の過程で分割されて得られる L 型領域、四辺形は必ずしもギャラリーの壁に接しているわけではないので、監視員の配置される場所は、ギャラリーの中央などになってしまうこともある。

ここで実際に視角に制限のある監視員を配置する場合に、配置場所に条件があっても $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員で十分であるのかを検討する。

はじめに、コーナーのみに監視員を配置するように制限を加えたとする。しかし $\lfloor n/4 \rfloor$ 人を越えてすべてのコーナーに監視員をおいてもギャラリー全体を監視できない場合が存在するので、この制限は強すぎるということが分かる (図 15 参照)。

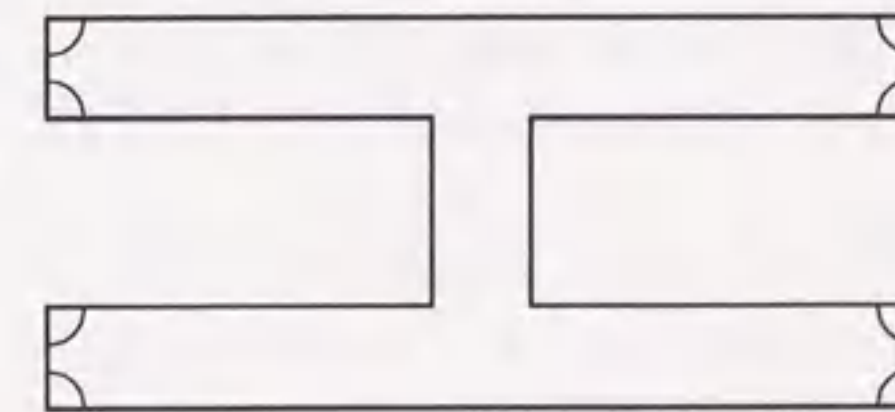


図 15: すべてのコーナーに監視員を配置しても全体が監視できない例。

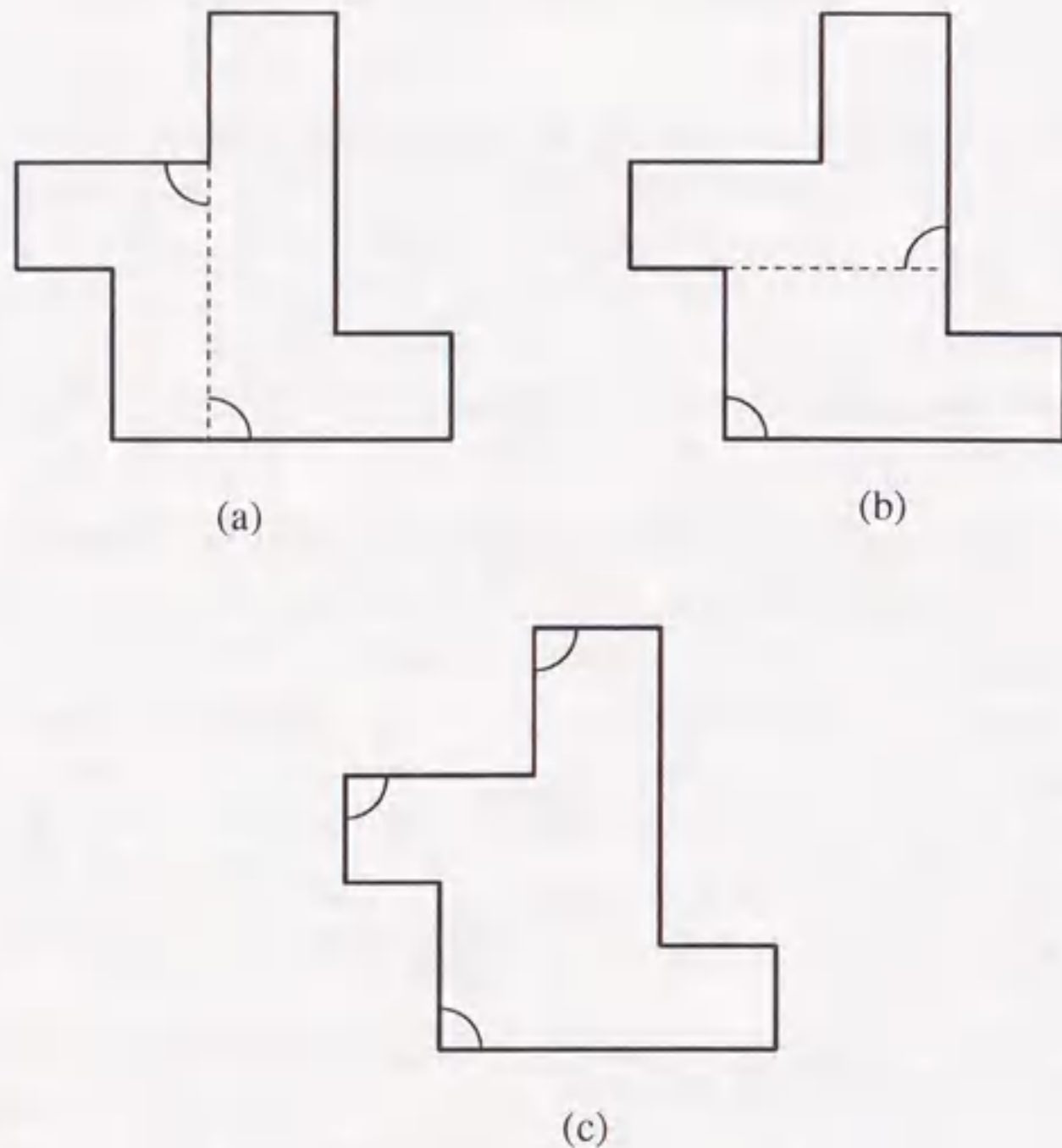


図 16: $n=10$, $r=3$ 直多角形への監視員配置例.

つぎに、コーナーのみでなくすべての頂点（レフレックスとコーナー）にのみ監視員を置く場合を考える。図 16 では $r=3$ であるから、 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ より、2 人の監視員で十分なはずであるが、頂点のみに監視員を配置できるとの制限をつけた場合には (c) のように 3 人の監視員が必要になってしまう。したがって、頂点のみに監視員を配置する条件は厳しすぎることが分かる。勿論、視野に制限のない監視員では頂点のみに配置できることが知られている [2]。そこでここでは、辺にも監視員を置くことができる場合を考察する。前述の図 16 の場合にも、(a), (b) のように壁上に配置すれば 2 人で十分である。

従って、実用性も考慮した次のように変形した問題が得られる。

問題 「 n 辺の直多角形で構成されるギャラリ領域の壁（辺または頂点）に視角 90 度の $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員を配置し、内部の任意の点を監視できるようにすることができるか。できるとすればどのように配置すればよいか。」

3.2.2 Abello らの証明

Abello らは、視角に制限のある監視員の配置について考察し以下のような結果を得た [12],[13].

定理 4 h 個の島（穴）を含む直 n 辺多角形のギャラリでは、視野を 90 度に制限された $\lfloor (n+2h)/4 \rfloor$ 人の監視員を壁に配置し、ギャラリ内部をくまなく監視することができる。この人数は必要かつ十分な値である。

系 1 上の条件の下で、島（穴）のないギャラリでは、必要十分な監視員の数は $\lfloor n/4 \rfloor$ 人である。

この結果は穴のある任意の直多角形に対し、境界（壁）上のみ監視員を配置する際に必要十分となる監視員数を初めて与えたものであり、O'Rourke[1] のギャラリの L 型図形分割アルゴリズムの水平奇数カット（H-odd-cut）を利用して示された。以下にその証明の概略を述べる。

Abello らの十分性の証明

直多角形の水平カットとはリフレクスへの水平入射辺を延長した、多角形領域の内部を通る補助線のことである。リフレクスは、カットにより 2 つの部分に分けられる。その部分のどちらもリフレクスではないということから、カットはリフレクスを分解すると考えることができる。明らかに、カットにより新たにリフレクスが作られることはない。カットにより分けられた領域のどちらかが奇数個のリフレクスを持つとき、そのカットは奇数カット（すなわち水平奇数カット）であるという。

与えられた直多角形を水平奇数カットにより分割する。水平奇数カットは、2 つのリフレクスの可視線である。分割された各ギャラリは水平奇数カットを持たず、底部が接合した 2 つの柱状形で形成される [1]。この分割された部分の構成は、水平グラフとして考えることができる。この水平グラフの木構造を利用して証明を行う。

リフレクスの入射水平辺の他の終点もまたリフレクスであるとき、そのリフレクスを水平ペアであるといい、そうでないときを水平独立であるという。水平ペアであるとき、両方のリフレクスに対して水平カットがとられる。水平グラフは、水平ペアの水平カットにより分割される部分の隣接グラフである。

分割部分はグラフのノードに相当する。いま 2 つのノード A, B が存在するとする。これらのノード A, B が水平カットによって分けられる隣接部分にあり、さらに、リフレクスからリフレクスへいたる水平カットが A のある分割されたギャラリの境界に一致するとき A から B への弧で結合される。このような規則によってノード間を弧により結合した例が図 17 である。

分割された各部分が水平奇数カットを持たないことから、分割部分は各々高々 1 つの水平独立なリフレクスを持ち、そのリフレクス角は水平グラフの

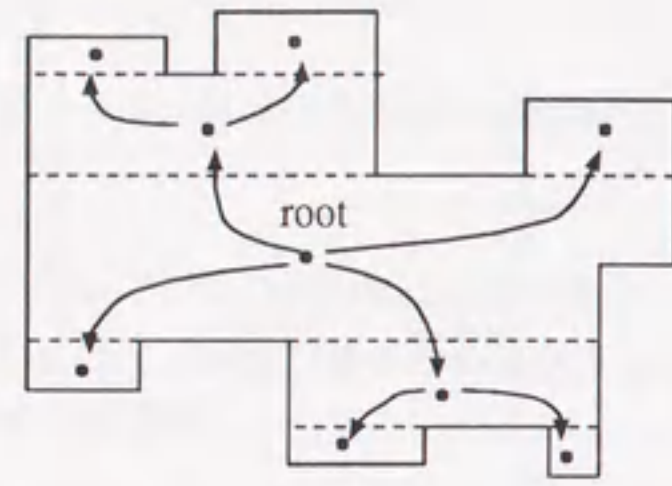


図 17: 水平奇数カットにより分割されたギャラリーに対応する木.

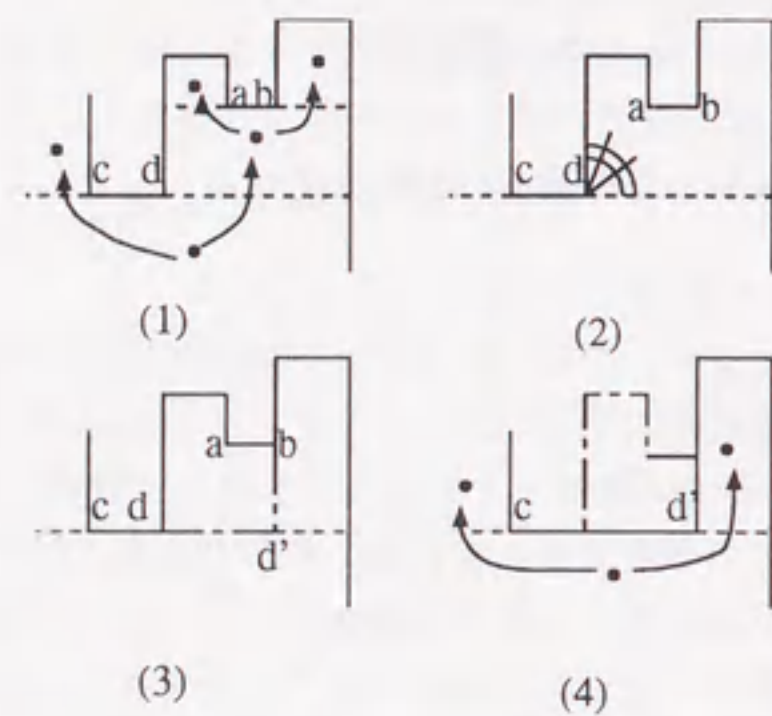


図 18: 補助線により, リフレクスを減らす手順.

ソースノードに相当する領域側にのみ位置する [2]. この水平グラフは木であり, ただひとつのソースノードがある. 入次数 1 のノードを葉といい, 出次数 2 のノードを枝という.

以上のようにギャラリーを分割し水平グラフを考えると, 分割された各ギャラリーを構成する辺において, 全ての垂直辺が与えられた元の直多角形の境界上にあることを用い, この分割されたギャラリーに操作を施し証明する (図 18).

1. 1つの葉に対し, 水平木の 2つの葉と 1つの枝を置き換える.
2. 葉でない領域のリフレクス d に直床ライトを配置する.
3. 角 d を分解しリフレクス d' を得る.
4. 他の 2つのリフレクス角 a, b を取り去る.
5. 水平奇数カットを持たず, リフレクスが 2 少ない新たな直多角形を得る. この水平木の, 葉でない領域の全ての垂直辺は元の直多角形の辺である.

4 より, 分割された各部分が各々 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ の直床ライトで照明できることが保証される. 2 と 5 より, 床ライトが常にもとの直多角形の境界上に配置されることが保証される. 3 より, どの床ライトも同じ点には配置されないことが保証される. 以上より操作の帰納的適用は, 求める結果を得る.

帰納証明のベースとなるのは, 水平グラフが葉を持たない木であるような直多角形の場合であり, この場合水平グラフは, ただ 1つのリフレクスのみを持つ L 型形に相当するような単一ノードである. この多角形は, 垂直辺にただひとつ床ライトをおけばカバーされる. この場合は, 床ライトは元の直多角形の頂角には配置されないかもしれない.

以上をもって $\lfloor n/4 \rfloor$ の十分性が示された.

必要性については, 前述の直多角形ギャラリーへの配置問題にも用いられたくし型図形により示される.

穴 (島) のあるギャラリーの場合には, 穴の, あるリフレクスから外壁へ水平カットにより見かけ上穴をなくし, 穴のない場合と同様に扱う. h 個の穴のある n 直多角形は, 穴を全て分解すると $n + 2h$ の頂角を持つ穴の無い直多角形になる. よって前述の結果より $\lfloor (n + 2h)/4 \rfloor$ の必要十分性を示すことができ, 定理 4 が証明された.

3.3 長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム

3.3.1 はじめに

前節の [13] の証明に対し、できる限り少ない人数の監視員を配置することも考慮し、壁に $\lfloor n/4 \rfloor$ 人以下の監視員を具体的に配置するアルゴリズムを与えた [14].

