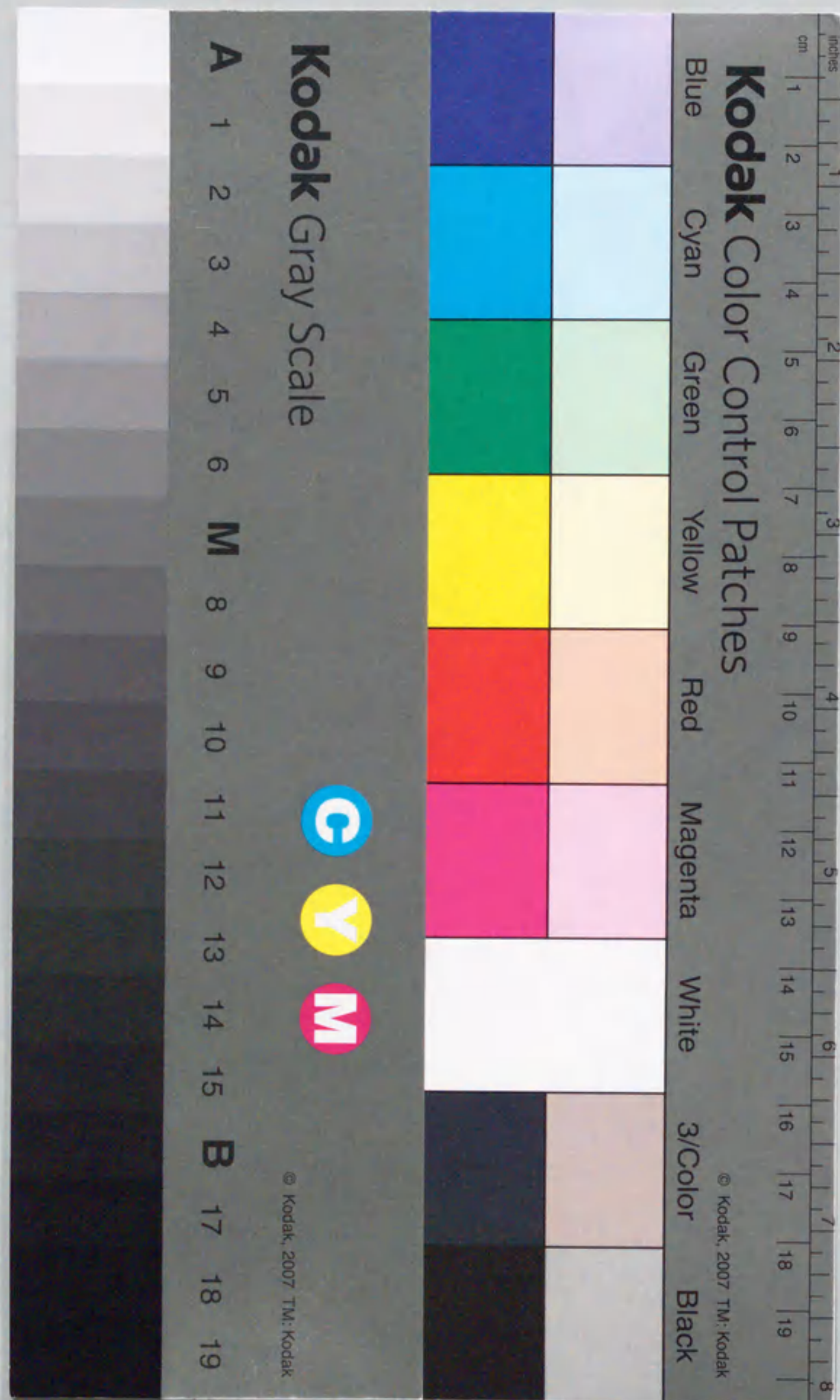


量子電子波導波回路用
計算機支援設計ソフトに関する研究

Computer Aided Design of Quantum Electron
Waveguide Circuits

平成 12 年 1 月

片山 清文



①

量子電子波導波回路用
計算機支援設計ソフトに関する研究

Computer Aided Design of Quantum Electron
Waveguide Circuits

平成 12 年 1 月

片山 清文

目次

第1章 序論	1
第2章 従来の境界積分方程式	4
2.1 序言	4
2.2 基本方程式	4
2.3 観測点が領域 S_2 にある場合	5
2.4 観測点が導波路外部にある場合	6
2.4.1 観測点が領域 S_1 にある場合	6
2.4.2 観測点が領域 S_3 にある場合	7
2.5 従来の積分方程式	7
2.6 結言	8
第3章 導波モード分離型積分方程式	9
3.1 序言	9
3.2 界の分離	9
3.2.1 観測点が領域 S_2 にある場合	10
3.2.2 観測点が領域 S_1, S_3 にある場合	12
3.3 透過係数, 反射係数	13
3.4 導波モード分離型境界積分方程式	15
3.4.1 観測点が領域 S_2 にある場合	15
3.4.2 観測点が領域 S_1, S_3 にある場合	15
3.5 結言	16
第4章 2ポート電子波回路の解析	17
4.1 序言	17
4.2 直線導波路	17
4.3 折れ曲がり回路	18
4.4 円形曲がり回路	21
4.5 電子が導波路外部に放射する場合	24
4.6 曲がり部内側を円形とした場合	26
4.7 曲がり部外側を円形とした場合	29
4.8 結言	31
第5章 Y型分岐電子波導波路	33
5.1 序言	33

5.2	従来の積分方程式	33
5.3	従来の積分方程式	34
5.4	透過係数, 反射係数	35
5.4.1	観測点が領域 S_2 にある場合	35
5.5	導波モード分離型積分方程式	39
5.6	結言	40
第6章	Y型分岐電子波導波路の解析	41
6.1	序言	41
6.2	電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低い場合	41
6.3	電子のエネルギーが導波路内部のポテンシャルより高い場合	46
6.4	結言	48
第7章	導波モード分離型積分方程式 (一般表現)	49
7.1	序言	49
7.2	座標系と界の分離	49
7.3	導波モード分離型境界積分方程式の一般表現	50
7.4	θ 微分	54
7.4.1	透過係数・反射係数	54
7.4.2	数値解析例	55
7.5	結言	56
第8章	結論	58
	参考文献	59
	発表論文および口頭発表	62
	付録A モード関数	63
	謝辞	66

第1章 序論

近年, 回路集積化のための半導体微細加工技術や超薄膜結晶成長技術の発展により, サブミクロンスケール (10nm 程度の大きさ) の極微構造の作製が可能となってきた. 電子は金属や半導体中を伝搬していくときには, 非弾性散乱 (散乱によって位相情報を失う散乱) あるいは, 弾性散乱 (散乱によって位相情報を失わない散乱) しながら伝搬していく. しかし, サブミクロンスケールの極微構造では, 不純物含有率が非常に低いときには電子は弾性散乱のみ, あるいは, 全く散乱が起こることなく伝搬 (バリスティック運動) させることができる. このような極微構造をもつ半導体素子にバリスティック運動をする電子を閉じ込めると, 電子の波としての性質, いわゆる量子干渉現象が顕著に現れる. 次世代半導体素子として, この効果を利用した, 少電力, 高速動作が可能な量子電子波素子が注目され, 様々な研究がなされている [1]–[5].

量子電子波素子の中で最も基本的なものは, 導波チャネル, すなわち電子波導波路と呼ばれるものである. 将来, 各種の電子波デバイスを結合するために複雑な形状を持つ電子波導波路が多用されると考えられる. したがって, このような導波路回路の計算機支援設計 (CAD: Computer Aided Design) ソフトの開発は最も基本的な課題である.

電子波の基本方程式は Schrödinger 波動方程式である. 1 電子の場合, 電子のエネルギーが一定の場合は Helmholtz 形の方程式となり, Maxwell 方程式から導出される電磁波のそれと同じである. したがって, 光-マイクロ波導波理論の手法がそのまま適用できる [6]–[7]. 導波路ポテンシャル分布が, 導波路外部で無限大という近似のもとでは, 電子は導波路内部だけに存在し, 導波路中を完全反射により伝搬していく. この場合, 電子波導波回路は形式的に金属導波管の問題と全く同じ問題となり, これまでに多くの解析報告例がある [6]–[16]. さらに, 最近では外部磁場がある場合にも拡張されている [17]–[18].

導波路外部ポテンシャルが有限であると仮定した場合, 電子波導波路は誘電体導波路と類似した問題となる. 電子のエネルギーが, 導波路外部のポテンシャルより低い場合, 電子の波動関数が導波路外部に浸み出すが, 電子は導波路から放射されることなく導波路に沿って伝搬する. しかし, 電子の波動関数が導波路外部にも存在するため, トンネル効果などの量子効果を考慮することができる. この場合の解析報告例は, 直線導波路の伝搬問題がほとんどであり [19]–[24], 複雑な回路解析はごくわずかである [13], [25].

電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高い場合は, 電子波は導波路中を全反射して伝搬するため, 導波路に不連続部がある場合, 導波路外部に放射されることがある. この場合の解析は誘電体導波回路とよく似た問題となるが, この場合の解析報告例は見当たらない.

導波管回路では境界値問題として定式化し数値的に精密に解き得るが, 誘電体導波回路の場合は, 幾何光学近似, Beam Propagation Method (BPM) 等, 定式化の段階で何らかの近似を利用しており, 厳密な境界値問題として取り扱った精密な解析手法は非常に少数である [33].

電子波回路の解析手法としてこれまで提案されている解析手法は、いずれも誘電体光導波路の解析手法としてよく知られているものばかりである。これは、電子波回路の解析手法が、誘電体光導波路の解析手法として用いられてきた手法を応用することができることを示唆している。本研究では、誘電体光導波路用 CAD の基礎理論として提案されている導波モード分離型境界積分方程式 [25], [26] を電子波回路に適用した。これまで提案されている解析手法は、いずれも近似解法、あるいはモード展開法を利用しているため、複雑な3次元構造の電子波導波回路を解析するのは容易ではないと考えられる。本研究で提案する導波モード分離型積分方程式による解析手法は、数学的に厳密な解析手法であり、モード展開を利用しないため、3次元構造の電子波回路への拡張も容易であると思われる。また、これまで知られてる手法を用いた導波路不連続問題の取り扱いでは、導波管のように波が導波路外部に放射しない場合と、開放型導波路のように導波路外に放射する場合とを同じように取り扱うことはできない。電子波導波路問題では、電子のエネルギーに依存して双方の性質が現れる。CAD ソフトでは、これらの場合についてできる限り同じ取り扱いができることが望ましい。導波モード分離型境界積分方程式では、両性質を持つ問題を Green 関数だけを変えることにより、ほぼ同じアルゴリズムを用いて解析することができる。さらに、多モード、多ポートへの拡張も容易にできる [27], [31]。この性質は CAD ソフトのソルバーとして極めて望ましい性質である。したがって、導波モード分離型積分方程式は、CAD の開発の基礎理論として有用であると考えられる。本研究では、導波モード分離型積分方程式を適用し、量子電子波回路用 CAD の開発は可能かを調べることを目的としたものである。

本論文では、2ポート電子波回路、Y型分岐電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式の導出過程を示し、導出した方程式を用いた数値解析結果を示しながら、その数学的妥当性、および解析手法の有効性を述べた [27]–[31]。解析には、展開関数として2次関数、試験関数として Delta 関数とした境界要素法 (モーメント法) を用い数値的に解いた。

第2章では、基本方程式である Schrödinger 波動方程式から、単一モード条件を満足する2次元2ポート電子波導波路に対する従来の積分方程式の導出過程を述べた。導出した積分方程式は、無限長の積分路をもつため、計算機による数値計算を行うことが困難である。

第3章では、第2章で導出した従来の積分方程式から、導波モード分離型積分方程式を導出する過程を述べた。従来の積分方程式では無限長の積分路を含むためこのままでは計算機での数値計算が困難であるが、全波動をモード条件を満足する波動と、モード条件を満足しない波動に分離することにより、数値計算が可能な積分方程式 (導波モード分離型積分方程式) の導出過程について述べた。

第4章では、第3章で導出した導波モード分離型積分方程式 (GMEIE: Guided-Mode Extracted Boundary Integral Equations) を自明な解をもつ直線電子波導波路に適用し、導波モード分離型積分方程式の数学的妥当性を示した。更に、2ポート曲がり電子波回路に導波モード分離型積分方程式を直角折れ曲がり電子波回路、円形曲がり電子波回路に適用し、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高い場合、低い場合について、それぞれ電子の存在確率密度分布、回路の透過特性について調べた。

第5章では、2ポート電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式を拡張し、2ポート電子波回路の積分方程式の導出と同様に、Y型分岐電子波導波路に対する導波モード分離型積分方程式が導出することができることを述べた。

第6章では、第5章で導出したY型分岐電子波導波路に対する導波モード分離型積分方程式を数値計算結果を示しながら、導出した積分方程式の数学的妥当性について調べた。導波路外部ポテンシャルと電子のエネルギーに対する回路の透過特性について調べた。また、導波路の開き角に対する透過特性についても調べた。

第7章では、第3章、第5章で導出した電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式を、より一般的な電子波回路、つまり、多モード、多ポート電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式の導出について述べた。多モード電子波回路の場合、透過係数、反射係数を求める条件式が、第2章、第3章のままでは不足するが、透過、反射係数に関する条件式を導波路が x 軸となす角 θ について偏微分することにより、条件式を未知数の数だけ導出することができる。この手法で導出した条件式を第4章で解析した回路に適用し、条件式が妥当であることを述べた。

第8章では、本論文の結論をまとめ、今後の課題について述べた。

第2章 従来の境界積分方程式

2.1 序言

電子は Schrödinger 波動方程式に従ってその振るまいが決まる。1 電子の場合、電子のエネルギーを一定とすれば Helmholtz 形の方程式となり、Maxwell 方程式から導出される電磁波のそれと同じである。

本章では、単一モード条件を満足する 2 つの半無限長電子波導波路が任意形状結合部で結合された 2 次元 2 ポート電子波回路を考える。電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより低い場合、高い場合について、それぞれ従来の積分方程式を基本方程式である Schrödinger 波動方程式から導出する過程を述べる。

2.2 基本方程式

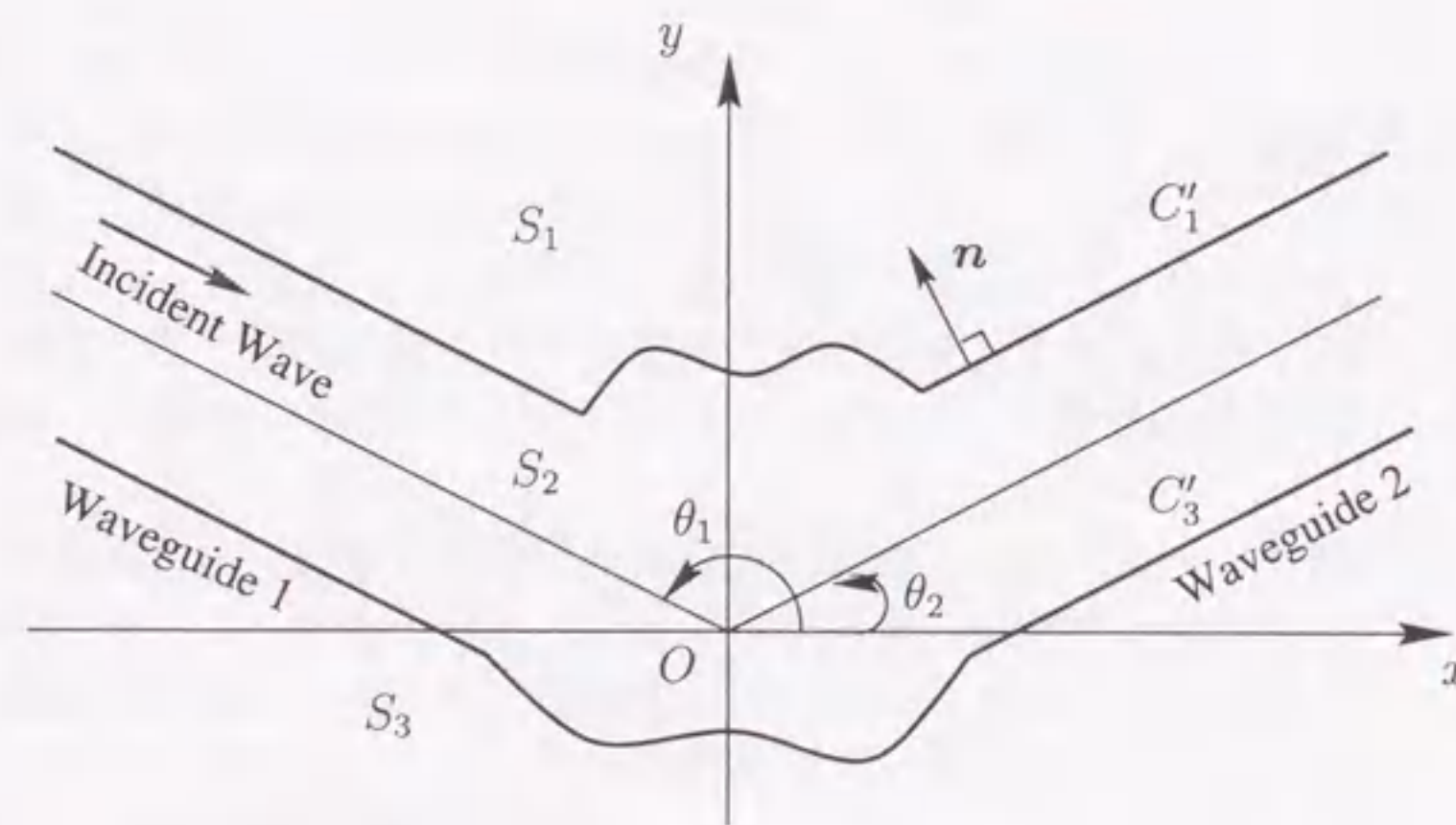


図 2.1 任意形状結合部をもつ 2 次元 2 ポート電子波回路

図 2.1 のような任意形状結合部をもつ 2 次元 2 ポート電子波回路を考える。各導波路は単一モード条件を満足するものとする。また、各領域は均一物質であると仮定し、各領域 S_1 , S_2 , S_3 のポテンシャル分布をそれぞれ一定値 V_1 , V_2 , V_3 とする。領域 S_1 と領域 S_2 の境界を C_1' 、領域 S_2 と領域 S_3 の境界を C_3' とする。導波路 1 が x 軸となす角を θ_1 、導波路 2 が x 軸となす角を θ_2 とする。電子自身が作るポテンシャルを無視し、導波路を伝搬する電子のエネルギーを一定値 E とする。半導体結晶中の電子のエンベロップ関数 (以下、電子波と呼ぶ) を $\psi(\mathbf{x})$ と記述するれば、電子波 $\psi(\mathbf{x})$ は、次式のような時間を含まない

2.3 観測点が領域 S_2 にある場合

Schrödinger 波動方程式を満たす。

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + [V(\mathbf{x}) - E]\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1)$$

ただし、 $\hbar = h/(2\pi)$ 、 h はプランク定数、 m^* は電子の有効質量を表しており、導波路を構成する半導体に依存する。また、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

である。

2.3 観測点が領域 S_2 にある場合

電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより小さい場合、つまり、 $1 - V_2/E > 0$ 、 $V_i/E - 1 > 0 (i = 1, 3)$ の場合、電子波は回路に沿って伝搬し、導波路不連続部において回路から放射する電子波は存在しない。このとき、式 (2.1) を次のように式変形する。

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + k^2\left[1 - \frac{V_2}{E}\right]\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.3)$$

ただし、 $k^2 = 2m^*E/\hbar^2$ であり、 k を波数と呼ぶ。式 (2.3) を積分方程式を利用して解くために、次式を満足するような 2 次元自由空間 Green 関数 $G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ を考える。

$$\nabla^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') + k^2\left[1 - \frac{V_2}{E}\right]G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.4)$$

ただし、

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}\left(k\sqrt{1 - \frac{V_2}{E}}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \quad (2.5)$$

である。 $H_0^{(2)}$ は 0 次第 2 種ハンケル関数である。式 (2.3)、式 (2.4) より、つまり、(2.3)・ $G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}) \cdot (2.4)$ より、

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\nabla^2\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\nabla^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

式 (2.6) において、観測点 \mathbf{x} と波源 \mathbf{x}' を入れ換え、Green 関数の相反性を適用すると、

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\nabla'^2\psi(\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}')\nabla'^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') \quad (2.7)$$

ただし、

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (2.8)$$

となる。ただし、 \mathbf{x} は観測点、 \mathbf{x}' は波源を表している。式 (2.7) を導波路内部および任意形状結合部を囲む領域 (領域 S_2) で面積分を行うと次式のようなになる。

$$\iint_{S_2} [G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\nabla'^2\psi(\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}')\nabla'^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' = \iint_{S_2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.9)$$

この左辺に Green の定理を適用する.

$$\int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' = \iint_{S_2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.10)$$

ただし, $C = C'_1 + C'_3$ であり, $\partial/\partial n'_2$ は, 導波路境界外向き法線方向微分を表している. 式(2.10)の右辺に Delta 関数の性質を利用することにより次式のような波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ に対する従来の境界積分方程式が得られる.

$$\int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' = \psi(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

2.4 観測点が導波路外部にある場合

観測点が領域 S_1 , S_3 にあるとき式(2.1)を次のように式変形する.

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) - k^2 \left[\frac{V_i}{E} - 1 \right] \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 3) \quad (2.12)$$

2.4.1 観測点が領域 S_1 にある場合

観測点が領域 S_1 にあるとき, 電子は式(2.12)に従う. 式(2.12)を解くために次式を満足するような2次元自由空間 Green 関数 $G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ を考える.

$$\nabla^2 G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - k^2 \left[\frac{V_i}{E} - 1 \right] G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (i = 1, 3) \quad (2.13)$$

ただし,

$$G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(k \sqrt{\frac{V_1}{E} - 1} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right) \quad (2.14)$$

であり, K_0 は 0 次変形 Bessel 関数である. 式(2.12), (2.13)より, つまり, (2.12)・ $G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}) \cdot$ (2.13) より,

$$G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla^2 G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

となる. 式(2.16)において, 観測点 \mathbf{x} と波源 \mathbf{x}' を入れ換える.

$$G_1(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G_1(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') \quad (2.16)$$

ただし,

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (2.17)$$

である. Green 関数の相反性 ($G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = G(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$) より, 式(2.16)は次式のようになる.

$$G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \quad (2.18)$$

式(2.18)を領域 S_1 で面積分を行うと次式のようなになる.

$$\iint_{S_1} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}') - \psi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}' = \iint_{S_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.19)$$

この左辺に Green の定理, 放射条件を適用する.

$$\int_{C'_1} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' = \iint_{S_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.20)$$

ただし, $\partial/\partial n'_1$ は, 境界外向き法線方向微分を表している. 式(2.19)の右辺に Delta 関数の性質を利用することにより次式のような波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ に対する境界積分方程式が得られる.

$$\int_{C'_1} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' = \psi(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

2.4.2 観測点が領域 S_3 にある場合

観測点が領域 S_3 にある場合, 観測点が領域 S_1 にある場合と全く同様に次式のような波動関数 $\psi(\mathbf{x})$ に対する積分方程式を得ることができる.

$$\int_{C'_3} \left[G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_3} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_3} \right] dl' = \psi(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

2.5 従来の積分方程式

以上より, 観測点の位置を考慮にいれば, 式(2.11)から, 次式のような従来の積分方程式を得ることができる.

$$\left. \begin{array}{ll} \psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' \quad (2.23)$$

また, 同様に式(2.21), 式(2.22)からそれぞれ次式のような従来の積分方程式を得ることができる.

$$\left. \begin{array}{ll} \psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_1) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C'_1) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_1, C'_1) \end{array} \right\} = \int_{C'_1} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_3) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C'_3) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_3, C'_3) \end{array} \right\} = \int_{C'_3} \left[G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}')}{\partial n'_3} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_3} \right] dl' \quad (2.25)$$

2.6 結言

本章では、任意形状結合部をもつ2次元2ポート電子波回路を考え、基本方程式であるSchrödinger 波動方程式から、電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより高い場合、低い場合について、それぞれ従来の境界積分方程式を導出した。

これらの方程式の積分路は、無限の長さをもつため、このままでは数値計算を行うことは困難である。本章で導出した従来の積分方程式に簡単なアイデアを用いて数値計算が可能な境界積分方程式を導出することができる。その導出過程について次章で述べる。

第3章 導波モード分離型積分方程式

3.1 序言

前章で導出した従来の境界積分方程式は、積分路が無限長であるため、数値計算を行うことが困難である。本章では、導波路遠方まで伝搬する波動はモード条件を満足する波動のみであることに着目し、従来の境界積分方程式から積分路を実質上有限と考えることができる境界積分方程式、導波モード分離型積分方程式 (GMEIE: Guided Mode Extracted Integral Equations) の導出過程を本章で述べる。

3.2 界の分離

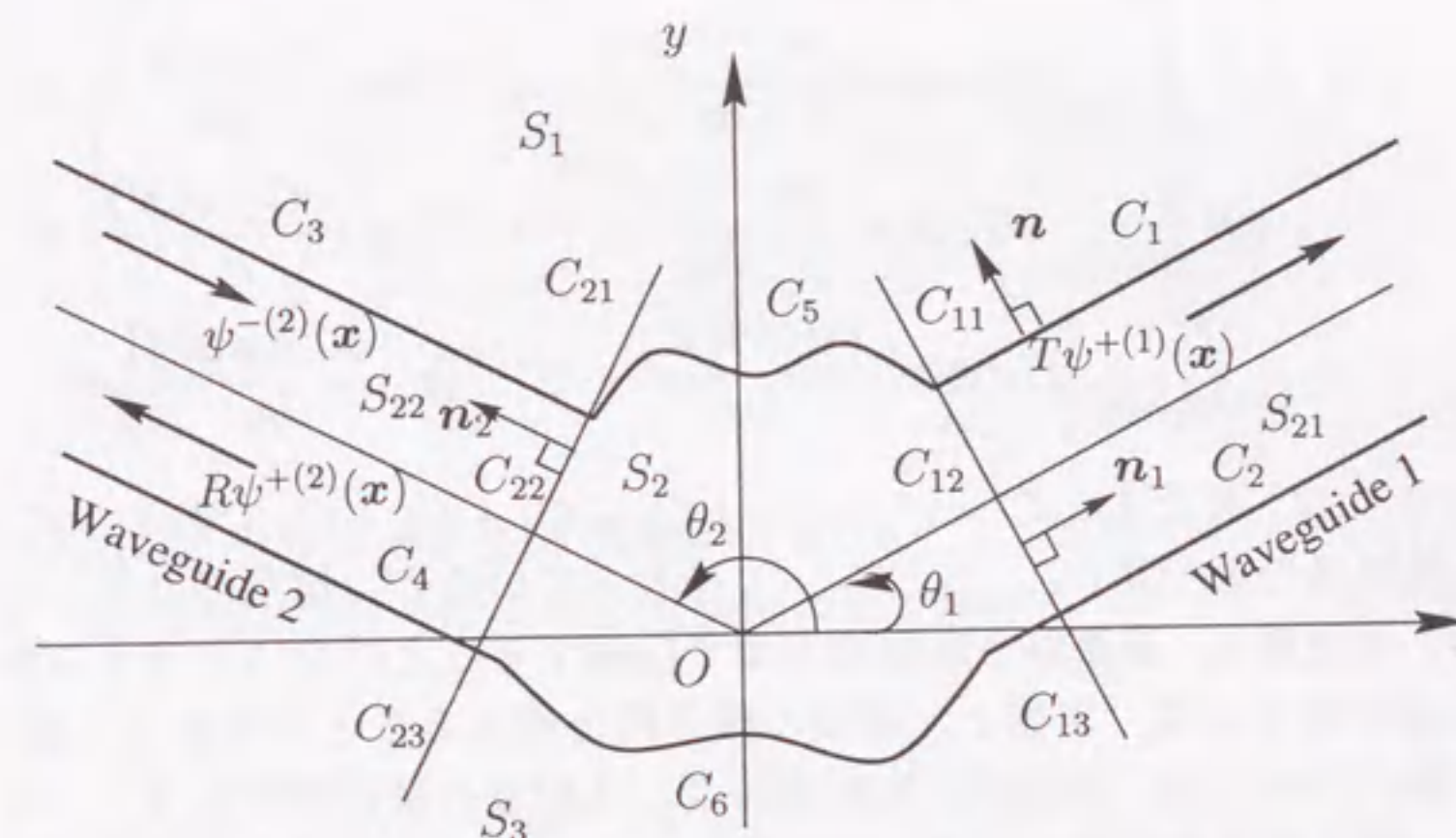


図 3.1 任意形状結合部をもつ2次元2ポート電子波導波路 (界の分離)

図 3.1 のように、導波路と結合部の間に仮想的な境界、仮想境界を設ける。導波路 1 と結合部の間の仮想境界を C_{11} , C_{12} , C_{13} 、導波路 2 と結合部の間の仮想境界を C_{21} , C_{22} , C_{23} とする。また、導波路 1 と領域 1、領域 2 の境界をそれぞれ C_1 , C_2 、導波路 2 と領域 1、領域 2 の境界をそれぞれ C_3 , C_4 とし、任意形状結合部と領域 1、領域 2 の境界をそれぞれ C_5 , C_6 とする。領域 1, 2 の導波路外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} 、仮想境界の結合部から導波路 1, 2 への外向き単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 とする。各導波路は、単一モード条件を満足するものとする。導波路 2 (Waveguide 2) から基本モード電子波が入射すると、結合部近傍では複雑な電子波が励起され则认为られる。しかし、導波路内を無限遠方まで伝搬していく電子波はモード条件を満足する電子波だけである。そこで、

単一モード条件において, 全電子波 $\psi(\mathbf{x})$ を, 観測点の存在する領域により次のような成分に分解することを考える.

$$\psi(\mathbf{x}) = T\psi^{+(1)}(\mathbf{x}) + \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Waveguide 1}) \quad (3.1)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = R\psi^{+(2)}(\mathbf{x}) + \psi^C(\mathbf{x}) + \psi^{-(2)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Waveguide 2}) \quad (3.2)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Connecting Section}) \quad (3.3)$$

である. ただし, T は透過係数, R は反射係数であり, $\psi^{+(1)}(\mathbf{x})$ は基本モード透過波, $\psi^{+(2)}(\mathbf{x})$ は基本モード反射波, $\psi^{-(2)}(\mathbf{x})$ は基本モード入射波である (付録 A). また, $\psi^C(\mathbf{x})$ は, モード条件を満足しない波動であり, 攪乱波と呼ぶこととする. 便宜上, 任意形状結合部における全波動を式 (3.3) のように攪乱波と同じ $\psi^C(\mathbf{x})$ で表すこととする.

3.2.1 観測点が領域 S_2 にある場合

観測点が導波路内部, つまり領域 S_2 にある場合, 全電子波は式 (3.1), (3.2), (3.3) のような成分に分解することができ, これらを式 (2.23) の右辺に代入すると,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) = & \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & + T \int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & + R \int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & + \int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{-(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{-(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得ることができる. ただし, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6$ である. 式 (3.4) の右辺第1項は, 無限長の積分路 C_1, C_2, C_3, C_4 を含んでいるが, 攪乱波はモード条件を満足しないため, 導波路1, 導波路2無限遠方まで伝搬することはないと考えられる. したがって, 攪乱波の積分項は, 実質上, 有限の積分路と考えることができる. 式 (3.4) の右辺第2, 3, 4項については, 透過波, 反射波および入射波の積分項であり, モード条件を満足するため, 電子波は導波路遠方まで伝搬する. この無限長の積分路を有限長の積分に置き換えることを考える. ここで, 基本モード透過波 $\psi^{+(1)}(\mathbf{x})$ は, モード条件を満足する波動であるので, 式 (2.3) を満足する. したがって, 従来の積分方程式の導出と同様に次式が成り立つ.

$$\nabla^2 \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) + k^2 \left[1 - \frac{V_2}{E} \right] \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.5)$$

式 (3.5) を満足するような2次元自由空間 Green 関数 $G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ を考える.

$$\nabla^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') + k^2 \left[1 - \frac{V_2}{E} \right] G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.6)$$

ただし,

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)} \left(k \sqrt{1 - \frac{V_2}{E}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right) \quad (3.7)$$

である. $H_0^{(2)}(z)$ は0次第2種 Hankel 関数である. ここで, (3.5)・ $G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - \psi^{+(1)}(\mathbf{x})$ ・(3.6)より,

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \nabla^2 \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) \nabla^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

が得られる. 式 (3.8) において, 観測点 \mathbf{x} と波源 \mathbf{x}' を入れ換え, Green 関数の相反性を用いると,

$$G_2(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \nabla'^2 \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \nabla'^2 G_2(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \quad (3.9)$$

を得ることができる. ただし,

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (3.10)$$

であり, \mathbf{x} は観測点, \mathbf{x}' は波源を表している. 式 (3.9) を導波路1内部を囲む領域 (領域 S_{21}) で面積分を行うと次式のようになる.

$$\iint_{S_{21}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \nabla'^2 \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \nabla'^2 G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \right] d\mathbf{x}' = \iint_{S_{21}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.11)$$

この左辺に Green の定理を適用する.

$$\begin{aligned} & \int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & + \int_{C_{12}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' \\ & = \iint_{S_{21}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.12)$$

ただし, $\partial/\partial n'$ は境界外向き法線方向微分, $\partial/\partial n'_1$ は, 仮想境界外向き法線方向微分を表している. 式 (3.12) の右辺に Delta 関数の性質を利用することにより次式を得ることができる.

$$\int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' = \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) - U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

ただし,

$$U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{12}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' \quad (3.14)$$

式 (3.13) は, 観測点の位置により, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} & \int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' \\ & = \begin{cases} \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) - U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \text{導波路1}) \\ \frac{1}{2} \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) - U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C_1 + C_2) \\ -U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \notin \text{導波路1, } C_1 + C_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

同様に、反射波 $\psi^{+(2)}(\mathbf{x})$ 、入射波 $\psi^{-(2)}(\mathbf{x})$ についてもそれぞれ次式を導出することができる。

$$\int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' = \begin{cases} \psi^{+(2)}(\mathbf{x}) - U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \text{導波路 2}) \\ \frac{1}{2}\psi^{+(2)}(\mathbf{x}) - U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C_3 + C_4) \\ -U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \notin \text{導波路 2}, C_3 + C_4) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{-(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{-(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' = \begin{cases} \psi^{-(2)}(\mathbf{x}) - U_2^{-(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \text{導波路 2}) \\ \frac{1}{2}\psi^{-(2)}(\mathbf{x}) - U_2^{-(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C_3 + C_4) \\ -U_2^{-(2)}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \notin \text{導波路 2}, C_3 + C_4) \end{cases} \quad (3.17)$$

ただし、

$$U_2^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{i2}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (i=1,2) \quad (3.18)$$

である。式(3.15), (3.16), (3.17)により、式(3.4)に現れる無限長の積分路をもつ積分をモード波と有限の積分路の積分に置き換えることができる。そこで、式(3.15), (3.16), (3.17)を式(3.4)に代入し、観測点の位置を考慮すると、次式を得ることができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' - TU_2^{+(1)}(\mathbf{x}) - RU_2^{+(2)}(\mathbf{x}) - U_2^{-(2)}(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

3.2.2 観測点が領域 S_1 , S_3 にある場合

観測点が領域 S_1 にある場合、全波動 $\psi(\mathbf{x})$ は、式(3.1)～式(3.3)のように成分を分解することができる。観測点が領域 S_2 にある場合と全く同様に次式を導出することができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_1) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_1, C) \end{array} \right\} = - \int_C \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + TU_1^{+(1)}(\mathbf{x}) + RU_1^{+(2)}(\mathbf{x}) + U_1^{-(2)}(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

ただし、

$$U_1^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{i1}} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (i=1,2) \quad (3.21)$$

観測点が領域 S_3 にある場合、全波動 $\psi(\mathbf{x})$ は、式(3.1)～式(3.3)のように成分を分解することができる。観測点が領域 S_2 にある場合と全く同様に次式を導出することができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_3) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_3, C) \end{array} \right\} = - \int_C \left[G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + TU_3^{+(1)}(\mathbf{x}) + RU_3^{+(2)}(\mathbf{x}) + U_3^{-(2)}(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

ただし、

$$U_3^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{i3}} \left[G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (i=1,2) \quad (3.23)$$