証明の方法は [13] と類似であるが、本論の方が少ない監視員ですむ可能性がある。このアルゴリズムはいくつかのサブギャラリの長方形図形をまとめてひとりの警備員で監視しているため、与えられた直多角形をできるだけ少ない警備員で監視するという目的に有用である。この結果は [13] とほぼ同時に発表されている。

O'Rourke が島のないギャラリーが $\lfloor n/4 \rfloor$ 人の監視員で十分であることを示すのに使った議論では、次のような事実を利用している。以下でもそれらを援用する。

[知見 1] O'Rourke の分割プロセスでは奇数個のリフレックスをもつギャラリーでは、それを常に奇数個のリフレックスをもつように α 補助線で分割しているから、最初からそのように分割したそれぞれを独立にサブギャラリーとして扱ってもよい。

[知見 2] 偶数個のリフレックスをもつ場合には最終的には一つの長方形を作らねばならないことになるので、最初に適当な長方形を取り除いておき、残った奇数個のリフレックスを含むサブギャラリーを分割の対象としてもよい。

n 辺直多角形のギャラリーで、監視員を壁に配置する場合でも $\lfloor n/4 \rfloor$ 人が必要であるギャラリーの例 (図 6 参照) は与えられているので [1], ここでは十分性のみを示しながら配置アルゴリズムを考える。

まず、図 19 (a) を考える。このギャラリーでは $r=7$ であるから、先の分割アルゴリズムでは 4 個の L 型図形が得られ、4 人の監視員で十分であることが分かる。しかし、2. で示した分割プロセスに基づいてどのような分割をしても、壁ではなくギャラリー内部に監視員を置かなければならないような分割しか得られない (図 19 (b), (c), (d))。したがって、分割アルゴリズムに従えば、監視員の数を満たす解は得られるが、その解で監視員を壁にのみ配置する条件を満たす解が得られる保証はない。

そこで、分割アルゴリズムで得られた解の L 型図形、四辺形を基本にし、それを変形または修正することを考える。例えば図 19 (c) の点 A に配置された監視員の位置を壁の上の点 C に移してみる。しかしこれでは、点 A では監視できていた斜線の部分が監視できなくなってしまう (図 19 の (e))。

アルゴリズムによって得られる図形ではなく、ヒューリスティックに L 型

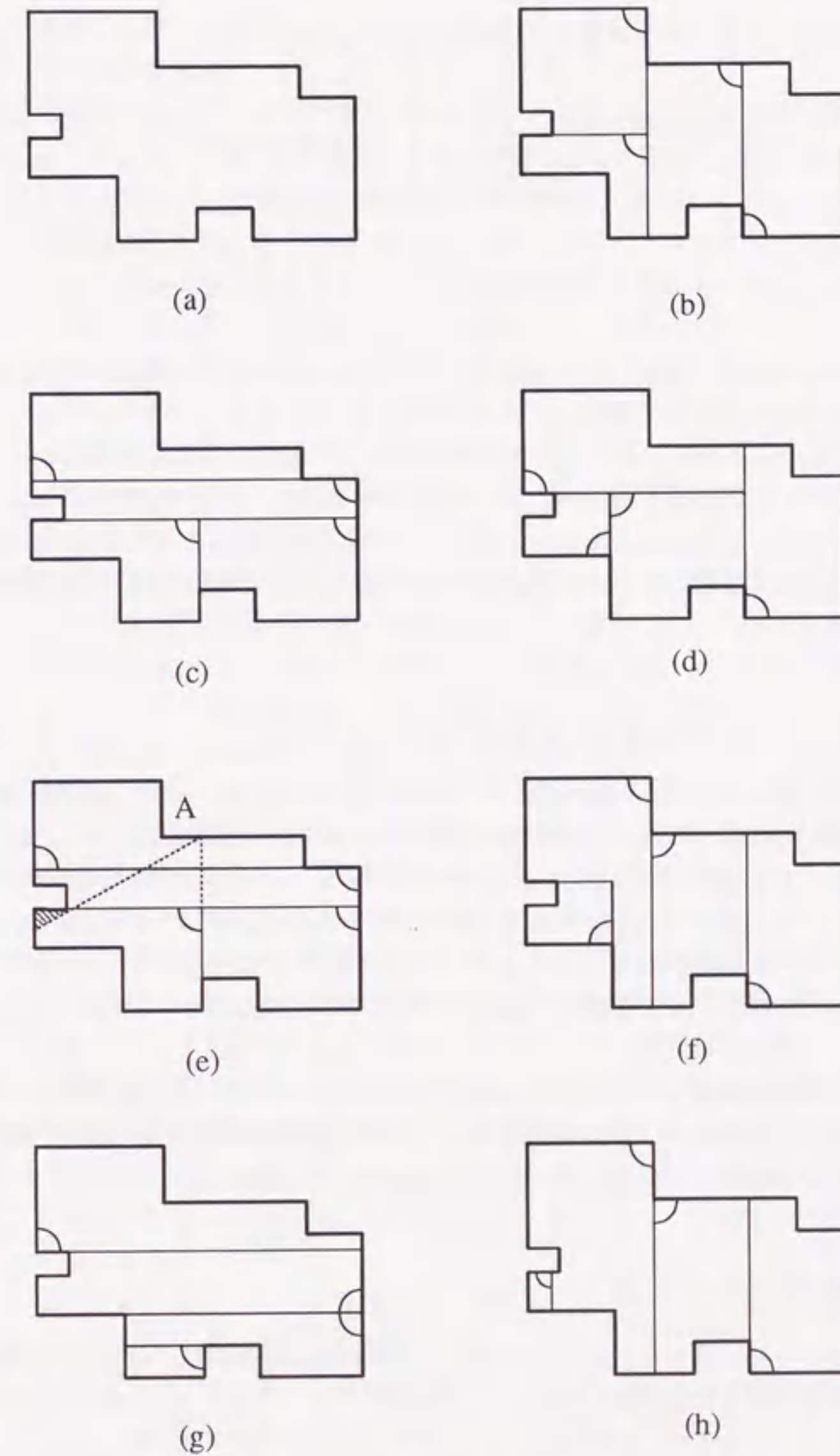


図 19: 監視員の配置例.

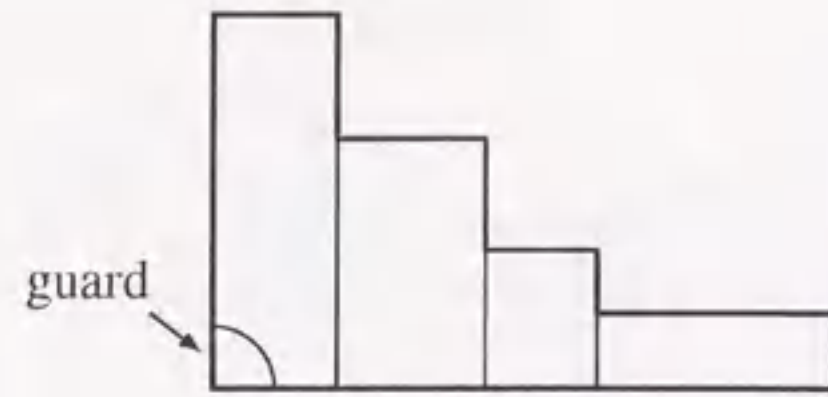


図 20: 階段図形.

図形を求めれば、図 19 (f), (g), (h) のように壁に監視員を配置して、4 人で監視できる配置が得られる。

これらのことから、次のことが示唆される。分割アルゴリズムにしたがって得られた L 型図形、四辺形に 1 人の監視員を配置し、うまく置ければよし、壁に置けないものは適当に監視員をずらして壁に配置するという方法で、壁に配置された監視員の場合 $\lfloor n/4 \rfloor$ 人で十分であることを証明することは困難である。

3.3.2 長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム

以下では次のような分割を考えた。まず、図 20 のように一辺を一直線に接して階段状に並べられた四辺形（長方形）群の外郭を階段図形といい、それに含まれるリフレックス数+1 を段数と定義する。L 型図形は 2 段階図形である。階段図形では何段であれ、最大の長方形の下のコーナーに監視員を置けば 1 人で全体が監視できる。そこで、このような長方形領域でギャラリを分割してゆき、条件を満たす監視員の配置法を求めるアルゴリズムを検討した。

以下の様に構成された長方形とそのまとめからなるアルゴリズムで、たかだか $\lfloor n/4 \rfloor$ 人でギャラリ全体が監視できる壁または角への監視員の配置法が得られる。手続きとその正当性、必要な理由を併せて説明する。以下にアルゴリズムを述べる。

監視員配置アルゴリズム

1. ギャラリ全体をリフレックスを端点とする垂直な補助線で長方形に分割する（水平な補助線でもよい）。補助線のうちリフレックスからリフレックスへ至るもの（ β 補助線）でギャラリ全体を分割する。この分割されたギャラリをサブギャラリとし、それぞれ独立したギャラリとして扱うことにする。
その理由は、 $V-\beta$ 補助線では 2 つのリフレックスを消去してギャラリ

を分割しているので、分割されたサブギャラリに含まれるリフレックス数を R, L とし、それぞれ $\lfloor R/2 \rfloor + 1, \lfloor L/2 \rfloor + 1$ 個の L 型図形に分割されるならば、全体で $\lfloor n/4 \rfloor$ 人で監視するという条件を犯すことにはならないからである。

2. 監視員を壁に配置するため、次のようにギャラリ内の分割された長方形をまとめる。まず、各長方形にノードを割り当て、隣接した長方形のノードを接続して木を作る。 β 補助線で既に分割してあるから、各ノードの次数は 4 以下である。また、長方形が接するときリフレックスが発生するから、ギャラリに含まれるリフレックス数は対応する木に含まれるノード数より 1 少ない。したがって、奇数個のノード含むギャラリの場合、最終的に 1 つの長方形に 1 人の監視員を割り当ててもよいから、ギャラリに対応するノード数が奇数の場合には、葉に対応するノードを初めに 1 つ除去しておく（知見 2）。葉ならどれでもよいが、監視員の人数の最小化を目的とするならば、より段数の多い奇数段の階段図形としてまとめる方がよい。以下偶数個のノードを含むギャラリを対象とする。
3. 木の葉から順にたどり、2 個以上の長方形が 1 つの底辺あるいは上辺を共有する階段図形になっている場合、それらをまとめる。まとめた領域は、図 20 のように壁またはコーナーに配置された 1 人の監視員を配置できる。この長方形のまとめを木の分岐枝の部分まで進める。この時点で残された木全体で奇数個のノードを含んでいるときには、葉を 1 つ削除し、それに対応する長方形に 1 人の監視員を配置する。初めに偶数のノードから出発しているため途中で奇数個のノードを含む木になるのは、この操作で 3 個以上の奇数個のノードをまとめた結果である。したがって葉を 1 つ削除し、そこへ 1 人の監視員を配置してもよい。
4. 以上の手順で得られた偶数個のノードを含む木で、次数 2 のノードを探す。あればそれに接続された 2 本の枝のいずれかを、どちらの部分木も偶数のノードを含むように切断する（知見 1）。全体に偶数個のノードを含むからこれは可能である。この場合でも切断されてきた葉に連結したノードができる限り段数の多い階段図形にまとめられる枝を選ぶようにする。切断されたサブギャラリはそれぞれ独立したものとして扱うことができる。切断された木に対応するサブギャラリについても (3), (4) を実行する。
以下では次数 2 のノードを含まない次数 1, 3, 4 のノードを偶数個含む木に対応するギャラリのみを考える。
5. 上の (1) ~ (4) までの手順から得られた木で、葉を含む連結した 4 個のノードに注目する。その 4 個のノードを除去したとき、残りの木が偶数個のノードを含む部分木に分割されるならば（図 21 参照）、その 4 個のノードに対応する空間に図 22 のようにして 2 人の監視員を配置して除去する。対象となる木のノードの次数が 1, 3, 4 に限定されているの

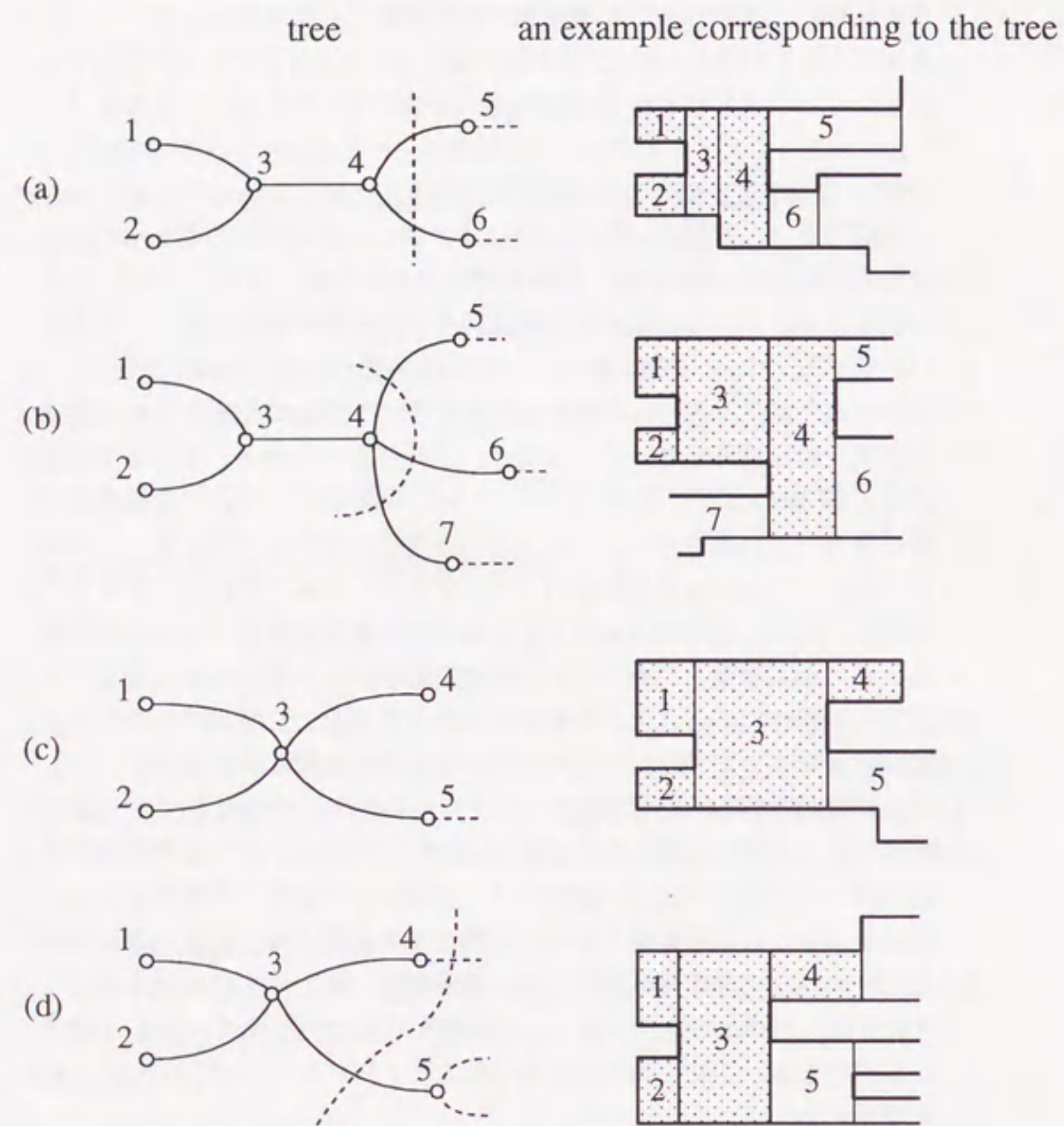
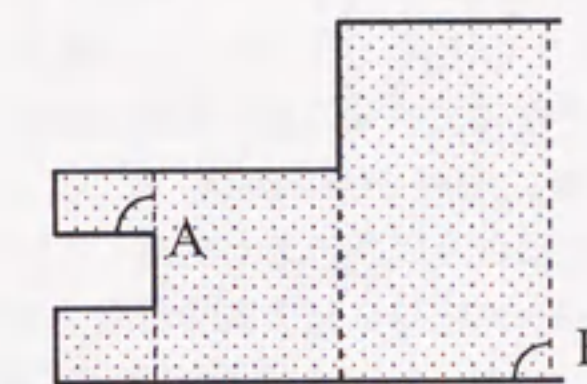
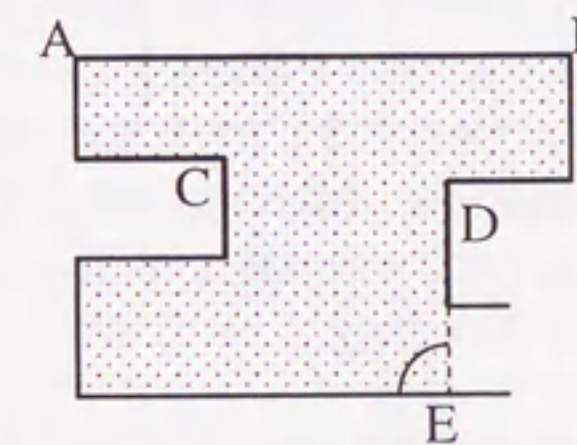


図 21: 条件を満たす 4 個のノードを発見できる図.



For the cases (a) and (b),
guards are placed at A and B.



For the cases (c) and (d),
guards are placed at B and E if $C > D$ (C is at the upper place than D),
and at A and E, if $D > C$, respectively.

図 22: 図 21 の各々に対する監視員の配置法.

で、図 21 以外にはない。

そのような 4 個のノードが見つからないとき、すなわち、4 個のノードを除去し、残りの部分記のノード数が奇数のとき、対応する木の中に下辺をまたは上辺を共有する 2 つの葉を見つけることができる。必ずこのようなノード対が存在することは次のように証明される。まず、葉を含む 4 個のノードを除去するとき、木が奇数個のノードを含む複数の木に分割されるギャラリの形を考える。そのような図形は次のような場合である。次数 4 で葉が 3 個付着しているノードは、図 23 (i) となり、条件にあわないので対象としない。しかし、確かに葉の対は存在する。次数 3 で葉が 2 個付着しているノードを考える。図 23 (ii) 参照。このノード b の次数を 3 または 4 にするためには長方形をその右に隣接させる必要がある。図 23 (iii), (iv), (v) 参照。

条件を満たすためにはさらに長方形が付着していなければならない。しかし図 23 (iv), (v) の d, e に長方形を付着させて、それらを次数 4 のノードにすることはできない。なぜなら β 補助線ができてしまうから。したがって次数 3 のノードにする。

d が a の高さより高い図 9 (iii) の場合は、図 23 (vi), (vii), (viii) のような 3 種の方法がある。しかし、図 23 (iv), (v) の d, e が a の高さより低い場合には左側に付着させる余裕がないから、d または e の上辺または下辺を共有する長方形を右に付着できるのみである (図 23 (ix) 参照)。従って、どのようにノードを増加させていっても図 24 の c-g, c-h のノード対が存在する。それらは 1 人の監視員で監視できるので、それらの 2 つのノードを削除する。削除の後、得られた木は偶数個のノードを持つから、それに対してさらに手順 (2), (3), (4), (5) を繰り返す。ノードがなくなったとき終了する。

以上の手続きでは、まとめて削除された階段図形、L 型図形、長方形はすべて上辺または下辺がもともと壁であり、補助線を引いた結果できた見かけ上の壁ではないのでそれぞれに配置される監視員はもともとの壁または角に配置されることになる。また、5. で削除された 2 つの長方形は隣り合う長方形ではないが、高さの大きい方の長方形の角に監視員を配置することで 2 つを監視することができる。その配置位置はもちろんもともとの壁または角である。したがって、配置されたすべての監視員の位置はギャラリの壁または角である。また、上の手順で分割の回数は、 $\lfloor r/2 \rfloor$ を越えない。すなわち、まず β 補助線では 2 つのリフレックスを消去していること、長方形の組み合わせを L 型図形、階段図形で分割するときも 2 個以上のリフレックスを消去している。長方形を消去する場合は、全体が奇数個のノードを含む (リフレックスの数が偶数) 場合であるから、もともと 1 つの長方形に 1 人の監視員の配置が許されている場合である。あるいは、手順の途中で 3 以上のリフレッ

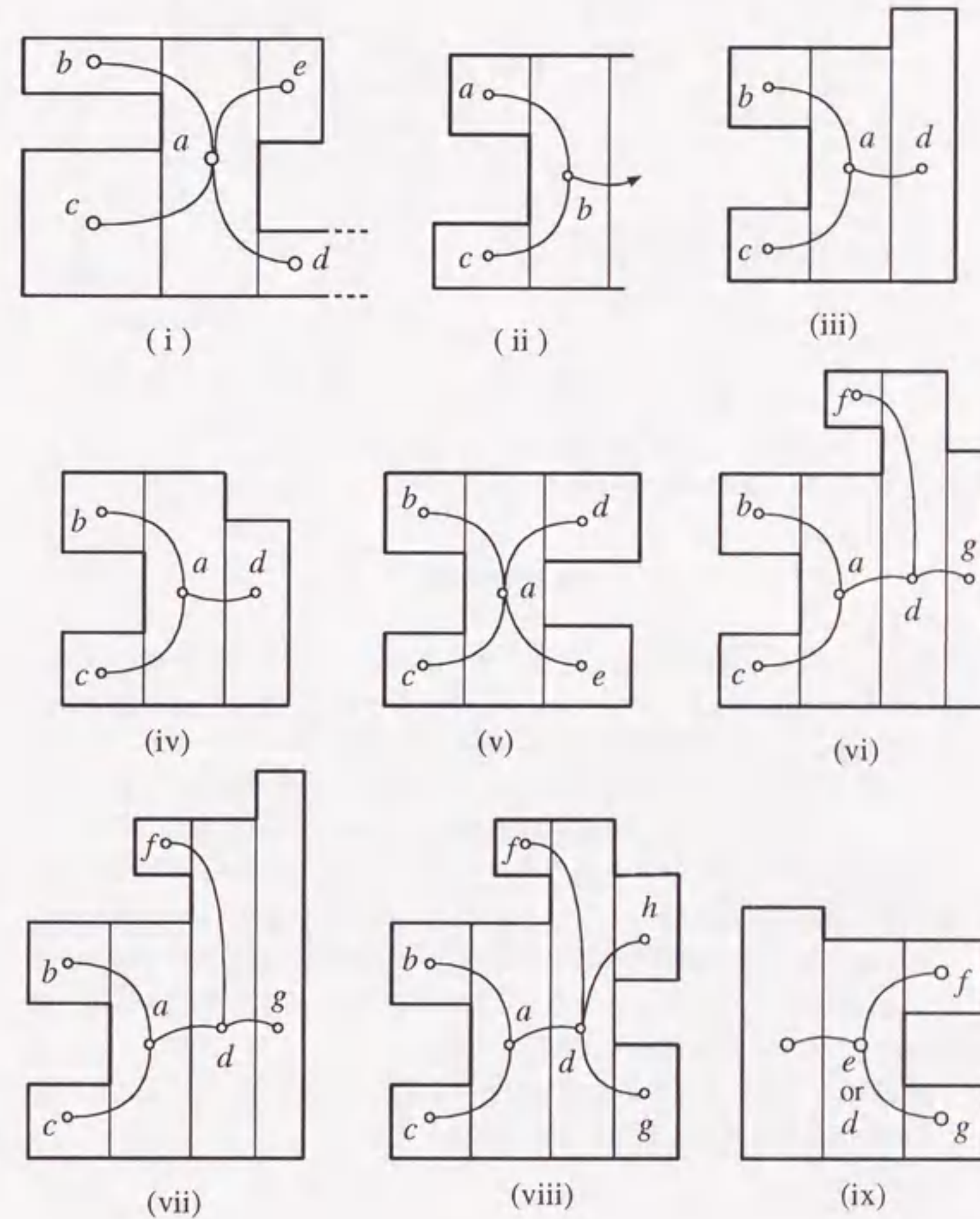


図 23: 説明図。

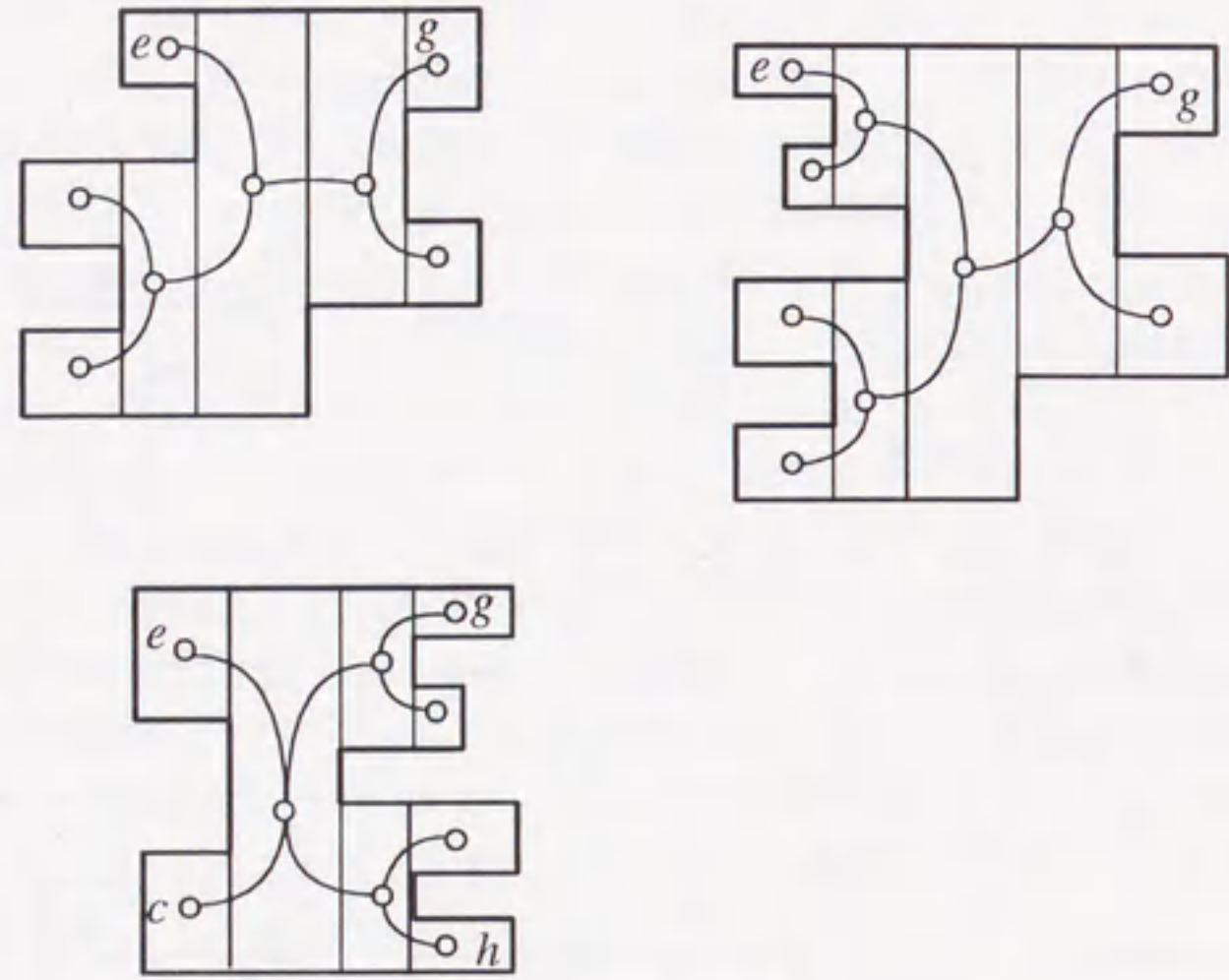


図 24: 説明図.

クスを含む領域を階段図形としてまとめ、それに 1 人の監視員を割り当てた後にできた偶数個のリフレックスを含むサブギャラリーを考えている場合である。したがってまとめる回数は $\lfloor r/2 \rfloor$ 回を越えない。

以上で上の手続きの正当性のすなわちこの手続きで壁に監視員を配置するという条件を満たす監視員の配置が得られることの証明を終わる。

島のあるギャラリーの場合、Abello[12]らは、島のあるリフレックスから外壁へ至る $H-\alpha$ 補助線で島を見かけ上なくし、それに O'Rourke の結果を適用しているの、ここでも初めに島のリフレックスから外壁へ至る $V-\alpha$ 、または $V-\beta$ 補助線で、島を見かけ上なくしてからアルゴリズムを利用すれば、壁に定理 1 で与えた人数の監視員を配置できる。

図 25 に上の手続きによる監視員配置例を与えた。 (x, y) はまとめられて 1 人の監視員を配置する長方形の組である。

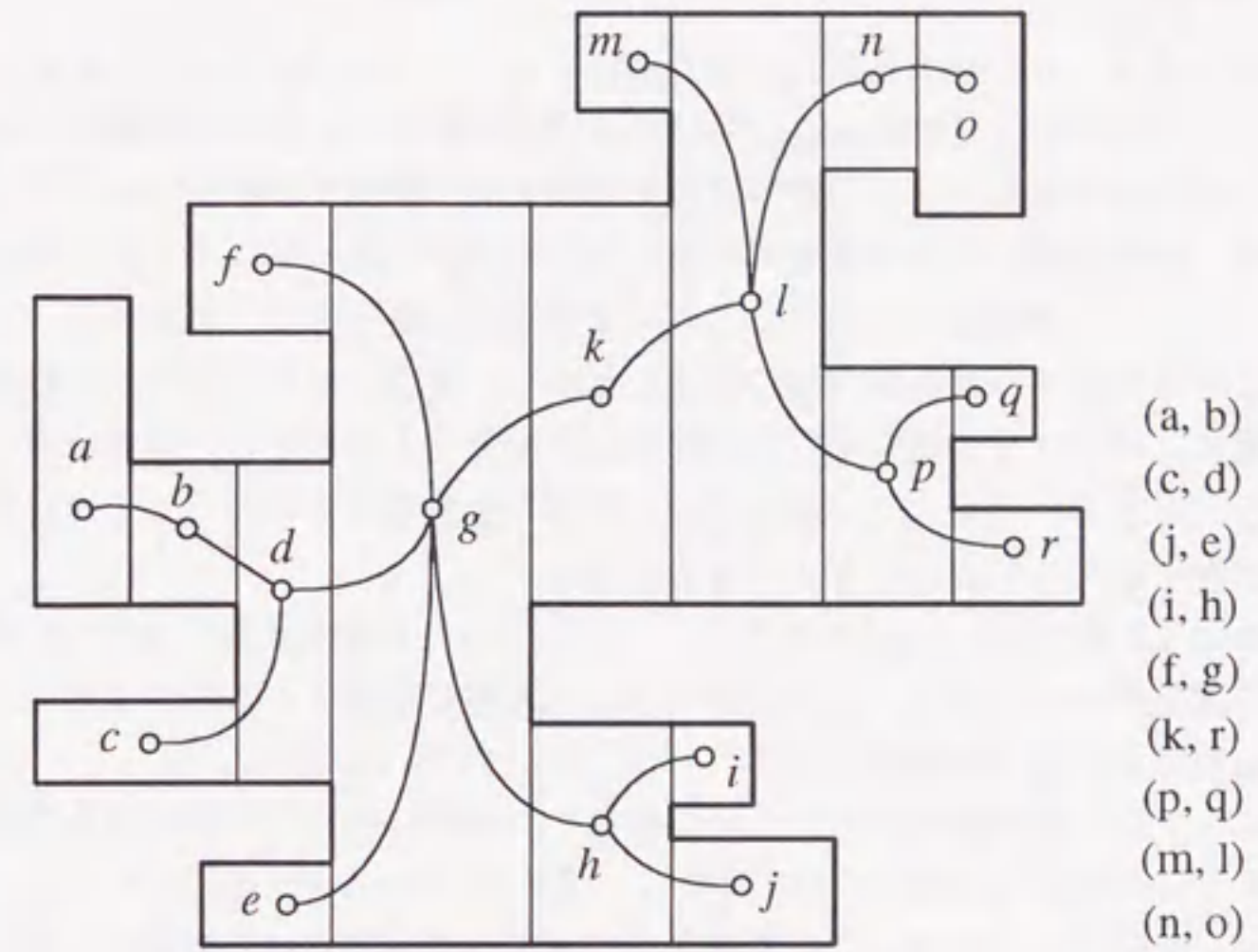


図 25: 例.