このようにして、式(3.19), (3.20), (3.22)のような、積分を含む項が全て数値積分が可能な積分方程式を導出することができる。

3.3 透過係数, 反射係数

$U_2^{\pm(i)}(\mathbf{x})$ は積分路 C_{i2} が有限であるので、数値積分が可能である。従って、式(3.18)から $U_2^{\pm(i)}(\mathbf{x})$ を実際に数値計算により求めることができる。透過係数 T 、反射係数 R を未知関数 $\psi^C(\mathbf{x})$ で表すことができれば、式(3.19)は $\psi^C(\mathbf{x})$ のみを未知関数とする積分方程式となり、数値計算が可能な積分方程式を導出することができる。

そこで、観測点を円筒座標系で表し、観測点が結合部より導波路方向に十分遠方にある場合、つまり、 $r \rightarrow \infty$, $\theta = \theta_1, \theta_2$ の場合を考える。このとき、Green 関数の漸近展開を利用することができる。

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \simeq A_2(r)g_2(\theta|\mathbf{x}') \quad (3.24)$$

ただし、

$$A_2(r) = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2j}{k\pi(1-V_2/E)^{1/2}r}} \exp(-jk\sqrt{1-V_2/E}r) \quad (3.25)$$

$$g_2(\theta|\mathbf{x}') = \exp[jk\sqrt{1-V_2/E}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)] \quad (3.26)$$

である。式(3.24)を式(3.19)に代入し、両辺に $1/A_2(r)$ をかけると次式のようなになる。

$$\frac{\psi^C(\theta|r)}{A_2(r)} = \int_C \left[g_2(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - TU_2^{+(1)}(\theta) - RU_2^{+(2)}(\theta) - u_2^{-(2)}(\theta) \quad (3.27)$$

ただし、

$$u_2^{\pm(i)}(\theta) = \int_{C_{i2}} \left[g_2(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (3.28)$$

である。つまり, $U_2^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = A_2(r)u_2^{\pm(i)}(\theta)$ である。ここで, $r \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\psi^C(\theta|r)}{A_2(r)} \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

と仮定すると, 式 (3.19) は,

$$\begin{aligned} & Tu_2^{+(1)}(\theta) + Ru_2^{+(2)}(\theta) \\ &= \int_C \left[g_2(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。ここで, 式 (3.30) に各導波路が x 軸となす角 $\theta = \theta_1, \theta_2$ を代入すると, 次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} & Tu_2^{+(1)}(\theta_1) + Ru_2^{+(2)}(\theta_1) \\ &= \int_C \left[g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_1|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & Tu_2^{+(1)}(\theta_2) + Ru_2^{+(2)}(\theta_2) \\ &= \int_C \left[g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_2|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで, 式 (3.31), (3.32) にクラメールの公式を用いて, 透過係数 T , 反射係数 R について連立方程式解くと,

$$T = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \int_C \left[W(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial W(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) - u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) \right\} \quad (3.33)$$

$$R = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \int_C \left[V(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial V(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) \right\} \quad (3.34)$$

ただし,

$$\Delta_2 = u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{+(2)}(\theta_2) - u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{+(2)}(\theta_1) \quad (3.35)$$

$$W(\mathbf{x}') = u_2^{+(2)}(\theta_2)g_2(\theta_1|\mathbf{x}') - u_2^{+(2)}(\theta_1)g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \quad (3.36)$$

$$V(\mathbf{x}') = u_2^{+(1)}(\theta_1)g_2(\theta_2|\mathbf{x}') - u_2^{+(1)}(\theta_2)g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \quad (3.37)$$

が得られる。透過係数 T , 反射係数 R は, $\psi^C(\mathbf{x})$ のみを未知関数とした式 (3.33), (3.34) で表すことができる。

3.4 導波モード分離型境界積分方程式

3.4.1 観測点が領域 S_2 にある場合

式 (3.19) に式 (3.33), (3.34) を代入すると, 次式のような $\psi^C(\mathbf{x})$ のみを未知関数とする導波モード分離型境界積分方程式を得ることができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - S_2(\mathbf{x}) \quad (3.38)$$

ただし,

$$P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - [U_2^{+(1)}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}') - U_2^{+(2)}(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')] \cdot \frac{1}{\Delta_2} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Delta_2} \left\{ U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) - u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2)] \right\} - U_2^{-(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 \quad (3.41)$$

3.4.2 観測点が領域 S_1, S_3 にある場合

観測点が領域 S_1 にある場合, 式 (3.20), (3.33), (3.34) より, 次式のような導波モード分離型境界積分方程式を得ることができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_1) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_1, C) \end{array} \right\} = - \int_C \left[P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + S_1(\mathbf{x}) \quad (3.42)$$

ただし,

$$P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - [U_1^{+(1)}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}') + U_1^{+(2)}(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')] \cdot \frac{1}{\Delta_2} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ U_1^{+(1)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) - u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + U_1^{+(2)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2)] \right\} - U_1^{-(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$C = C_1 + C_3 + C_5 \quad (3.45)$$

同様に, 観測点が領域 S_3 にある場合, 式 (3.22), (3.33), (3.34) より次式のような導波モード分離型境界積分方程式を導出することができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_3) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_3, C) \end{array} \right\} = - \int_C \left[P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + S_3(\mathbf{x}) \quad (3.46)$$

ただし,

$$P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - [U_3^{+(1)}(\mathbf{x})W(\mathbf{x}') + U_3^{+(2)}(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')] \cdot \frac{1}{\Delta_2} \quad (3.47)$$

$$S_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta_3} \left\{ U_3^{+(1)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) - u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1)] \right. \\ \left. + U_3^{+(2)}(\mathbf{x}) [u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2)] \right\} - U_3^{-(2)}(\mathbf{x}) \quad (3.48)$$

$$C = C_2 + C_4 + C_6 \quad (3.49)$$

式(3.42)と式(3.46)の辺々を加え合わせ、次式のように1式にまとめ、導波路外部に観測点がある場合の導波モード分離型境界積分方程式を得ることができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_1, S_3) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_1, S_3, C) \end{array} \right\} = - \int_{C_1+C_3+C_5} \left[P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ - \int_{C_2+C_4+C_6} \left[P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ + S_1(\mathbf{x}) + S_3(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

求めた導波モード分離型境界積分方程式、式(3.38)、(3.50)は、無限長積分路 C_1, C_2, C_3, C_4 を含むが、攪乱波 $\psi^C(\mathbf{x})$ はモード条件を満足しないため、導波路無限遠方まで伝搬することはないので、実質上、積分路を有限長と見なすことができる。従って、導出した導波モード分離型境界積分方程式は数値解析可能である。

3.5 結言

本章では、従来の積分方程式から、全波動を領域によって成分に分解し、ことにより、未知数であった透過、反射係数を未知関数 $\psi^C(\mathbf{x})$ で表し、 $\psi^C(\mathbf{x})$ のみを未知関数とする積分方程式、導波モード分離型積分方程式を導出した。導出した導波モード分離型境界積分方程式は $\psi^C(\mathbf{x})$ がモード条件を満足しないため導波路遠方まで伝搬することはないので積分路を有限長と見なすことができる。したがって、数値計算が可能な積分方程式、導波モード分離型積分方程式を導出することができた。次章では、この積分方程式の数学的妥当性を述べ、曲がり部をもつ量子電子波回路の解析結果を示す。

第4章 2ポート電子波回路の解析

4.1 序言

本章では、第3章で導出した導波モード分離型境界積分方程式を、展開関数として2次元関数、試験関数としてDelta関数としたモーメント法(境界要素法)を用いて2ポート電子波回路を解析した。まず、導波モード分離型積分方程式の数値的妥当性を調べるため、厳密解を求めることができる2次元無限長直線導波路について解析し、導波モード分離型積分方程式の解と比較する。また、導波モード分離型境界積分方程式を2ポート電子波回路に適用し、その数値計算結果を示す。

4.2 直線導波路

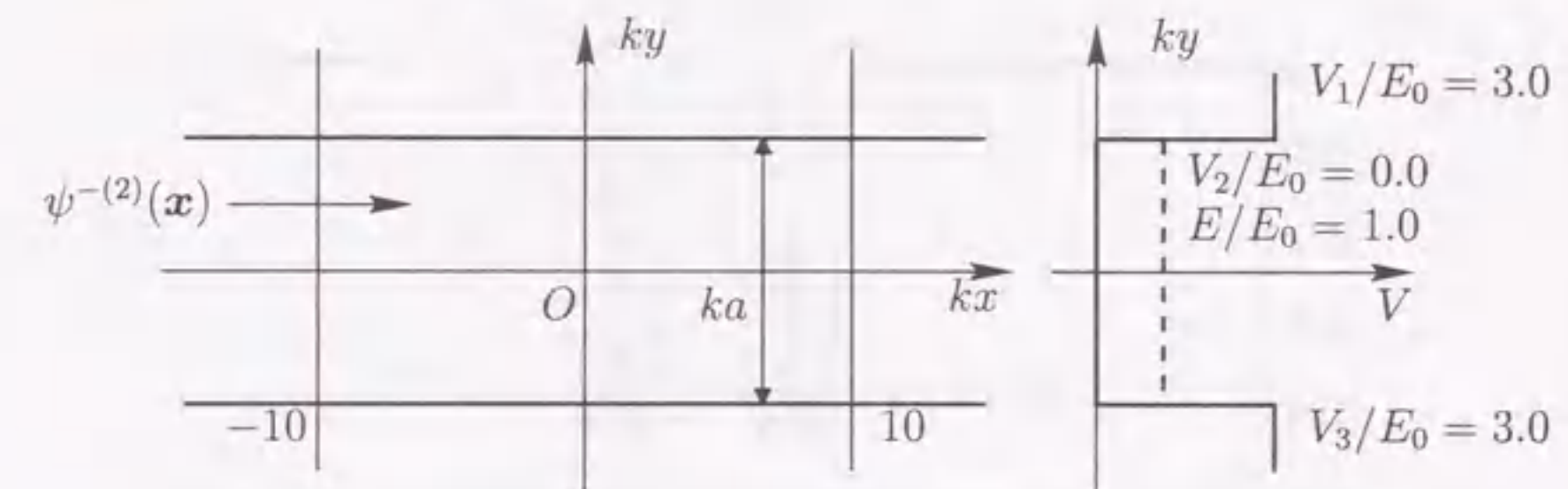


図4.1 2次元無限長直線導波路

導波モード分離型境界積分方程式の数学的妥当性を調べるため、図4.1のような、自明な厳密解をもつ2次元無限長直線導波路を考える。ただし、導波路は、単一モード条件を満足するものとする。基準とする電子エネルギーを E_0 とし、これによって規格化された導波路外部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$ 、導波路内部のポテンシャルを $V_2/E_0 = 0.0$ とする。また、回路の大きさは電子エネルギーが E_0 のド・ブロイ波数 $k = [2m^*E_0]^{1/2}/\hbar$ により規格化されている。規格化された導波路の幅を $ka = \pi$ とし、仮想境界の位置を $kx = \pm 10$ とする。導波路2左遠方より基本モード入射波 $\psi^{-(2)}(\mathbf{x})$ を入射するものとする。無限長直線導波路の場合、結合部により励起される攪乱波、結合部によって導波路2へ反射する反射波は存在しない。したがって、導波路2では入射波のみであり、導波路1では透過波のみとなると考えられる。導波モード分離型積分方程式では、仮想境界の内側領域において $\psi^C(\mathbf{x})$ は全波動を表し、仮想境界外では導波モード以外の波動を表す。従って、導波モード分離型積分方程式の解である $\psi^C(\mathbf{x})$ は仮想境界内側においては入射電子

波 $\psi^{-(2)}(x)$ となり、仮想境界外、つまり導波路1, 導波路2では $\psi^C(x) = 0$ となるはずである。

図4.2のグラフは、図4.1において導波路2左遠方より、基本モード電子波 $\psi^{-(2)}(x)$ を入射した場合の導波路境界上の数値解と厳密解である。縦軸は撓乱波 $\psi^C(x)$ と入射波 $\psi^{-(2)}(x)$ を表し、横軸は規格化された座標 kx を表している。+は数値解の実部を、×は数値解の虚部を表しており、破線は厳密解を表している。ただし、厳密解は仮想境界内部のみを記した。図4.2に示すように、導波モード分離型積分方程式の数値解析結果は、仮想境界内部領域において厳密解と数値解はよく一致していることがわかる。仮想境界外部領域において撓乱波 $\psi^C(x)$ はほぼ0となっているので、理論的な予想と一致する。また、透過係数は $|T|^2 = 1.00002$ であり、ほぼ1であり、反射係数は $|R|^2 = 3.13058 \times 10^{-10}$ である。これらは厳密解から考えられる値とほぼ一致している。この結果は求めた積分方程式の数学的妥当性を示していると考えられることができる。

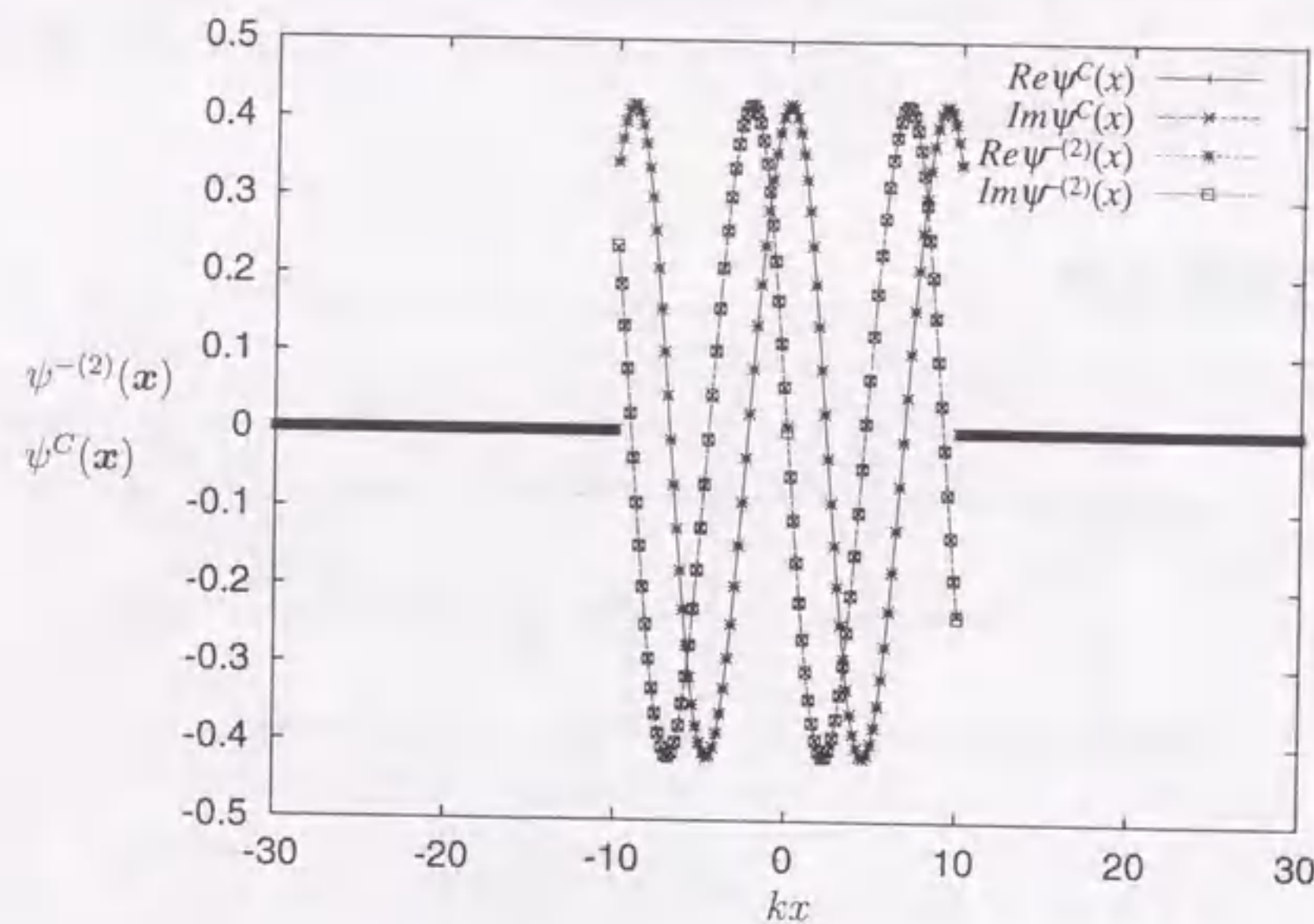


図4.2 直線導波路における厳密解と数値解

4.3 折れ曲がり回路

図4.3のような直角折れ曲がり電子波回路を考える。解析に用いた回路は、折れ曲がり角を $\pi/2$ 、規格化された導波路外部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$ 、導波路内部のポテンシャルを $V_2/E_0 = 0.0$ 、電子のエネルギーを $E/E_0 = 1.0$ 、導波路幅を $ka = \pi$ とした回路である。ただし、各導波路は単一モード条件を満足し、導波路2左遠方より基本モード電子波を入射するものとする。この回路では、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低いため、電子波は導波路に沿って伝搬し、電子波が導波路外部に放射されることはない。導波路2の左遠方より入射された電子波 $\psi^{-(2)}(x)$ は、折れ曲がり部分により一部は反射され、一部は透過する。つまり、導波路2左遠方より入射された電子はあ

る確率で折れ曲がり部分により反射され、ある確率で透過する。図4.4は直角折れ曲がり回路の解析結果であり、接合部近傍の電子の存在確率密度を表している。図4.4の z 軸は電子の存在確率密度 $|\psi(x)|^2$ を表しており、破線は導波路境界を表している。また、導波路外部のポテンシャルが有限であるため、導波路外部に電子の波動関数が浸みだすことが考えられる。これにより、トンネル現象などの量子効果が起こる。図4.4では、波動関数の導波路外部への浸み出しの様子も計算されていることがわかる。導波路1の電子透過確率を $|T|^2$ 、導波路2の電子反射確率を $|R|^2$ とすれば、 $|T|^2 + |R|^2$ は、電子存在全確率を表し、確率保存則より $|T|^2 + |R|^2 = 1$ とならなければならない。導波路2遠方より入射された電子は、透過確率 $|T|^2 = 0.84824$ で導波路1に透過し、反射確率 $|R|^2 = 0.15189$ で折れ曲がり部により導波路2に反射される。反射された電子波は導波路2において入射波と干渉し、定在波を生じている。数値計算結果は、電子の全存在確率が $|T|^2 + |R|^2 = 1.00003$ となり、確率保存則をよく満足していることがわかる。

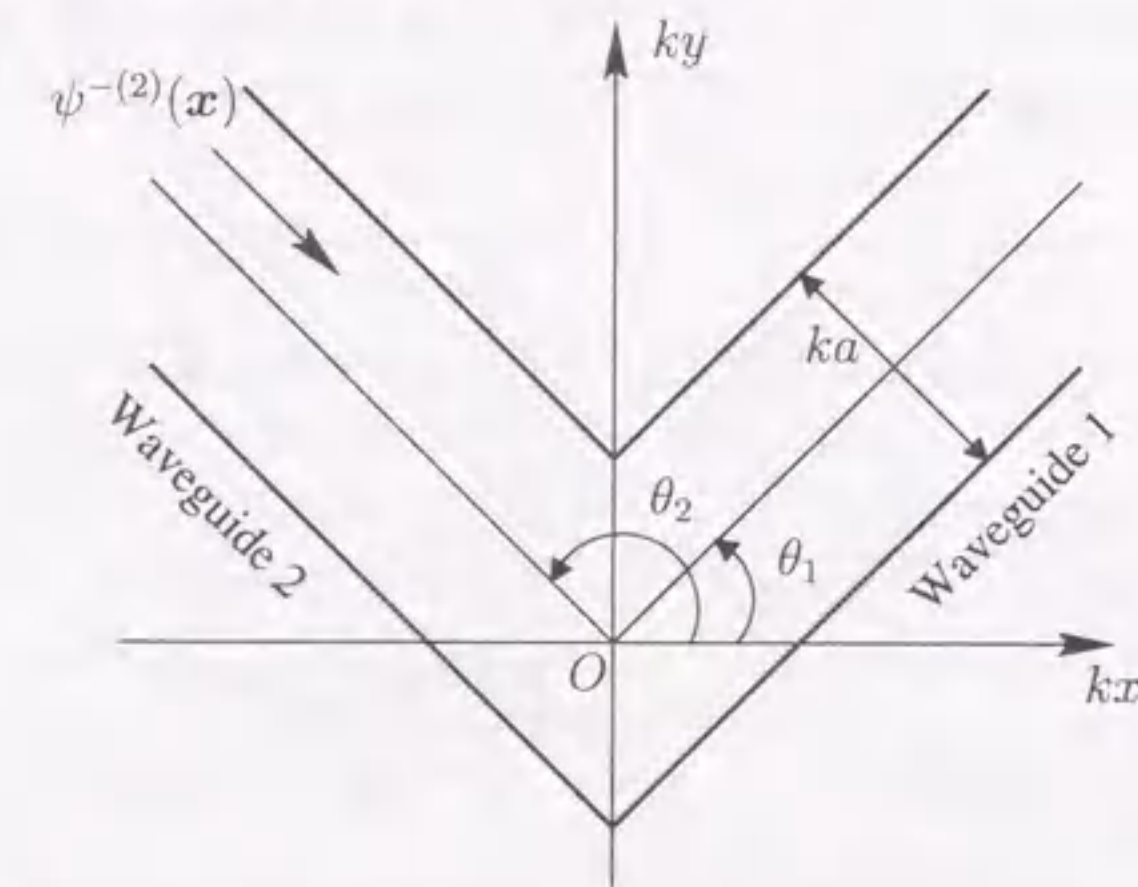


図4.3 直線折れ曲がり導波路

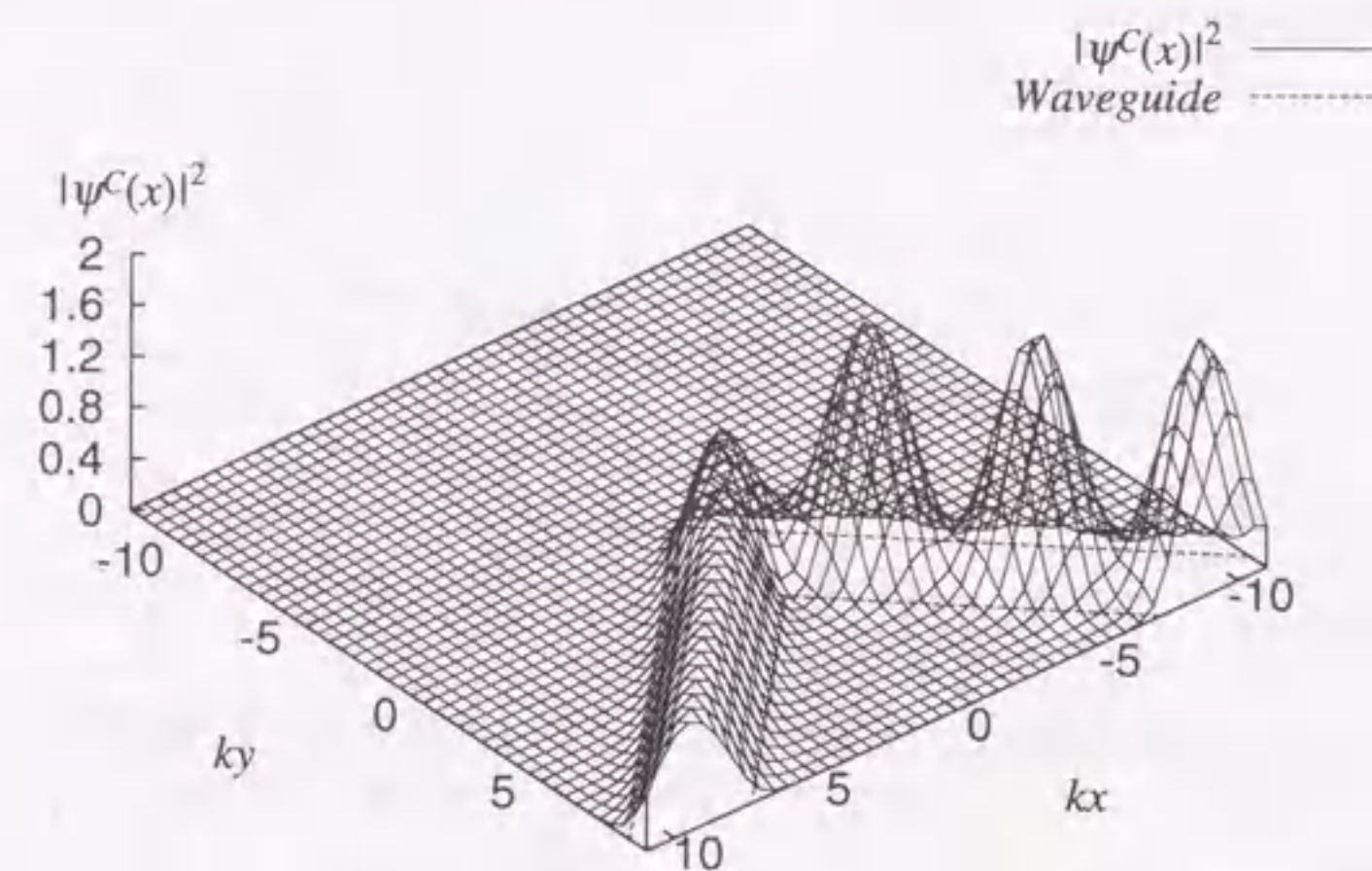


図4.4 折れ曲がり電子波回路の解析例

図4.5～図4.10は図4.3と同じ形状パラメータの電子波導波路 ($ka_1 = ka_2 = \pi, \theta_2 - \theta_1 = \pi/2$) について、導波路外部のポテンシャルに対する電子の透過特性を調べたものである。どの場合にも、透過率が最大、最小となる点が存在する。例えば、導波路外部ポテンシャルが $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$ (図4.7) の場合について、電子のエネルギーが $E/E_0 = 0.90$ のとき電子の透過率はほぼ最大となり、透過率は $|T|^2 = 0.85$ 、反射率は $|R|^2 = 0.15$ である。また、透過率が最小となるのは、電子のエネルギーが $E/E_0 = 1.85$ のときであり、透過率は $|T|^2 = 1.603 \times 10^{-3}$ 、反射率は $|R|^2 = 0.999$ である。つまり、導波路左遠方より入射された電子は、電子のエネルギーが $E/E_0 = 0.90$ のときもっとも高い確率、85%の確率で導波路1に透過する。また、電子のエネルギーが $E/E_0 = 1.85$ のときは99%の確率で折れ曲がり部分により電子は反射されることとなる。

導波路外部ポテンシャルが高くなるにつれ、単一モード条件を満足する電子のエネルギーの範囲は広がるが、導波路外部のポテンシャルとくらべ、単一モード条件を満足する電子のエネルギーの範囲は狭くなっていく。つまり、導波路外部のポテンシャルが高くなるにつれて、比較的小さな電子のエネルギーで、電子波に2モード以上のモードが現れる。

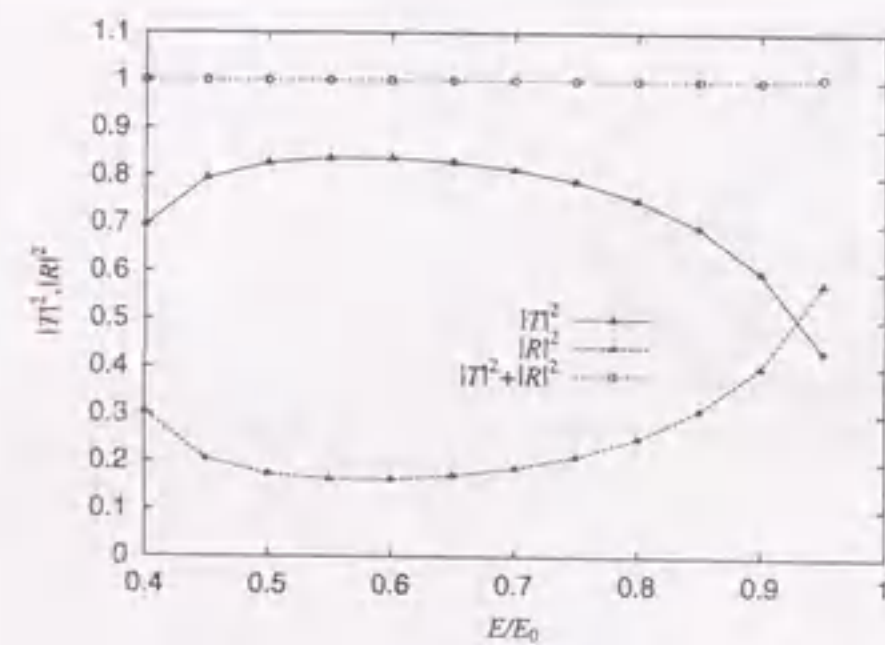


図4.5 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

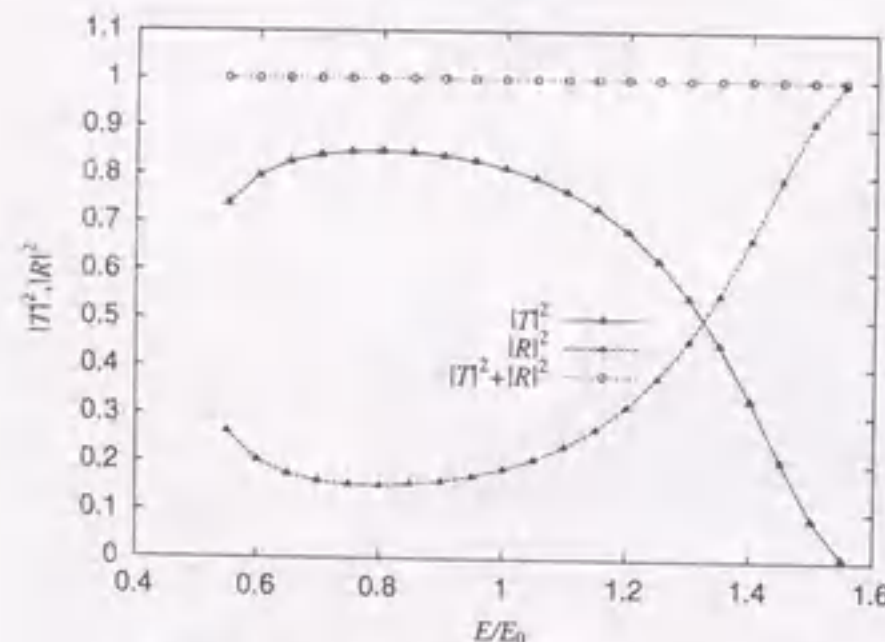


図4.6 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

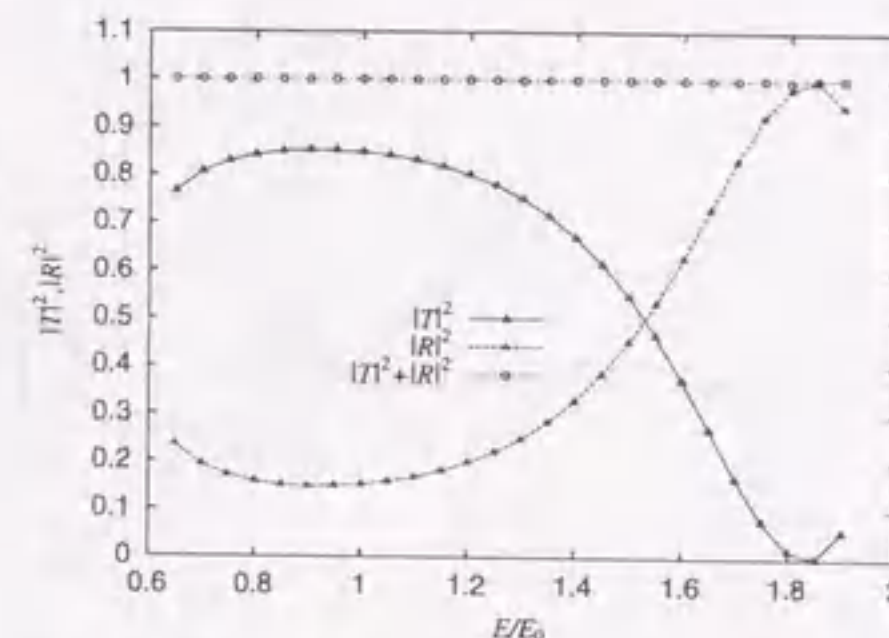


図4.7 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

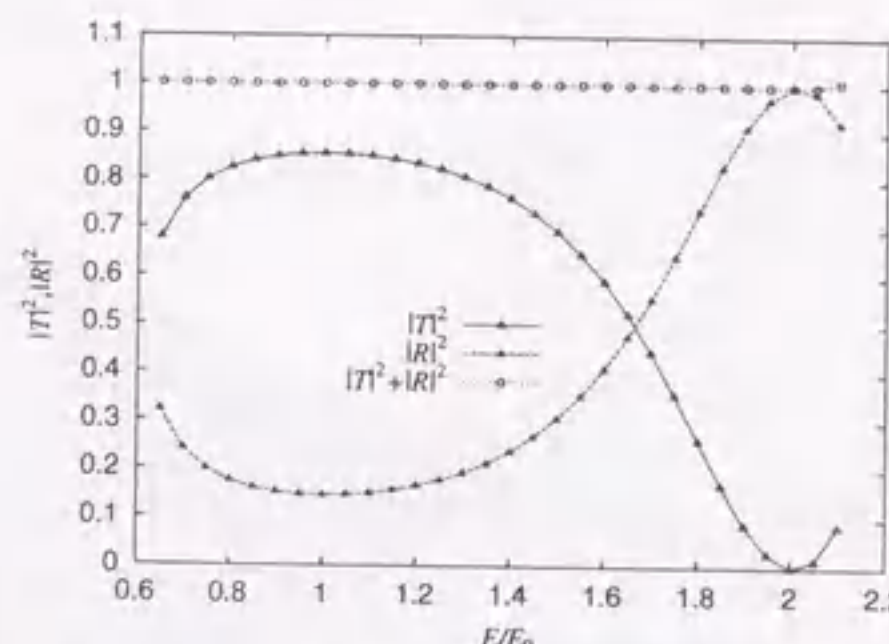


図4.8 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

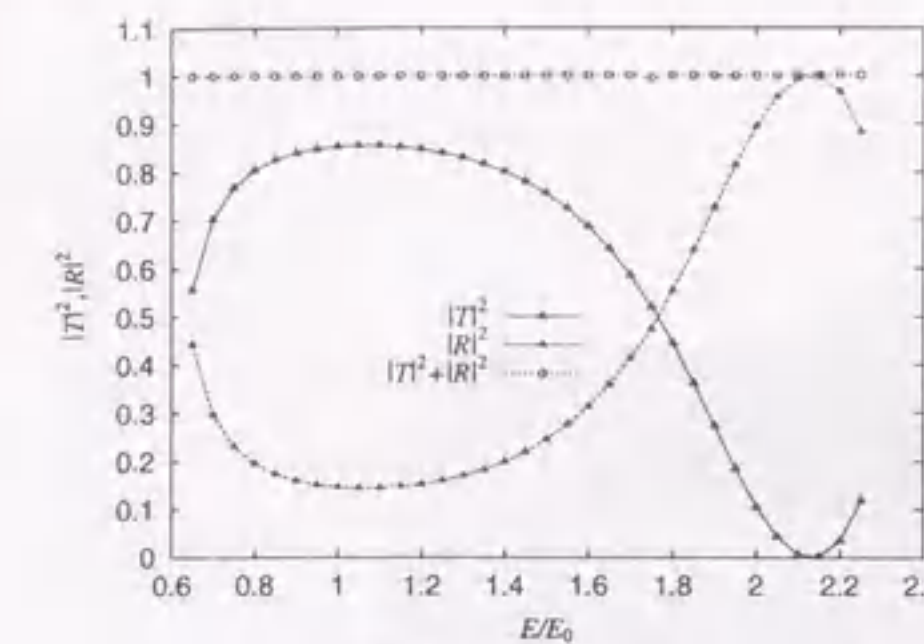


図4.9 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

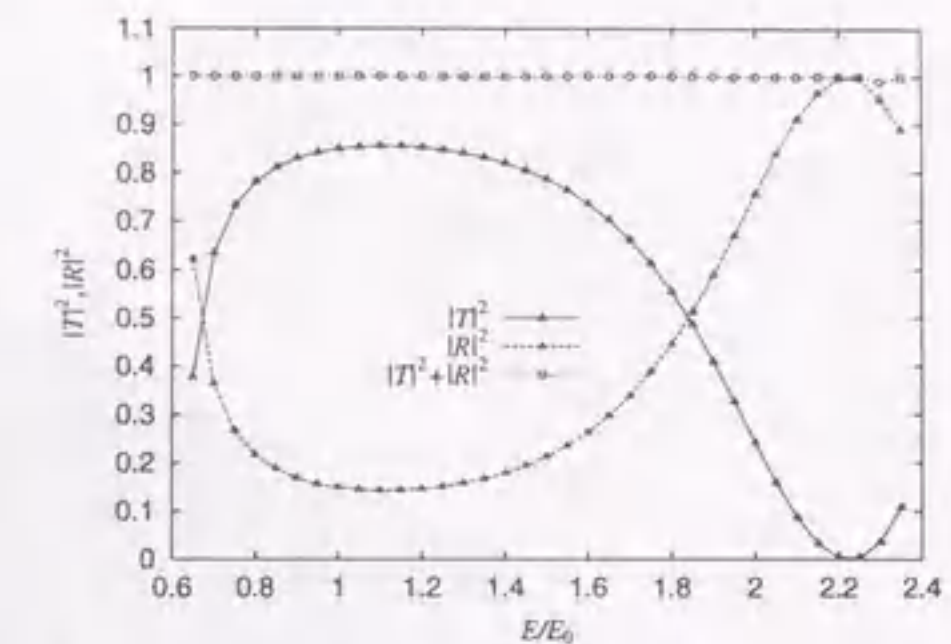


図4.10 折れ曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

4.4 円形曲がり回路

曲がり回路の透過特性を良くするためには導波路曲がり部を滑らかにした方が良く予想されるため、導波路曲がり部の形状を円形に設計した場合を考える。図4.11のような円形曲がり導波路に対して解析を行った例を示す。解析に用いた回路は、規格化された導波路幅を $ka = \pi$ とし、導波路1と導波路2のなす角を $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$ 、平均曲率半径を導波路幅の2倍、 $r_0 = 2ka$ とし、各導波路は単一モード条件を満足するものとする。また基本モード入射電子波を導波路2左遠方より入射する。電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより低いため、電子は導波路に沿って伝搬し、導波路外部に放射されることはない。入射された電子波は曲がり部により一部は透過し、一部は反射する。図4.12は図4.11の回路において、基準とする電子のエネルギー E_0 で規格化された導波路外部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$ 、規格化された導波路内部のポテンシャルを $V_2/E_0 = 0.0$ 、規格化された入射電子波の電子のエネルギーを $E/E_0 = 1.0$ とした場合の解析例である。