3.4 まとめ

以上により、直多角形のギャラリーに視角 90 度の監視員を壁に接した状態で配置する具体的アルゴリズムを与えた。視角や配置場所に制限のない場合に必要とされる監視員の数 $\lfloor n/4 \rfloor$ と同じ人数でギャラリーの監視ができることはすでに証明されている。従ってここで与えたアルゴリズムは理論的にはそれほど新規性はないが、具体的にできる限り少ない人数の監視員を壁に配置する方法を探すという、物理的、実用的要請に応えるものである。

4 衝立てのある直多角形の監視問題

アートギャラリーに対する新たな制約条件として、 n 辺直多角形で囲まれたギャラリー内部に衝立て (screen) と呼ばれる障壁が存在し、視界が邪魔されるという制限があるギャラリーの監視問題を考察する。衝立てが存在するという条件は、監視問題の結果を実際の配置に利用する際に多く起こることであるから、このような問題を考察することは実用上有意義であると思われる。

ここではギャラリーが直多角形であることから、衝立てはギャラリー内の任意の位置に、ギャラリーの壁に平行または垂直に配置するものとし、厚みは考えないこととする。このように配置される衝立てを直衝立てという。また、衝立ては壁に接していなくてもよいものとする。

初めに 4.1 節で視角 90 度の監視員を、衝立てのある直多角形ギャラリーに配置する問題について述べ、できる限り少ない人数で監視することができるように監視員を配置する手順を与える。

次に 4.2 節で視角が制限されない監視員を、同様に衝立てのある直多角形ギャラリーに配置する問題について考察し、視角 90 度の場合との違いについて述べる。特にここでは衝立てが単純衝立てである場合について考察し、さらに、視角 90 度の場合と同様にできる限り少ない人数で監視することができるように監視員を配置する手順を与える。

4.1 視角 90 度の監視員の配置問題

4.1.1 はじめに

まず初めに前章と同様、視角が 90 度に制限された監視員をギャラリーの壁に配置する際に必要十分となる数と、より少ない人数を配置するための方法を示した [15]。

ギャラリーの辺と頂点及び衝立てを合わせて壁という。補助線により、ギャラリーは分割される。分割されたギャラリーを、元のギャラリーに対してサブギャラリー (sub gallery) ということにする。

ここでギャラリーの壁に接している衝立ては一旦壁から離し、衝立てをノード (node) と枝を持つ木 (tree) として考える。ノードに出入りする枝の数を次数 (degree) とすると、ノードには次数 1, 2, 3, 4 の 4 種類がある (図 26, 図 27 参照)。図の①, ②, ③, ④は、ノードの次数を表す。次数 1 のノードを葉という。次数 1 の葉 2 個だけで構成される衝立てを単純衝立て (simple screen) と呼ぶ。

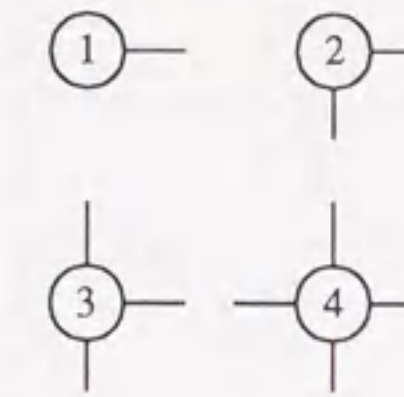


図 26: 次数 1, 2, 3, 4 のノードの例.

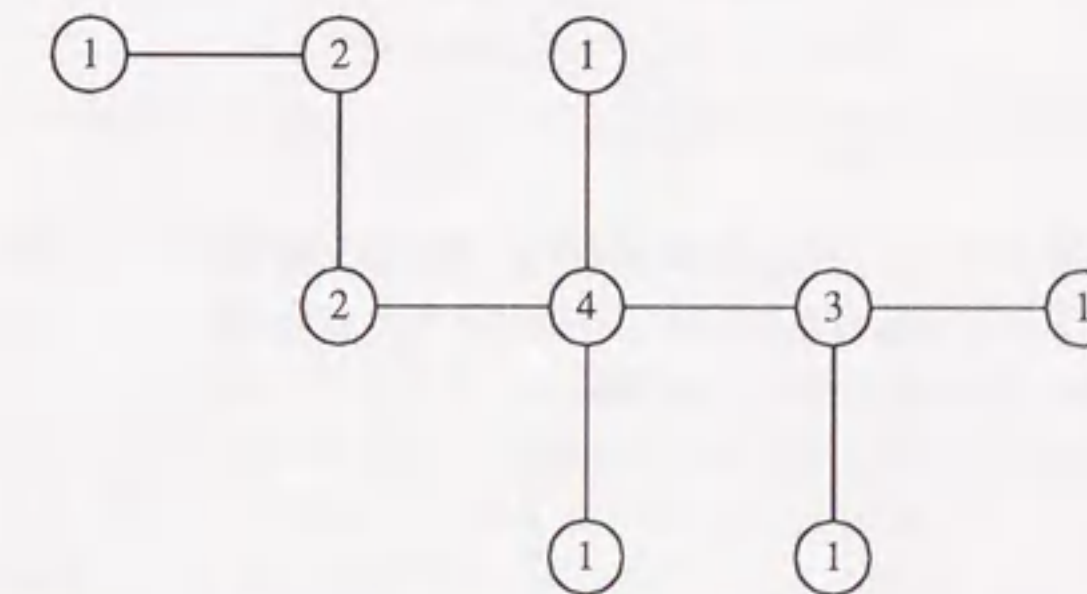


図 27: 衝立ての例.

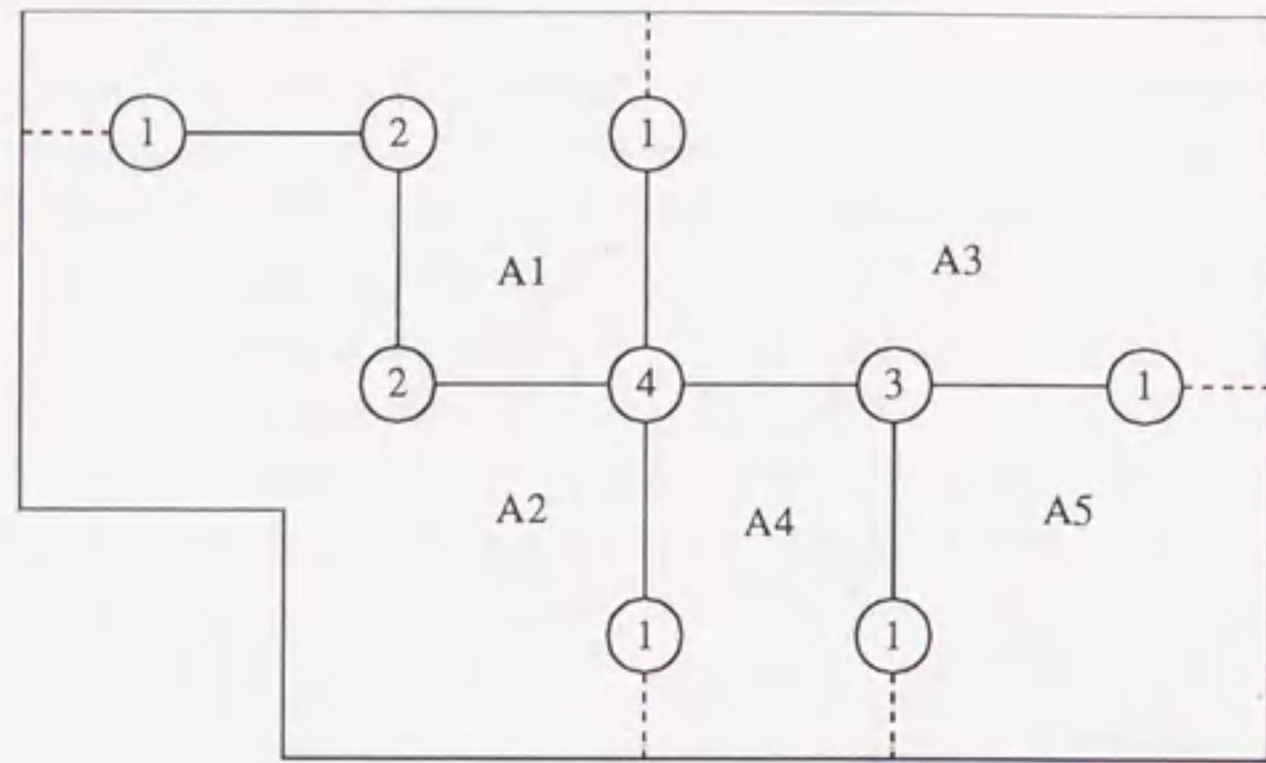


図 28: サブギャラリーへの分割.

4.1.2 十分性の検証

監視員の配置問題を次のように考える. 衝立てを構成する木の葉を始点とし, 枝と同一直線状に壁面に至るまで補助線を引き, ギャラリーを分割し, 分割された各々のサブギャラリーで監視員を配置すれば (図 28), その総計が全体のギャラリーの監視に十分な数になる. すなわち, 分割されたサブギャラリーの辺数の総計を辺数とする直多角形に配置するのと同様となる.

サブギャラリーが k 個あり, それぞれのサブギャラリー A_1, \dots, A_k が n_1, \dots, n_k 個の辺を持つとき, それぞれに必要な監視員数は $\lfloor A_i/4 \rfloor$ ($i = 1 \dots k$) 人である. したがってギャラリー全体で $\lfloor A_1/4 \rfloor + \dots + \lfloor A_k/4 \rfloor$ 人あれば十分である.

このように考えてよいのは, 最悪の場合, すなわち葉の先が壁に極めて近い位置まで伸びている場合も排除されていないからである.

図 28 の場合, 外側のギャラリーの辺数は $n = 6$ であり, 次数①のノードの木の葉を破線のように伸ばしてギャラリーを分割すると, 5 個のサブギャラリーに分割される. それぞれを独立したギャラリーと考える. 各サブギャラリー A_1, \dots, A_5 の辺数 n_1, \dots, n_5 は, 6, 8, 4, 4, 4 であり全体として必要な監視員の数 g は, $\lfloor 6/4 \rfloor + \lfloor 8/4 \rfloor + \lfloor 4/4 \rfloor + \lfloor 4/4 \rfloor + \lfloor 4/4 \rfloor = 6$ 人である.

上のような場合, 衝立てを構成する木の枝は, 分割されたサブギャラリーの両側で二度ギャラリーを構成する辺として数えられていることになる. そこで, ここでは木を囲む自然な直多角形の辺数を考える (図 29).

衝立てのあるギャラリーのサブギャラリーへの分割を考えるには, 木を図 29 のような木を囲む自然な直多角形で置き換えて考えるのが自然である. このとき, 木が元のギャラリーの壁に接しているときは, いったん接地点を切り離し

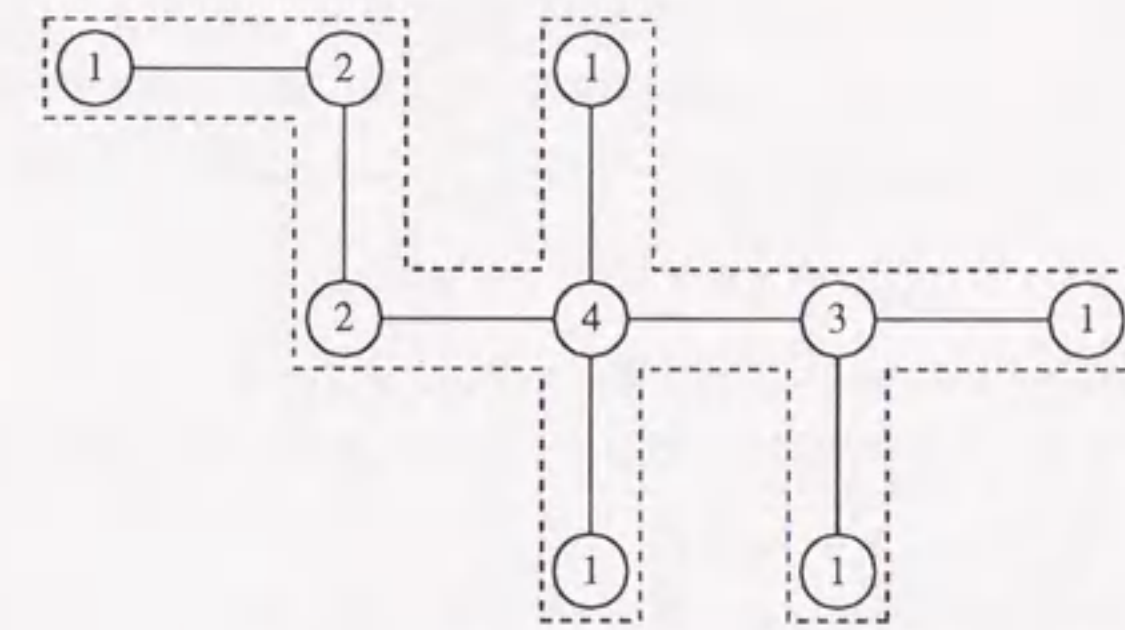


図 29: 木を囲む自然な直多角形.

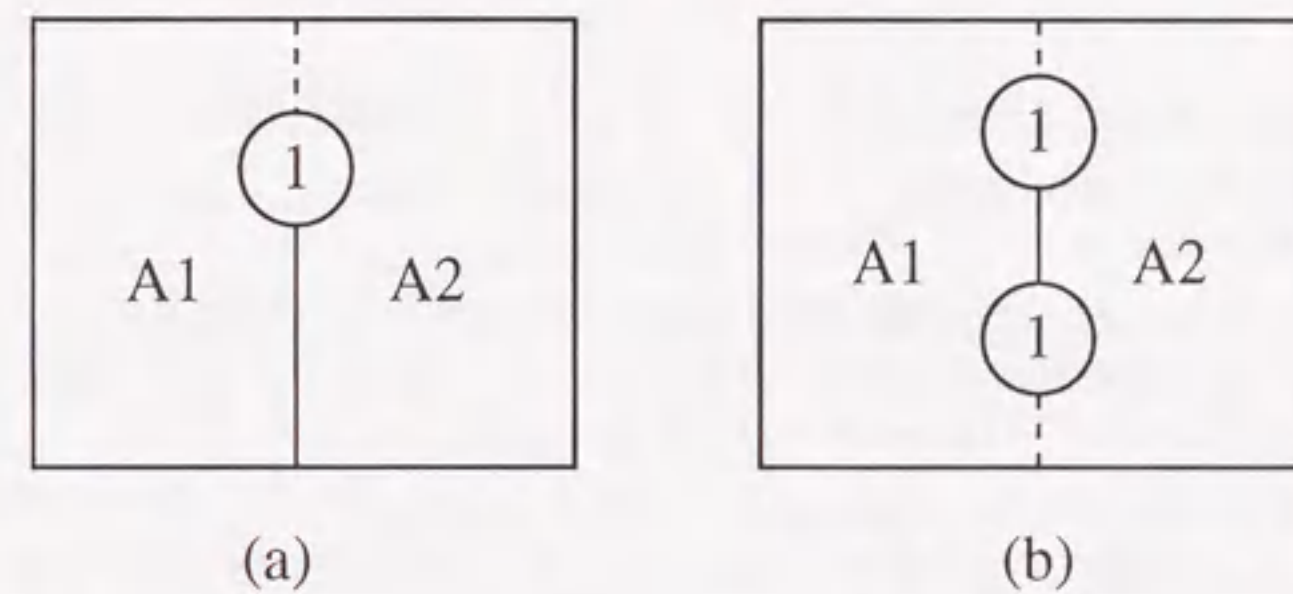


図 30: 衝立てが壁に接している場合.

て, 木を囲む直多角形を考える. 接地点を切り離すことで次数 1 のノードの数が 1 増え, 木を囲む直多角形の辺数が 1 増えるが, 次数 1 のノードの木の葉を破線のように伸ばしてギャラリーを分割すると, 壁に接地した衝立てによって分割された形と同形になるので, 接地点を切り離しても影響が無い (図 30).

補助定理 2 木が, 次数が 4 のノードを p 個, 次数がそれ以外のノードを q 個持つとき, その木を囲む自然な直多角形の辺数は $m = 4p + 2q$ になる.

証明 構成的に証明する.

図 31 の (a) のように次数 1 のノードが 2 つあるとき, 囲む直多角形の辺数は 4 であり, これは, 次数が 4 以外のノード数 $\times 2$ である.

図 31 の (b) のように枝が (a) に 1 本加わり, 次数 1 のノードが 2 つ, 次数 2 のノードが 1 つあるとき, 囲む辺の数は (a) に 2 辺加えた 6 であり, 次

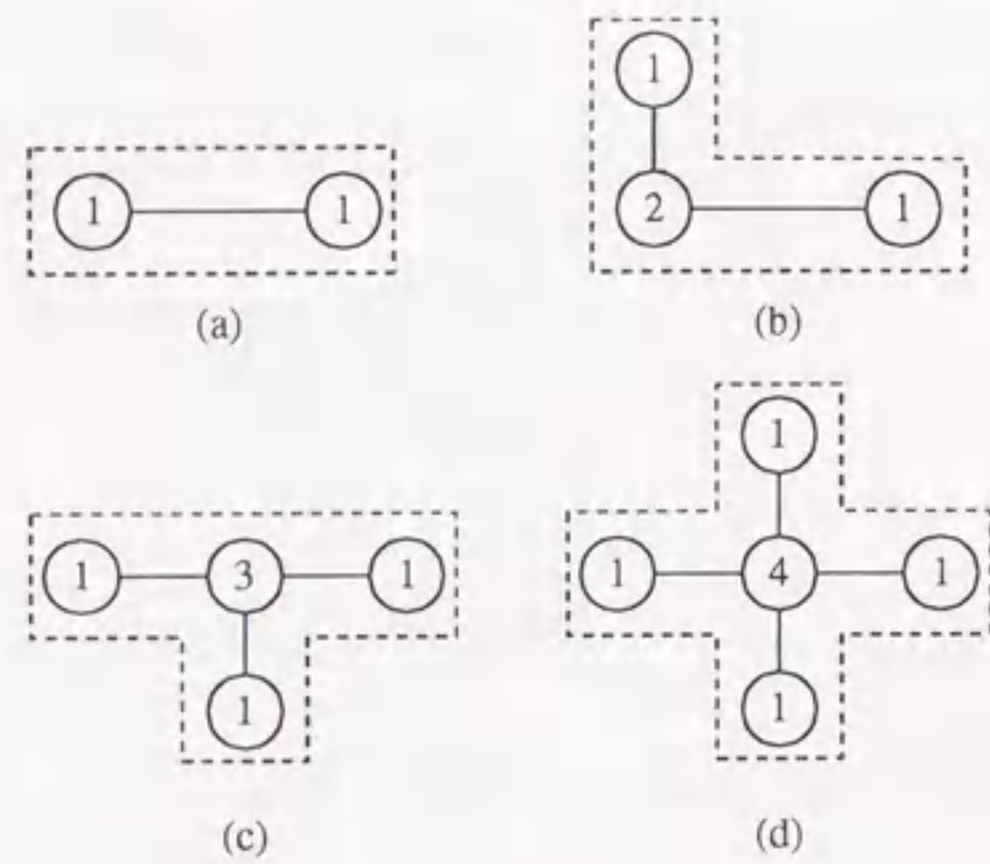


図 31: ノードの次数 1, 2, 3, 4 の木を囲む直多角形.

数 2 のノード 1 個により, 囲む辺が 2 増える.

図 31 の (c) のように次数 1 のノードが 3 つ, 次数の 3 のノードが 1 つあるとき, 囲む辺の数は 8 であり, 次数 3 のノード 1 個により, 囲む辺が 2 増える.

図 31 の (d) のように次数 1 のノードが 4 つ, 次数 4 のノードが 1 つあるとき, 囲む辺の数は 12 であり, 次数 4 のノード 1 個により, 囲む辺が 4 増える. どんな複雑な木の衝立ても, 以上の 4 パターンのように枝を加えることで表現できる. よって, 次数が 4 のノードを p 個, 次数がそれ以外のノードを q 個持つ木に対して, 木を囲む自然な直多角形の辺数は $m = 4p + 2q$ になる. 以上により, 補助定理 2 が証明された.

補助定理 3 次数 1 のノードをそれが接する枝に沿って他の辺まで伸ばし, 分割されたサブギャラリの辺数の総計は, 木を囲む自然な直多角形の辺数 m と元のギャラリの辺数 n の和でおさえられる.

証明 もとのギャラリの辺数を n とする. 衝立てを自然に囲む直多角形の辺数は, 補助定理 1 より m である.

一方, 衝立てを構成する木の葉を始点とし, 枝と同一線状に壁面または衝立てに至るまで補助線を引いてギャラリを分割すると k 個のサブギャラリーができ, それぞれのサブギャラリーの辺数が $n_i (i = 1 \dots k)$ とする. サブギャラリーは元のギャラリの壁および衝立て (補助線により延長された部分を含む) を辺とするが, このとき衝立ての両面が別のサブギャラリーの辺となるので, 衝立ての両面が辺として数えられる. さらに, 葉から伸ばした補助線がもとの

ギャラリの壁面または枝を分割することで, 分割されたサブギャラリーを構成する辺数は, 木の葉ひとつ毎に高々 1 増えるのみであるが, この分は, 木を自然に囲む直多角形の木の葉を囲む部分の辺数に対応する. よって, 各サブギャラリーの辺数の和は

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n + m$$

である. すなわち, サブギャラリーの辺数の総計が, 木を囲む自然な直多角形の辺数 m と初めに与えられたギャラリの辺数 n の和でおさえられることが示された.

上述の各サブギャラリーに先に得られた結果 [14] を適用すれば, 各サブギャラリーに $\lfloor n/4 \rfloor$ 人配置することで監視可能である. 一般に

$$\begin{aligned} \lfloor n_1/4 \rfloor + \lfloor n_2/4 \rfloor + \dots + \lfloor n_k/4 \rfloor \\ \leq \lfloor (n_1 + n_2 + \dots + n_k)/4 \rfloor \end{aligned}$$

となるので [2], それぞれのサブギャラリー A_1, \dots, A_k が n_1, \dots, n_k 個の辺を持つとき, ギャラリー全体の辺数は各サブギャラリーの辺数の総計で置き換えても, 全体のギャラリの監視に十分な数になる.

以上の補助定理 1, 2 よりギャラリー全体に必要な監視員数 g は

$$\begin{aligned} g &= \lfloor n_1/4 \rfloor + \lfloor n_2/4 \rfloor + \dots + \lfloor n_k/4 \rfloor \\ &\leq \lfloor (n_1 + n_2 + \dots + n_k)/4 \rfloor \\ &\leq \lfloor (n + m)/4 \rfloor \end{aligned} \tag{2}$$

となり, $\lfloor (n + m)/4 \rfloor$ 人でおさえられる. 従って, 全ギャラリーでは視野を 90 度に制限された $\lfloor (n + m)/4 \rfloor$ 人の監視員を壁に配置すれば十分である.

4.1.3 必要性の検証

次に必要性について検証する. $\lfloor (n + m)/4 \rfloor$ 人の監視員が必要な場合が例示できる. たとえば, 図 32 の場合, 衝立ては次数が 4 のノードを $p = 0$ 個, 次数がそれ以外のノードを $q = 2$ 個持つ木であり, $m = 4, n = 4$ となるので, 監視員の数 $g = \lfloor (n + m)/4 \rfloor = 2$ 人となるが, この人数が必要なことは明らかである. ここで任意の m, n に対して $\lfloor (n + m)/4 \rfloor$ が必要である場合を挙げることができることを示す.

ギャラリー外壁の辺数 n は $4u$ または $4u + 2$ の形の整数である. これらに対し監視員数が $g = \lfloor n/4 \rfloor$ となる例は図 33 がある. これらの図形では, ギャラリーを L 型または四辺形に分割して, それぞれに 1 人の監視員を配置しなければ監視できない. この人数が $\lfloor n/4 \rfloor$ である.

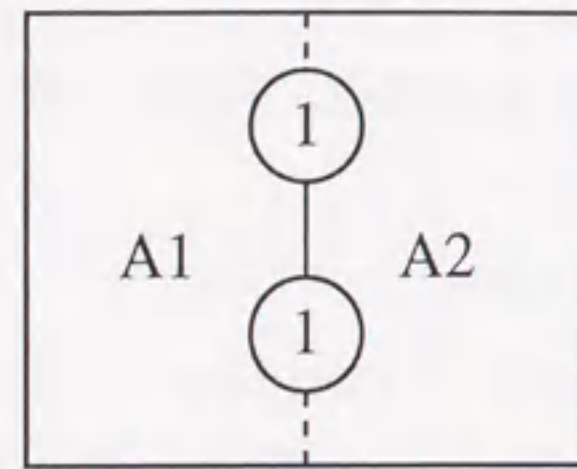


図 32: $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる 1 例.

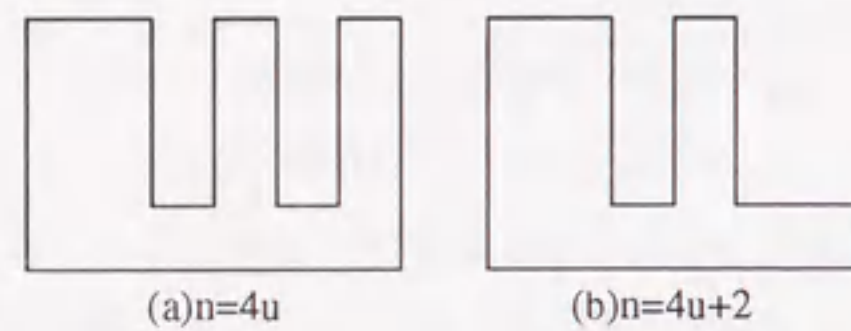


図 33: くし型ギャラリー.

衝立てがある場合には、この図を長方形図形または L 型図形のサブギャラリーに分割し、そのサブギャラリーについて衝立てを配置して考えればよい。

衝立てから得られる m の値は $4p+2q$ であるから、衝立ての構成要素を問題にしなければ、 m も $4v, 4v+2$ の形の整数である。このような m の値の衝立ては図 34 のようにして作ることができる。

この図 34 を図 35 のようにくし型の 1 つの刀の中に埋め込めば、任意の m, n に対して $g = \lfloor (n+m)/4 \rfloor$ となるギャラリーが得られる。

衝立ての構成要素を問題にする場合も同じように考える事ができる。衝立ての構成要素は (a) 単純衝立て, (b) 屏風型, (c) T 型, (d) 十型に分けられ

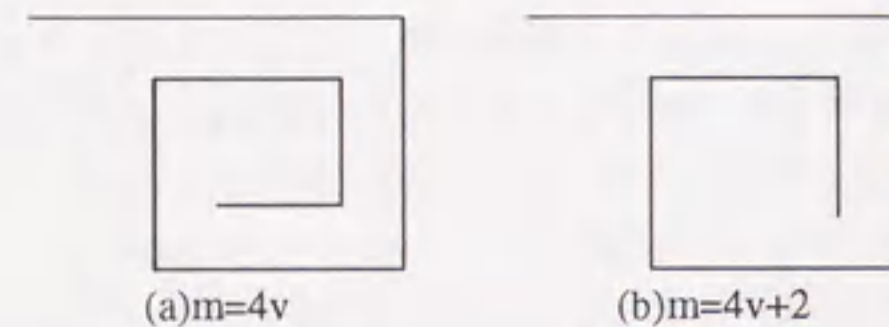


図 34: $m = 4v, 4v+2$ の場合の衝立ての例.

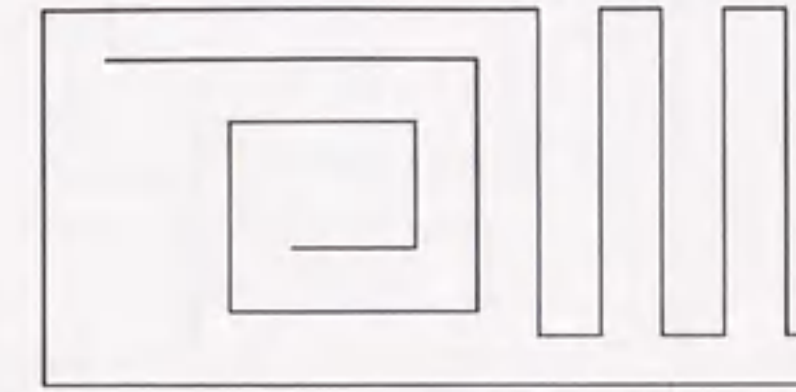


図 35: 任意の m, n に対して $g = \lfloor (n+m)/4 \rfloor$ となる例.

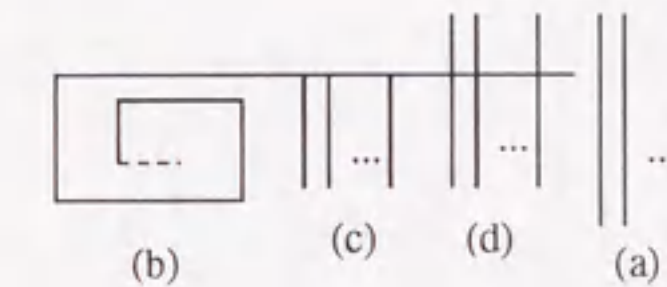


図 36: 衝立て群.

る。これらの個数がそれぞれ与えられている場合には、図 34 の渦巻き状の衝立ての代わりに図 36 を考える。

(a), (b), (c), (d) それぞれに指定された数の衝立てを付加して出来上がった衝立て群を図 35 の渦巻き状衝立ての代わりに配置すれば良い。このとき、衝立ての葉を伸ばして分割されてできた小ギャラリーは、必ず四辺形または L 型図形を単位として、それぞれに監視員を 1 人配置しなければ監視できない図形になる。よって、式 (1) の等号が成立する。

衝立ての構成要素別に説明する。くし型の一つの歯の L 型図形領域中に、任意の m について衝立てを配置する。(a) 単純衝立ての場合は明らかである。

図 37 は (b) 屏風型の衝立てが組み合わさった場合であり、図 31 (a) の衝立てパーツが 2 つ、または図 31 (b) の衝立てパーツが 1 つ結合して m が 4 増すと、監視員は 1 人増す。

図 38 は (c) T 型すなわち図 31 (c) のような衝立てが組み合わさった場合であり、この衝立てパーツが 1 つ結合して m が 4 増すと、監視員は 1 人増す。

図 39 は (d) 十型すなわち図 31 (d) のような衝立てが組み合わさった場合であり、この衝立てパーツが 1 つ結合して m が 8 増すと、監視員は 2 人増す。

長方形図形領域に衝立てを配置する場合も同様である。複数の長方形図形または L 型図形のサブギャラリーの組み合わせに、これらの衝立てを組み合わせることで、任意の n, m について必要な場合を与える事ができる。

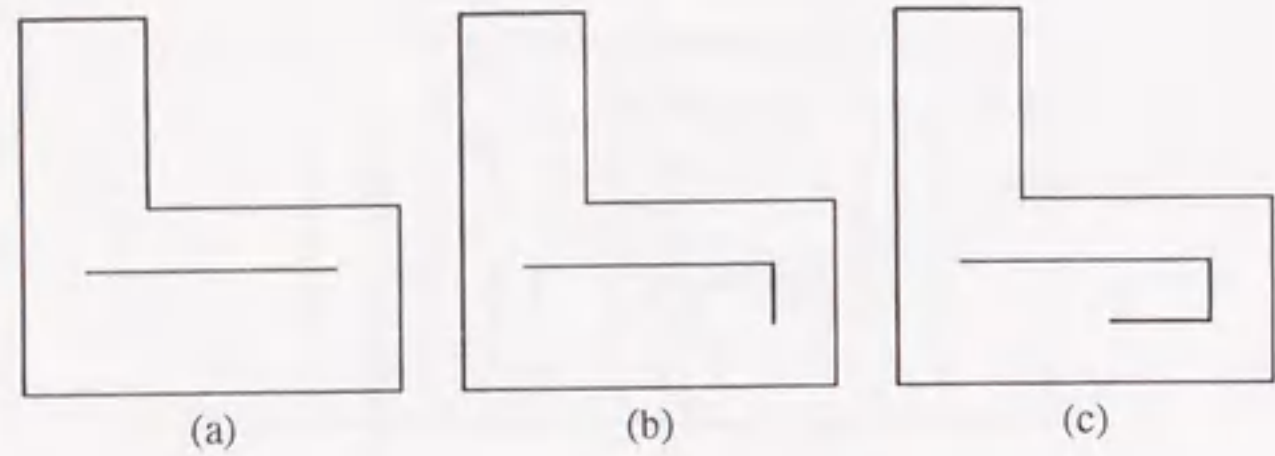


図 37: $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (1).