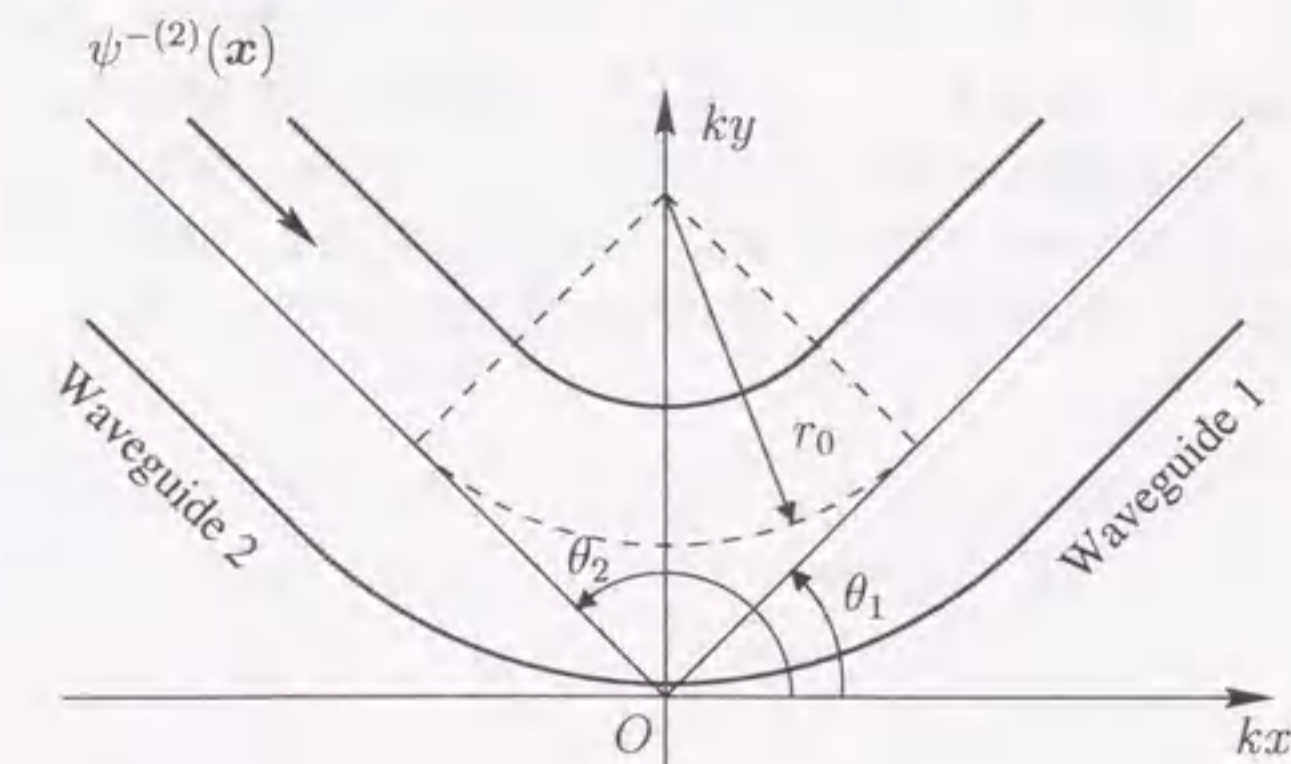


図4.11 円形曲がり電子波回路

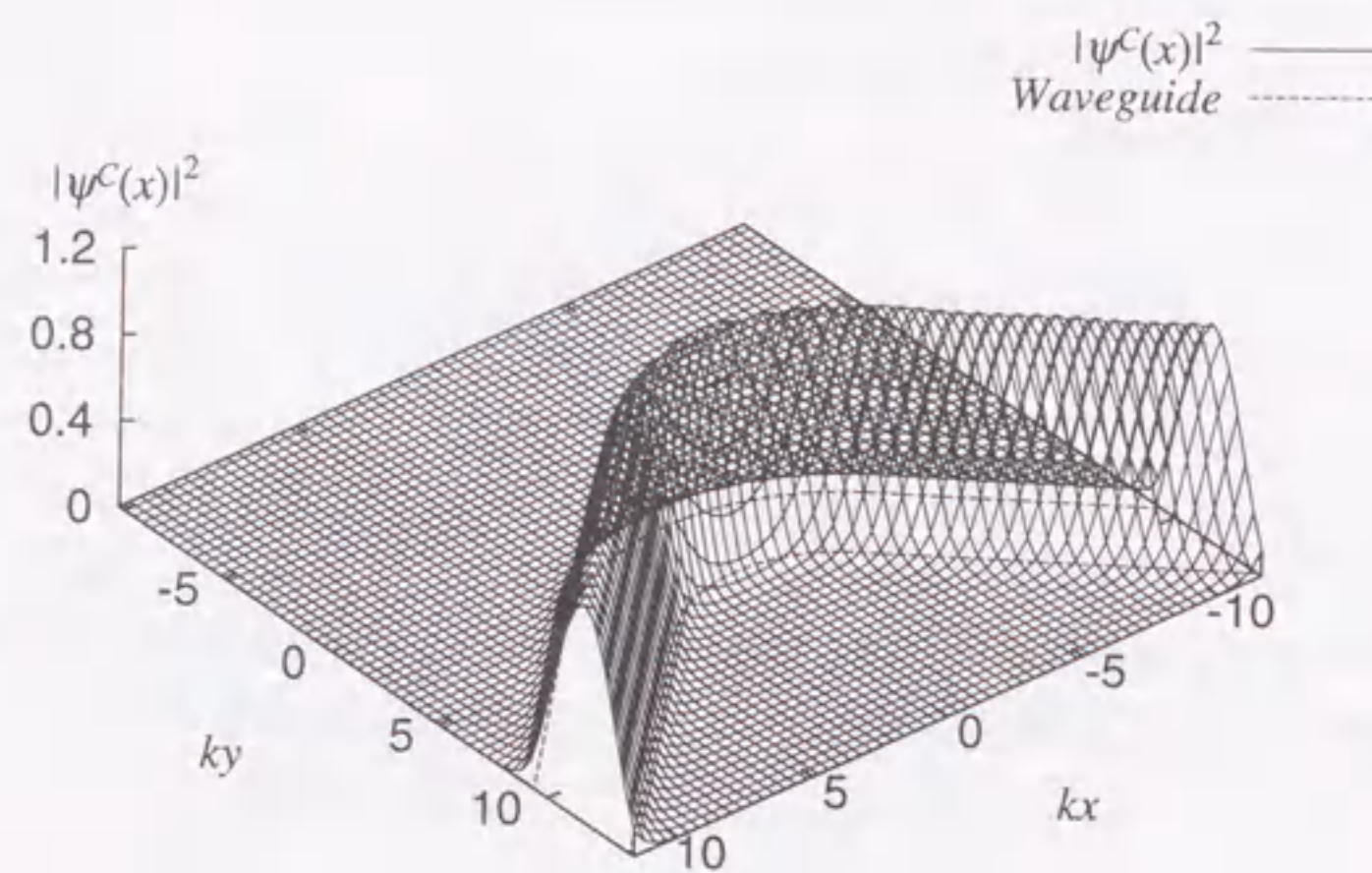
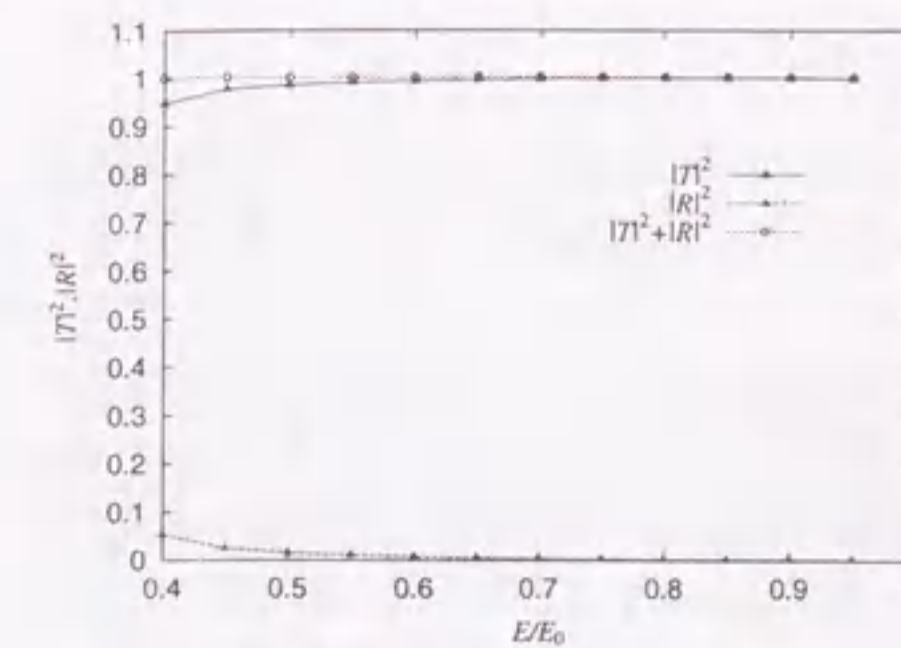
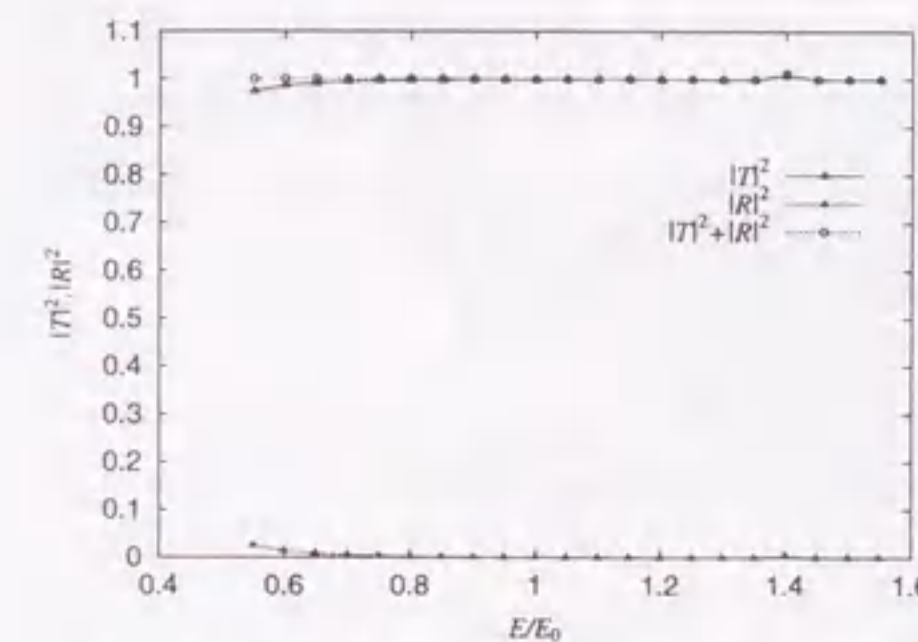
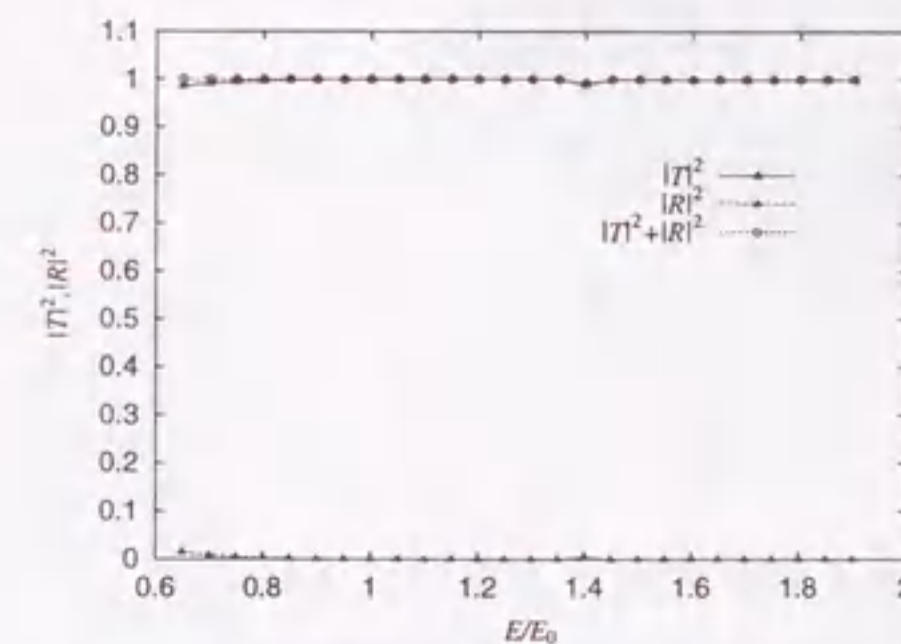
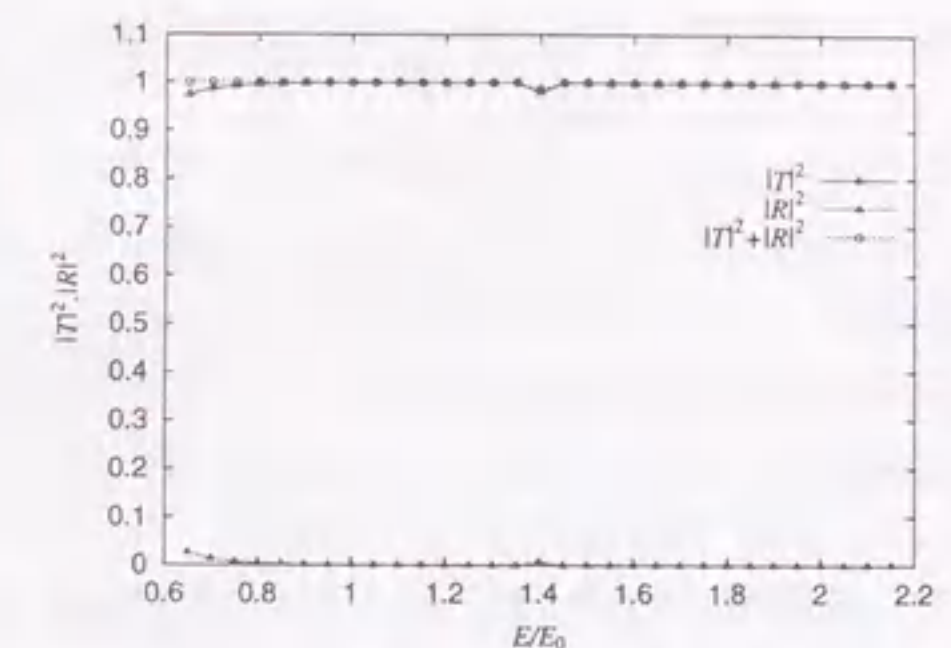
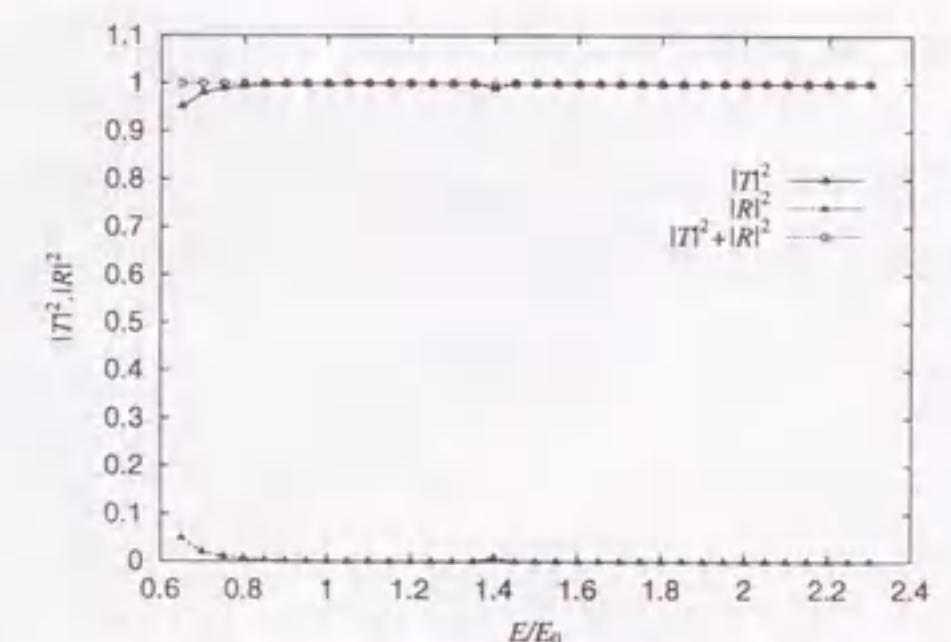
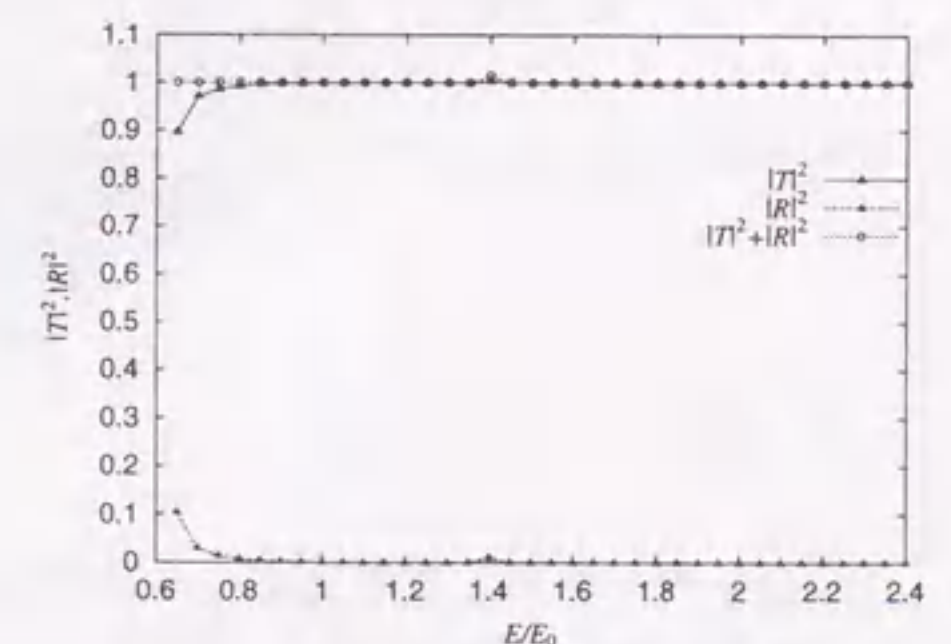


図 4.12 円形曲がり電子波回路の解析

直角折れ曲がり回路とは異なり、導波路2において反射波と入射波の干渉による定在波がほとんど見られない。これは電子の透過確率が $|T|^2 = 1.00002$ 、反射確率は $|R|^2 = 1.70732 \times 10^{-6}$ であり、曲がり部分による反射波がほとんど生じていないためである。従って、導波路1から入射された電子は、導波路曲がり部によりほとんど反射されることなく導波路2へ透過する。また、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低いいため、導波路外部に放射する電子波はない。電子の透過確率 $|T|^2$ と電子の反射確率 $|R|^2$ の和、つまり、電子の存在確率はほぼ1となっており、確率保存則をよく満足しており、精度良く計算できていることがわかる。

図4.13～図4.18は図4.11の回路と同じ形状パラメータである回路において、導波路外部のポテンシャルと電子エネルギーに対する透過特性を調べたものである。電子の導波路1への透過確率は電子のエネルギーの大きさ、導波路外部のポテンシャルの大きさにかかわらずほぼ1と一定であり、導波路2遠方より入射された電子は、結合部により反射されることなく導波路1へ透過する。したがって、透過特性は直線折れ曲がり導波回路に比べて円形曲がり導波回路の透過特性は非常によいと言える。曲がり部をもつ導波回路の場合、回路の透過特性は曲がり部の形状に大きな影響を受け、曲がり部を円形にすることにより、反射確率を大幅に低減でき、透過特性の大幅な改善が可能であることを示している。

4.4. 円形曲がり回路

図 4.13 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)図 4.14 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)図 4.15 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)図 4.16 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)図 4.17 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)図 4.18 円形曲がり導波回路における電子波の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$)

4.5 電子が導波路外部に放射する場合

電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高い場合、すなわち電子が導波路外に放射する場合の解析例を図4.19、図4.20に示す。用いた回路の形状パラメータは図4.3、図4.11とそれぞれ同じである。

規格化された入射電子波のエネルギーを $E/E_0 = 0.7$ 、規格化された導波路外部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.5$ とし、規格化された導波路内部のポテンシャル $V_2/E_0 = 0.0$ とした。電子は導波路2より基本モード入射波が入射されるものとする。入射された電子波は、導波路曲がり部において一部は反射され、一部は透過する。また、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより大きいため、導波路曲がり部から導波路外部に電子が放射することがある。

直線折れ曲がり回路の解析結果は、電子の反射確率は $|R|^2 = 7.66103 \times 10^{-2}$ 、透過確率は $|T|^2 = 0.165722$ であり、電子の導波路外部への放射確率は $|S|^2 = 0.75751$ であった。また、電子の全存在確率は $|R|^2 + |T|^2 + |S|^2 = 0.99984$ であり、確率保存則をよく満足していると考えられる。図4.19より導波路2から入射された電子波の一部が導波路折れ曲がり部から導波路外部に放射されている様子がわかる。また折れ曲がり部分により反射された電子波と導波路2の入射波が干渉し定在波が生じている様子がわかる。

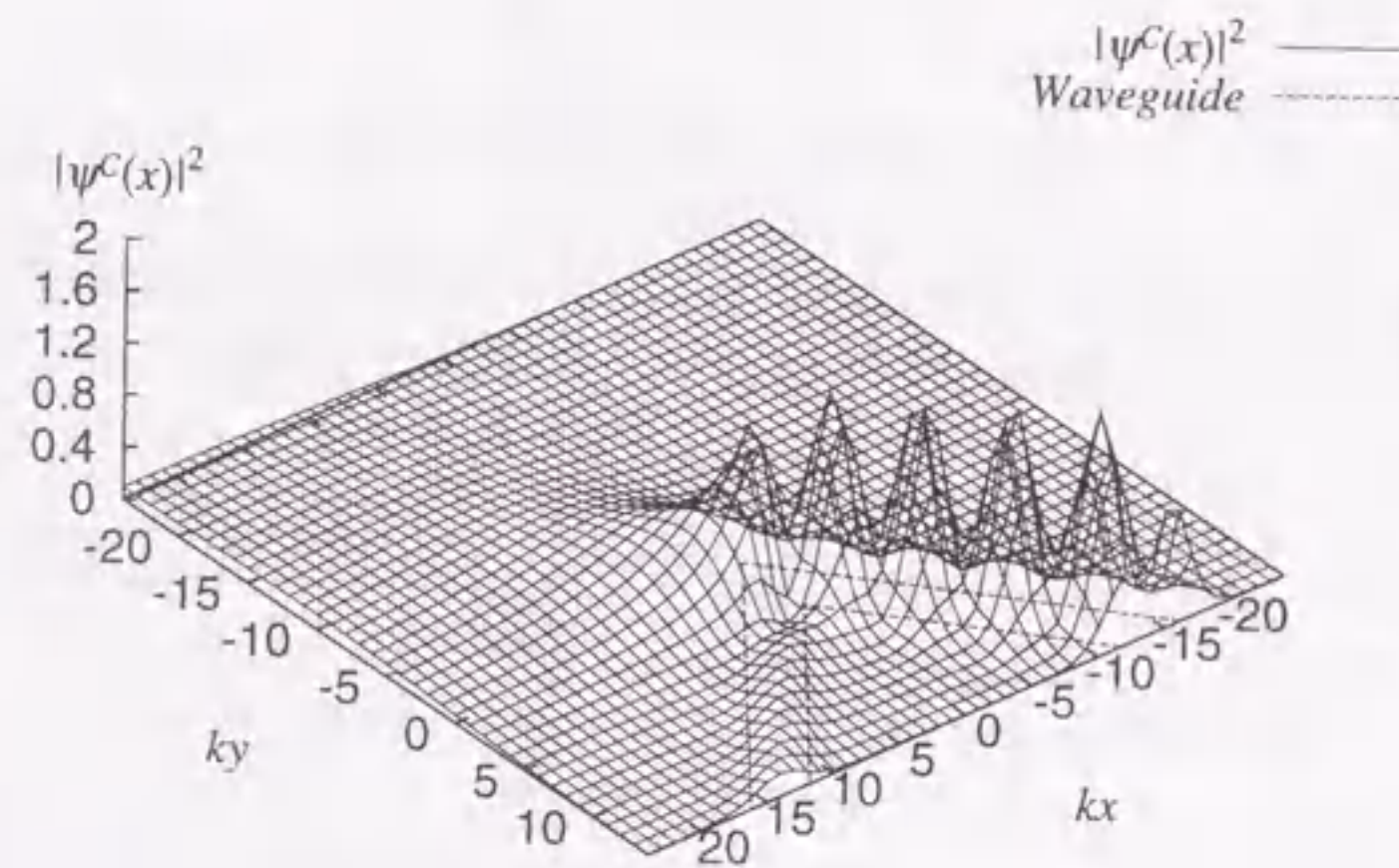


図4.19 折れ曲がり電子波導波路の解析例（電子波が放射する場合）($ka = \pi$, $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.5$, $V_2/E_0 = 0.0$, $E/E_0 = 0.7$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$)

次に、図4.20に円形曲がり回路の結果を示す。導波路のポテンシャル分布は図4.19と同じとし、規格化された電子のエネルギーを E/E_0 とした。解析の結果、電子の反射確率は $|R|^2 = 4.88278 \times 10^{-5}$ 、透過確率は $|T|^2 = 0.60062$ であり、電子が導波路外部に放射する確率、放射確率は $|S|^2 = 0.39728$ であった。また、電子の存在確率は $|R|^2 + |T|^2 + |S|^2 = 0.99796$ となり、確率保存則をよく満足している。

図4.19、図4.20の回路で電子のエネルギーに対する回路の透過特性を図4.21（折れ曲がり電子波回路）、図4.22（円形曲がり電子波回路）に示す。図の横軸は規格化された電

子のエネルギー E/E_0 、縦軸は導波路1への電子の透過確率、導波路2への電子の反射確率、電子が導波路外部へ放射される放射確率を表している。いずれの回路も電子のエネルギーが大きくなるにしたがい放射確率が増大し、曲がり部から導波路1へ透過しなくなることがわかる。また、導波路曲がり部を円形にした場合、電子のエネルギーに関係なくほとんど反射が生じていない。円形曲がり回路の方が、電子のエネルギーに対し、透過確率の減少はゆるやかである。したがって、電子のエネルギーが導波路外部よりも高い場合も、曲がり部を円形にすることにより、反射確率、放射確率を大幅に低減でき、透過特性の大幅な改善が可能なことを示している。これらは、物理的に妥当な結果と考えられる。

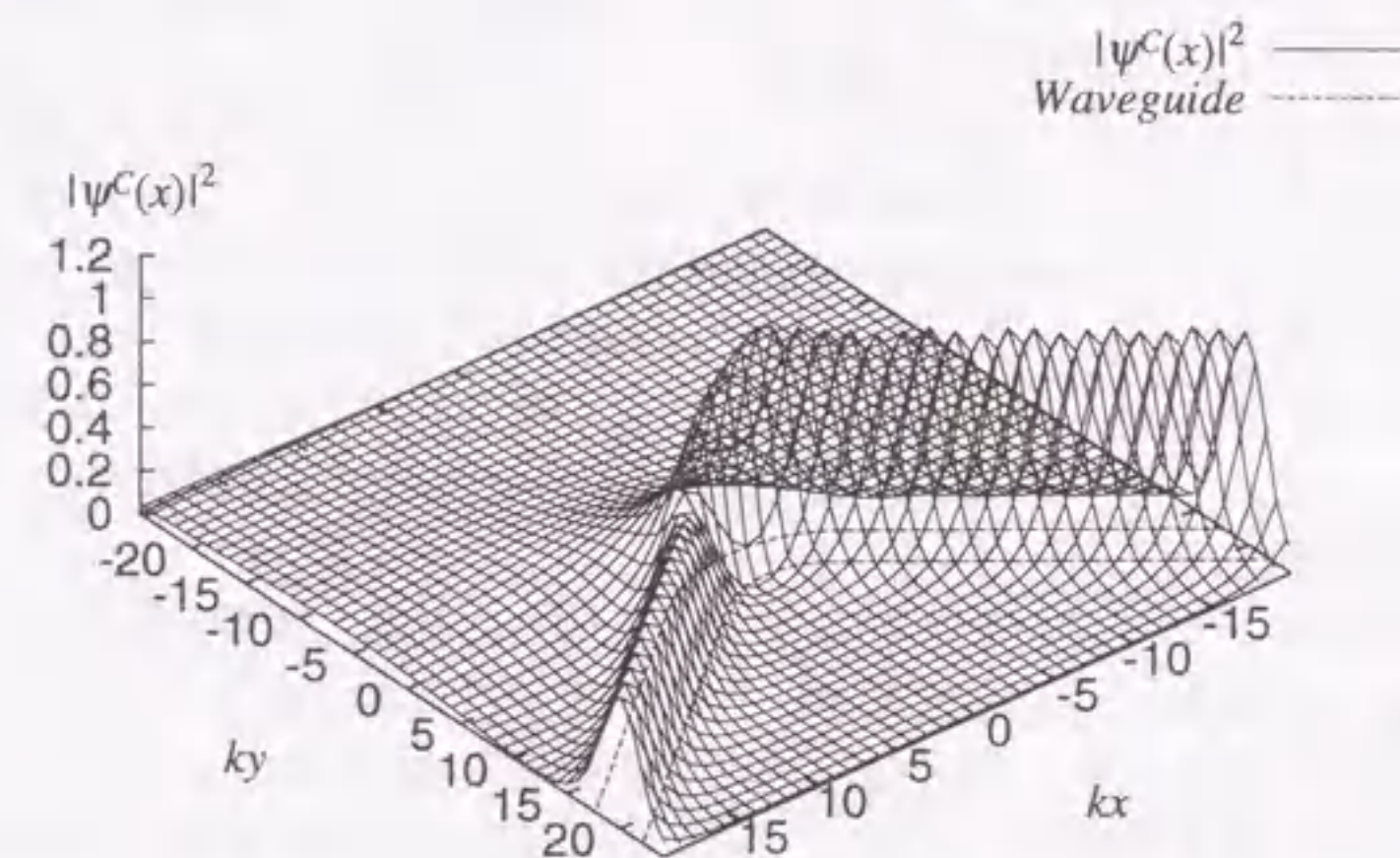


図4.20 円形曲がり電子波導波路の解析例（電子波が放射する場合）($ka = \pi$, $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.5$, $V_2/E_0 = 0.0$, $E/E_0 = 0.7$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $r_0 = 2ka$)

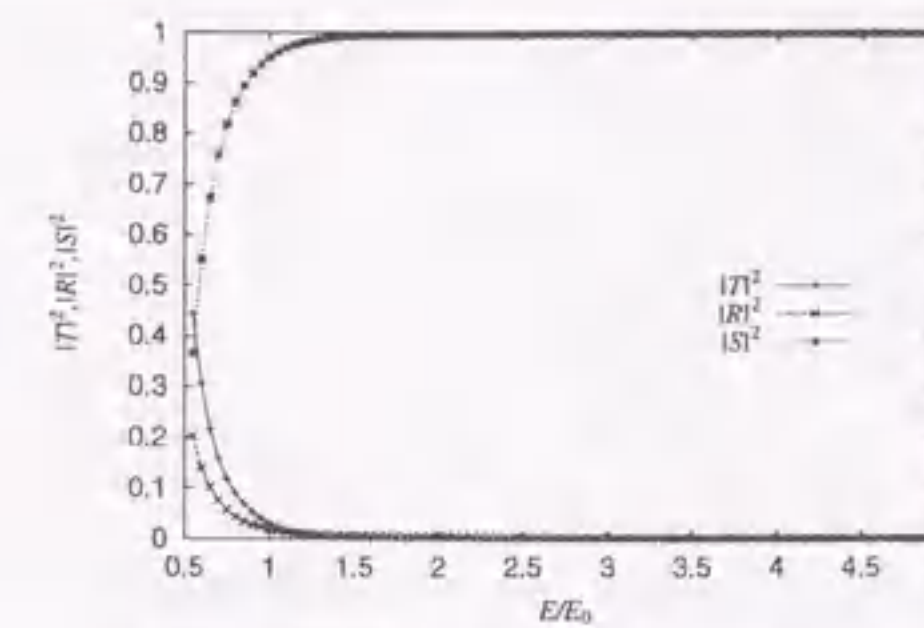


図4.21 折れ曲がり回路における電子波の透過特性（電子波が放射する場合）($ka = \pi$, $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.5$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$)

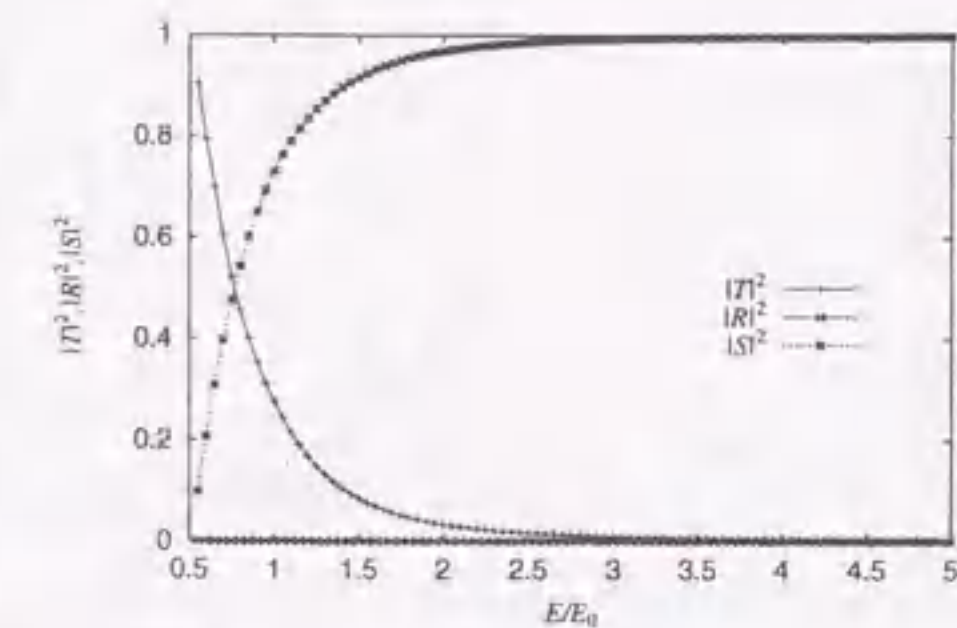


図4.22 円形曲がり回路における電子の透過特性（電子波が放射する場合）($ka = \pi$, $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.5$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $r_0 = 2a$)

4.6 曲がり部内側を円形とした場合

曲がり部を持つ電子波導路において、これまでのことから透過特性は曲がり部の影響が大きいと考えられる。4.3から4.5節より導波路結合部を円形に結合した方が回路の透過特性はよいことが分かった。本節、次節では、曲がり部の内側形状と外側形状をそれぞれ円形として解析を行い、どちらの形状が透過特性に大きな影響を及ぼしているのかを調べた。

本節では、図4.3の直線折れ曲がり回路の導波路の任意形状接合部の境界(C_5)を円形とした場合、つまり、曲がり部内側の境界を円形にした場合の電子波回路の透過特性を示す。解析に用いた回路は、図4.23に示した回路であり、規格化された各導波路幅を $ka = \pi$ 、規格化された導波路内部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 0.0$ とし、導波路1, 2のなす角を $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$ とする。また、図4.24~図4.29は C_5 の曲率半径 $R = 0.5$ とした回路であり、図4.30~図4.35は C_5 の曲率半径 $R = 1.5$ とした回路である。

曲率半径が $R = 0.5$ の場合の回路の透過特性は、直線折れ曲がり回路と同様な特性を示した。これは、曲率半径が小さいため図4.3の直角折れ曲がり回路と非常によく似た形状の回路となっているため、透過特性も非常によく似たものとなったと考えられる。また、曲率半径を $R = 1.5$ と大きくした場合、透過確率、反射確率は直線折れ曲がり回路より透過確率の変動が激しくなりっている。

導波路外部ポテンシャルが $V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$ のとき、直線折れ曲がり導波路では、透過確率が最大となる点が存在するが、透過確率がほぼ1となる点は存在しない。一方、曲がり部内側を円形とした回路では、曲率半径が $R = 0.5$, $R = 1.5$ のとき、電子の透過確率がほぼ1となる点が存在しており、曲率半径 $R = 1.5$ の場合にも透過確率がほぼ1となる点が存在している。したがって、曲がり部内側を円形にすることで、透過確率をほぼ1にすることができる電子のエネルギーが存在することがわかる。

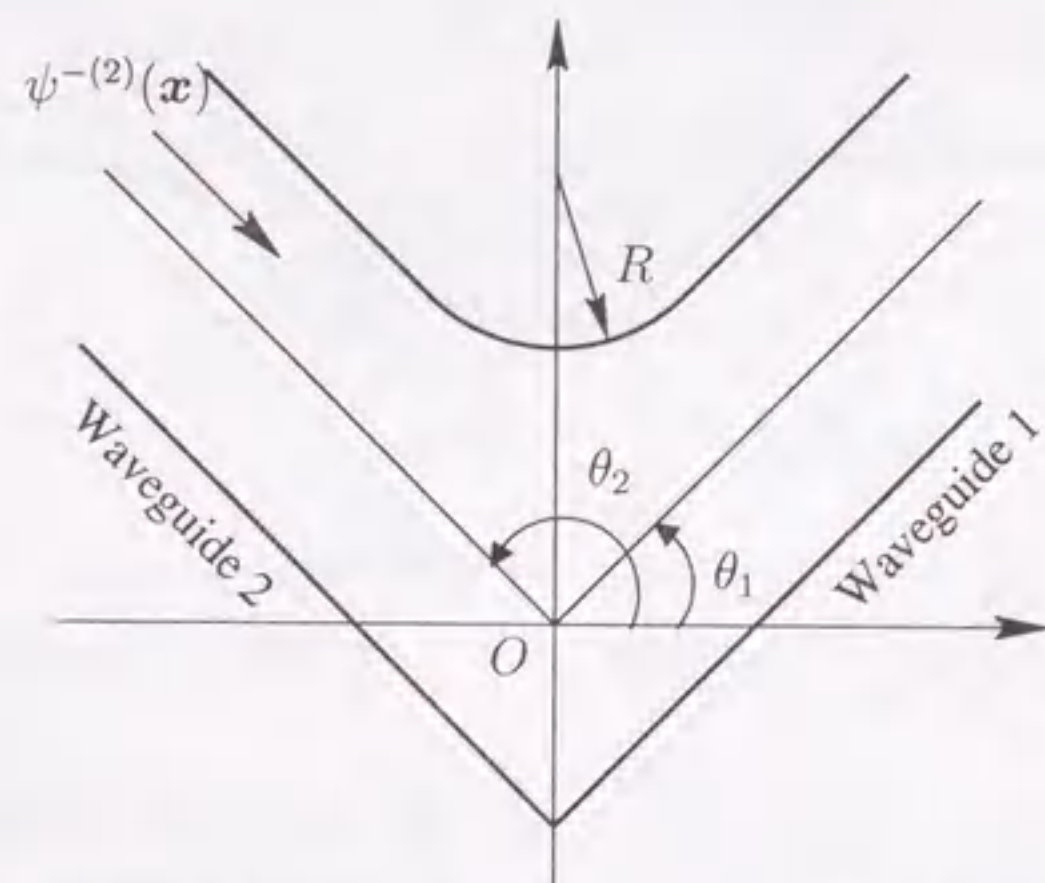


図4.23 曲がり部内側を円形とした電子波導路

4.6 曲がり部内側を円形とした場合

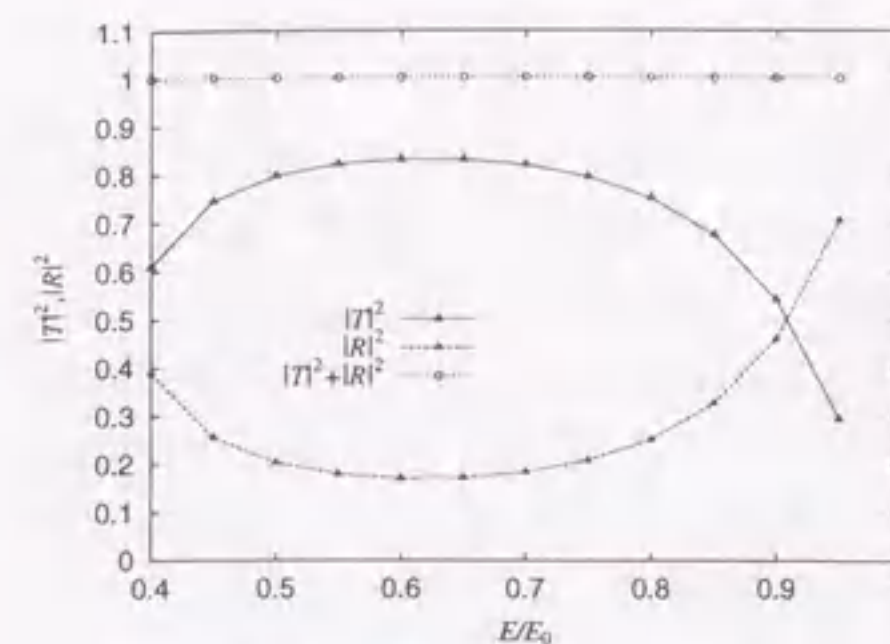


図4.24 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

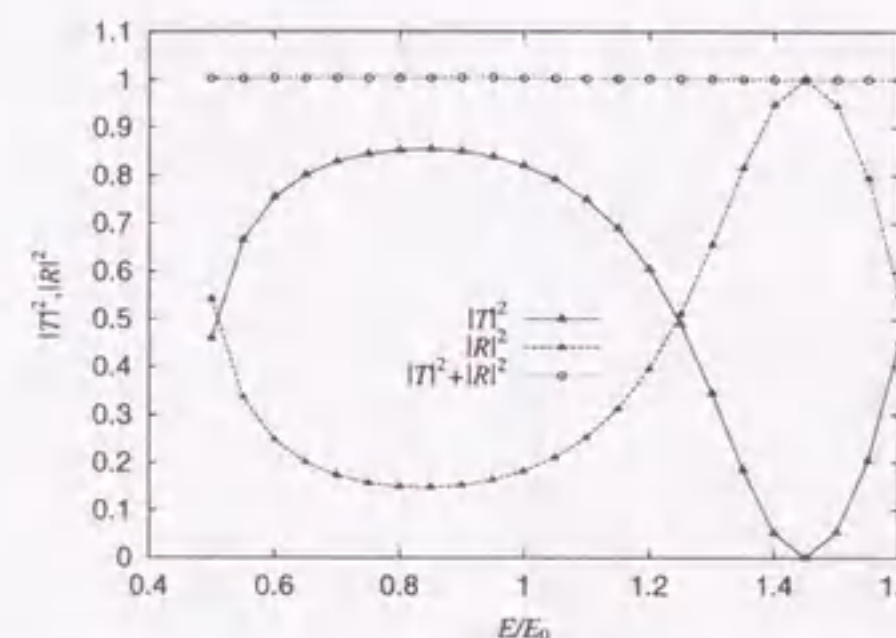


図4.25 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

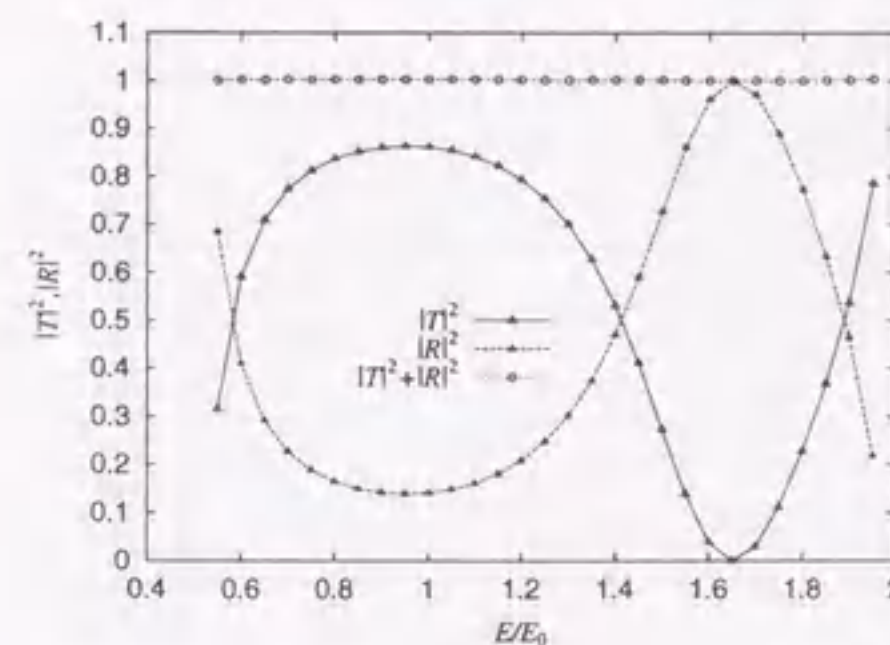


図4.26 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

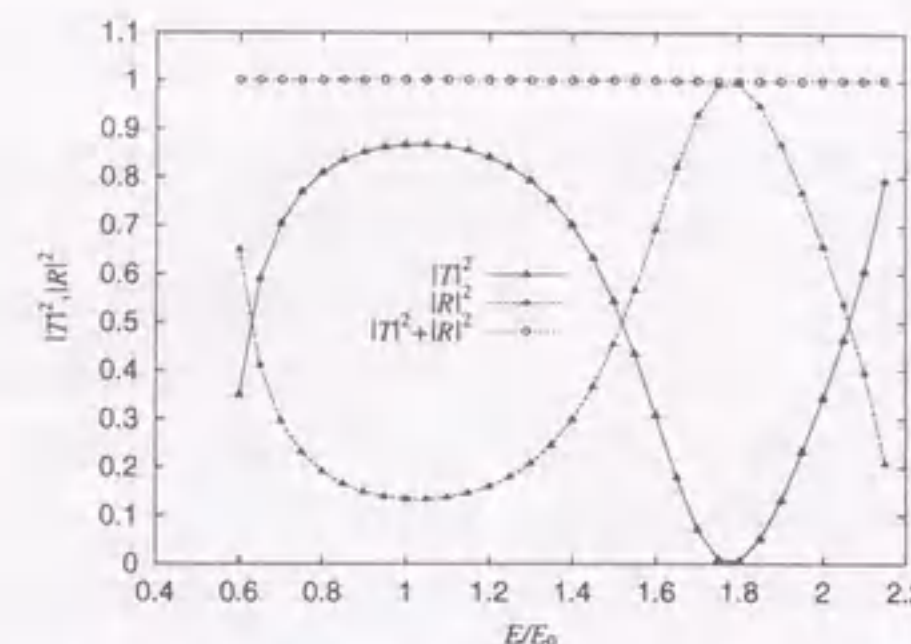


図4.27 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

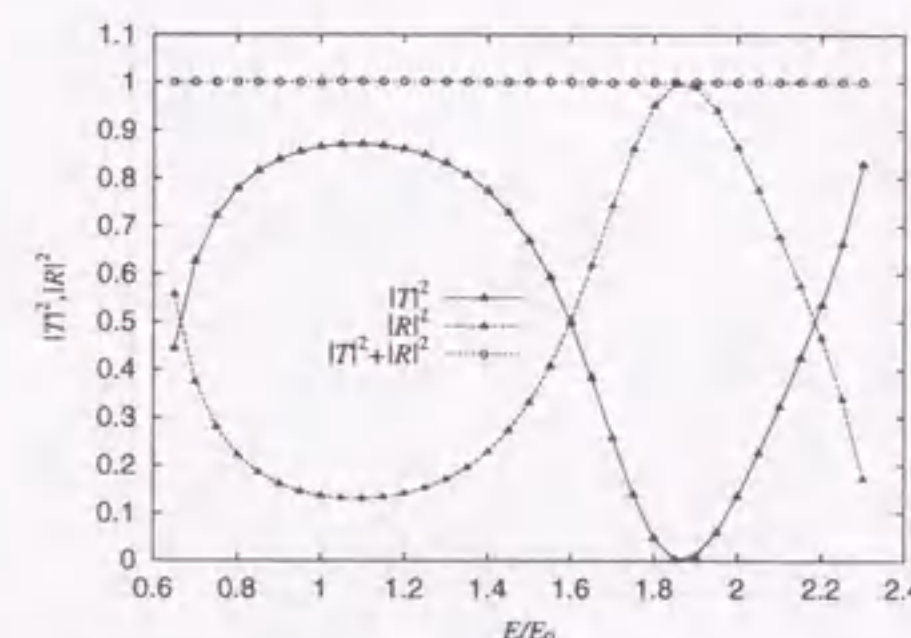


図4.28 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

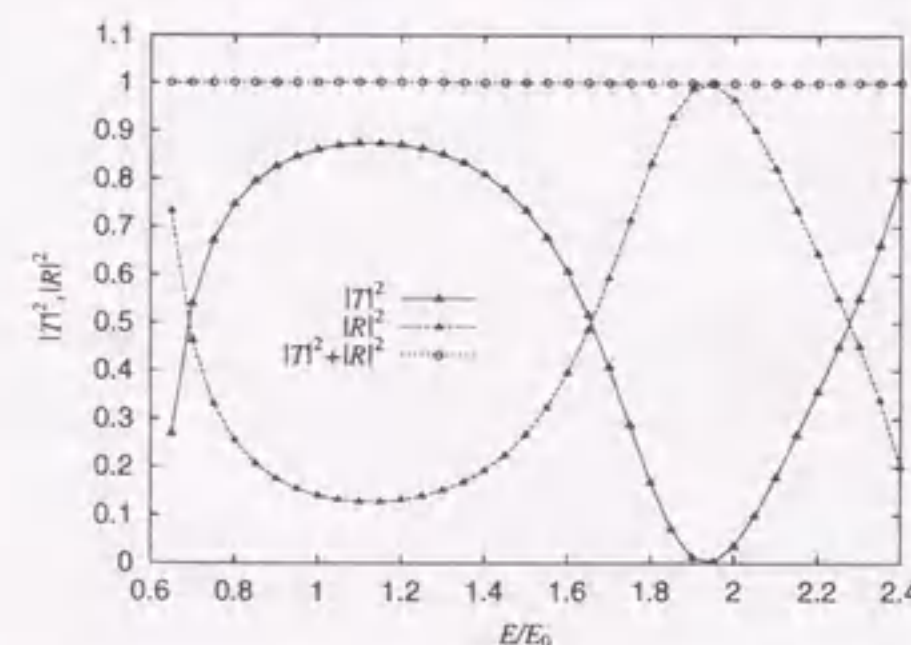


図4.29 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90^\circ$, $R = 0.5$)

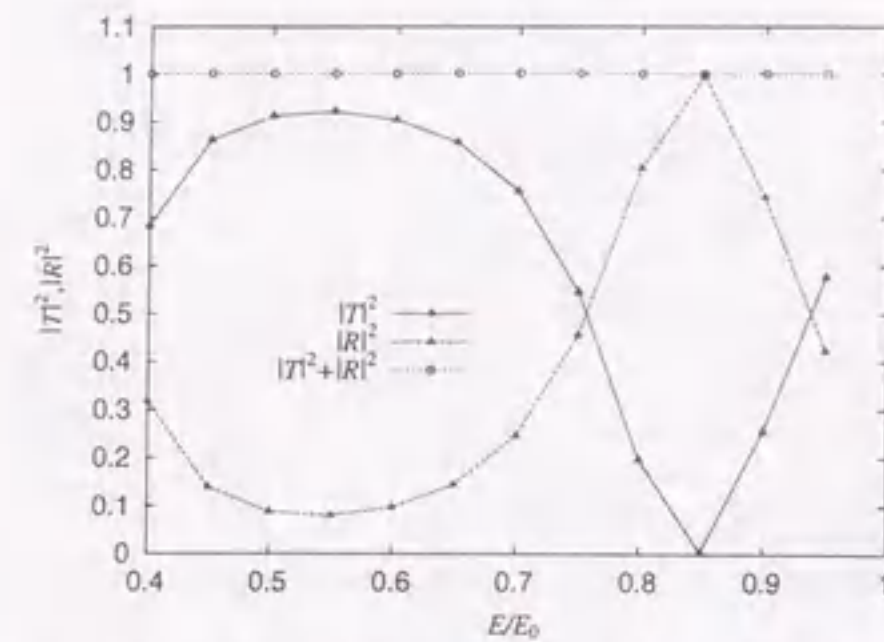


図4.30 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

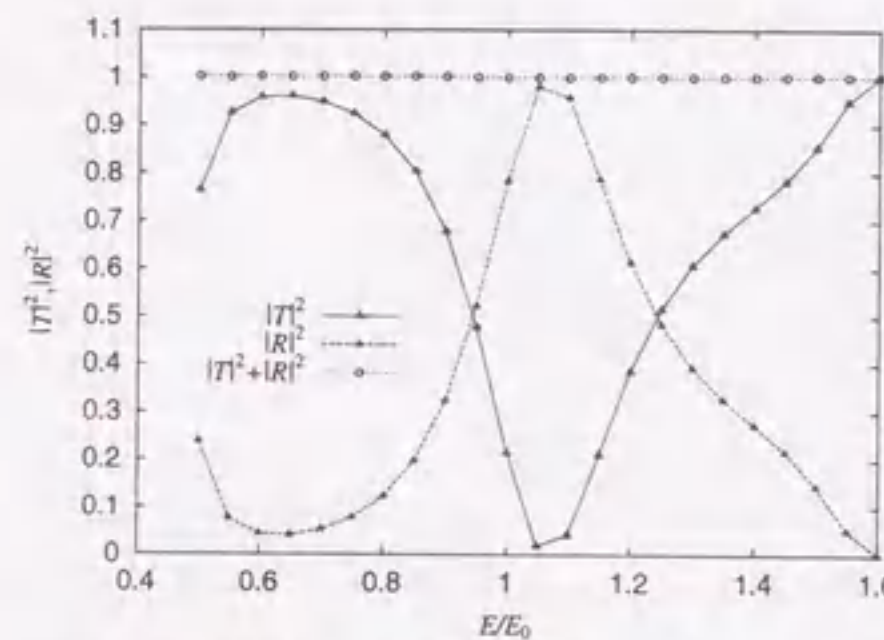


図4.31 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

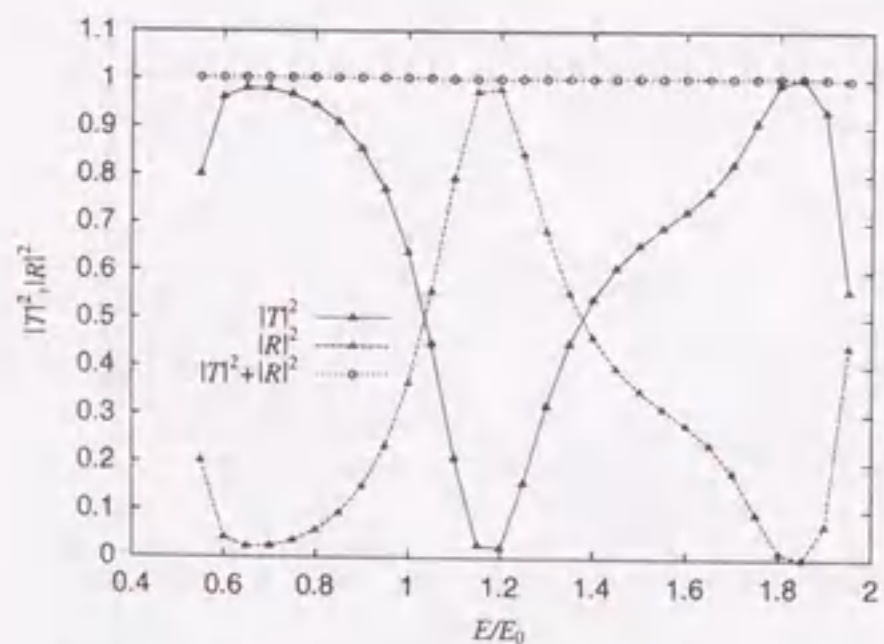


図4.32 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

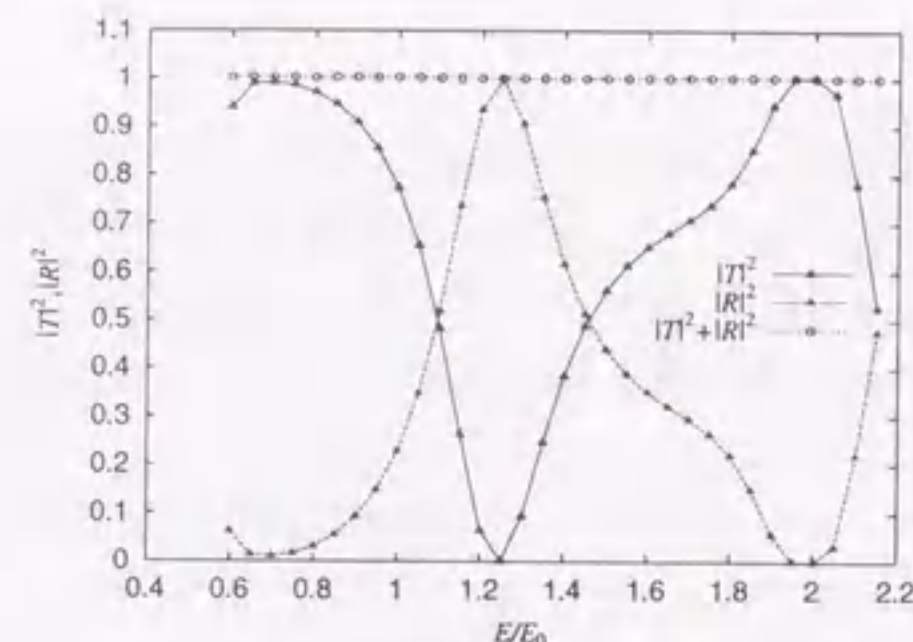


図4.33 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

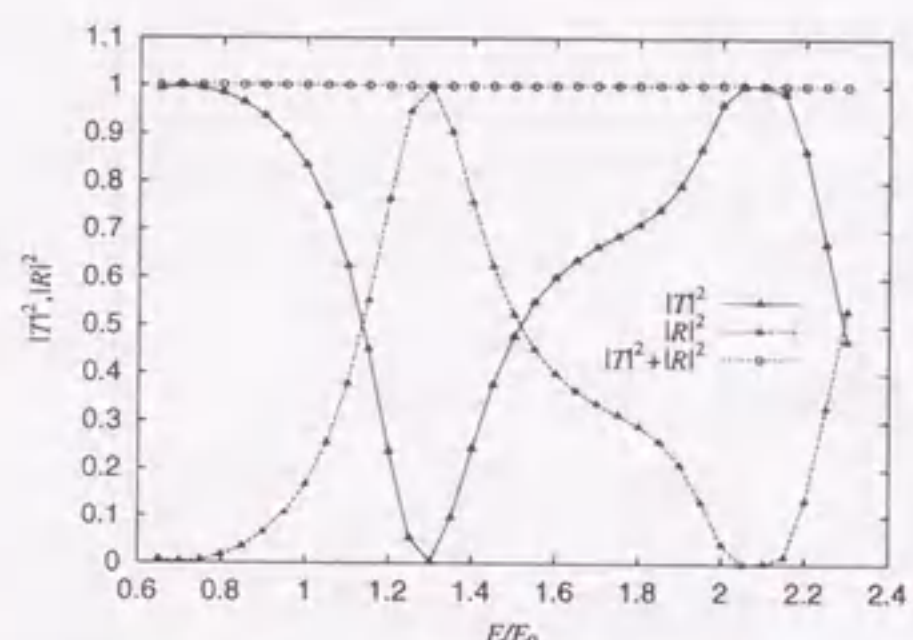


図4.34 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

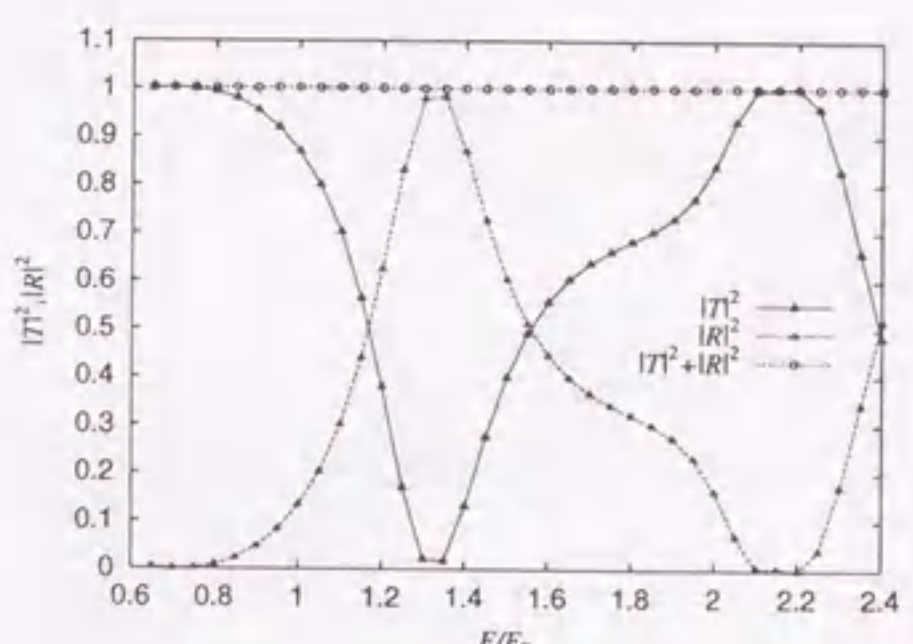


図4.35 曲がり部内側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta = 90$, $R = 1.5$)

4.7 曲がり部外側を円形とした場合

図4.3の直線折れ曲がり回路の導波路の任意形状接合部の境界 C_0 を円形とした場合、つまり、曲がり部外側の境界を円形にした場合の電子の透過特性を示す。解析に用いた回路は、図4.36に示した回路であり、規格化された導波路幅を $ka_1 = \pi$ 、規格化された導波路内部のポテンシャルを $V_2/E_0 = 0.0$ とし、導波路1, 2のなす角を $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$ 、とした回路である。図4.37～図4.42から、この回路の透過特性は、円形曲がり導波路の透過特性と非常によく似ており、電子のエネルギーにほとんど関係なく透過確率はほぼ1である。前節のような、導波路曲がり部の内側形状を円形にした場合と異なり、電子のエネルギーによる透過係数の変動は少ない。

以上のことから、回路の透過特性は曲がり部の形状に大きく影響を受け、特に曲がり部の外側の形状が透過特性に大きな影響を与えられと考える。また、透過特性をよくするには、曲がり部、とくに曲がり部外側の形状を円形にすることで、透過特性をよくすることができると考える。