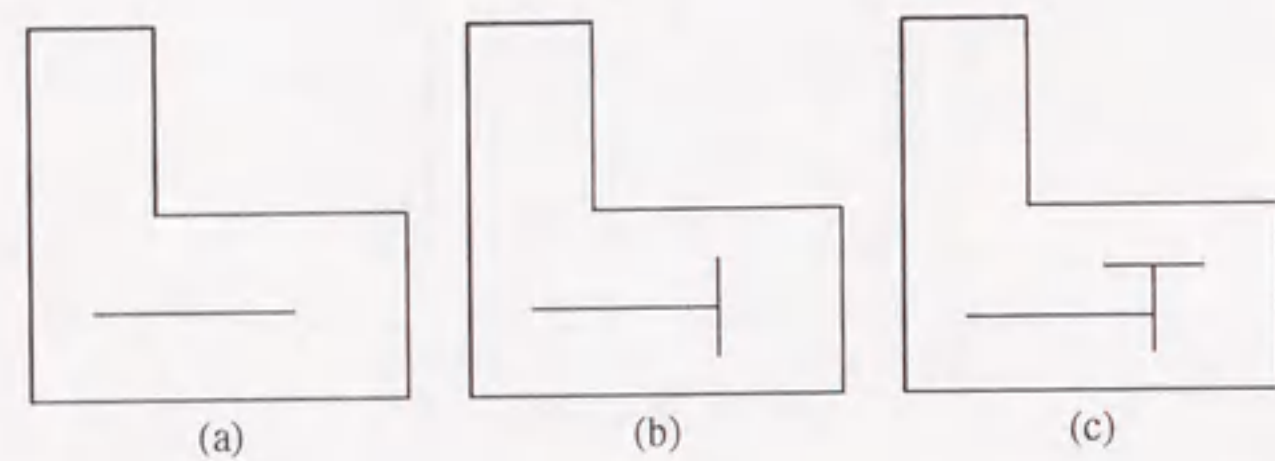


図 38: $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (2).

この際注意しなければならないのは、 $n = 4u + 2$, $m = 4v + 2$ の場合である。この場合は衝立てにより作られるサブギャラリーが、図 40 (b), (c) のように階段図形や L 型図形を作ることがないように、図 40 (a) のように四辺形を作るよう、衝立てを配置しなければならない。

これらの例示から、任意の n , m に対し $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ が必要条件であることを示す事ができた。以上の議論から次の定理が得られる。

定理 5 次数が 4 のノードを p 個、次数がそれ以外のノードを q 個持つ木であるような衝立てが、内部に壁に平行または垂直に配置される直 n 辺多角形のギャラリーでは、視野を 90 度に制限された $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人の監視員を壁に配置し、ギャラリー内部をくまなく監視することができる。この人数は必要かつ十分な値である。ただし m は木を囲む自然な直多角形の辺数とし、 $m = 4p + 2q$ である。

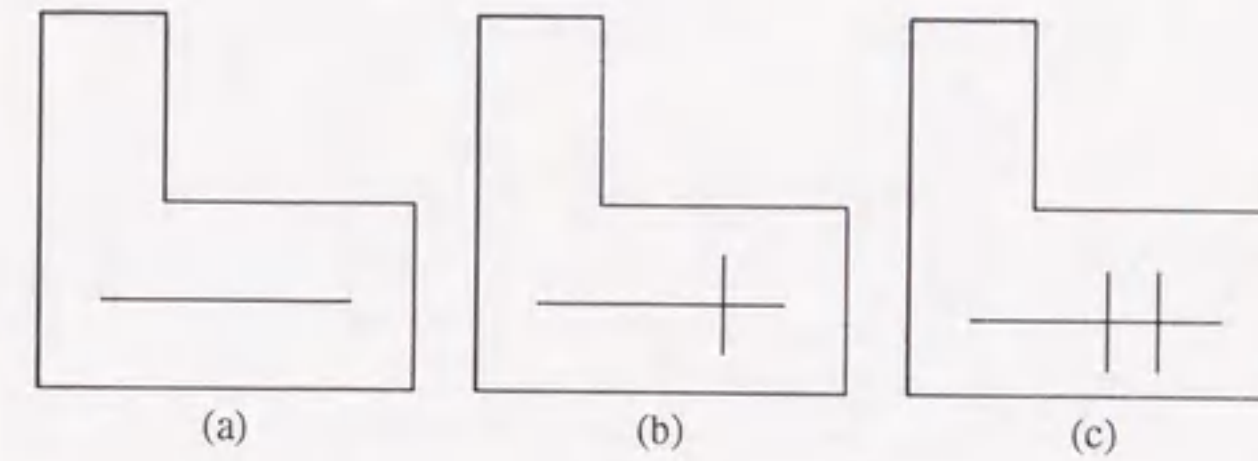


図 39: $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人が必要となる例 (3).

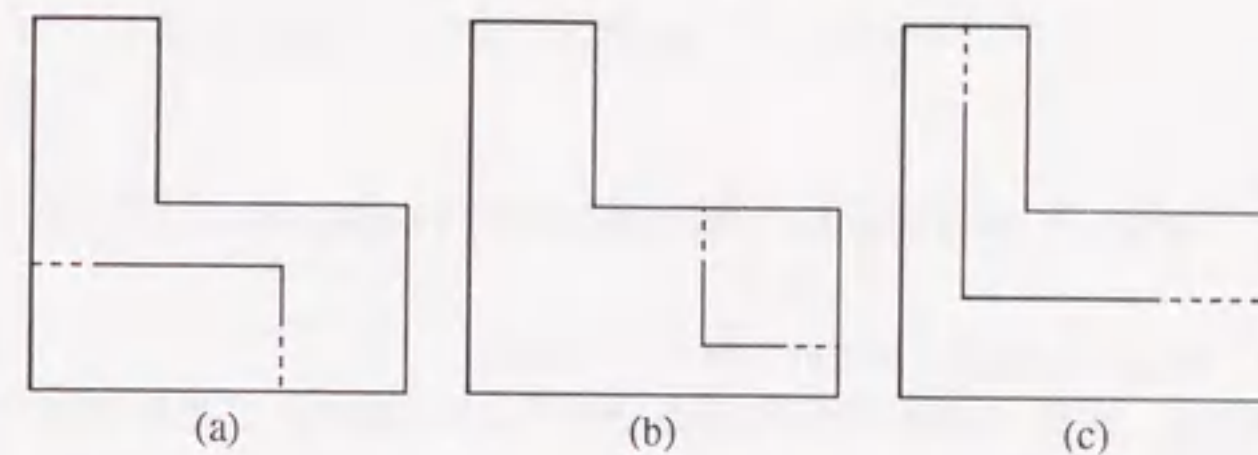


図 40: $n = 4u + 2$, $m = 4v + 2$ の場合.

4.1.4 衝立ての位置による補正

衝立ての位置によっては、

$$\lfloor (n_1 + n_2 + \dots + n_k)/4 \rfloor < \lfloor (n+m)/4 \rfloor$$

となり、配置する監視員の人数が明らかに $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人未満になる場合がある。ここでは、二つの場合を取り上げる。

第一に衝立てが図 41 (a) のような位置関係にあるときが考えられる。すなわち、単純衝立ての葉から枝と同直線状に補助線を引くとき、その補助線上に別の単純衝立ての葉があってその枝が一直線上に並ぶとき、これらの衝立ては図 41 (b) のように一つの衝立てとしてみなしてもよいから、一つの衝立てに連結して考えられる内側 2 個のノードは無いものとみなされる。このように連結して無い物とみなされる次数 1 のノードの数 s は 2 個であるから、 $m = 4p + 2q - 2s = 4$ となり m を 8 から 4 へ減らすことができる。このような場合を場合 I とする。

第二に図 42 (b) の衝立て (c) のように、初めに与えられたギャラリーが、衝立てがない場合に長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム [14] によってリフレクスから延長された補助線により分割されるときサブギャラリーの

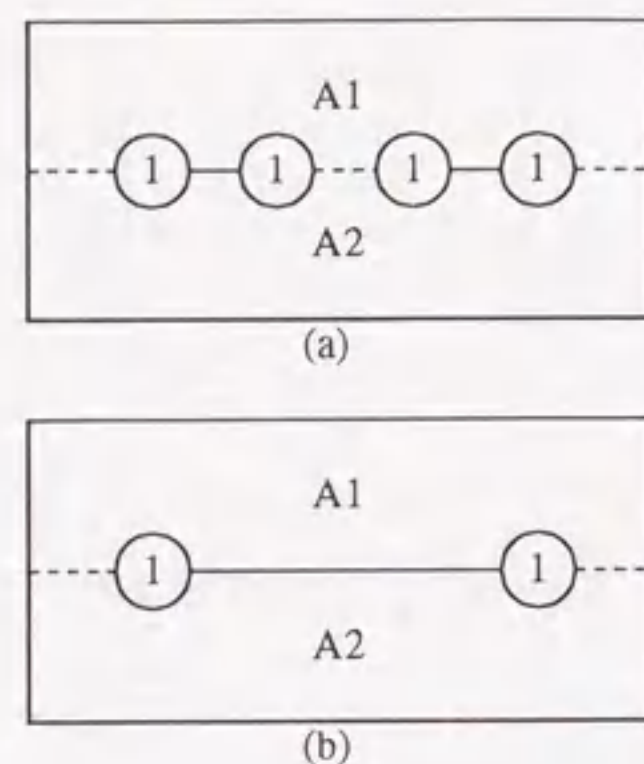


図 41: 一直線上に並ぶ複数の単純衝立てが存在する場合.

壁上に、衝立てが配置されている場合を考える.

この場合、次数1の葉を伸張した補助線により分割されてできるサブギャラリーの壁は、衝立てがない場合に [14] のアルゴリズムによって分割されたサブギャラリーの壁と一致し、衝立てによってそのアルゴリズムで対象とするサブギャラリーを構成する辺数を増加させないことがある. このような位置にあって監視員の増加に寄与しない衝立ては、監視員の配置を考慮する際にはあらかじめ取り去って数えないようにしてもよい. このような場合を場合 II という.

図 42 (b) では、衝立ての位置を考慮しない場合 $n = 10$, $m = 4p + 2q = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$ となり監視員は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = 4$ 人となり十分ではあるが、衝立ての位置を考慮すれば、衝立てが無い場合 (図 42 (a)) にリフレクスを始点として延長された補助線で分割されるサブギャラリーの壁と同一線上にある衝立て (c) は、衝立てが存在することで監視員の増加には寄与しない. よって、衝立て (c) の衝立てを取り去って考えてよい. この衝立て (c) を構成する次数1のノードの数 t は2個であるから、 m から $2t$ を除いて増加させる監視員数を考える. $m = 4p + 2q - 2t = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4$ となり監視員はより少ない $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = 3$ 人で十分であることがわかる.

以上で考察されたように、監視員を配置する前に衝立ての木の位置関係により、監視員の増加に寄与しない衝立てを再配置または排除する事ができる. このような方法によってより少ない必要十分な監視員の数を求めることができる.

補助定理 4 木が、次数が4のノードを p 個、次数がそれ以外のノードを q 個持ち、さらに、場合 I で無視される衝立て上の葉の数が s , 場合 II で無視さ

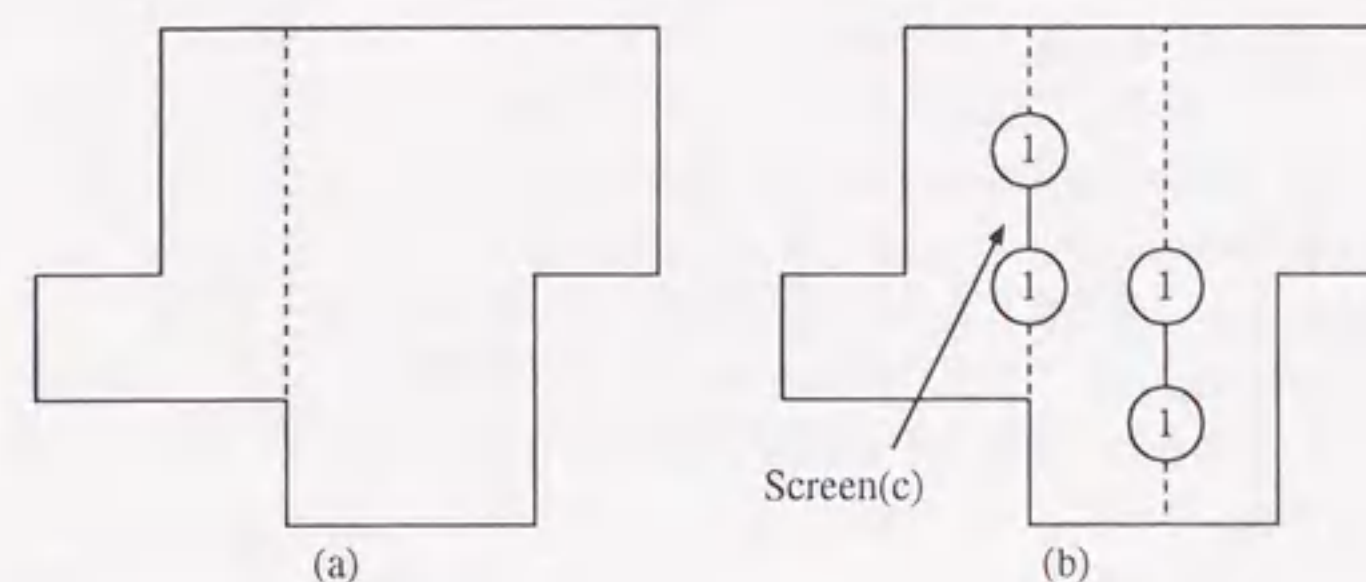


図 42: 長方形分割によって分割されるサブギャラリーの壁上に衝立てがある場合.

れる衝立て上の葉の数が t とすれば、必要十分な監視員の数 g は、

$$g = \lfloor (n+m)/4 \rfloor \quad (3)$$

$$(m = 4p + 2(q - s - t))$$

となる. この数は、必要十分である.

4.1.5 アルゴリズム

最後に、衝立ての位置も考慮した監視員配置アルゴリズムを述べる.

1. 衝立ての位置により、衝立ての木を再配置または除去する.
2. 衝立ての端点 (次数1のノード) を始点とし壁面に至るまで補助線を引き、ギャラリーを分割する.
3. 分割された各々のサブギャラリーが、長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム [14] により、さらに分割できる場合は分割する.
4. 分割された各々のサブギャラリーに監視員を配置する

図 28 の場合、葉を始点とし壁面に至るまで補助線を引くと、ギャラリーは、 A_1, \dots, A_5 に分割される. さらに、 A_2 は、長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズムにより分割され、監視員は、6 人必要となる.

ここで、与えられた衝立てのあるギャラリーに対して、そのギャラリーが衝立てがない場合に分割されるサブギャラリーの分割の仕方により、場合 II のように監視員の増加に寄与しない衝立ての数は異なることに注意しなければならない.

また、与えられた衝立てのあるギャラリーに対して、そのギャラリーが衝立てがない場合に分割されるサブギャラリーの壁にある衝立てを、常に機械的に取

り除いて考えてよいわけではないことにも注意しなければならない。衝立てがない場合に、必要最小限の監視員数で監視できるような分割法のサブギャラリーよりも、必要な監視員数が増えてしまう分割法のサブギャラリーを利用するほうが、場合IIのように監視員数の増加に寄与しない衝立てが多く存在することもある。

すなわち、このアルゴリズムは監視員の配置数の最小上限を越えないことを保証し、さらに、できるだけ少ない人数の監視員を壁上に配置するものであるが、最小人数で監視できる監視員配置を与える最適配置を保証するものではない。

4.2 視角 360 度の監視員の配置問題

4.2.1 はじめに

前節に続き衝立てのある直多角形ギャラリーでの配置問題について考察する。ここでは、衝立てのある直多角形に、視角が限定されない（視角が 360 度である）監視員を配置するときに必要な十分となる人数を示した。また衝立ての配置によっては、この必要十分な人数よりも明らかに少ない人数で監視できる場合がある。そこで、より少ない人数を配置して監視する方法も示した [16]。監視員の視角が限定されないことにより、衝立てという視界を邪魔するものが存在しても、視角が 90 度のときに比べ、より少ない監視員を配置して監視することができる可能性があることが明らかにされる。

4.2.2 十分性の検証

4.1 章では、 n 辺直多角形で囲まれたギャラリー内部に、壁に平行または垂直に衝立てが配置されたとき、ギャラリーの壁（辺または頂点）上に、視角が 90 度に限定された監視員を配置し、内部をくまなく監視する際に、必要十分な監視員の人数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ であることが示された。ただし、 $m = 4p + 2q$ であり、衝立てを木とみたとき木の次数 4 のノードの個数を p 、それ以外のノードの個数を q としている。

監視員の視野が制限されていないとき、内部を監視するのに十分な監視員の人数は、[15] の視角 90 度の監視員の配置位置の各々に視角 360 度の監視員を配置すれば監視できることから、 $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ で十分であることはあきらかである。

ここでは視角が 360 度であることによって、視角が 90 度のときに比べ、より少ない監視員を配置してギャラリー内部を監視できることを示す。

本論分では特に衝立てが単純衝立てである場合について考察した。衝立てが単純衝立てである場合、衝立ての個数を k 個とすると、衝立て 1 本ごとに $m = 4$ であることから、十分な監視員数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor + k$ であって、単純衝立て 1 個ごとに監視員が 1 人増えることになる。しかし、監視員の視角が 360 度であることにより、衝立てが増えても監視員を増やす必要が無い場合があり、このとき、十分な監視員は $\lfloor n/4 \rfloor + k$ より小さくなることを示す。

十分な監視員数を検討するには、[14]、[15] と同様ギャラリーをサブギャラリーに分割し、その各々のサブギャラリーに監視員を配置すればよい。ここで監視員の視角が 90 度であるとき、長方形図形および L 型図形に分割されたサブギャラリーを監視するために配置される位置は、監視員が point guard であっても vertex guard であっても図 7 のコーナーであった。これに対し、視角が 360 度の場合には内部全体を監視可能となる配置位置は図 43 のようになる。

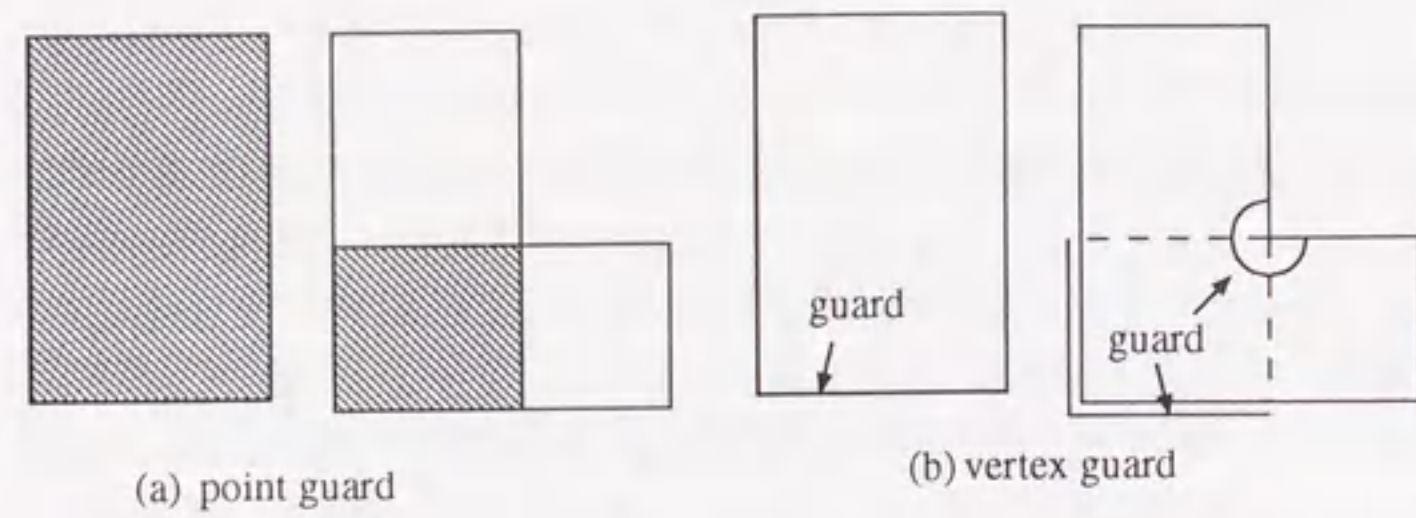


図 43: 視角 360 度の監視員の配置位置.

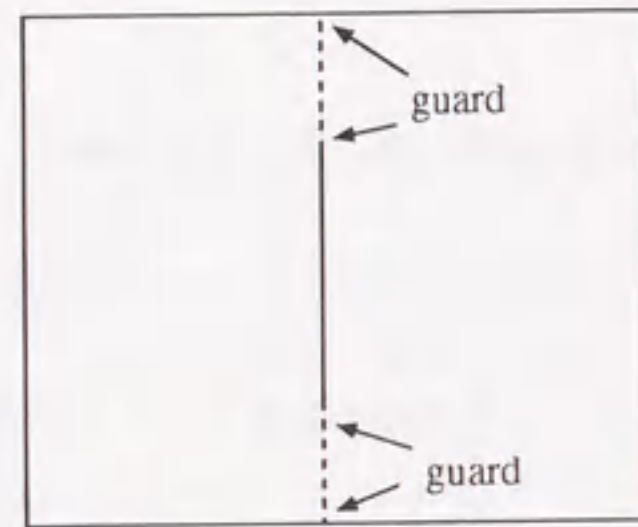


図 44: 監視員を増やさない衝立ての配置例 (1).

監視員が point guard の場合は図 43 (a) の斜線部のどこか、監視員が vertex guard の場合は図 43 (b) の長方形図形では辺上、L 型図形では図形中央の正方形部のリフレクスおよびその正方形の辺と L 型図形の辺の交点となる L 型辺上に監視員を配置したときその内部を 1 人で監視できる。この領域を監視員配置可能域という。初めにサブギャラリーに単純衝立てが 1 個存在する場合を考える。

場合 1 図 44 のように $n = 4u$ の長方形サブギャラリーに単純衝立てが 1 個存在する場合、360 度の視角を監視員が持つことで視角が 90 度である場合と違って衝立ての影響を受けない。すなわち、このときは視角 360 度の監視員を衝立ての端点または、葉の延長線とギャラリーの壁との交点のいずれかに監視員を置けば衝立てがない場合から人数を増やすことなく監視できる。

場合 2 $n = 4u + 2$ の L 型サブギャラリーに単純衝立てが 1 個存在する場合には、衝立ての位置により監視員が増す場合と増さない場合がある。

単純衝立てが図 45 のように監視員配置可能域の境界に対し垂直で、葉を延

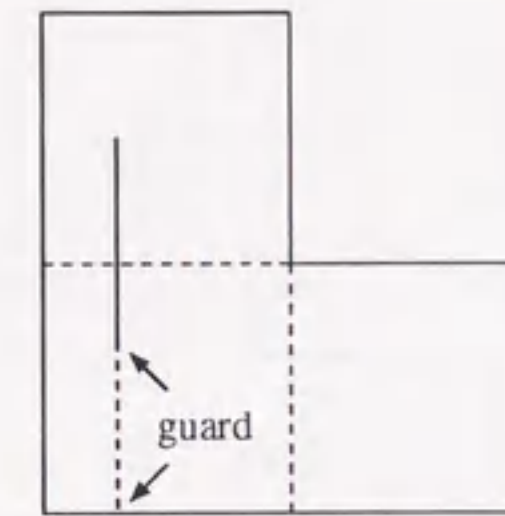


図 45: 監視員を増やさない衝立ての配置例 (2).

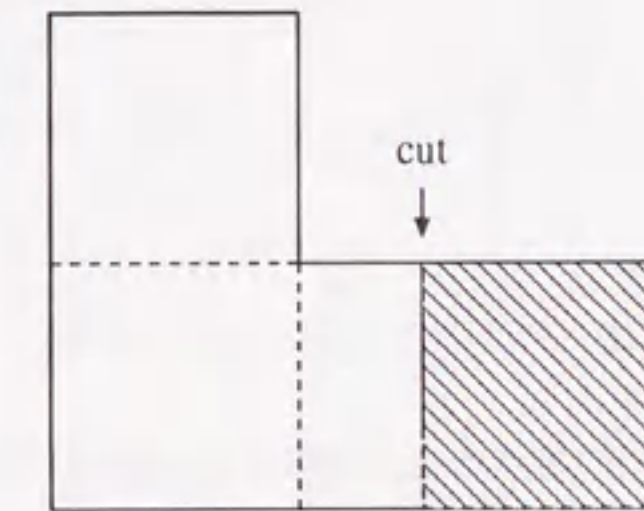


図 46: 監視員を増やす衝立ての配置例.

長した補助線と監視員配置可能域とに交点があるときは、その交点上に監視員を置けば監視員の数を増やすことなく監視できる。特にここで検討している頂点監視員の場合図で示されるギャラリーの壁または衝立ての端の点のどちらかに配置すればよい。

場合 3 場合 2 に対し図 46 のような場合には、監視員配置可能域に平行な衝立ての葉を伸ばした延長線の補助線により L 型図形をカットし、新たにできたサブギャラリー (斜線域) に監視員を配置しなければならないので、衝立てを置くことにより、必ず監視員を増やさなければならない。

すなわち、ギャラリーに衝立てが存在するときには [15] と同様にギャラリーの葉を延長した補助線によりギャラリーをサブギャラリーに分割して考えることができる。監視員の視角が 360 度の場合には、上記の場合 1、場合 2 のように、隣接する 2 個のサブギャラリーを同時に 1 人の監視員で監視できる場合があり、このとき 2 個のサブギャラリーをまとめて 1 人の監視員を配置することができる。

複数の単純衝立てが存在する場合も同様に考えることができるが、2 個以

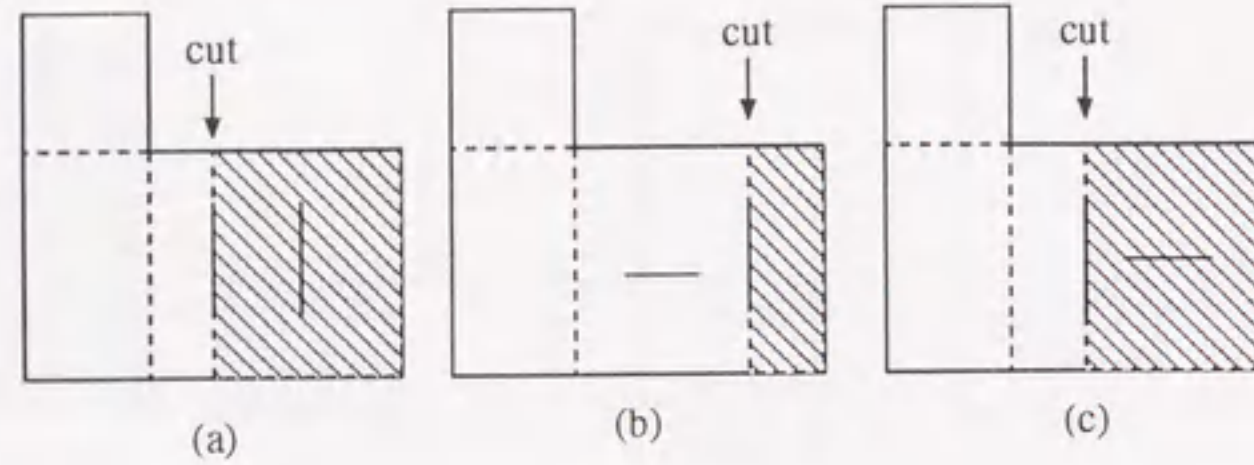


図 47: 複数の衝立ての配置例.

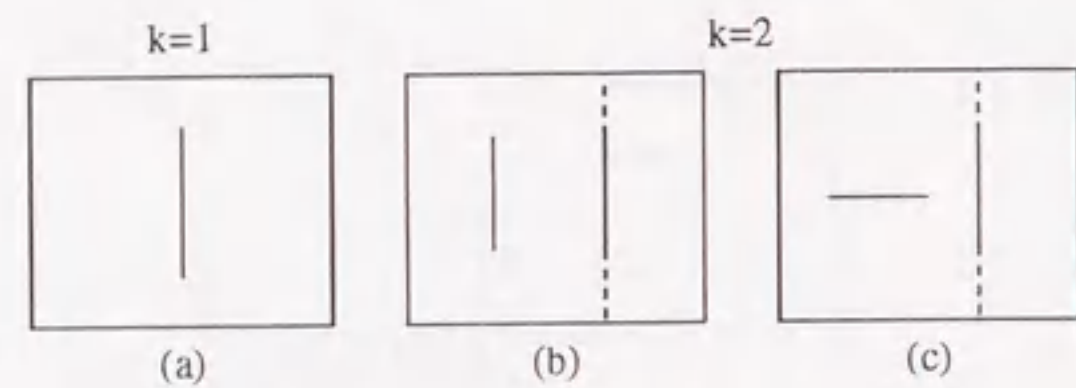


図 48: 複数の衝立てのまとめ例 (1).

上の単純衝立てが存在する場合には必ず 2 個 1 組で場合 1, 場合 2 のようにまとめることができる.

たとえば図 47 のように衝立てが位置するとき, 図 46 の場合と同様にして監視員配置可能域の境界と平行な衝立ての葉を伸ばした補助線で, 監視員配置可能域から領域の端に向かってサブギャラリーを分割していく. 図 47 (a) のカット線上の衝立ての右にある監視員配置可能域に平行な衝立て, および図 47 (b) (c) のカット線上の衝立ての左右にある監視員配置可能域に垂直な衝立ては監視員の人数を増やさない. これは単純衝立てが監視員配置可能域の境界に対し垂直な場合, 葉を伸ばした補助線により図 44 のようにサブギャラリーがまとめられることから監視員を増やさないからである. よってこれらの場合, 2 人で監視できる.

すなわち複数の単純衝立てのあるギャラリーに視角 360 度の監視員を配置する際には, ギャラリーを衝立ての葉を伸ばした補助線によりサブギャラリーに分割し, これらのサブギャラリーの隣接する 2 個を図 44, 図 45 のような監視員を増やさない配置の衝立てを含む 2 つのサブギャラリーで 1 組にまとめ, まとめられたギャラリーに対して 1 人の監視員を配置すればよい. 図 48, 図 49, 図 50 は場合 1, 場合 2, 場合 3 に対して, それぞれ複数の単純衝立てが存在するときのまとめ例を示した.

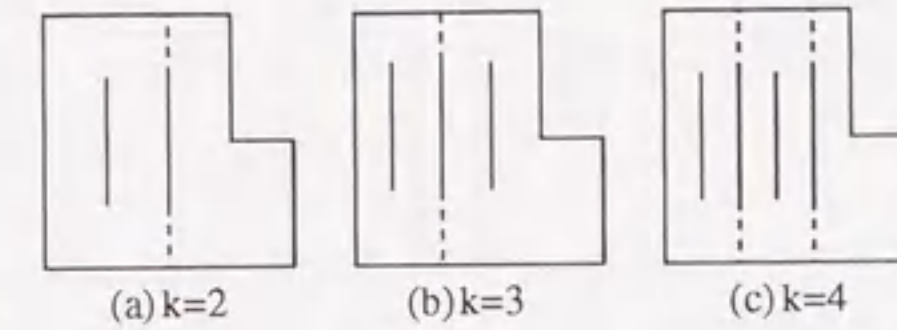


図 49: 複数の衝立てのまとめ例 (2).

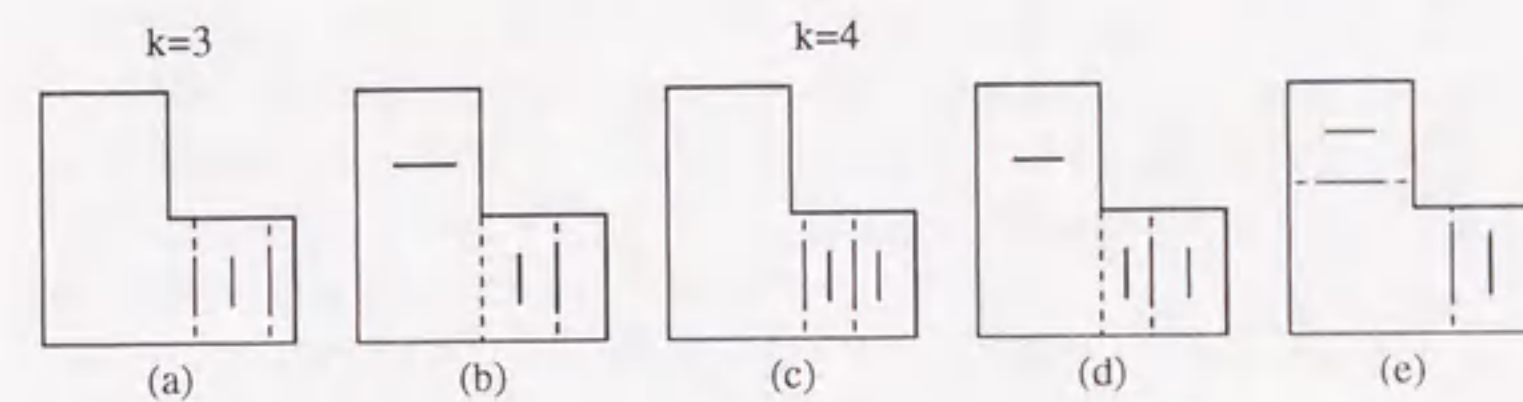


図 50: 複数の衝立てのまとめ例 (3).