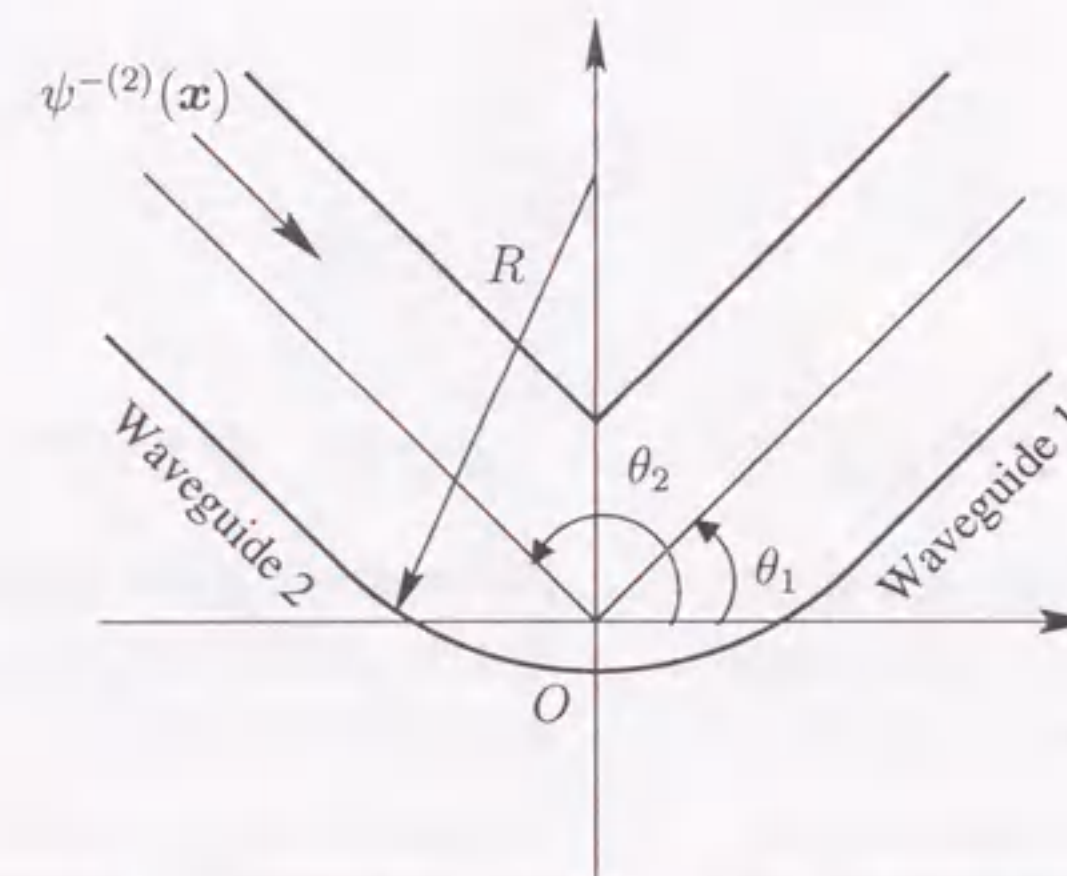


図4.36 曲がり部外側を円形とした電子波導波路

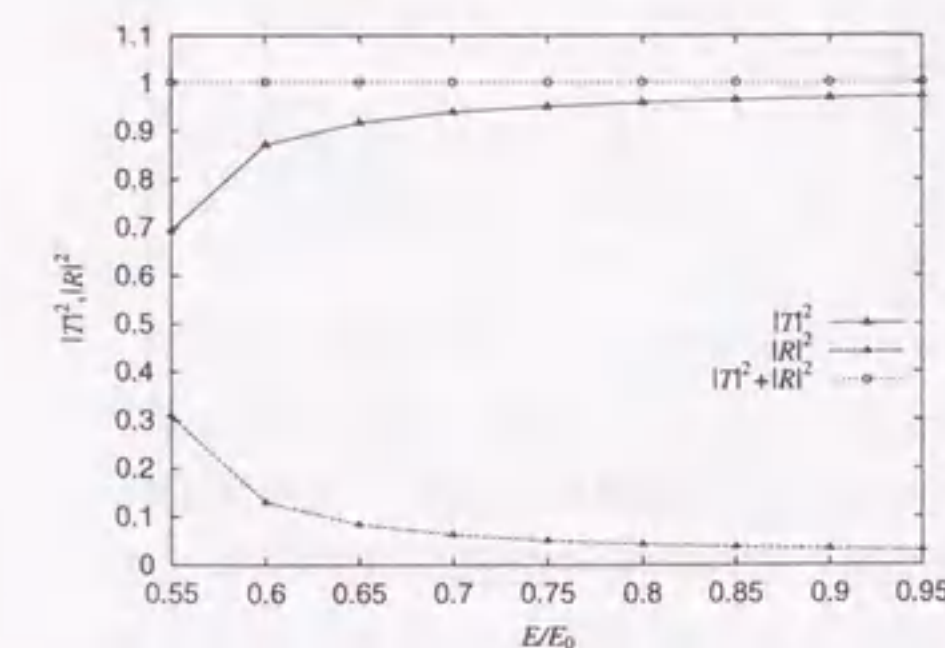


図4.37 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

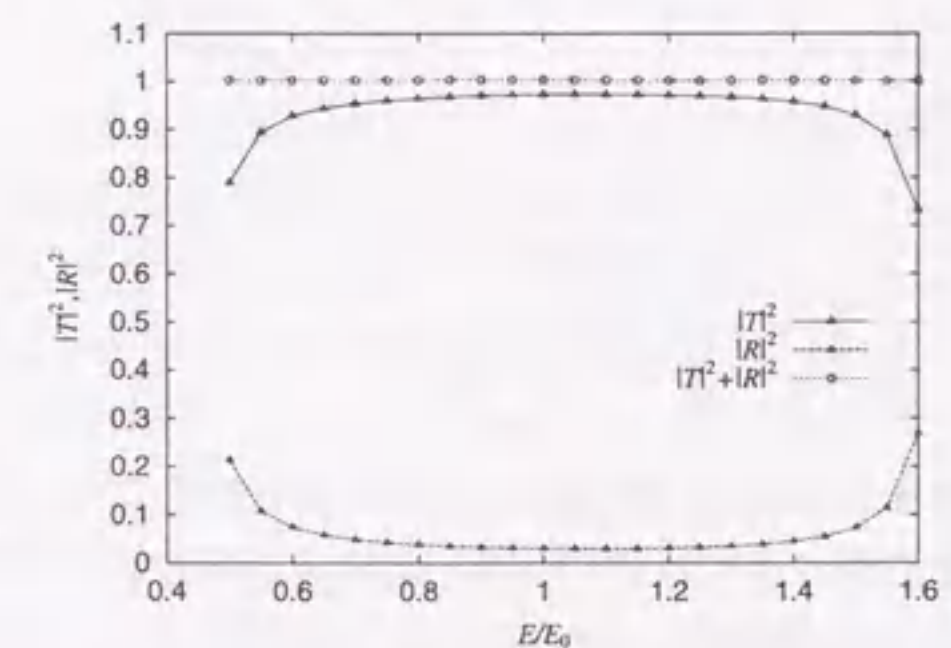


図4.38 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

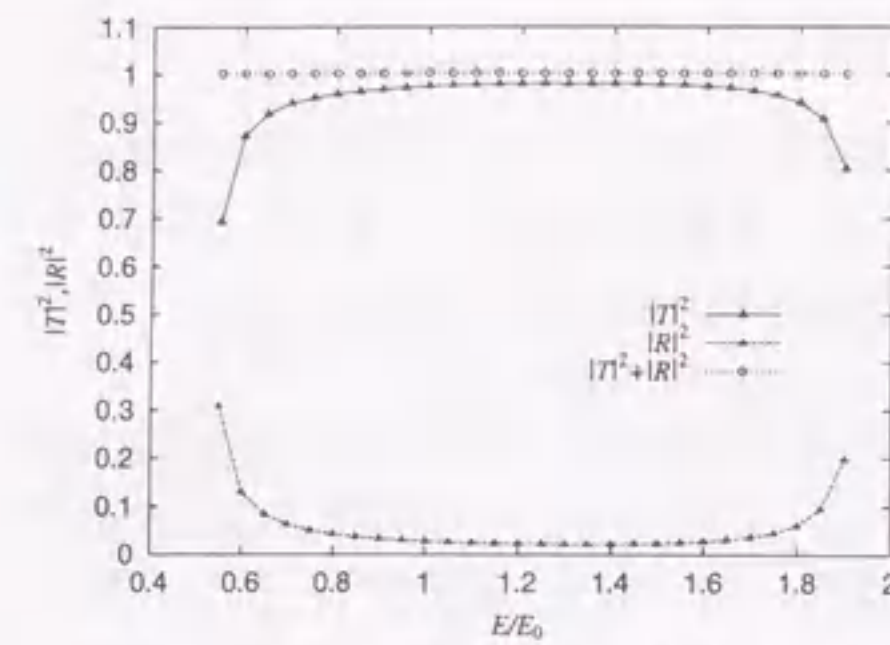


図 4.39 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

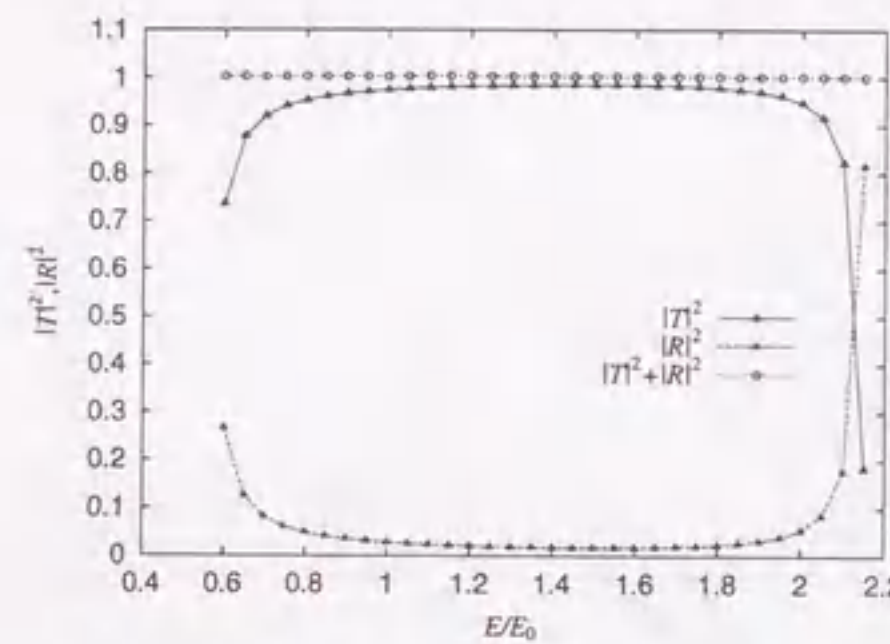


図 4.40 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

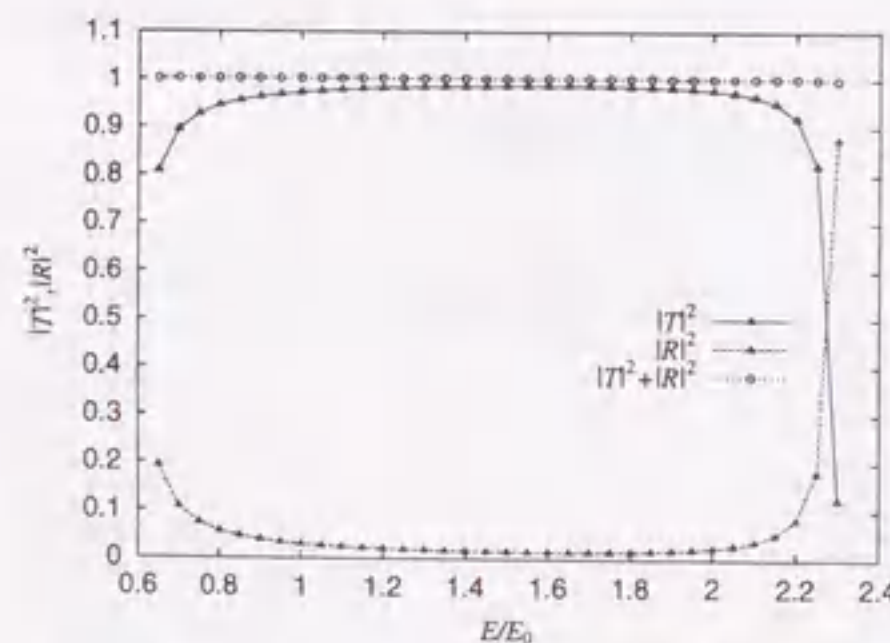


図 4.41 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

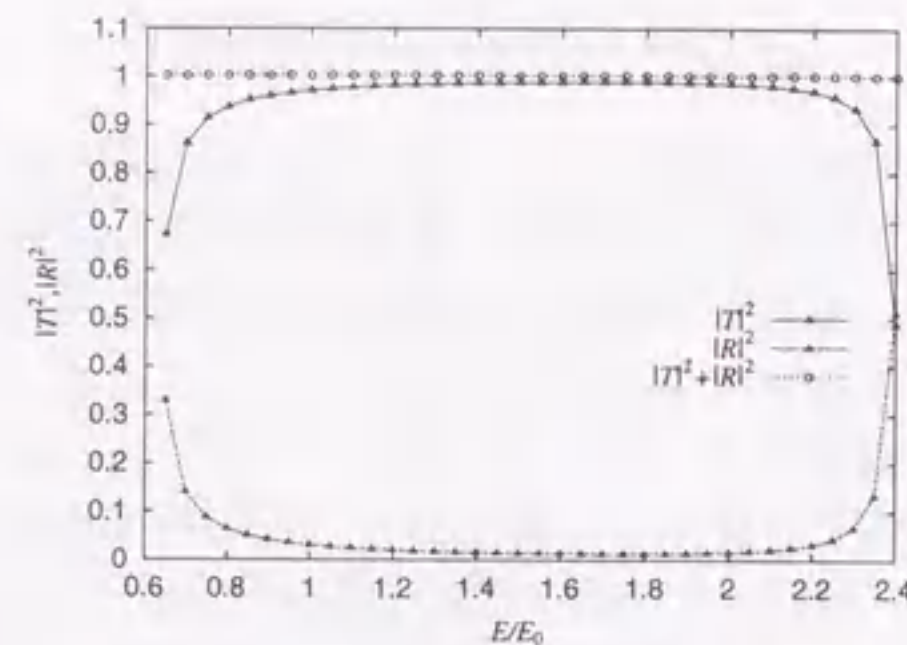


図 4.42 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 0.5$)

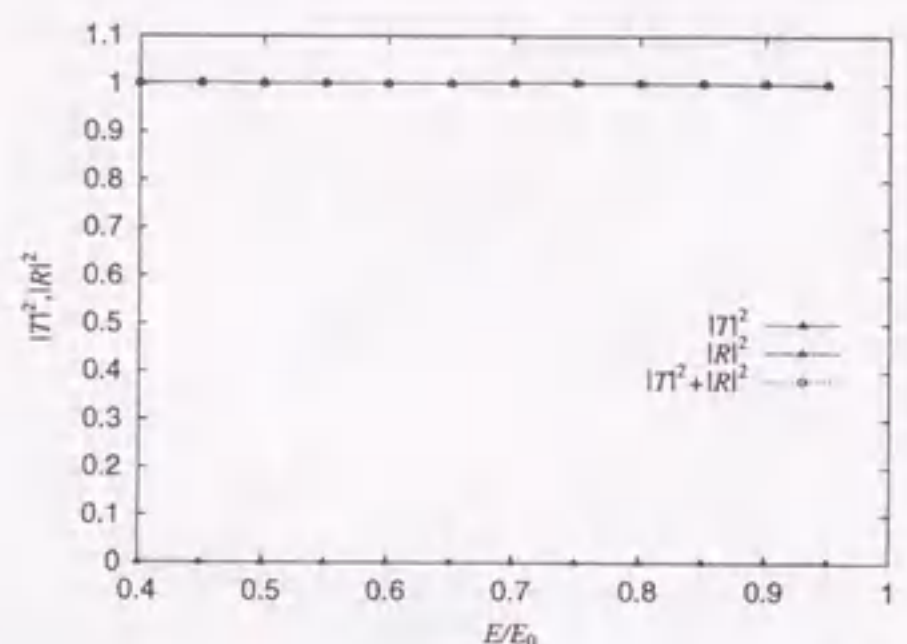


図 4.43 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 1.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

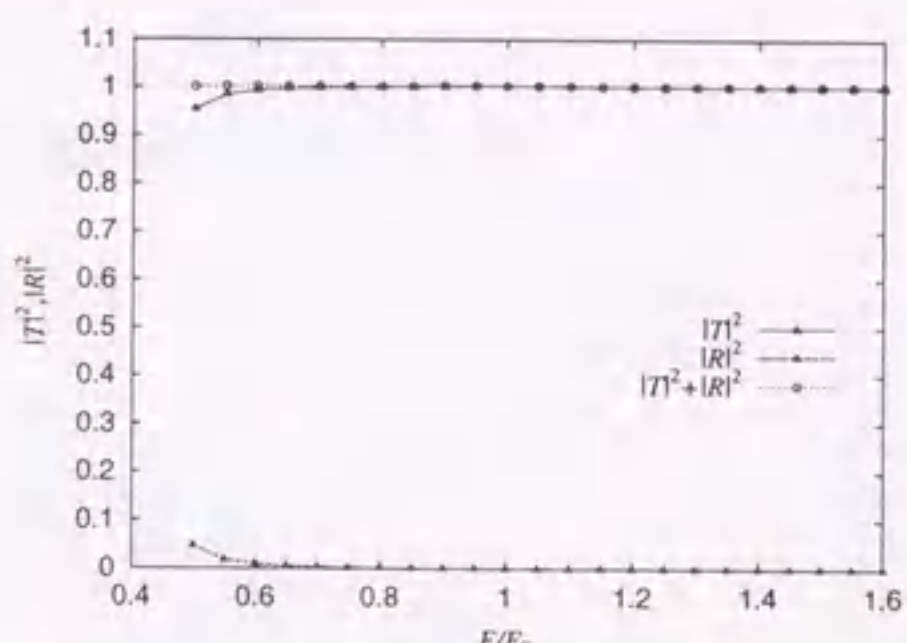


図 4.44 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 2.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

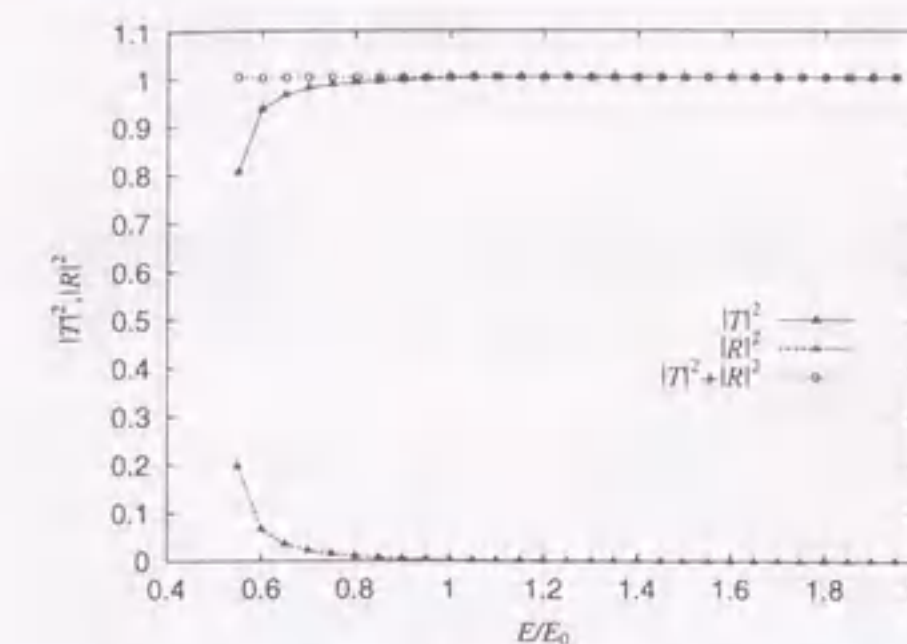


図 4.45 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

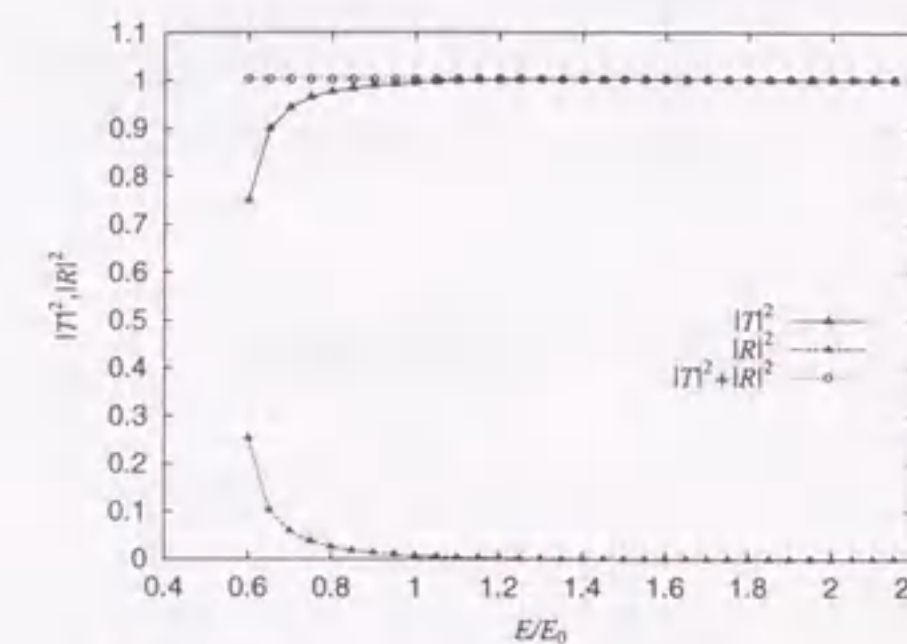


図 4.46 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 4.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

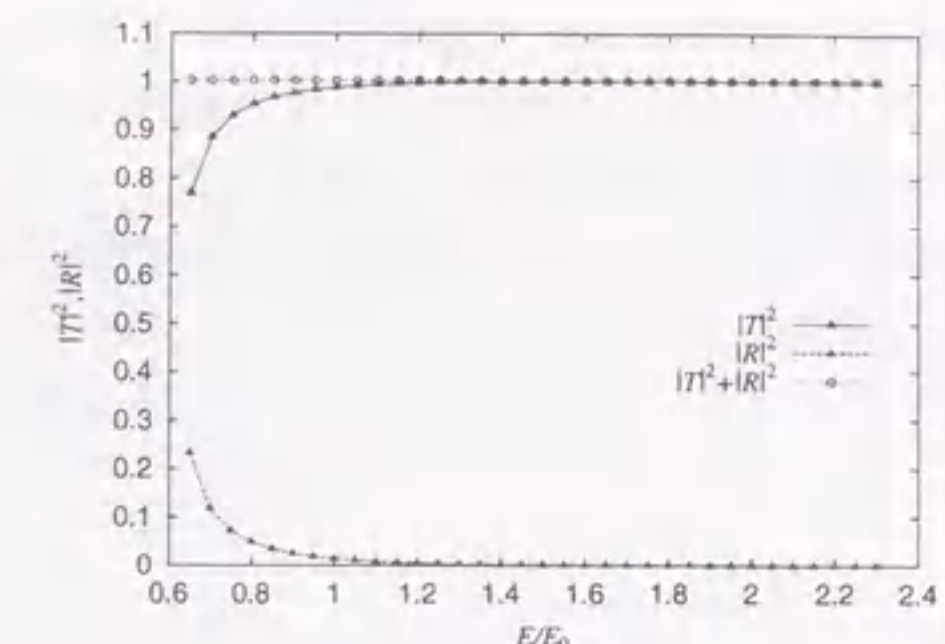


図 4.47 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 5.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

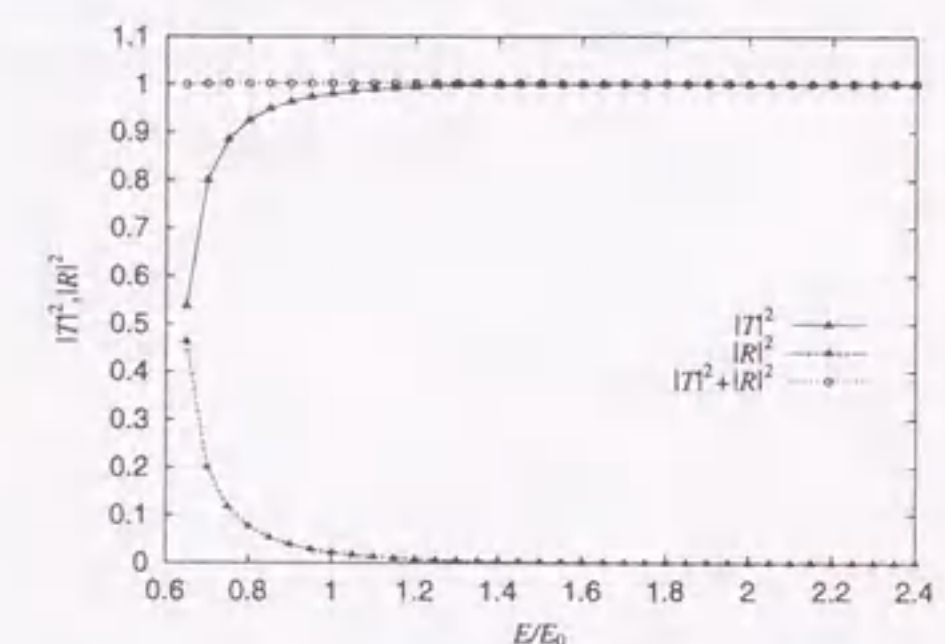


図 4.48 曲がり部外側を円形とした電子波導波路の透過特性 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 6.0$, $V_2/E_0 = 0.0$, $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, $R = 1.0$)

4.8 結言

本章では、均質なポテンシャル分布をもち、導波路外部のポテンシャルが有限である 2 ポート電子波導波回路の解析を、導波モード分離型境界積分方程式を境界要素法を用いて数値計算を行なった。まず、導波モード分離型境界積分方程式の数学的妥当性を調べるため、厳密解が求めることができる無限長直線導波路について数値計算を行ない、導波モード分離型境界積分方程式より求めた数値解と厳密解が一致することから、数学的に妥当であることを示した。次に、直線折れ曲がり導波路、円形曲がり導波路に対し数値計算を行ない、回路の透過特性を調べた。円形曲がり導波路では、導波路外部のポテンシャルによらず、単一モード条件を満足する範囲での電子のエネルギーであれば、透過確率はほぼ 1 であることが分かった。従って、曲がり部をもつ導波回路において、曲がり部を円形に設計するほうが透過特性が良いことが分かった。また、直線折れ曲がり導波路において、曲がり部内側境界、外側境界をそれぞれ円形にした回路を解析し、導波路曲がり部外側境界を円形にした場合、回路の透過特性は円形曲がり回路の透過特性と非常に良く似た透過特性を調べた。このとき、電子のエネルギーにほとんど関係なく電子の透過確率はほぼ 1

であった。導波路曲がり部外側の形状を円形に設計することにより、透過特性を改善することができた。導波回路において、曲がり部がある場合、曲がり部の形状により、透過特性の大幅な改善が可能なことを示した。

本論文では、単一モード条件下に限定して調べたが、導波路外部のポテンシャルが高い場合には、1次モードが導波路外部のポテンシャルに対して、低い電子のエネルギーで現れるため、2モード以上の条件下でも調べる必要がある。

第5章 Y型分岐電子波導波路

5.1 序言

Y型分岐回路は、古くからマイクロ波、光波領域でも多用され、数多くの解析例が報告されている。しかし、放射波まで考慮した開放型導波路のY型分岐回路に対する精密解析については見当たらない。導波モード分離型積分方程式は、Y型分岐回路に対しても2ポートの場合と全く同様に導出することができる。本章では、第2章、第3章で2ポート電子波導波回路に対する導波モード分離型境界積分方程式と同様の手法により、Y型分岐回路に対する導波モード分離型積分方程式を導出する過程を示す。

5.2 従来の積分方程式

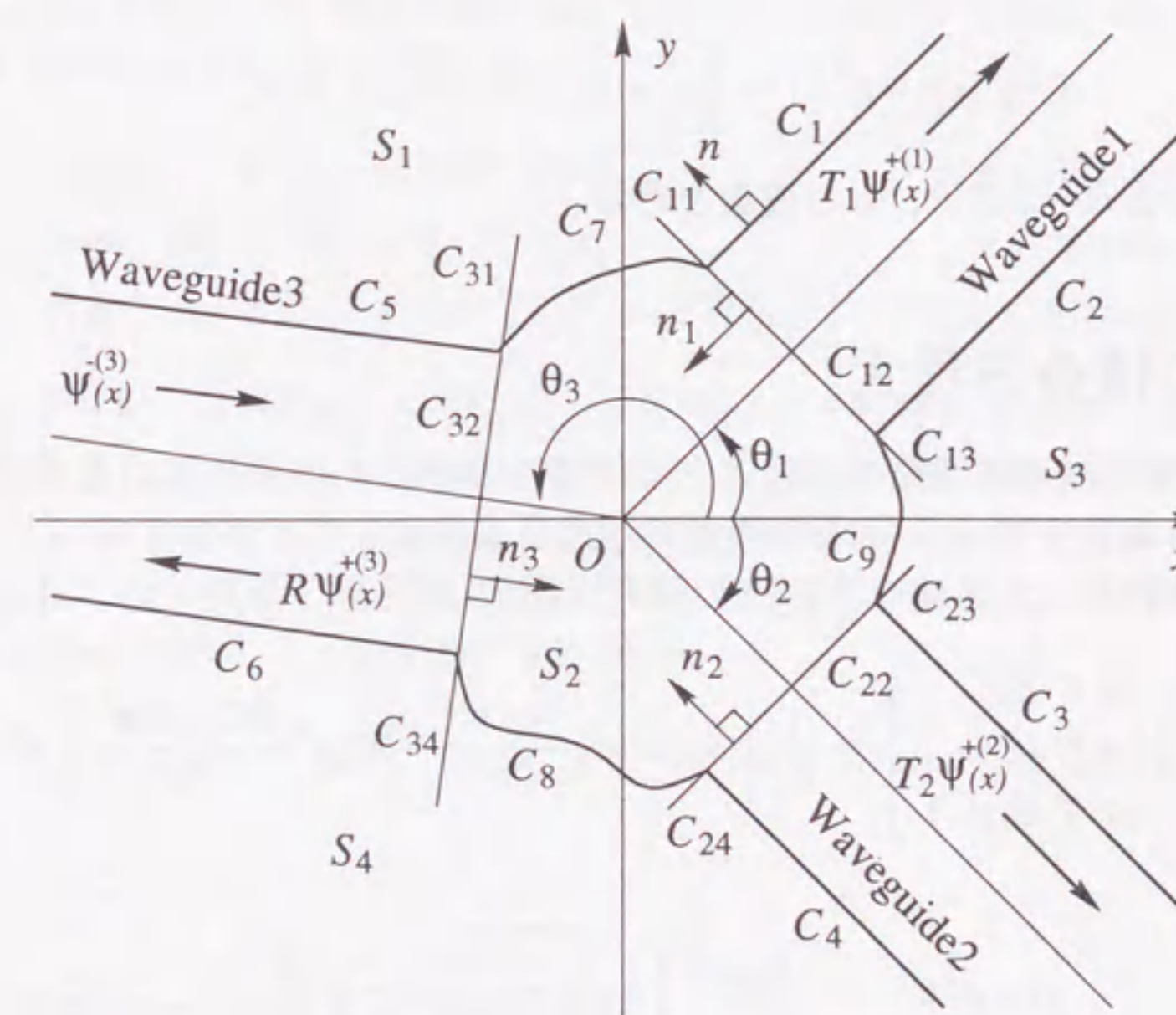


図 5.1 Y 型分岐電子波回路

上図のように3つの半無限長電子波導波路が任意形状結合部により結合されている2次元Y分岐型電子波導波回路を考える。ただし、各導波路は単一モード条件を満足するものとする。電子波導波路の境界を上図のように $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9$

とする。導波路1, 2, 3および任意形状結合部を領域 S_2 , 導波路外部で境界 $C_5+C_1+C_7$ に囲まれる領域を領域 S_1 , 導波路外部で境界 $C_2+C_3+C_9$ に囲まれる領域を領域 S_3 , 導波路外部で境界 $C_4+C_6+C_8$ に囲まれる領域を領域 S_4 とする。導波路1, 導波路2, 導波路3が x 軸となす角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする。領域 S_1, S_2, S_3, S_4 のポテンシャルをそれぞれ一定値 V_1, V_2, V_3, V_4 とする。また、回路の大きさは、基準とする電子のエネルギー E_0 のド・ブロイ波長により規格化されるものとする。

導波路3無限遠方より基本モード電子波 $\psi(\mathbf{x})$ を入射する。電子自身がつくるポテンシャルを無視し、導波路を伝搬する電子のエネルギーを一定値 E , 半導体結晶中の電子のエンベロープ関数(以下、電子波と呼ぶ)を $\psi(\mathbf{x})$ とすれば、 $\psi(\mathbf{x})$ は次式のような時間を含まないSchrödinger波動方程式の解である。

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + [V_i - E]\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (5.1)$$

ただし、 $\hbar = h/2\pi$, h はプランク定数, m^* は電子の有効質量であり、導波路を構成する半導体に依存する。 V_i は領域 S_i のポテンシャル, E は電子のエネルギーを表している。また、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

である。

式(5.1)を次のように式変形する。

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + k^2\left[1 - \frac{V_i}{E}\right]\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (5.3)$$

ただし、 $k^2 = 2m^*E/\hbar^2$ であり、 k を波数と呼ぶ。

5.3 従来の積分方程式

2ポート2次元電子波導回路の場合と全く同様の手法により、式(5.3)を満足する2次元自由空間Green関数を考え、従来の積分方程式を導出することができる。

観測点が導波路内部にある場合、従来の積分方程式は、

$$\left. \begin{array}{ll} \psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial\psi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \quad (5.4)$$

である。ただし、

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}\left(k\sqrt{1-\frac{V_2}{E}}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right) \quad (5.5)$$

である。ただし、 $H_0^{(2)}$ は0次第2種Hankel関数を表している。また、観測点が導波路外部にある場合、従来の積分方程式は、

$$\left. \begin{array}{ll} \psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_1, S_3, S_4) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \in S_2) \end{array} \right\} = -\int_{C_1+C_5+C_7} \left[G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial\psi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl'$$

$$\begin{aligned} & -\int_{C_2+C_3+C_9} \left[G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial\psi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & -\int_{C_4+C_6+C_8} \left[G_4(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial\psi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_4(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \end{aligned} \quad (5.6)$$

である。ただし、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低い場合、Green関数は

$$G_i(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi}K_0\left(k\sqrt{\frac{V_i}{E}-1}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right) \quad (i=1, 3, 4) \quad (5.7)$$

であり、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高い場合、

$$G_i(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{j}{4}H_0^{(2)}\left(k\sqrt{1-\frac{V_i}{E}}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right) \quad (i=1, 3, 4) \quad (5.8)$$

である。 $H_0^{(2)}$ は0次第2種ハンケル関数, K_0 は0次変形ベッセル関数を表している。

5.4 透過係数, 反射係数

導波路 $i(i=1, 2, 3)$ と任意形状結合部の間に仮想的な境界を設け、各領域において全波動 $\psi(\mathbf{x})$ を次のような成分に分解する。

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) + T_1\psi^{+(1)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Waveguide1}) \quad (5.9)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) + T_2\psi^{+(2)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Waveguide2}) \quad (5.10)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) + R\psi^{+(3)}(\mathbf{x}) + \psi^{-(3)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Waveguide3}) \quad (5.11)$$

ただし、 $\psi^{+(1)}(\mathbf{x})$, $\psi^{+(2)}(\mathbf{x})$, $\psi^{+(3)}(\mathbf{x})$, $\psi^{-(3)}(\mathbf{x})$ はそれぞれ導波路1基本モード透過波, 導波路2基本モード透過波, 導波路3基本モード反射波, 導波路3基本モード入射波を表している。また、モード条件を満足しない波動を $\psi^C(\mathbf{x})$ といている。我々は、このモード条件を満足しない波動を攪乱波と呼んでいる。任意形状結合部における波動を攪乱波と同じ記号 $\psi^C(\mathbf{x})$ で表すこととする。すなわち、

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{Connecting Section}) \quad (5.12)$$

とする。

5.4.1 観測点が領域 S_2 にある場合

観測点が領域 S_2 , つまり導波路内部にある場合、式(5.9)~(5.12)を式(5.4)に代入すると、次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial\psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl'$$

$$\begin{aligned}
& + T_1 \int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
& + T_2 \int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
& + R \int_{C_5+C_6} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
& + \int_{C_5+C_6} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{-(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{-(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl'
\end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで、各モード波について次式が成り立つ。

$$\left. \begin{array}{l} \psi^{+(1)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 1}) \\ \frac{1}{2}\psi^{+(1)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C_1, C_2) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \in \text{上記以外}) \end{array} \right\} = \int_{C_1+C_2} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
+ \int_{C_{12}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_1} - \psi^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_1} \right] dl' \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi^{+(2)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 2}) \\ \frac{1}{2}\psi^{+(2)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C_3, C_4) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \in \text{上記以外}) \end{array} \right\} = \int_{C_3+C_4} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
+ \int_{C_{22}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_2} - \psi^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_2} \right] dl' \quad (5.15)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi^{+(3)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 3}) \\ \frac{1}{2}\psi^{+(3)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C_5, C_6) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \in \text{上記以外}) \end{array} \right\} = \int_{C_5+C_6} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{+(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
+ \int_{C_{32}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{+(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_3} - \psi^{+(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_3} \right] dl' \quad (5.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi^{-(3)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 3}) \\ \frac{1}{2}\psi^{-(3)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C_5, C_6) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \in \text{上記以外}) \end{array} \right\} = \int_{C_5+C_6} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{-(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^{-(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
+ \int_{C_{32}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{-(3)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_3} - \psi^{-(3)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_3} \right] dl' \quad (5.17)$$

ここで、

$$U_2^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{i2}} \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (5.18)$$

とし、式(5.14)~(5.17)より(5.13)は、

$$\left. \begin{array}{l} \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in S_2) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\
- T_1 U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) - T_2 U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) - R U_2^{+(3)}(\mathbf{x}) - U_2^{-(3)}(\mathbf{x}) \quad (5.19)$$

と表される。式(5.19)の第1項は、導波路遠方まで伝搬しない波、攪乱波の積分項であり、無限長の積分路を持つが、実質上、有限の積分路とみなすことができる。また、他の積分項は、全て有限の積分路を持つ積分に置き換えることができた。ただし、導波路1の透過波の透過係数 T_1 、導波路2の透過波の透過係数 T_2 、導波路3の反射波の反射係数が未知数であり、これを未知関数 $\psi^C(\mathbf{x})$ で表すために、式(5.19)において、直交座標 \mathbf{x} を円筒座標 \mathbf{r} で表し、導波路無限遠方である場合を考える。つまり、

$$r \rightarrow \infty \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad (5.20)$$

である場合を考える。このとき、Green関数の漸近展開を利用すると、

$$G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \simeq A_2(r)g(\theta|\mathbf{x}') \quad (5.21)$$

と表される。ただし、

$$A_2(r) = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2j}{k(1-\frac{V_2}{E})}} \exp \left[-jk \sqrt{1-\frac{V_2}{E}} r \right] \quad (5.22)$$

$$g_2(\theta|\mathbf{x}') = \exp \left[jk \sqrt{1-\frac{V_2}{E}} (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \right] \quad (5.23)$$

である。

$\psi^C(\mathbf{x})$ はモード条件を満足しないため、導波路遠方まで伝搬することはない。そこで、式(5.19)の辺々に $1/A_2(r)$ をかけたとき、右辺に現れる項について、

$$\frac{\psi^C(\mathbf{x})}{A_2(r)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (5.24)$$

と仮定することができる。したがって、式(5.19)は次式のようになる。

$$T_1 u_2^{+(1)}(\theta) + T_2 u_2^{+(2)}(\theta) + R u_2^{+(3)}(\theta) = \int_C \left[g_2(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(3)}(\theta) \quad (5.25)$$

ただし、

$$u_2^{\pm(i)}(\theta) = \int_{C_{i2}} \left[g_2(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'_i} - \psi^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial n'_i} \right] dl' \quad (5.26)$$

である。式(5.25)において、各導波路が x 軸となす角を θ に代入することにより、つまり、 $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ を考える。すると、以下に示す式が得られる。

$$T_1 u_2^{+(1)}(\theta_1) + T_2 u_2^{+(2)}(\theta_1) + R u_2^{+(3)}(\theta_1)$$

$$= \int_C \left[g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_1|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(3)}(\theta_1) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & T_1 u_2^{+(1)}(\theta_2) + T_2 u_2^{+(2)}(\theta_2) + R u_2^{+(3)}(\theta_2) \\ &= \int_C \left[g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_2|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(3)}(\theta_2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & T_1 u_2^{+(1)}(\theta_3) + T_2 u_2^{+(2)}(\theta_3) + R u_2^{+(3)}(\theta_3) \\ &= \int_C \left[g_2(\theta_3|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_3|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(3)}(\theta_3) \end{aligned} \quad (5.29)$$

式(5.27), (5.28), (5.29)を T_1 , T_2 , R の連立方程式と考え, T_1 , T_2 , R について解く.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u_2^{+(1)}(\theta_1) & u_2^{+(2)}(\theta_1) & u_2^{+(3)}(\theta_1) \\ u_2^{+(1)}(\theta_2) & u_2^{+(2)}(\theta_2) & u_2^{+(3)}(\theta_2) \\ u_2^{+(1)}(\theta_3) & u_2^{+(2)}(\theta_3) & u_2^{+(3)}(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_C \left[g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_1|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_1) \\ \int_C \left[g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_2|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_2) \\ \int_C \left[g_2(\theta_3|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_3|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta = & u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{+(3)}(\theta_3) + u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{+(3)}(\theta_2)u_2^{+(1)}(\theta_3) \\ & + u_2^{+(3)}(\theta_1)u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{+(2)}(\theta_3) - u_2^{+(3)}(\theta_1)u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{+(1)}(\theta_3) \\ & - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{+(3)}(\theta_2)u_2^{+(2)}(\theta_3) - u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{+(3)}(\theta_3) \end{aligned} \quad (5.31)$$

式(5.30)をクラメールの公式を用いて透過係数 T_1 , T_2 , 反射係数 R について解く.

$$T_1 = \left\{ \int_C \left[L(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial L(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - \Delta_{11}u_2^{-(3)}(\theta_1) + \Delta_{21}u_2^{-(3)}(\theta_2) - \Delta_{31}u_2^{-(3)}(\theta_3) \right\} / \Delta \quad (5.32)$$

$$T_2 = \left\{ \int_C \left[M(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial M(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' + \Delta_{12}u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{22}u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{32}u_2^{-(3)}(\theta_3) \right\} / \Delta \quad (5.33)$$

$$R = \left\{ \int_C \left[N(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial N(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - \Delta_{13}u_2^{-(3)}(\theta_1) + \Delta_{23}u_2^{-(3)}(\theta_2) - \Delta_{33}u_2^{-(3)}(\theta_3) \right\} / \Delta \quad (5.34)$$

ただし,

$$L(\mathbf{x}') = \Delta_{11}g_2(\theta_1|\mathbf{x}') - \Delta_{21}g_2(\theta_2|\mathbf{x}') + \Delta_{31}g_2(\theta_3|\mathbf{x}') \quad (5.35)$$

$$M(\mathbf{x}') = -\Delta_{12}g_2(\theta_1|\mathbf{x}') + \Delta_{22}g_2(\theta_2|\mathbf{x}') - \Delta_{32}g_2(\theta_3|\mathbf{x}') \quad (5.36)$$

$$N(\mathbf{x}') = \Delta_{13}g_2(\theta_1|\mathbf{x}') - \Delta_{23}g_2(\theta_2|\mathbf{x}') + \Delta_{33}g_2(\theta_3|\mathbf{x}') \quad (5.37)$$

であり, Δ_{ij} は式(5.30)左辺の係数行列の i 行 j 列の余因子である. 式(5.32)~(5.34)のように導波路1の透過係数 T_1 , 導波路2の透過係数 T_2 , 導波路3の反射係数 R を $\psi^C(\mathbf{x})$ で表すことができた.