このうちの 1 つ, 図 49 (a) の場合について説明する. 図 45 のような単純衝立てが監視員配置可能域の境界に対し垂直で, 葉を延長した補助線と監視員配置可能域とに交点がある場合にも, 図 51 のように複数の単純衝立てが存在するときは, 葉を伸ばした補助線で分割されたサブギャラリーのうち 2 個がまとめられ, 2 個の衝立てのうち一方は図 45 のように監視員数を増やさない. 図 51 を図 49 (a) のようにまとめるならば, guard1, guard2 の各々に対して図示されている点のいずれかに監視員を配置すれば監視可能であり, 衝立てが無いときに比べて 1 人だけ監視員を増せばよい. 他の場合も同様に考えられる.

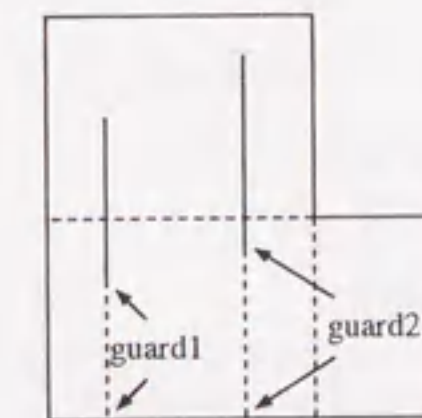


図 51: 複数の衝立ての配置例.

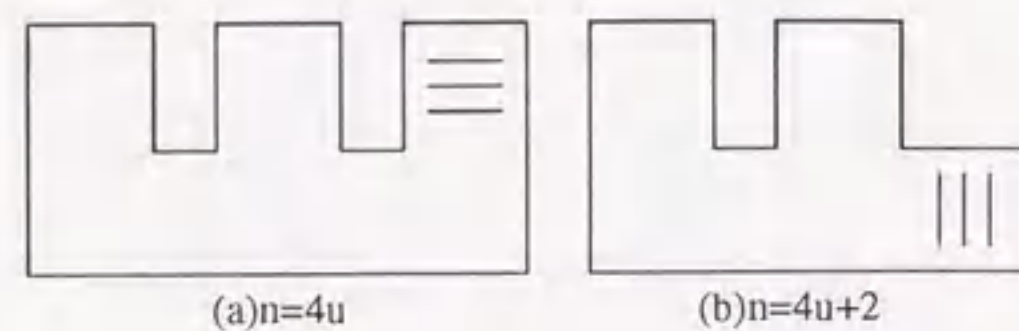


図 52: 必要な場合の例.

以上のように複数の衝立てのあるギャラリーに対し、衝立てが 2 個 1 組で図 44、図 45 のような監視員を増やさない衝立てを含んだサブギャラリーを作るよう分割されるので、その各々のサブギャラリーに対し 1 人ずつ監視員を配置すればギャラリー全体を監視できる。よって監視するのに十分な監視員数は $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ となる。ここで $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor$ では図 46 のように、衝立て 1 本で必ず 1 人監視員が必要である場合には十分な数にならないことに注意しなければならない。

4.2.3 必要性の検証

次に必要性について検証する。必要な監視員の数は、多角形ギャラリーの形状により 2 つの場合がある。

第 1 に、任意の直 n 多角形が与えられ、 $n = 4u + 2$ の場合を述べる。このとき任意の k 個の単純衝立てについて必要な監視員数は、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ となり、必要な監視員数の条件は十分な監視員数の条件と同数となる。

第 2 には、任意の直 n 多角形が与えられ、 $n = 4u$ の場合である。このとき任意の k 個の単純衝立てについて必要な監視員数は、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor$ となる。これは、 $n = 4u$ の場合には図 44 のように、衝立てが 1 個加わったときに必ず、監視員を 1 人増加させない場合が存在し、このため作られるサブギャラリーのうち 1 個は必ず監視員の増加に寄与しないため、 $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ が必要となることはない。

これら 2 つの場合について上限だけの人数が必要な場合を例示する (図 52)。以上により必要条件が与えられた。

4.2.4 衝立ての配置による補正

衝立ての位置によっては、配置する監視員の人数が明らかに $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$ 人未満になる場合がある。そのような場合に監視員を配置する前に衝立ての木の位置関係により、監視員の増加に寄与しない衝立てを再配置または排除することによって、より少ない監視員で全体を監視するため配置手順を示す。

視角 90 度の監視員で人数を減らせたのは、以下の 2 つの場合があった [15]。

第一は単純衝立ての葉から枝と同一直線状に補助線を引くとき、その補助線上に別の単純衝立てが一直線上に並ぶ場合である。このとき、これらの衝立ては、接続して一つの衝立てとしてみなしてもよいから、一つの衝立てに連結して考えられる内側 2 個のノードは無いものとみなされる。

第二は [14] で示された分割アルゴリズムにより分割される小ギャラリーの壁上に衝立てが配置されている場合である。すなわち、衝立てを考えない場合にギャラリーが長方形に分割され、分割に基づいて監視員を配置するアルゴリズムが [14] によって開発されていた。このときこの分割に利用されたリフレクスから延長された補助線により、分割されるときの小ギャラリーの壁上に、衝立てが配置されている場合である。

この場合、衝立ての次数 1 の葉を伸張した補助線により分割されてできる小ギャラリーの壁は、衝立てがない場合に [14] のアルゴリズムによって分割された小ギャラリーの壁と一致し、衝立てによってそのアルゴリズムで対象とする小ギャラリーを構成する辺数を増加させないことがある。このような位置にある衝立ては取り去って数えないようにすることができた。

以上の場合、視角 90 度の監視員を配置する前に衝立てを再配置または取り去ってから監視員を配置することで、より少ない人数の監視員を配置することができた。すなわち、次数 m で与えられた衝立てがあった場合、上記の位置にある衝立てをあらかじめ再配置または取り去って得られた衝立ての次数 m' により、配置問題を考えればよい。

このとき視角 90 度の監視員を配置した位置に、代わりに視角 360 度の監視員を配置しても上で述べた衝立てを再配置、または取り去る理由には全く影響が無い。よって、視角 360 度であっても視角 90 度の場合と同様、監視員を配置する前に衝立ての位置により、衝立ての木の再配置または除去することによって、より少ない監視員数を配置できる。

4.2.5 アルゴリズム

以上より視角 360 度の監視員を配する場合の配置アルゴリズムは、以下のようになる。

1. 衝立ての位置により、衝立ての木の再配置または除去する。
2. 衝立ての端点 (次数 1 のノード) を始点とし壁面に至るまで補助線を引き、ギャラリーを分割する。
3. 図 44、図 45 のような監視員を増やさないサブギャラリーにまとめてゆく。
4. 分割された各々のサブギャラリーが、長方形分割に基づく監視員配置アルゴリズム [14] により、さらに分割できる場合は分割する。
5. 分割された各々のサブギャラリーに監視員を配置する

上のアルゴリズムのステップ1, 衝立ての位置による補正において, 与えられたギャラリーが衝立てがない場合に分割されるサブギャラリーの分割の仕方により, 監視員の増加に寄与しない衝立ての数は異なることに注意しなければならない. このことは, 視角が360度の場合にも視角が90度のときと同様である.

また, 衝立てがない場合に, 必要最小限の監視員数で監視できるような分割法のサブギャラリーよりも, 必要な監視員数が増えてしまう分割法のサブギャラリーを利用するほうが, 監視員数の増加に寄与しない衝立てが多く存在することもまた視角が90度のときと同様に起こる.

さらにアルゴリズムのステップ3, 監視員を増やさないサブギャラリーへのまとめにおいても, いずれのサブギャラリーをまとめるかによって減らせる監視員数の効率に差が出る可能性がある.

よって, このアルゴリズムもまた監視員の配置数の最小上限を越えないことを保証し, さらに, できるだけ少ない人数の監視員を壁上に配置するものであるが, 最小人数で監視できる監視員配置を与える最適配置を保証するものではない.

4.3 まとめ

n 辺直多角形で囲まれたギャラリー内の任意の位置に, ギャラリーの壁に平行または垂直に衝立てが存在し視界が邪魔される場合に, 監視員をギャラリーの壁(辺または頂点)に配置しギャラリー内部を監視する際に必要十分となる監視員数, および, 衝立ての配置によって, その必要十分な監視員数より少ない人数で監視できる場合を挙げ, そのように少ない監視員を配置するための方法を示した.

監視員の視角が90度に制限されるときには必要十分な監視員数は $\lfloor (n+m)/4 \rfloor$, ($m = 4p + 2q$, p は次数4のノード数, q は次数それ以外のノード数)であった.

これに対して, 監視員の視角が360度である場合には, より少ない監視員数で監視できる. 特に衝立てが単純衝立てであるとき, 単純衝立ての数を k とすると, 視角が90度のときには, $\lfloor (n+m)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor + k$ となるが, 視角が360°のときには, $\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ で十分となり, より少ない監視員数で監視可能であることが明らかになった.

衝立てのある問題は, 全体として, 穴のある場合や刑務所外壁視問題と同様にして解くことができる.

5 結びと今後の課題

5.1 結び

現在、多種多様な制限を付加された条件下で研究がなされているアートギャラリー監視問題について、特に視野に制限を加えた条件下での監視員の配置問題を考察した。

すなわち、直 n 多角形アートギャラリーにおいて、視角に制限のある監視員を配置する、内部に視角を邪魔する障壁が存在するなどの制限が加えられた場合に、必要十分となる監視員数と、その配置アルゴリズムを考察した。

実際、監視員やライトを配置する上で、その視界が制限され妨げられることは多く起こることであり、監視員配置問題を実用する際に、このような制限の下で配置を考えるのは、有意義なことであると思われる。

第一に監視員の視角が90度に制限される場合について、そのような場合に監視員を直多角形のギャラリーの壁に接した状態で配置する監視問題について考察し、視角や配置場所に制限のない場合に必要とされる監視員の数 $\lfloor n/4 \rfloor$ と同じ人数でギャラリーの監視ができることを示し、具体的な配置アルゴリズムを与えた。

第二に n 辺直多角形で囲まれたギャラリー内の任意の位置に、ギャラリーの壁に平行または垂直に衝立てが存在し視界が邪魔される場合に、監視員をギャラリーの壁(辺または頂点)に配置しギャラリー内部を監視する際に必要十分となる監視員数、および、衝立ての配置によって、その必要十分な監視員数より少ない人数で監視できる場合を挙げ、そのように少ない監視員を配置するための方法を示した。

このとき監視員の視角が90度に制限される場合と、制限のない360度である場合を考え、監視員の視角によって必要十分となる監視員数とその配置位置が異なることも示した。

以上のように、ギャラリー内部に障壁が存在する、監視員の視角が限定されるなど、監視員の視野が制限を受けることは、実際のギャラリーでの監視員配置を考える場合に多く起こる可能性があるため、このような条件下での監視員配置を考察した本研究の結果は実用上、有用であると思われる。

本論文で述べた視角90度の監視員による必要十分な人数の上限、任意の衝立てを持つ場合の監視員の人数の上限はそれぞれ、著者がはじめて導いた新しい結果であることを付記しておく。

5.2 今後の課題

今後の問題としては次のような問題が考えられる。

- 視角90度の視覚を必ずしも壁と垂直、平行に置かない場合の監視位置を求める問題。
- 視角90度あるいは360度の監視員を常に最少人数で監視できるように配置する問題。
- 視角90度あるいは360度の監視員により多角形の内部と外部をくまなく監視できるように配置する問題。
- 任意形の直衝立てが存在する直多角形ギャラリーに視角360度の監視員を配置する問題。
- 一般多角形のギャラリーに衝立てが存在するときの監視問題。
- 視界の到達する距離を考慮した監視員の配置問題。

これらのいくつかは、NP困難、NP完全な問題に属し、必ずしも効率的なアルゴリズムが得られるものではないので、ニューラルネットワークなどヒューリスティックな方法による解法も考えられる。

謝辞 おわりに本研究の遂行にあたり、貴重なご指導とご助言を賜った岐阜大学工学部工学研究科の教授後藤宗弘先生、助手松本忠博先生に深く感謝いたします。

長期にわたる岐阜大学大学院博士課程への研修をこころよく、お認めいただき研究成果の発表の許可と論文執筆の機会を与えていただいた岐阜聖徳学園大学（旧聖徳学園女子短期大学）関係者の方々に深く御礼申し上げます。

上司として研究の便宜を図って下さいました元商経学科教授勝間昭一郎先生、また今回研修に際してご不便をおかけしたにもかかわらず、多々ご協力、応援して下さいました商経学科の先生方に深く御礼申し上げます。

これらの諸先生方の御協力なしには、本研究の遂行はできなかったと考え、厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] J. O'Rourke, "An Alternative Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem," *Journal of Geometry*, Vol.21, pp.118-130, 1983
- [2] J. O'Rourke, "Art Gallery Theorems and Algorithms," Oxford Univ. Press, 1987
- [3] J. O'Rourke, "Computational Geometry in C," Cambridge Univ. Press, 1993
- [4] J. E. Goodman, J. O'Rourke, "Handbook of Discrete and Computational Geometry," CRC Press, 1997
- [5] 服部, 中野, 西関, "単純多角形のサーチライトスケジューリング", 情報処理学会アルゴリズム研究会, 56-2, 1997
- [6] K. Sugihara, I. Suzuki, M. Yamashita, "The Search Light Scheduling Problems", *SIAM J. Comput.* Vol 19, pp.1024-1040, 1990
- [7] F. Hoffmann, "On the Rectilinear Art Gallery Problem(Extended Abstract)," in *Proc.ICALP(International Colloquium on Automata, Languages and Programming)'90*, LNCS(Lecture Notes in Computer Science) 443, Warwick, Springer Verlag, pp.716-728, 1990
- [8] F. Hoffmann, K.Kriegel, "A Graph Coloring Result and Its Consequences for Some Guarding Problems(Extended Abstract)," in *Proc.ISAAC'93*, LNCS(Lecture Notes in Computer Science) 762, Springer Verlag, pp.78-88, 1993
- [9] F. Hoffmann, "The Art Gallery Theorem for Rectilinear Polygons with Holes," Technical Report B-94-22, Freie Universitat Berlin, Fachbereich Mathematik Serie B, Informatik, Dec. 1994
- [10] F. Hoffmann, K.Kriegel, "A Graph-Coloring Result and Its Consequences for Some Guarding Problems," *SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics) J.Discrete Math*, Vol.9, No.2, pp.210-224, May 1996
- [11] E.Gyori, F.Hoffmann, K.Kriegel, Thomas Shermer "Generalized Guarding and Partitioning for Rectilinear Polygons," *Computational Geometry* 6, Elsevier, pp.21-44, 1996
- [12] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, J. Urrutia, "Illumination with Orthogonal Floodlights(Extended Abstract)," LNCS, 1004, Springer Verlag, pp.362-371, 1995

- [13] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer, J. Urrutia, "Illumination of Orthogonal Polygons with Orthogonal Floodlights," *Int. J. Comp. Geom. Appl.*, Vol. 8, No. 1, pp.25-38, 1998
- [14] 糟谷咲子, 後藤宗弘, 松本忠博, "視角 90 度の監視員の直多角形ギャラリーへの配置アルゴリズム", *電子通信情報学会論文誌 [A]*, VOL.J81-A NO.8, pp.1175-1180, 1998
- [15] 糟谷咲子, 松本忠博, 後藤宗弘, "視角 90 度の監視員による衝立てのある直多角形ギャラリーの監視問題", *電子通信情報学会論文誌 [A]*, 投稿中
- [16] 糟谷咲子, 松本忠博, 後藤宗弘, "視角 360 度の監視員による衝立てのある直多角形ギャラリーの監視問題—単純衝立て場合の一考察—", *岐阜聖徳学園大学短期大学部紀要*, 第三十一集, 1999