5.5 導波モード分離型積分方程式

式(5.32), (5.33), (5.34)を式(5.19)に代入すると, 次式のような観測点が導波路内部にある場合のY分岐型電子波導波路に対する導波モード分離型境界積分方程式を導出することができる.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in S_2) \\ & \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ & 0 \quad (\mathbf{x} \notin S_2, C) \end{aligned} \right\} \\ &= \int_C \left[P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' - S_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

ただし,

$$P_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = G_2(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - [U_2^{+(1)}(\mathbf{x})L(\mathbf{x}') + U_2^{+(2)}(\mathbf{x})M(\mathbf{x}') + U_2^{+(3)}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}')] / \Delta \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} S_2(\mathbf{x}) = & U_2^{-(3)}(\mathbf{x}) - \{ [\Delta_{11}u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{21}u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{31}u_2^{-(3)}(\theta_3)] U_2^{+(1)}(\mathbf{x}) \\ & - [\Delta_{12}u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{22}u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{32}u_2^{-(3)}(\theta_3)] U_2^{+(2)}(\mathbf{x}) \\ & + [\Delta_{13}u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{23}u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{33}u_2^{-(3)}(\theta_3)] U_2^{+(3)}(\mathbf{x}) \} / \Delta \end{aligned} \quad (5.40)$$

である.

また, 式(5.9)~(5.12)を式(5.6)に代入し, 式(5.32)~(5.34)を式(5.6)に代入すると, 次式のような観測点が導波路外部にある場合の導波モード分離型境界積分方程式を導出することができる.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \notin S_2, C) \\ & \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ & 0 \quad (\mathbf{x} \in S_2) \end{aligned} \right\} = - \int_{C_1+C_5+C_7} \left[P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_1(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & \quad - \int_{C_2+C_3+C_9} \left[P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_3(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & \quad - \int_{C_4+C_6+C_8} \left[P_4(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_4(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \\ & \quad - S_1(\mathbf{x}) - S_3(\mathbf{x}) - S_4(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

ただし,

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = & G_i(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - \{ [U_1^{+(1)}(\mathbf{x}) + U_3^{+(1)}(\mathbf{x})] L(\mathbf{x}') \\ & + [U_3^{+(2)}(\mathbf{x}) + U_4^{+(2)}(\mathbf{x})] M(\mathbf{x}') \\ & + [U_4^{+(3)}(\mathbf{x}) + U_1^{+(3)}(\mathbf{x})] N(\mathbf{x}') \} / \Delta \quad (i = 1, 3, 4) \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$U_j^{\pm(i)}(\mathbf{x}) = \int_{C_{ij}} \left[G_j(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_j^{\pm(i)}(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \psi_j^{\pm(i)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_j(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] dl' \quad (i, j = 1, 3, 4) \quad (5.43)$$

$$S_1(\mathbf{x}) = \left\{ \left[\Delta_{11} u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{21} u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{31} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_1^{+(1)}(\mathbf{x}) + \left[\Delta_{13} u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{23} u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{33} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_1^{+(3)}(\mathbf{x}) \right\} / \Delta \quad (5.44)$$

$$S_3(\mathbf{x}) = \left\{ \left[\Delta_{11} u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{21} u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{31} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_3^{+(1)}(\mathbf{x}) + \left[-\Delta_{12} u_2^{-(3)}(\theta_1) + \Delta_{22} u_2^{-(3)}(\theta_2) - \Delta_{32} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_3^{+(2)}(\mathbf{x}) \right\} / \Delta \quad (5.45)$$

$$S_4(\mathbf{x}) = \left\{ \left[-\Delta_{12} u_2^{-(3)}(\theta_1) + \Delta_{22} u_2^{-(3)}(\theta_2) - \Delta_{32} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_4^{+(2)}(\mathbf{x}) + \left[\Delta_{13} u_2^{-(3)}(\theta_1) - \Delta_{23} u_2^{-(3)}(\theta_2) + \Delta_{33} u_2^{-(3)}(\theta_3) \right] U_4^{+(3)}(\mathbf{x}) \right\} / \Delta \quad (5.46)$$

である。

5.6 結言

本章では、第2章、第3章で2ポート電子波回路に対する導波モード分離型境界積分方程式を導出したときと全く同様にY型分岐電子波回路に対する導波モード分離型境界積分方程式を導出した。導出した積分方程式は $\psi^C(\mathbf{x})$ のみを未知関数とするので、積分路を実質上、有限長とみなすことができ、この積分方程式を用いて、数値解析を行うことが可能である。次章において、導出した導波モード分離型境界積分方程式を用いてY型分岐電子波回路の解析結果を示す。

第6章 Y型分岐電子波導波路の解析

6.1 序言

本章では、前章で導出したY型分岐電子波導波路に対する導波モード分離型境界積分方程式を用いてY型分岐電子波導波路を解析した数値計算結果を示す。まず、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低い場合について、電子の存在確率分布、回路の透過特性を調べ、電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高い場合についても、電子の存在確率分布、回路の透過特性について調べる。解析には展開関数(Basis function)として2次関数、試験関数(Testing function)としてDelta関数を用いた境界要素法(モーメント法)を用いて数値的に解いた。

6.2 電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低い場合

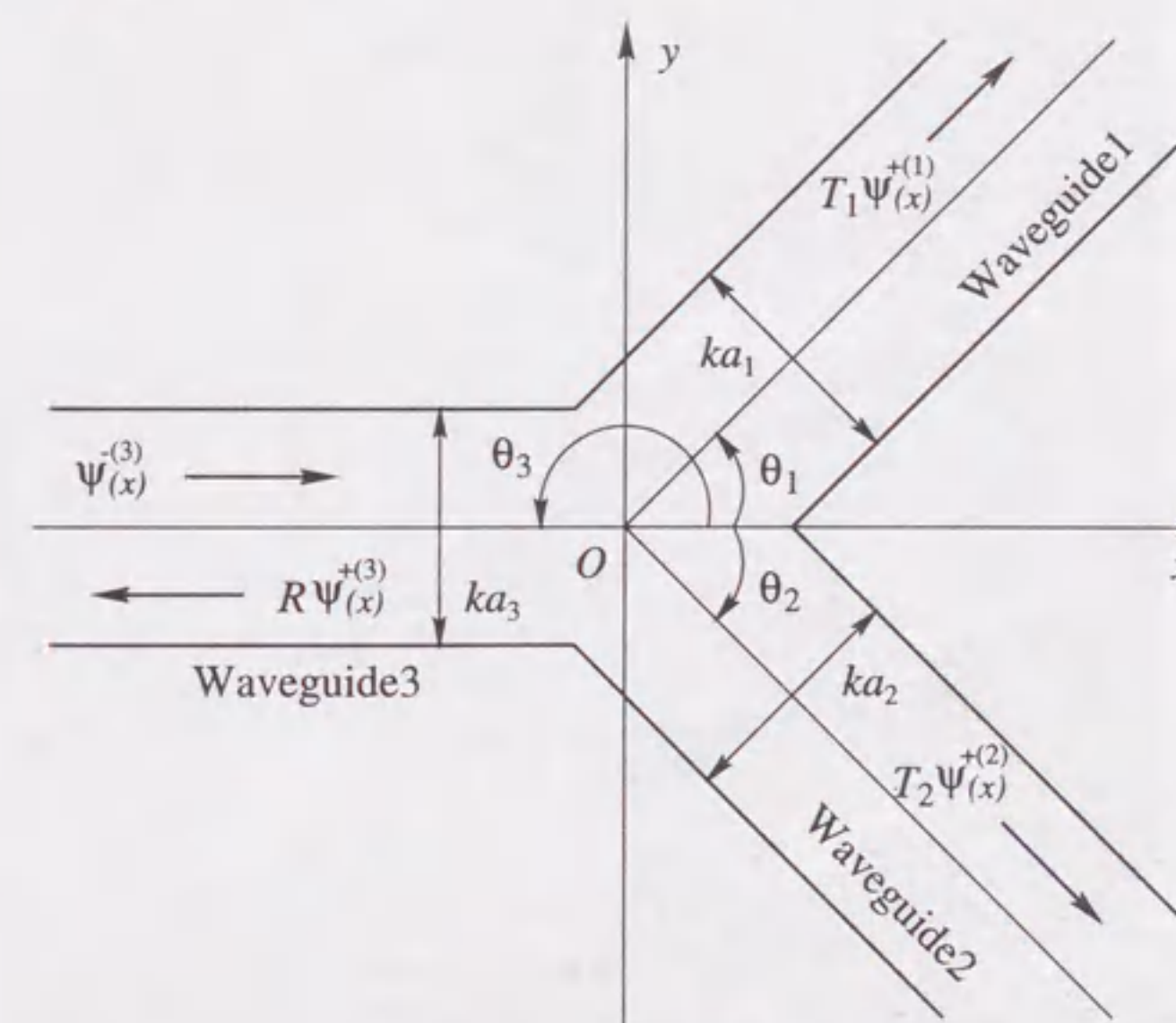


図 7.1 Y型分岐電子波導波路

解析に用いた回路は、図 7.1 に示したようなY型分岐電子波回路である。回路の大きさは電子の基準エネルギーを E_0 としたときのド・ブロー波数 $k = [2m^* E_0]^{1/2} / \hbar$ で規格化されているものとする。導波路 1 (Waveguide 1), 導波路 2 (Waveguide 2), 導波路 3

(Waveguide 3) の導波路幅をそれぞれ ka_1 , ka_2 , ka_3 とし, $ka_1 = ka_2 = ka_3 = \pi$ とする. 領域 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 のポテンシャルはそれぞれ一定値 V_1/E_0 , V_2/E_0 , V_3/E_0 , V_4/E_0 とし, 電子のエネルギーは E/E_0 で与えられるものとする. また, 各導波路は単一モード条件を満足し, 導波路の x 軸となす角をそれぞれ θ_1 , θ_2 , θ_3 とする. 導波路 3(Waveguide 3) 遠方より基本モード電子波 $\psi^{(3)}(x)$ を入射するものとする.

図 7.2 は図 7.1 の回路において $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\theta_3 = \pi$ とし, 導波路外部のポテンシャルを $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 0.70$, 導波路内部のポテンシャルを $V_2/E_0 = 0.0$ という井戸型ポテンシャル分布をもつものとする. また, 入射電子波の電子のエネルギーを $E/E_0 = 0.50$, としたときの解析結果であり, 電子の存在確率密度の分布を示している.

導波路 3 から入射された基本モード電子波 $\psi^{(3)}(x)$ は, 電子波のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより低いため, 結合部 (Connecting Section) において導波路外部に放射することなく, 導波路 1, 導波路 2 および導波路 3 に沿って伝搬する. また, 導波路 3 では反射された電子波が入射電子波と干渉し, 定在波を生じている. このとき, 電子の導波路 1 の透過確率は $|T_1|^2 = 0.42167$, 電子の導波路 2 の透過確率は $|T_2|^2 = 0.42167$, 電子の反射確率は $|R|^2 = 0.16088$ で, 電子の全存在確率 $|T_1|^2 + |T_2|^2 + |R|^2 = 1.00422$ となり, 確率保存則をよく満足している.

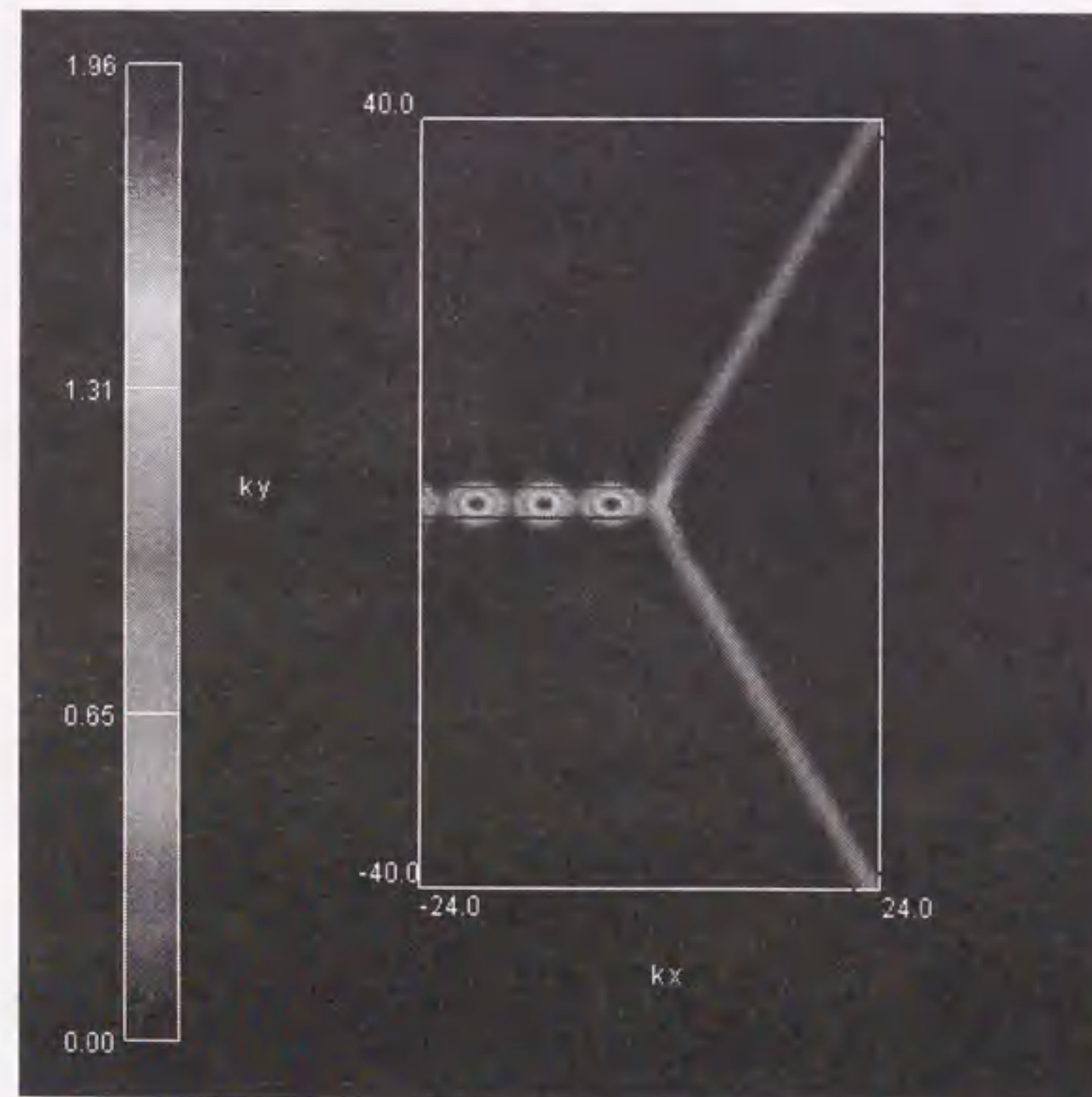


図 7.2 Y型分岐電子波導波路の解析例

図 7.3～図 7.20 は, 図 7.1 と同じ形状の電子波回路の透過特性である. ただし, 各導波路が x 軸となす角を図 7.3～図 7.8 では $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = -\pi/3$, $\theta_3 = \pi$, 図 7.9～図 7.14 で

は $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$, $\theta_3 = \pi$, 図 7.15～図 7.20 では $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = -\pi/6$, $\theta_3 = \pi$ とした回路である.

図の $|T_1|^2$ は導波路 1 の電子の透過確率, $|T_2|^2$ は導波路 2 の電子の透過確率, $|R|^2$ は導波路 3 の電子の反射確率, $|T_1|^2 + |T_2|^2 + |R|^2$ は電子の全存在確率を表している. 数値計算結果は, 電子の全存在確率がほぼ 1 となり, 確率保存則をよく満足していることが分かる. また, 回路は x 軸について対称であるため, 導波路 1, 導波路 2 への電子の透過率は等しくなっている. 導波路外部のポテンシャルに比べ, 電子のエネルギーが低い場合は, 反射率のほうが透過率より高い. 導波路外部のポテンシャルが高くなれば, 単一モード条件を満足する電子のエネルギーの範囲も広がるが, 導波路ポテンシャルの大きさに比べ, 小さな電子のエネルギーで 2 モード以上の電子波が現れることが分かった.

また, 導波路 1, 導波路 2 の開き角 $\theta_1 - \theta_2$ が小さいほど, 回路の透過特性はよくなると言える. これらは, 物理的考察と矛盾しない.

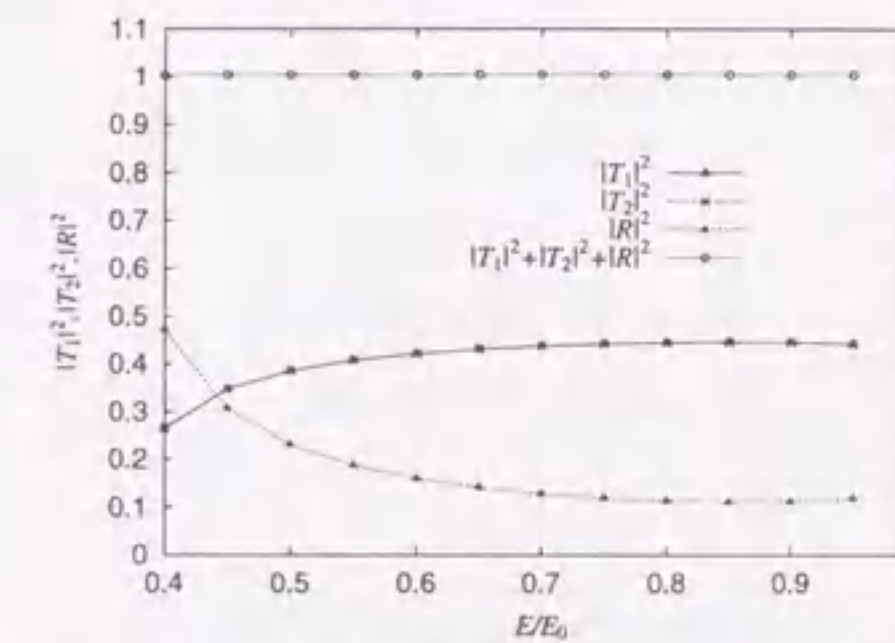


図 7.3 Y型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 1.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

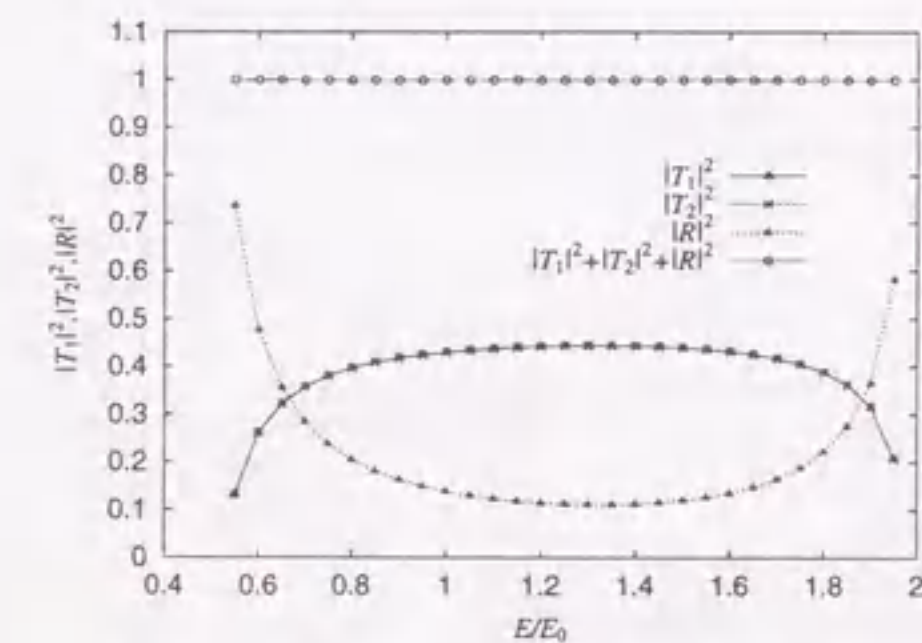


図 7.5 Y型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 3.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

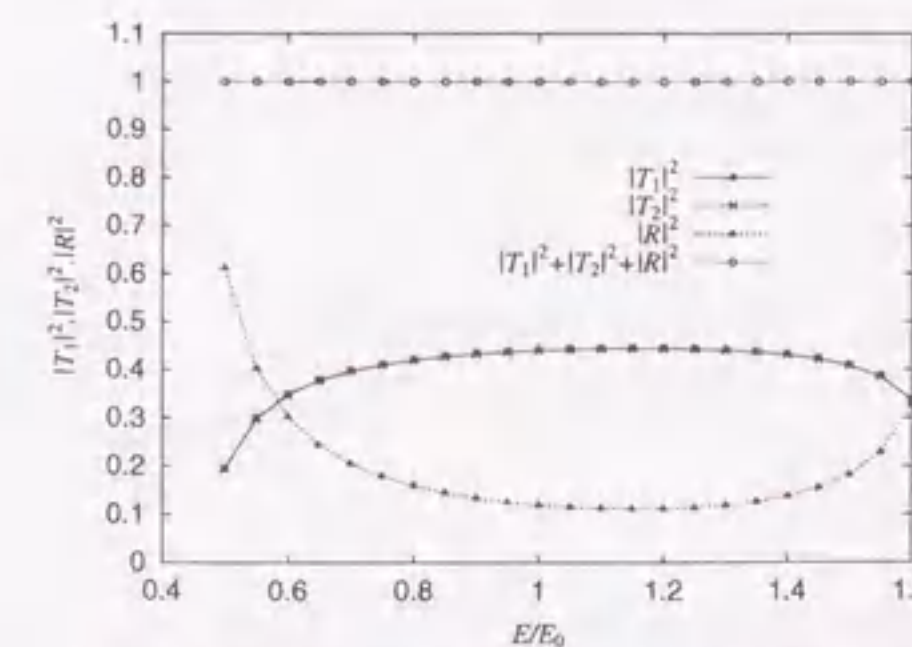


図 7.4 Y型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 2.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

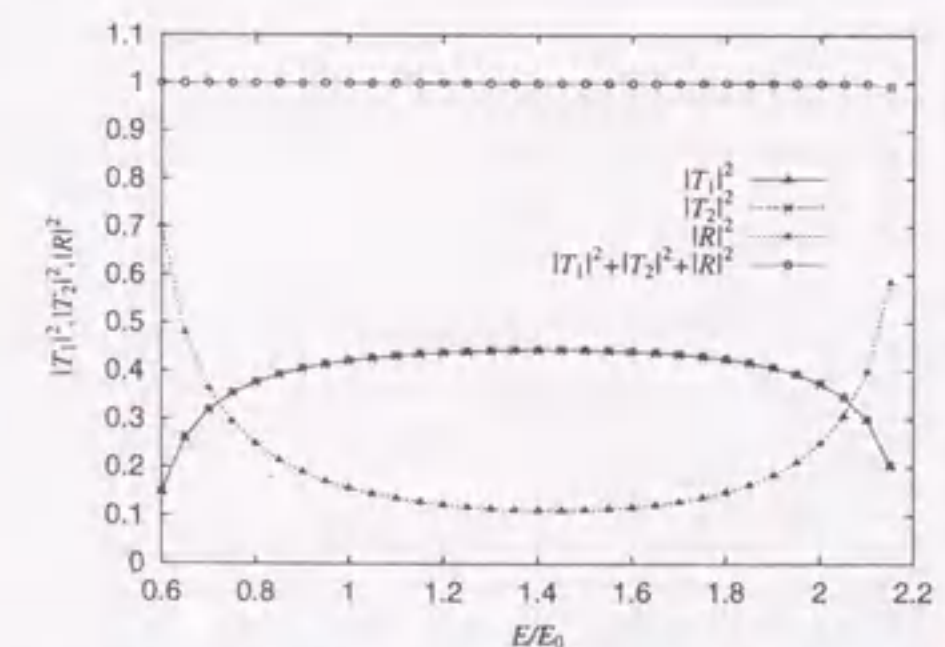


図 7.6 Y型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 4.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

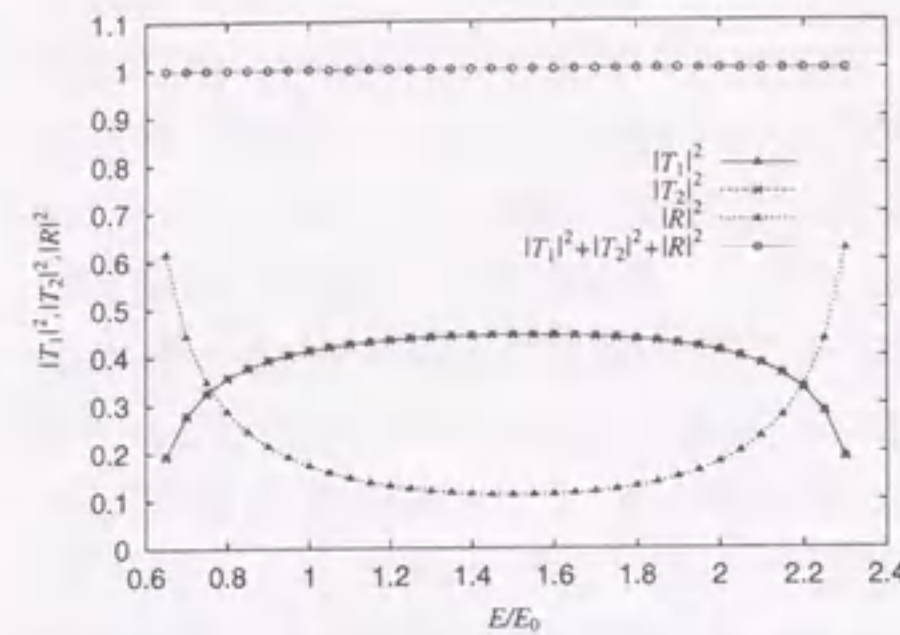


図 7.7 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 5.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

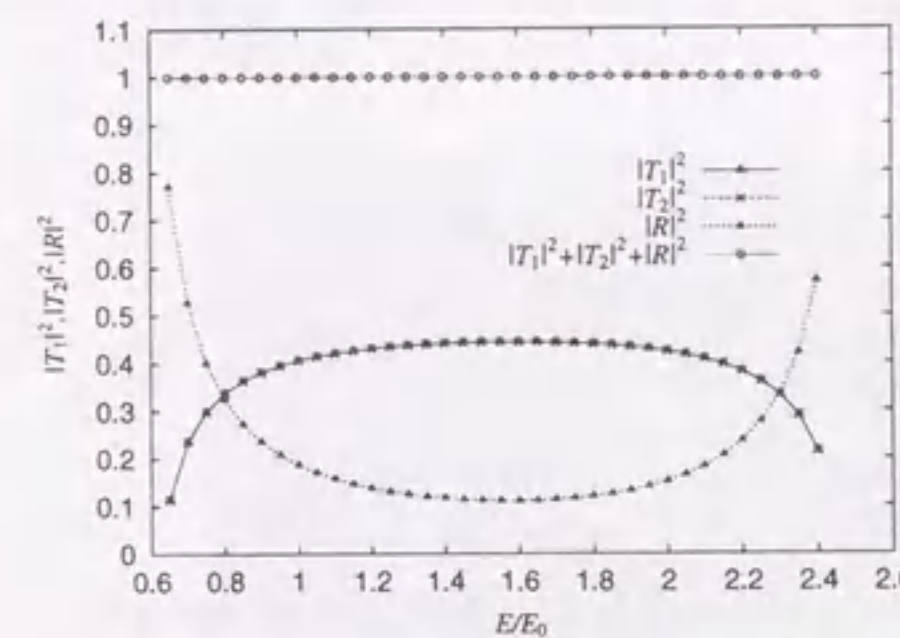


図 7.8 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 6.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$

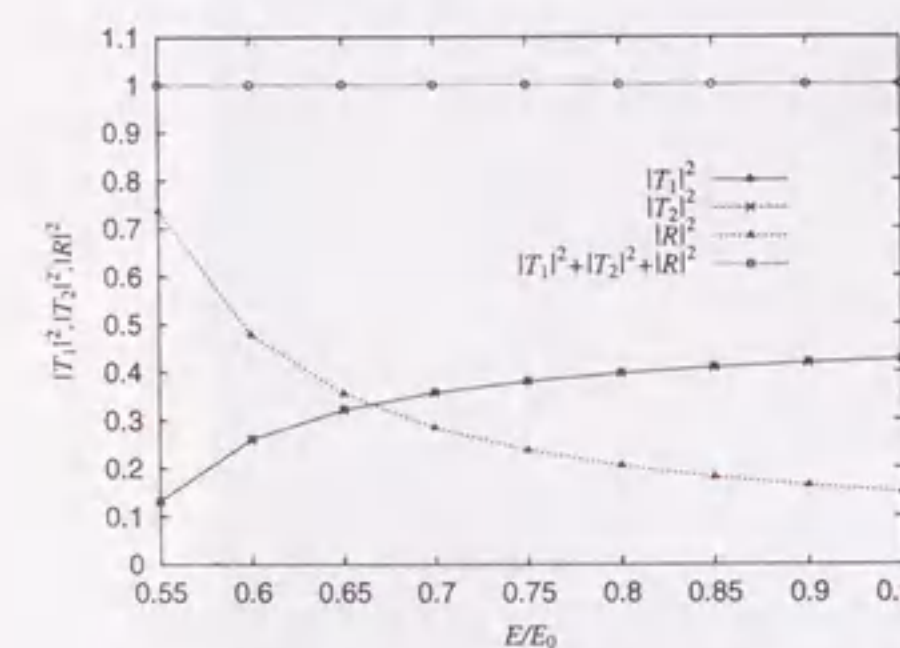


図 7.9 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 1.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

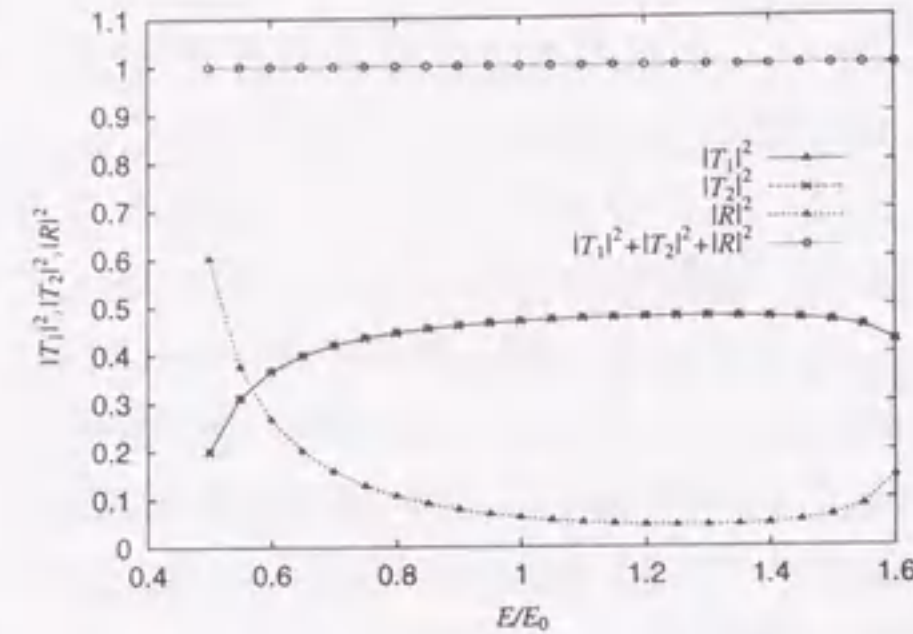


図 7.10 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 2.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

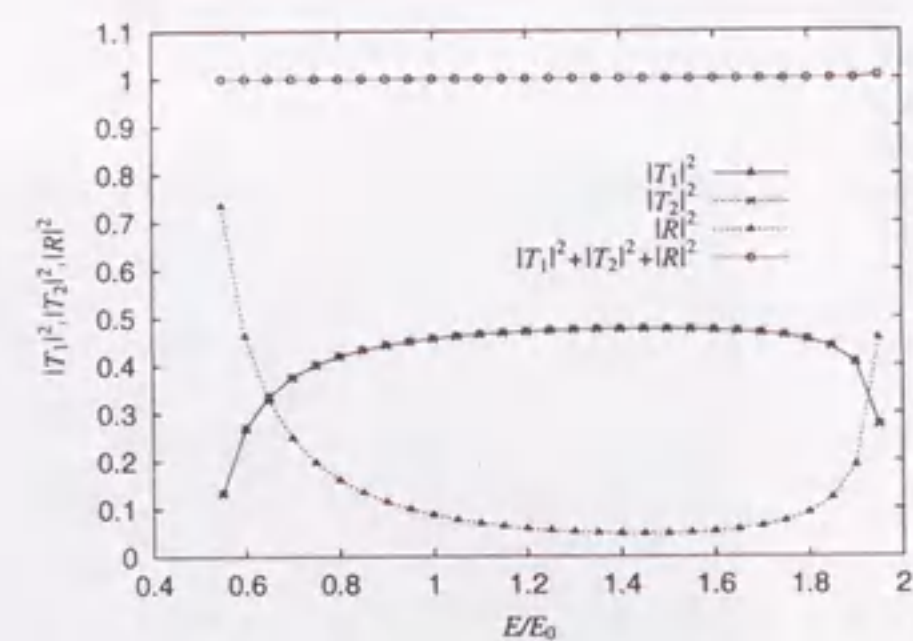


図 7.11 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 3.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

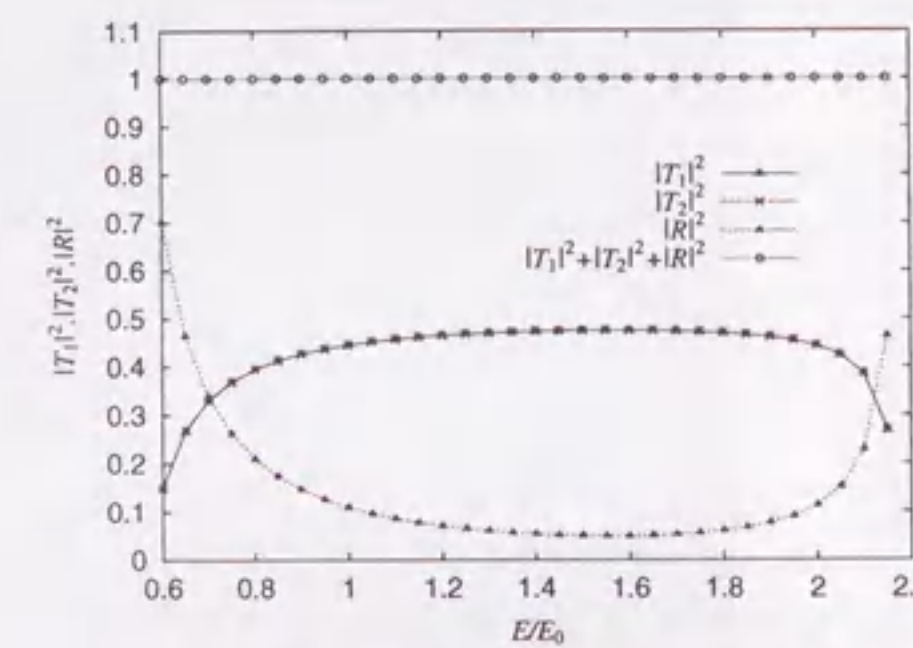


図 7.12 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 4.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

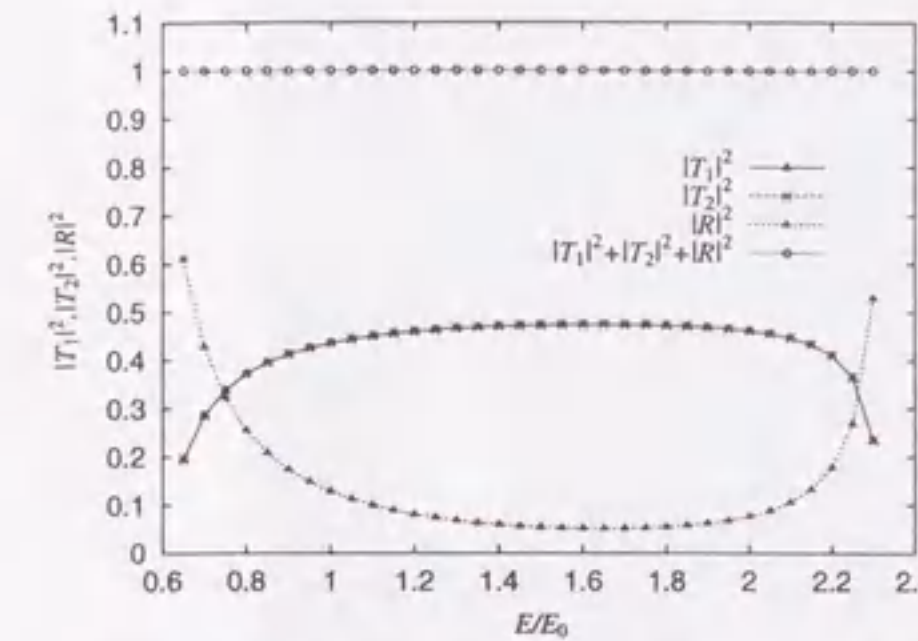


図 7.13 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 5.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

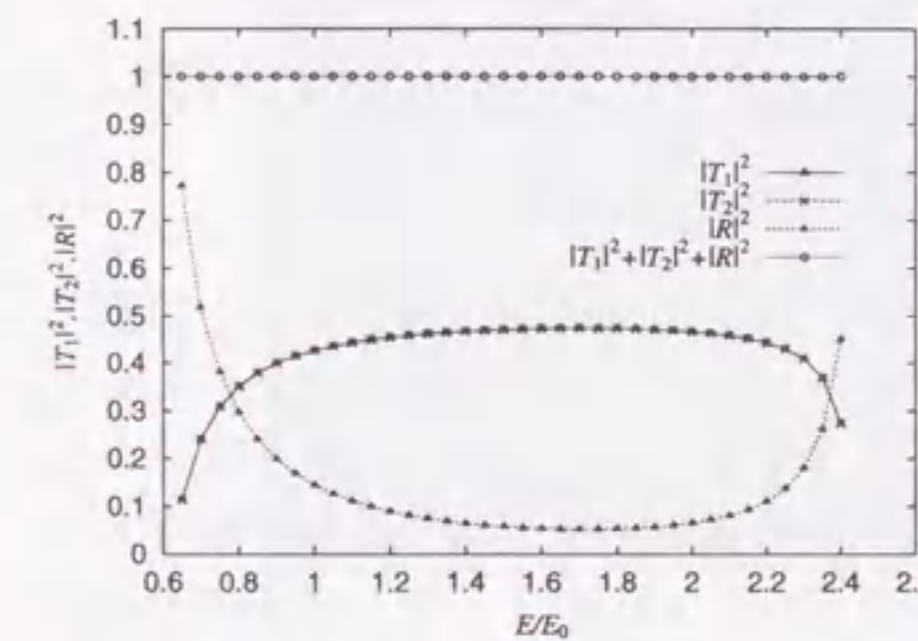


図 7.14 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 6.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$

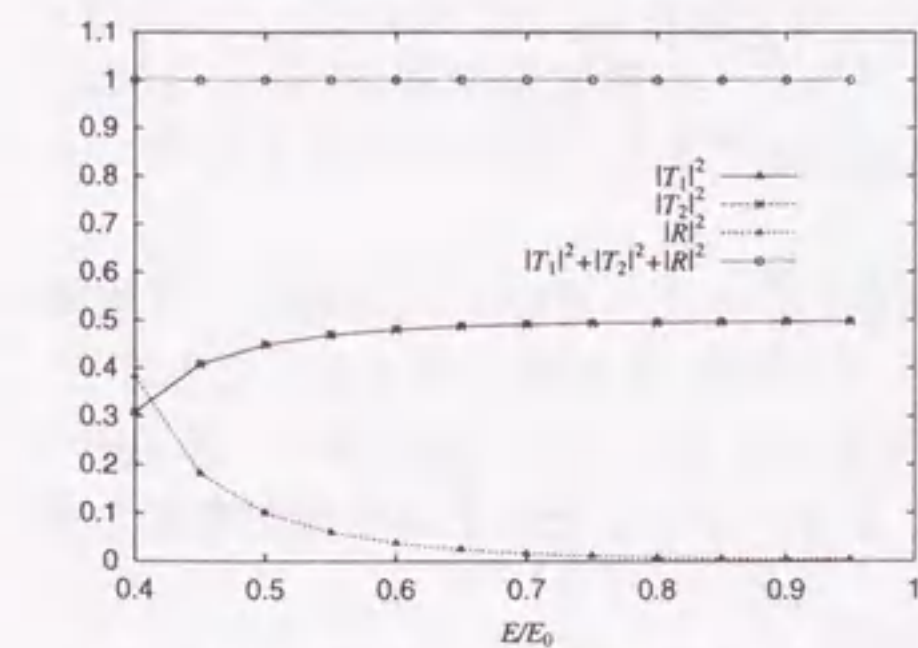


図 7.15 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 1.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$

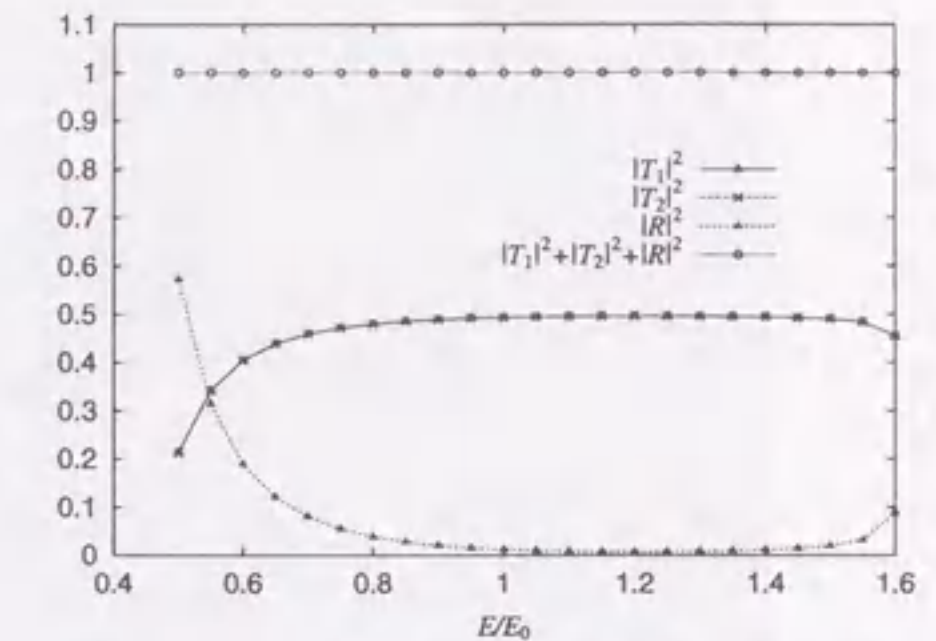


図 7.16 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 2.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$

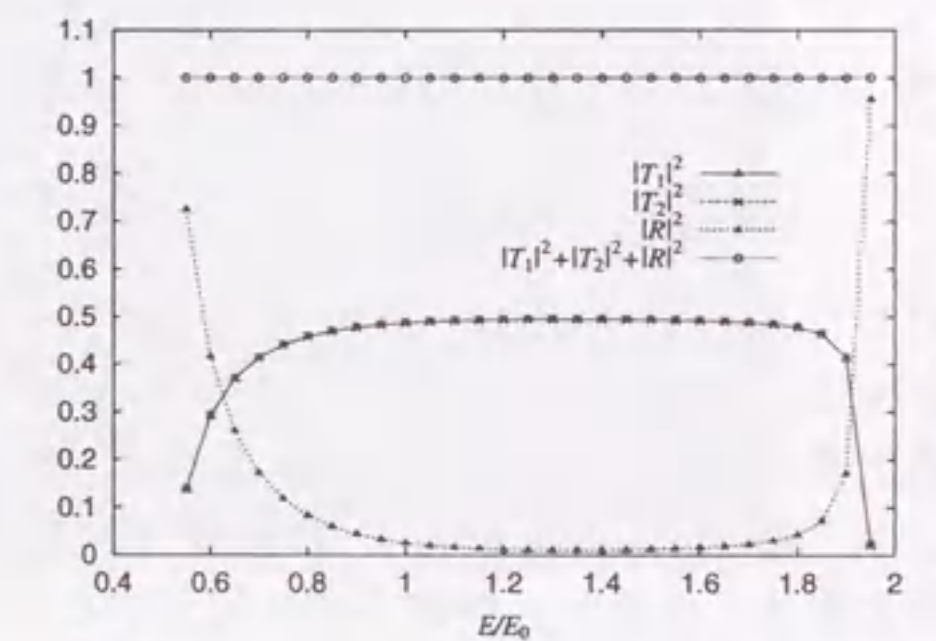


図 7.17 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 2.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$

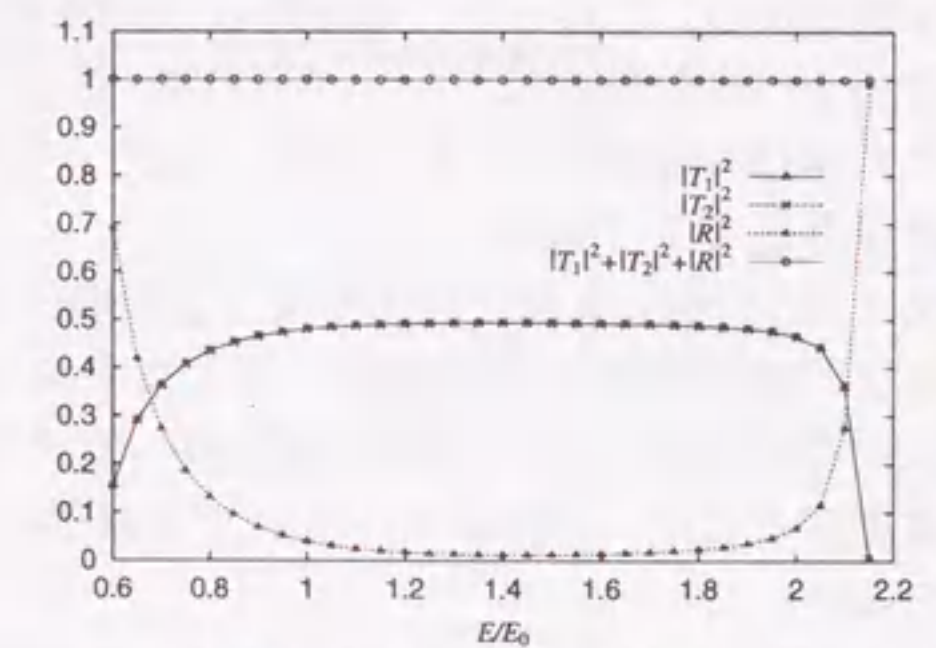


図 7.18 Y 型分岐電子波導波路の透過特性
 $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 4.0$,
 $V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$

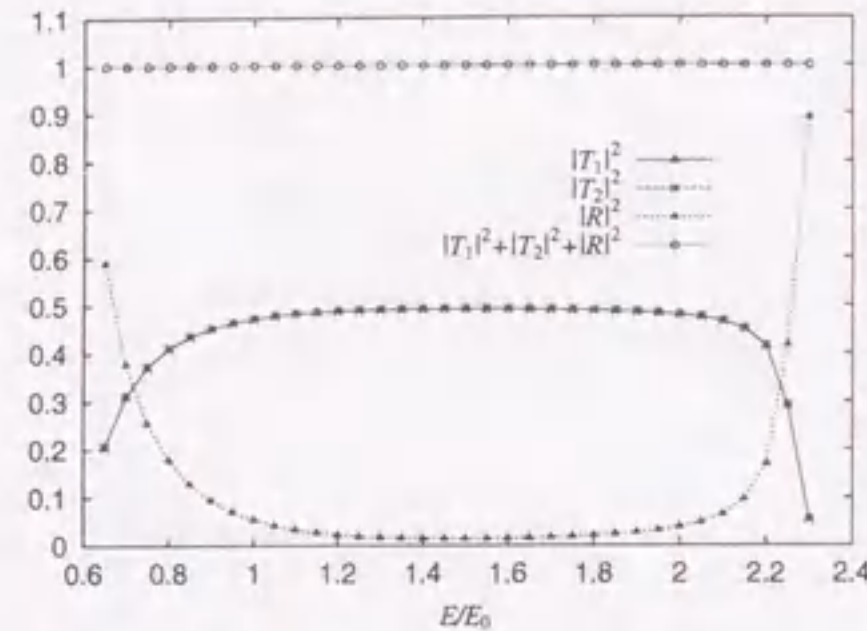


図 7.19 Y 型分岐電子波導波路の透過特性

$$V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 5.0, \\ V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$$

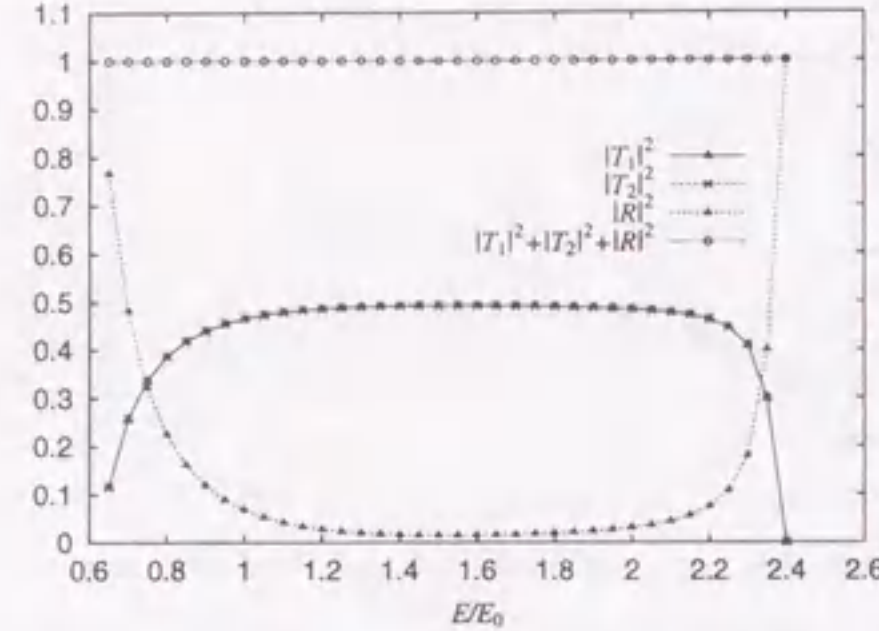


図 7.20 Y 型分岐電子波導波路の透過特性

$$V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 6.0, \\ V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi$$

6.3 電子のエネルギーが導波路内部のポテンシャルより高い場合

図 7.21 は、図 7.1 のような Y 型分岐電子波回路の解析結果である。解析に用いた回路の大きさは、電子の基準エネルギーを E_0 としたときのド・ブロー波数 $k = [2m^*E_0]^{1/2}/\hbar$ で規格化されているものとし、導波路幅 $ka_i = \pi$ ($i = 1, 2, 3$) とする。回路のポテンシャル分布は $V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 0.70$, $V_2/E_0 = 0.0$ である井戸型ポテンシャル分布をもつものとする。また、入射電子波の電子のエネルギーを $E/E_0 = 0.80$ とした。電子のエネルギーが導波路外部のポテンシャルより高いため、電子は誘電体導波路と同様、全反射を利用して波を導波するため、導波路分岐部から導波路外部に放射することがある。解析結果から、導波路 3 から入射された電子波は分岐部から電子が放射している様子が分かる。また、導波路 3 では入射波と結合部により反射された反射波が干渉し、定在波を生じている様子が分かる。このとき、導波路 1、導波路 2 の電子の透過確率は $|T_1|^2 = |T_2|^2 = 0.35505$ 、導波路 3 の反射確率は $|R|^2 = 0.05695$ 、電子の導波路外部への放射確率は $|S|^2 = 0.23422$ 、電子の全存在確率は $|T_1|^2 + |T_2|^2 + |R|^2 + |S|^2 = 1.00127$ であり、放射が起きる場合でも確率保存則をよく満足している。

図 7.22 は図 7.21 の Y 型分岐電子波回路における電子のエネルギーと透過確率、反射確率および放射確率の依存関係を示したものである。電子のエネルギーが大きくなるほど、電子が導波路結合部から導波路外部へ放射される確率が大きくなり、導波路 1、導波路 2 へ透過する確率、導波路 3 へ反射する確率は小さくなる。こうした結果は物理的考察と矛盾しない。

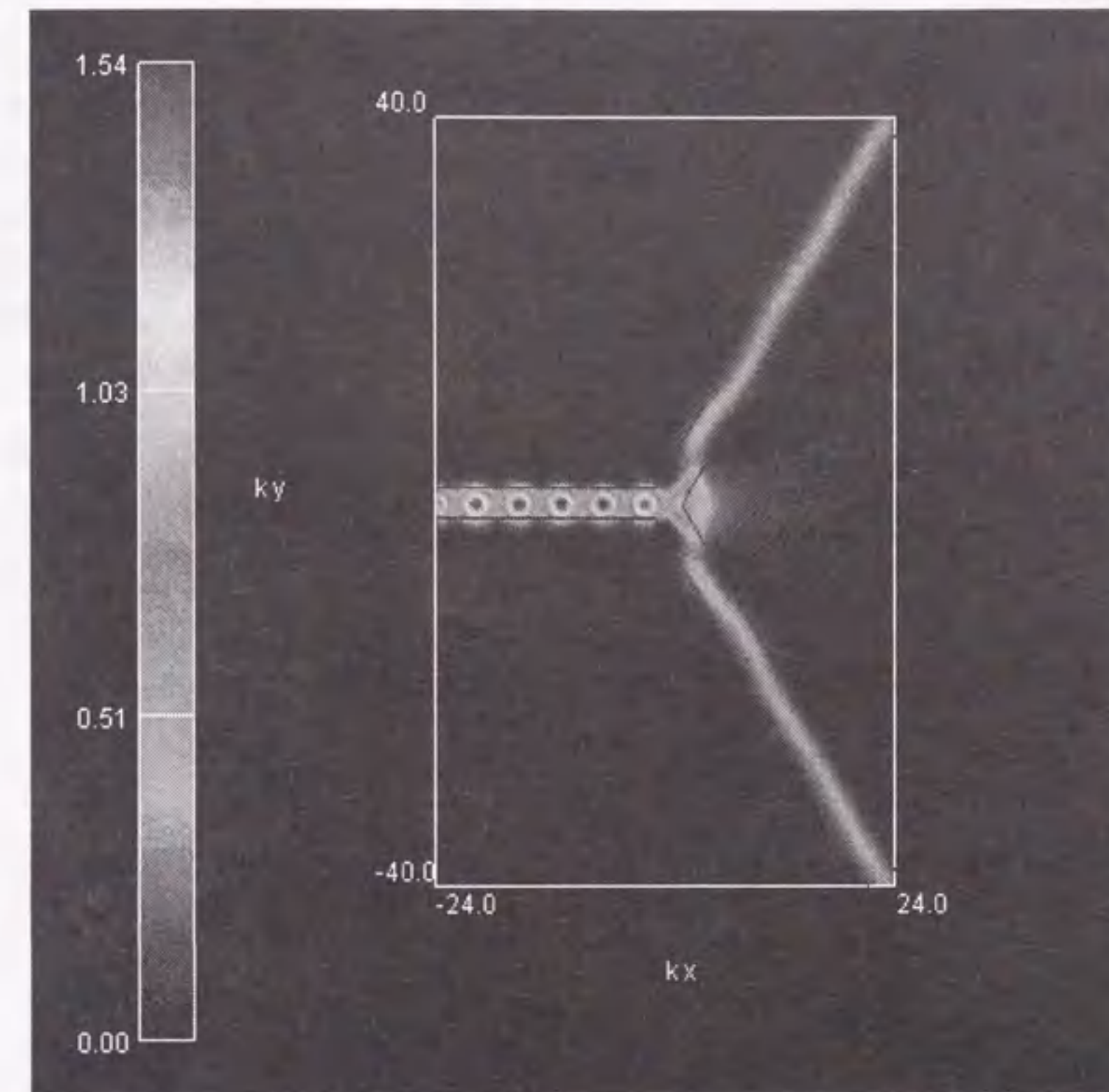


図 7.21 Y 型分岐電子波導波路の解析例

$$(V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 0.70, V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi)$$

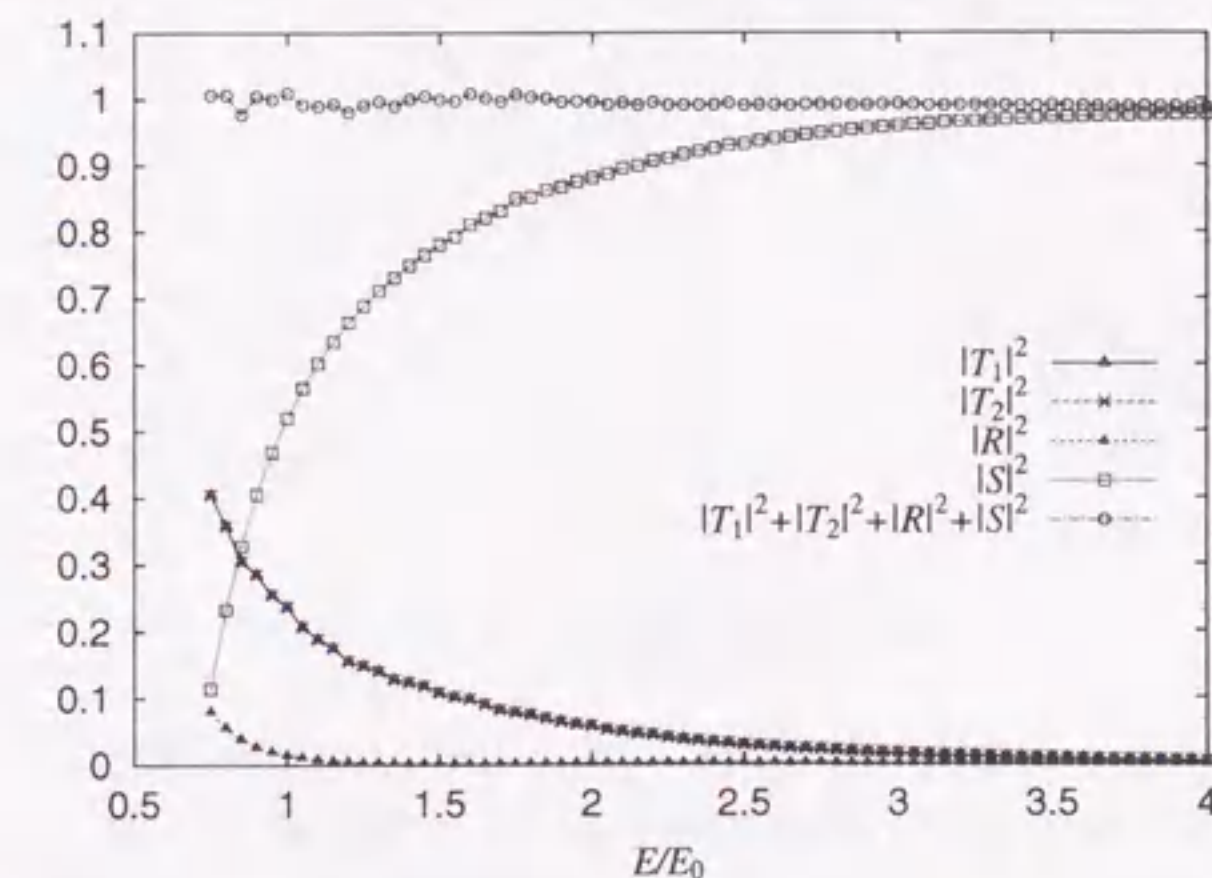


図 7.22 Y 型分岐電子波導波路の透過特性

$$V_1/E_0 = V_3/E_0 = V_4/E_0 = 0.7, V_2/E_0 = 0.0, \theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3, \theta_3 = \pi$$

6.4 結言

前章で導出したY型分岐電子波回路に対する導波モード分離型境界積分方程式を、展開関数として2次関数、試験関数としDelta関数を用いた境界要素法を用いて、Y型分岐電子波回路を解析した結果を示した。解析結果は、確率保存則を良く満足していることを示した。導波モード分離型積分方程式は、電子が導波路外に放射する場合も、放射しない場合とほとんど同様に取り扱うことができた。この性質はCADソルバーとして極めて望ましい。電子が導波路外部に放射する場合は、従来あまり報告されていない、誘電体導波路Y型分岐回路を境界値問題として取り扱う精密解析にそのまま適用可能であり、今後の問題としたい。

第7章 導波モード分離型積分方程式 (一般表現)

7.1 序言

2ポート、単一モード条件において、第2章、第3章において導波モード分離型積分方程式の導出過程を示した。実際に使われる電子波素子、各素子を結合する導波路には、多ポートの導波回路が用いられると考えられる。従って、そのような回路を解析するために、先の導波モード分離型積分方程式を多ポート、多モードに一般化する必要がある。本章では、 J ポート、 N モード条件における導波モード分離型積分方程式の導出過程を示す。

7.2 座標系と界の分離

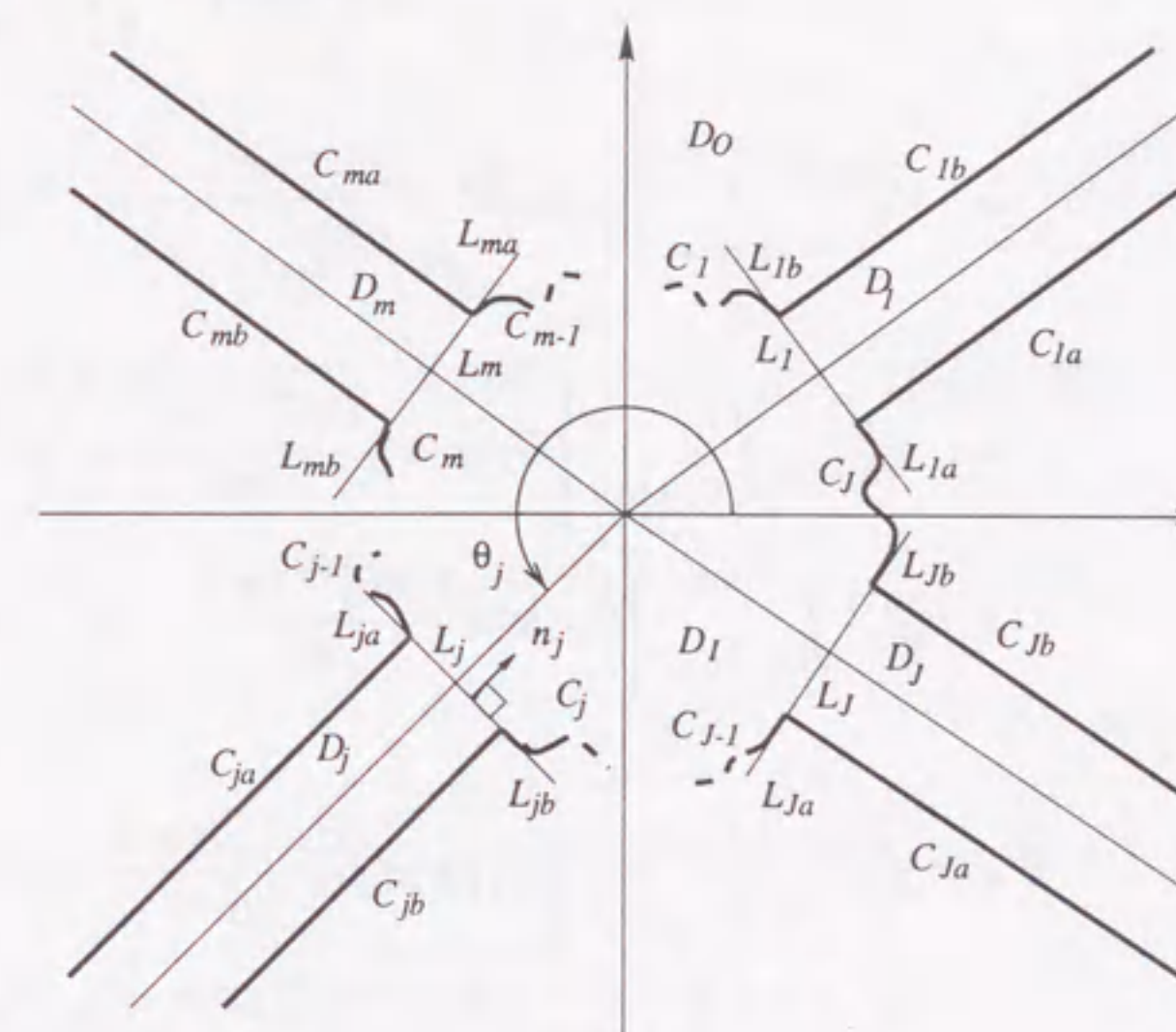


図7.1 J ポート電子波導波路

図7.1のような任意形状結合部を持つ J ポート電子波回路を考える。各導波路の幅をそれぞれ $d_j(j=1, 2, \dots, J)$ 、各導波路の x 軸正方向とのなす角をそれぞれ $\theta_j(j=1, 2, \dots, J)$ とし、導波路内の領域を D_I 、導波路外部の領域を D_O とする。また、各導波路は、 N モード条件を満足するものとし、導波路 m より、 l 次モード入射波が入射されるものとする。この章では、観測点が導波路内部に有る場合のみについて考える。

前章のように、観測点の位置により、界の分離を行うと次のようになる。

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) + S_{0l}^{(j)}\psi_0^{+(j)}(\mathbf{x}) + S_{1l}^{(j)}\psi_1^{+(j)}(\mathbf{x}) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(j)}\psi_{N-1}^{+(j)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 } j, j=1, 2, \dots, J, j \neq m) \quad (7.1)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) + S_{0l}^{(m)}\psi_0^{+(m)}(\mathbf{x}) + S_{1l}^{(m)}\psi_1^{+(m)}(\mathbf{x}) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(m)}\psi_{N-1}^{+(m)}(\mathbf{x}) + \psi_l^{-(m)} \quad (\mathbf{x} \in \text{導波路 } m) \quad (7.2)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \text{結合部}) \quad (7.3)$$

ただし、 $S_{il}^{(j)}$ は、 l 次モード入射波に対する導波路 j における i 次モードの反射係数または透過係数を表している。

7.3 導波モード分離型境界積分方程式の一般表現

前節の式 (7.1) ~ (7.3) を式 (2.23) に代入すると、

$$\left. \begin{array}{l} \psi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D_I) \\ \frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \notin D_I) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + S_{0l}^{(1)} \int_{C_{1a}+C_{1b}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_0^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_0^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + S_{1l}^{(1)} \int_{C_{1a}+C_{1b}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_1^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_1^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + \vdots + S_{(N-1)l}^{(1)} \int_{C_{1a}+C_{1b}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_{N-1}^{+(1)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_{N-1}^{+(1)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + S_{0l}^{(2)} \int_{C_{2a}+C_{2b}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_0^{+(2)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_0^{+(2)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + \vdots + S_{(N-1)l}^{(J)} \int_{C_{Ja}+C_{Jb}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_{N-1}^{+(J)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_{N-1}^{+(J)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + \int_{C_{ma}+C_{mb}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_l^{-(m)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_l^{-(m)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' \quad (7.4)$$

ただし、

$$G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)} \left(k \sqrt{1 - \frac{V_I}{E}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right) \quad (7.5)$$

であり、 $H_0^{(2)}$ は、0 次第 2 種ハンケル関数を表している。ここで、各モード関数は、式 (2.3) を満足するので、式 (3.13) と同様に、次式を導出することができる。

$$\left. \begin{array}{l} \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D_{Ij}) \\ \frac{1}{2}\psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \notin D_{Ij}) \end{array} \right\} = \int_{C_{ja}+C_{jb}} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' + U_{li}^{\pm(j)}(\mathbf{x}) \quad (7.6)$$

ただし、

$$U_{li}^{\pm(j)}(\mathbf{x}) = \int_{L_j} \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_j} - \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_j} \right] dl' \quad (7.7)$$

である。

式 (7.6) の右辺に、式 (7.1)~(7.3) を適用し、式 (7.6) を式 (7.4) に代入し整理する。

$$\left. \begin{array}{l} \psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in D_I) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in C) \\ 0 \quad (\mathbf{x} \notin D_I) \end{array} \right\} = \int_C \left[G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' - S_{0l}^{(1)} U_{I0}^{+(1)}(\mathbf{x}) - S_{1l}^{(1)} U_{I1}^{+(1)}(\mathbf{x}) - \cdots - S_{(N-1)l}^{(1)} U_{I(N-1)}^{+(2)}(\mathbf{x}) - S_{0l}^{(2)} U_{I0}^{+(2)}(\mathbf{x}) - S_{1l}^{(2)} U_{I1}^{+(2)}(\mathbf{x}) - \cdots - S_{(N-1)l}^{(2)} U_{I(N-1)}^{+(2)}(\mathbf{x}) + \vdots - S_{0l}^{(J)} U_{I0}^{+(J)}(\mathbf{x}) - S_{1l}^{(J)} U_{I1}^{+(J)}(\mathbf{x}) - \cdots - S_{(N-1)l}^{(J)} U_{I(N-1)}^{+(J)}(\mathbf{x}) - U_{I0}^{-(m)}(\mathbf{x}) \quad (7.8)$$

ここで、観測点が、各導波路の遠方にある場合を考えると、Green 関数の漸近展開を利用することができる。すなわち、

$$G_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \simeq A_I(r) g_I(\theta) \quad (7.9)$$

ただし、

$$A_I(r) = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2j}{k(1 - V_I/E)^{1/2} r}} \exp \left(-jk \sqrt{1 - \frac{V_I}{E}} r \right) \quad (7.10)$$

$$g_I(\theta) = \exp \left[jk \sqrt{1 - V_I/E} (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \right] \quad (7.11)$$

である。また、観測点が、結合部より十分遠方にある場合、攪乱界 $\psi^C(\mathbf{x})$ は、導波モード条件を満足しないので、遠方まで伝搬しないと考えられる。従って、次の式を満足すると考えられる。

$$\frac{\psi^C(\mathbf{x})}{A_I(r)} \rightarrow 0 \quad (7.12)$$

そこで、式 (7.9) を、式 (7.8) に代入し、式 (7.12) を考慮すると、

$$S_{0l}^{(1)} u_{I0}^{+(1)}(\theta) + S_{1l}^{(1)} u_{I1}^{+(1)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(1)} u_{I(N-1)}^{+(2)}(\theta)$$

$$\begin{aligned}
& + S_{0l}^{(2)} u_{I0}^{+(2)}(\theta) + S_{1l}^{(2)} u_{I1}^{+(2)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(2)} u_{I(N-1)}^{+(2)}(\theta) \\
& \vdots \\
& + S_{0l}^{(J)} u_{I0}^{+(J)}(\theta) + S_{1l}^{(J)} u_{I1}^{+(J)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(J)} u_{I(N-1)}^{+(J)}(\theta) \\
& = \int_C \left[g_I(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_I(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' - u_{I0}^{-(m)}(\theta)
\end{aligned} \quad (7.13)$$

ただし,

$$u_{Ii}^{\pm(j)}(\theta) = \int_{L_j} \left[g_I(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_j} - \partial \psi_i^{\pm(j)}(\mathbf{x}') \frac{\partial g_I(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_j} \right] dl' \quad (\theta = \theta_1 \sim \theta_J) \quad (7.14)$$

第3章のような単一モードの場合では, 上式だけで, 透過, 反射係数について解くことができたが, J モードの場合, $N \cdot J$ 個の透過, 反射係数に対し, 式(7.13)に $\theta = \theta_1 \sim \theta_J$ を代入することにより, J 個の関係式を導くことができるが, 透過, 反射係数について解くことはできない. そこで, 式(7.13)を, θ について偏微分することにより, さらに, 以下のような, $(N-1) \cdot J$ 個の関係式を得ることができる. ただし, 以下の式において, ∂^α は, $\partial^\alpha / \partial \theta^\alpha$ を表すものとする.

$$\begin{aligned}
& S_{0l}^{(1)} \partial^\alpha u_{I0}^{+(1)}(\theta) + S_{1l}^{(1)} \partial^\alpha u_{I1}^{+(1)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(1)} \partial^\alpha u_{I(N-1)}^{+(1)}(\theta) \\
& + S_{0l}^{(2)} \partial^\alpha u_{I0}^{+(2)}(\theta) + S_{1l}^{(2)} \partial^\alpha u_{I1}^{+(2)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(2)} \partial^\alpha u_{I(N-1)}^{+(2)}(\theta) \\
& \vdots \\
& + S_{0l}^{(J)} \partial^\alpha u_{I0}^{+(J)}(\theta) + S_{1l}^{(J)} \partial^\alpha u_{I1}^{+(J)}(\theta) + \cdots + S_{(N-1)l}^{(J)} \partial^\alpha u_{I(N-1)}^{+(J)}(\theta) \\
& = \int_C \left[\partial^\alpha g_I(\theta|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial \partial^\alpha g_I(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' - \partial^\alpha u_{I0}^{-(m)}(\theta) \\
& \quad (\alpha = 1 \sim N-1, \theta = \theta_1 \sim \theta_J) \quad (7.15)
\end{aligned}$$

式(7.13), 式(7.15)を, 反射係数, 透過係数について解くために, 次式のような行列で表すこととする.

$$\mathbf{uS} = \mathbf{I} \quad (7.16)$$

ここで, \mathbf{u} の行列式を Δ , Δ_{ij} を $\det \mathbf{u}$ における u_{ij} の余因子とすると, $S_{nl}^{(j)}$ は, 次式のように表される.

$$\begin{aligned}
S_{nl}^{(j)} &= \left\{ \int_C \left[W_\eta(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial W_\eta(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' \right. \\
&\quad - (-1)^{1\eta} \Delta_{1\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) - (-1)^{2\eta} \Delta_{2\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) - \cdots - (-1)^{J\eta} \Delta_{J\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \\
&\quad - (-1)^{(J+1)\eta} \Delta_{(J+1)\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) - (-1)^{(J+2)\eta} \Delta_{(J+2)\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) - \cdots \\
&\quad - (-1)^{(2J)\eta} \Delta_{(2J)\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. - (-1)^{(JN-J)\eta} \Delta_{(JN-J)\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) \right\} / \Delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (-1)^{(JN-J+1)\eta} \Delta_{(JN-J+1)\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) - \cdots \\
& - (-1)^{(JN)\eta} \Delta_{(JN)\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \} / \Delta \quad (j = 1 \sim J, n = 0 \sim N-1)
\end{aligned} \quad (7.17)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
W_\eta(\mathbf{x}') &= (-1)^{1\eta} \Delta_{1\eta} g_I(\theta_1|\mathbf{x}') + (-1)^{2\eta} \Delta_{2\eta} g_I(\theta_2|\mathbf{x}') + \cdots + (-1)^{J\eta} \Delta_{J\eta} g_I(\theta_J|\mathbf{x}') \\
&\quad + (-1)^{(J+1)\eta} \Delta_{(J+1)\eta} \partial g_I(\theta_1|\mathbf{x}') + (-1)^{(J+2)\eta} \Delta_{(J+2)\eta} \partial g_I(\theta_2|\mathbf{x}') + \cdots \\
&\quad + (-1)^{(2J)\eta} \Delta_{(2J)\eta} \partial g_I(\theta_J|\mathbf{x}') \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{(JN-J+1)\eta} \Delta_{(JN-J+1)\eta} \partial^{N-1} g_I(\theta_1|\mathbf{x}') \\
&\quad + (-1)^{(JN-J+1)\eta} \Delta_{(JN-J+2)\eta} \partial^{N-1} g_I(\theta_2|\mathbf{x}') + \cdots \\
&\quad + (-1)^{(JN)\eta} \Delta_{(JN)\eta} \partial^{N-1} g_I(\theta_J|\mathbf{x}')
\end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\eta = N(J-1) + n \quad (7.19)$$

式(7.17)を式(7.8)に代入し, 整理すると, 次式のような, J ポート, N モードに対する導波モード分離型境界積分方程式を導出することができる.

$$\left. \begin{array}{ll} \psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in D_I) \\ \frac{1}{2}\psi^C(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in C) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin D_I) \end{array} \right\} = \int_C \left[P_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial P_I(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dl' - M_I(\mathbf{x}) \quad (7.20)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
M_I(\mathbf{x}) &= U_{Il}^{-(m)}(\mathbf{x}) \\
&\quad - U_{I1}^{+(1)}(\mathbf{x}) V_1 - U_{I2}^{+(1)}(\mathbf{x}) V_2 - \cdots - U_{IN}^{+(1)}(\mathbf{x}) V_N \\
&\quad - U_{I1}^{+(2)}(\mathbf{x}) V_{N+1} - U_{I2}^{+(2)}(\mathbf{x}) V_{N+2} - \cdots - U_{IN}^{+(2)}(\mathbf{x}) V_{2N} \\
&\quad \vdots \\
&\quad - U_{I1}^{+(J)}(\mathbf{x}) V_{JN-J+1} - U_{I2}^{+(J)}(\mathbf{x}) V_{JN-J+2} - \cdots - U_{IN}^{+(J)}(\mathbf{x}) V_{JN}
\end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}
V_\eta &= \{ (-1)^{1\eta} \Delta_{1\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) + (-1)^{1\eta} \Delta_{2\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) + \cdots + (-1)^{1\eta} \Delta_{J\eta} u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \\
&\quad + (-1)^{1\eta} \Delta_{(J+1)\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) + (-1)^{1\eta} \Delta_{(J+2)\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{1\eta} \Delta_{J\eta} \partial u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{1\eta} \Delta_{(J+1)\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_1) + (-1)^{1\eta} \Delta_{(J+2)\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_2) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{1\eta} \Delta_{J\eta} \partial^{N-1} u_{Il}^{-(m)}(\theta_J) \} / \Delta
\end{aligned} \quad (7.22)$$

である.

7.4 θ 微分

導波モード分離型積分方程式の導出過程において、透過係数、反射係数を攪乱界のみを未知関数とした式で表すが、2モード以上のモード条件を満足する導波路を含む電子波回路の場合条件式が不足し、透過係数、反射係数を攪乱界のみを未知関数とした式で表すことができない。そこで、条件式を偏微分した式とから透過、反射係数を攪乱界で表すことを考える。本章では、この手法の数学的妥当性を調べる。

7.4.1 透過係数・反射係数

2ポート電子波回路において導出した透過係数、反射係数の条件式(3.31), (3.32)は、

$$Tu_2^{+(1)}(\theta_1) + Ru_2(\theta_1) = \int_C \left[g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_1|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_1) \quad (7.23)$$

$$Tu_2^{+(1)}(\theta_2) + Ru_2(\theta_2) = \int_C \left[g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial g_2(\theta_2|\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' - u_2^{-(2)}(\theta_2) \quad (7.24)$$

である。これらの条件式より、透過係数、反射係数について解くと、次のようになる。

$$T = \left\{ \int_C \left[W(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial W(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' + u_2^{+(2)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) - u_2^{+(2)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) \right\} / \Delta \quad (7.25)$$

$$R = \left\{ \int_C \left[V(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial V(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' + u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{-(2)}(\theta_1) - u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{-(2)}(\theta_2) \right\} / \Delta \quad (7.26)$$

ただし、

$$W(\mathbf{x}') = u_2^{+(2)}(\theta_2)g_2(\theta_1|\mathbf{x}') - u_2^{+(2)}(\theta_1)g_2(\theta_2|\mathbf{x}') \quad (7.27)$$

$$V(\mathbf{x}') = u_2^{+(1)}(\theta_1)g_2(\theta_2|\mathbf{x}') - u_2^{+(1)}(\theta_2)g_2(\theta_1|\mathbf{x}') \quad (7.28)$$

$$\Delta = u_2^{+(1)}(\theta_1)u_2^{+(2)}(\theta_2) - u_2^{+(1)}(\theta_2)u_2^{+(2)}(\theta_1) \quad (7.29)$$

である。

2モード以上の場合、基本モード透過電子波、基本モード反射電子波、1次モード透過電子波、1次モード反射電子波が存在する。これらの各透過電子波、反射電子波に対する透過係数、反射係数は先の2式の条件式では、条件式不足のため求めることができない。そこで、式(7.23), (7.24)を θ で偏微分した式を条件式として新たに追加する。これらの式が条件式として妥当であれば、式(7.23), (7.24)を θ で偏微分した式を単一モードの場合

合の条件式として、透過係数、反射係数を求めても、正しい計算結果が得られると考えられる。

透過係数、反射係数を式(7.23), (7.24)を θ で偏微分した式を用いて表現すると、

$$T = \left\{ \int_C \left[W_1(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial W_1(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' + \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \frac{\partial u_2^{-(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} - \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \frac{\partial u_2^{-(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \right\} / \Delta \quad (7.30)$$

$$R = \left\{ \int_C \left[V_1(\mathbf{x}') \frac{\partial \psi^C(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} - \psi^C(\mathbf{x}') \frac{\partial V_1(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}'_2} \right] dl' + \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \frac{\partial u_2^{-(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \frac{\partial u_2^{-(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \right\} / \Delta \quad (7.31)$$

となる。ただし、

$$W_1(\mathbf{x}') = \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} - \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \quad (7.32)$$

$$V_1(\mathbf{x}') = \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} - \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \frac{\partial g_2(\theta|\mathbf{x}')}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \quad (7.33)$$

$$\Delta = \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} - \frac{\partial u_2^{+(1)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_2} \frac{\partial u_2^{+(2)}(\theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta_1} \quad (7.34)$$

である。

7.4.2 数値解析例

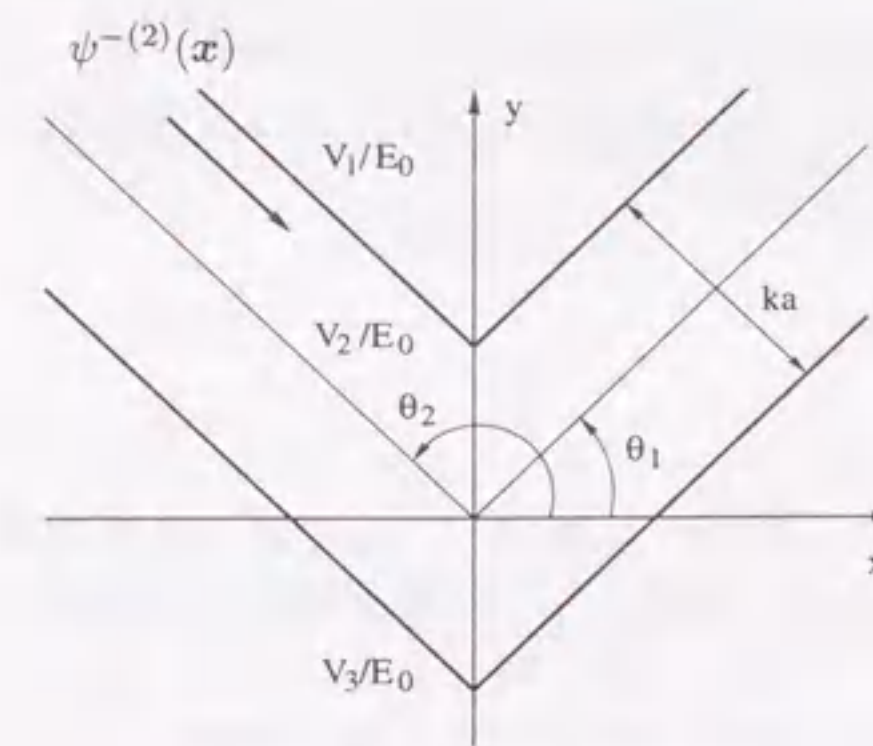


図7.1. 直角折れ曲がり導波路とポテンシャル分布

$$V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0$$

$$V_2/E_0 = 0.0$$

$$ka = \pi$$

$$\theta_1 = \pi/4$$

$$\theta_2 = 3\pi/4$$

次に、式(7.30), (7.31)を用いて導出した導波モード分離型積分方程式を用いた数値解析結果と第3章の導波モード分離型積分方程式を用いた数値解析結果を比較してみる。図7.1のような、導波路外部のポテンシャルを3.0、導波路内部のポテンシャルを0.0、電子

のエネルギーを 1.0 である直角折れ曲がり回路を考える。この電子波回路を、第3章で導出した導波モード分離型積分方程式と、本章から導出される積分方程式を用いて解析する。図 7.2 は、境界 C_5 上の電子の確率密度を表している。図から分るように、どちらの方程式を用いてもほぼ同じ解が得られている。同様に、透過係数、反射係数もほぼ一致している。

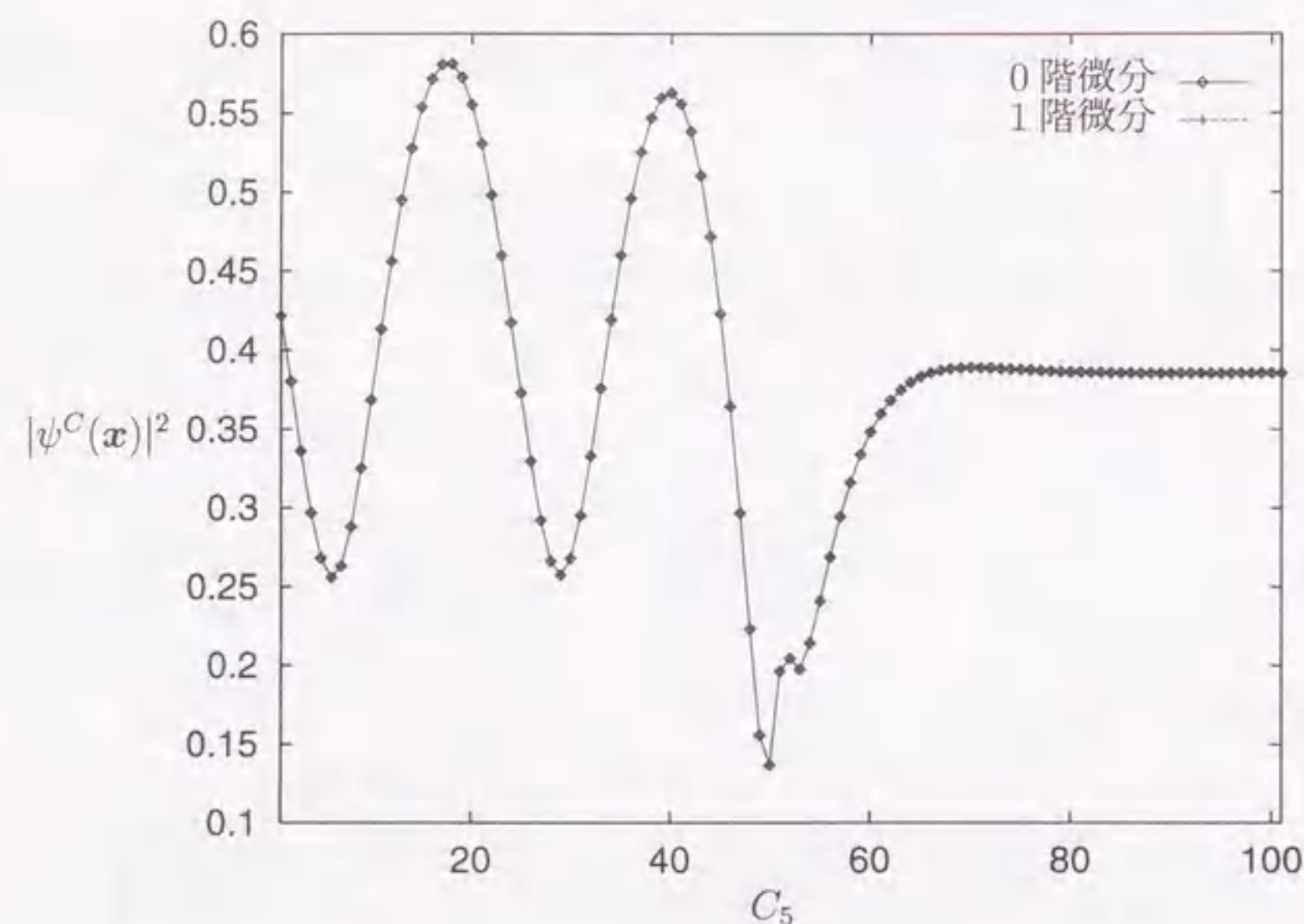


図 7.2 仮想境界内における解の比較

また、図 7.3, 図 7.4 は、仮想境界内の電子の存在確率密度である。この結果からも、透過係数、反射係数の表現の違いによる差は見られない。したがって、透過係数、反射係数の式は、 θ によって偏微分された式を用いてもよいことになる。つまり、条件式が過剰である可能性を含んでいる。 θ による 2 階の偏微分の表現まで今回計算したが、これについてもほとんど差は見られなかった。したがって、偏微分した方程式は透過係数、反射係数を表すときの条件式になると考えられる。

7.5 結言

本章では、第3章、第5章で導出した方法と同様に、 N モード、 J ポート電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式を導出した。導波モード分離型積分方程式は、各導波路のモード条件が異なっているような回路や複雑な回路に対しても、本章で述べた方法により全く同様に導波モード分離型積分方程式を容易に導出することができる。また、透過係数、反射係数の式を θ 微分した式で導いた導波モード分離型積分方程式を用いた数値計算結果と、3章で導出した積分方程式による解析結果と比較した。この結果、両積分方程式で同じ解が得られた。従って、一般形の導波モード分離型積分方程式の透過係数、反射係数を求めるための条件式が過剰系である可能性があることが分かった。

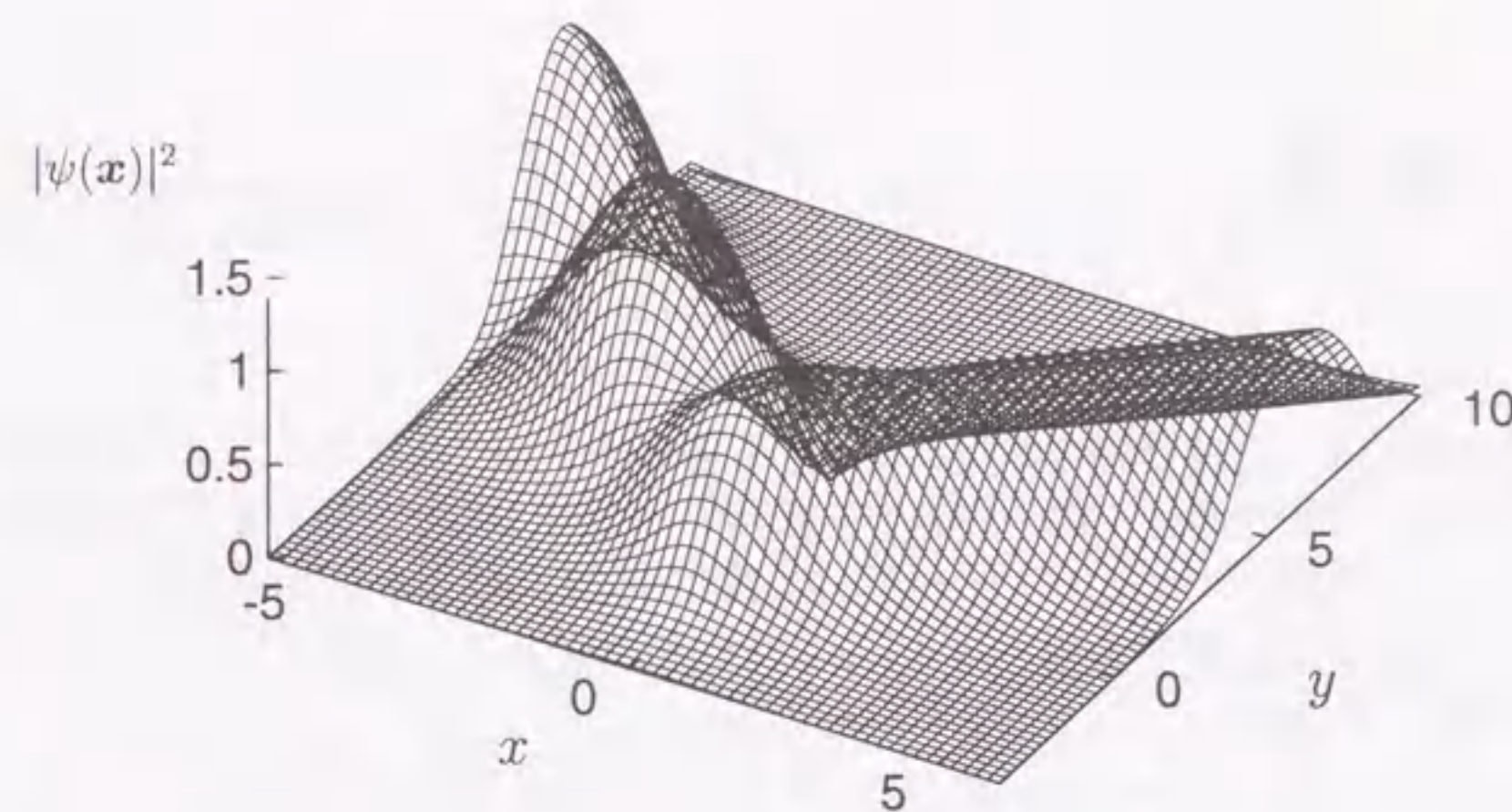


図 7.3. 0 階微分を用いた解析例 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0, V_2/E_0 = 0.0, E/E_0 = 1.0$, $|T|^2 = 0.84825, |R|^2 = 0.15174, |T|^2 + |R|^2 = 1.00000$)

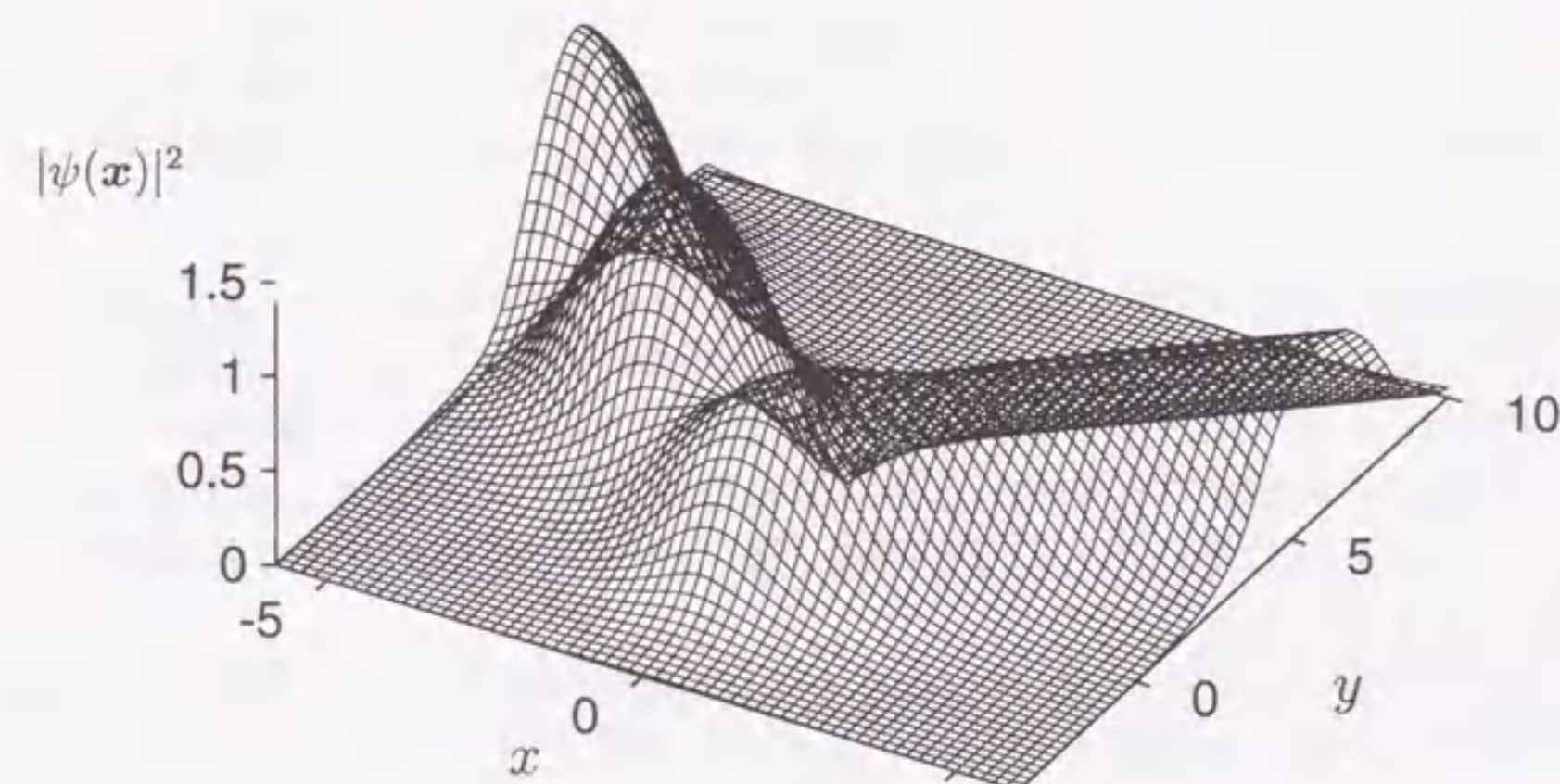


図 7.4. 1 階微分を用いた解析例 ($V_1/E_0 = V_3/E_0 = 3.0, V_2/E_0 = 0.0, E/E_0 = 1.0$, $|T|^2 = 0.84826, |R|^2 = 0.15179, |T|^2 + |R|^2 = 1.00006$)

第8章 結論

量子電子波素子は少電力、高速動作可能な次世代半導体素子として注目され様々な研究がなされている。将来、これらの量子電子波素子を結合するために複雑な量子電子波導波路が多用されると考えられる。したがって、電子波導波回路設計用 CAD の開発は最も基本的な課題である。本研究は、電子波回路用 CAD 開発を目的として、導波モード分離型積分方程式 (GMEIE) を提案した。

電子波の基本方程式である Schrödinger 波動方程式と Maxwell 方程式が類似していることから、誘電体導波回路解析のための導波モード分離型積分方程式を電子波回路に適用し、均質なポテンシャル分布をもち、導波路外部のポテンシャルが有限である 2 ポート電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式を導出した。

導出した積分方程式は、数値計算が可能であり、自明な解をもつ直線導波路に対して適用し、その数学的妥当性を示した。また、折れ曲がり、円形曲がり回路において、電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより低い場合（電子が導波路外部に放射しない場合）、および高い場合（電子が導波路外部に放射する場合）に適用した。解析にはモーメント法（境界要素法）を用いて数値解析を行い、量子電子波回路の特性を調べた。また、曲がり部をもつ回路において、曲がり部内側、外側の導波路の形状に対する回路の特性を調べた。

Y 型分岐電子波回路に対する導波モード分離型境界積分方程式 (GMIEI) を導出し、Y 型分岐電子波回路において、電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより低い場合、すなわち電子が導波路外部に放射しない場合、および電子のエネルギーが導波路外部ポテンシャルより高い場合、すなわち電子が導波路外に放射する場合について、積分方程式に境界要素法（モーメント法）を適用し数値解析を行いながら、電子波回路の特性を調べ、導出した方程式の妥当性を確認した。

多モード、多ポート電子波回路に対する導波モード分離型積分方程式を導出し、導波モード分離型積分方程式の一般表現を示した。導出した方程式は単一モード、2 ポートの場合に比べ、項は増えるが、同じアルゴリズムを利用できるため、容易にソフトの拡張ができると考えられる。

求めた積分方程式は電子が導波路外に放射する場合も、放射しない場合とほとんど同様に取り扱うことができ、CAD ソルバーとして極めて望ましい性質を持っている。導波モード分離型積分方程式が電子波回路用 CAD の基礎理論として有効であることを明らかにした。

量子電子波回路に磁場をかけた場合に導波モード分離型積分方程式を拡張すること。また、導波モード分離型積分方程式にはこれまで知られていない数多くの興味ある数学的性質があり、これらを調べることを今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Jesús A. del Alamo and Cristopher C. Eugster, "Quantum field-effect directional coupler," Appl. Phys. Lett., Vol.56, no.1, pp.78-80, Jan. 1990.
- [2] N. Tsukada, A.D. Wieck, and K. Ploog, "Proposal of novel electron wave coupled devices," Appl. Phys. Lett., vol.56, no.25, pp.2527-2529, Jan. 1990.
- [3] 横山直樹, "量子効果デバイスの現状と展望," 信学誌, vol.76, no.6, pp.602-606, June 1993.
- [4] 榊 裕之, "メゾスコピックおよびミクロスコピック量子構造の電子伝導デバイスの応用," 固体物理, vol.28, no.11, pp.842-850, Nov. 1993.
- [5] 中里和郎, "単電子メモリ," 信学誌, vol.79, no.11, pp.1149-1153, Nov. 1996.
- [6] T. K. Gaylord, G. N. Henderson, and E. N. Glysis, "Application of electromagnetics formalism to quantum-mechanical electron-wave propagation in semiconductors," J. Opt. Soc. Am. B, vol.10, no.2, pp.333-339, Feb. 1993.
- [7] 片山 清文, 田中 雅宏, 田中 嘉津夫, "電子波回路用 CAD のための導波モード分離型境界積分方程式," 信学論 (C-I), vol.J81-C-I, no.10, pp.582-589, Oct. 1998.
- [8] 河野健治, 鬼頭勤, "光導波路解析の基礎 マクスウェル方程式とシュレディンガー方程式を解くために" 現代工学社, 1998.
- [9] A. Weisshaar, J. Lary, S.M. Goodnick, and V. K. Tripathi, "Analysis of discontinuities in quantum waveguide structures," Appl. Phys. Lett. vol. 55, no.20, pp. 2114-2116, Nov. 1989.
- [10] C. S. Lent, "Ballistic current vortex excitations in electron waveguide structures," Appl. Phys. Lett. vol. 57, no. 16, pp. 1678-1680, Oct. 1990.
- [11] C. S. Lent and Davide J. Kirkner, "The quantum transmitting boundary method," J. Appl. Phys. vol. 67, no. 10, pp. 6353-6359, May 1990.
- [12] 大谷直毅, 永井信夫, 鈴木正清, 三木信弘, "複素等価回路による量子効果現象の定式化," 信学論 (C-I), vol. J73-C-I, no. 11, pp. 683-689, Nov. 1990.
- [13] J.A.Brum, "Electronic properties of quantum-dot superlattices," J. Appl. Phys. vol. 43, no. 14, pp. 12082-12085, May 1991.

- [14] 後藤 等, 小柴 正則, “電子波導波路不連続の3次元有限要素法解析,” 信学論 (C-I), vol. J75-C-I, no. 8, pp. 536–541, Aug. 1992.
- [15] D. W. L. Sprung, Hua Wu, and J. Martorell, “Understanding quantum wires with circular bends,” J. Appl. Phys. vol. 71, no. 1, pp. 515–517, Jan. 1992.
- [16] Thomas Palm and Lars Thylen, “Analysis of an electron-wave Y-branch switch,” Appl. Phys. Lett., vol. 60, no. 2, pp. 237–239, Jan. 1992.
- [17] T. Ueta “Boundary element method for electron waves in uniform magnetic fields,” Engineering. Analysis with Boundary Elements, vol. 17, pp. 69–74, 1995.
- [18] K. Amemiya and K. Kawamura, “Analysis of the Hall effect in terms of magneto-focusing in quantum dots,” J. Phys. Soc. Japan, vol. 64, pp. 1245–1250, Apr. 1995.
- [19] 鍛冶良作, 早田和弥, 小柴正則, “プレーナー形電子波導波路の有限要素法解析,” 信学論 (C-I), vol. J75-C-I, no. 12, pp. 735–740, Dec. 1992.
- [20] 鍛冶良作, 早田和弥, 小柴正則, “電子波伝搬の回路理論的取扱いとその応用,” 信学論 (C-I), vol. J75-C-I, no. 3, pp. 134–140, May. 1992.
- [21] Daniel W. Wilson, Elias N. Glytsis, and Thomas K. Gaylord, “Quantum well, voltage-induced quantum well, and quantum barrier electron waveguides: Mode characteristics and maximum current,” Appl. Phys. Lett., vol. 59, no. 15, pp. 1855–1857, Oct. 1991.
- [22] T.K. Gaylord, E.N. Glytsis, and K.F. Brennan, “Semiconductor quantum wells as electron wave slab waveguides,” J. Appl. Phys. vol. 66, No. 4, pp. 1842–1848, Aug. 1989.
- [23] 鍛冶良作, 早田和弥, 小柴正則, “電子波伝搬の回路理論的取扱いとその応用,” 信学論 (C-I), vol. J75-C-I, no. 3, pp. 134–140, May 1992.
- [24] 大谷直毅, 永井信夫, 鈴木正清, 三木信弘, “複素等価回路による量子効果現象の定式化,” 信学論 (C-I), vol. J73-C-I, no. 11, pp. 683–689, Nov. 1990.
- [25] 田中嘉津夫, “誘電体導波曲がり回路設計の新しい積分方程式—導波モード分離型積分方程式,” 信学論 (C-I), vol. J76-C-I, no. 1, pp. 1–9, Jan. 1993.
- [26] Kazuo Tanaka, Masahiro Tanaka and Kiyofumi Katayama, “Simulations of Two-Dimensional Photon Scanning Tunneling Microscope by Boundary Integral Equation Method: *p*-polarization,” Opt. Rev. vol. 6, no. 3, pp. 249–256, 1999.
- [27] 片山清文, 田中嘉津夫, “電子波回路 CAD のための境界積分方程式 (一般表現),” 電磁界理論研究会資料, EMT-94-71, Nov. 1994.
- [28] 片山清文, 田中 雅宏, 田中嘉津夫, “境界要素法を用いた電子波回路用 CAD,” 電磁界理論研究会資料, EMT-95-102, Dec. 1995.

- [29] Kiyofumi Katayama, Masahiro Tanaka and Kazuo Tanaka, “New Boundary Element Method for CAD of Quantum Electron Waveguide Circuits,” IEEE APS International Symposium, pp. 2008–2011, July, 1996.
- [30] 片山清文, 田中 雅宏, 田中嘉津夫, “GMEIE にもとづく境界要素法による電子波回路用 CAD,” 電磁界理論研究会資料, EMT-96-108, Oct. 1996.
- [31] 市川 克也, 片山清文, 田中嘉津夫, “導波モード分離型積分方程式を利用した電子波回路用 CAD,” 電磁界理論研究会資料, EMT-97-116, Nov. 1997.
- [32] 木村 雅彦, 田中嘉津夫, 田中 雅宏, 片山清文, “量子電子波導波回路用 CAD ソフトウェア開発,” 電磁界理論研究会資料, EMT-99-99, Nov. 1999.
- [33] K. Hirayama, Y. Honma, Y. Hayashi, and M. Koshihara, “A novel finite-element formulation for the analysis of the energy levels of a quantum cavity in a magnetic field,” IEEE Photonics and Technology Letters, vol. 10, pp. 1359–1361, Oct. 1998.

発表論文および口頭発表

本研究に関する発表論文、および口頭発表を以下に示す。

1. 片山 清文, 田中 嘉津夫, "電子波回路 CAD のための境界積分方程式 (一般表現)," 電磁界理論研究会資料, EMT-94-71, pp. 51-60, Oct. 1994.
2. 片山 清文, 田中 嘉津夫, "電子波回路用 CAD のための境界積分方程式," 電子情報通信学会ソサイエティ大会, 1995.
3. 片山 清文, 田中 雅宏, 田中 嘉津夫, "境界要素法を用いた電子波回路用 CAD," 電磁界理論研究会資料, EMT-95-102, pp. 19-27, Dec. 1995.
4. Kiyofumi Katayama, Masahiro Tanaka, and Kazuo Tanaka, "New Boundary Element Method for CAD of Quantum Electron Waveguide Circuits," IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 1996, pp.2008-2011, Jul. 1996.
5. 片山 清文, 田中 雅宏, 田中 嘉津夫, "GMEIE にもとづく境界要素法による電子波回路用 CAD," 電磁界理論研究会資料, EMT-96-108, pp. 49-55, Oct. 1996.
6. 市川 克也, 片山 清文, 田中 嘉津夫, 田中 雅宏, "導波モード分離型積分方程式を利用した電子波回路用 CAD," 電磁界理論研究会資料, EMT-97-116, pp. 97-102, Nov. 1997.
7. 片山 清文, 田中 雅宏, 田中 嘉津夫, "電子波回路用 CAD のための導波モード分離型境界積分方程式," 電子情報通信学会論文誌 (C-I), vol.J81-C-I, no.10, Oct. 1998.
8. 木村 雅彦, 田中 嘉津夫, 田中 雅宏, 片山 清文, "量子電子波導波回路用 CAD ソフトウェア開発," 電磁界理論研究会資料, EMT-99-99, Nov. 1999.
9. 片山 清文, 田中 雅宏, 田中 嘉津夫, "3 ポート Y 型分岐電子波回路用 CAD のための境界積分方程式," 電子情報通信学会 (投稿中).

付録 A モード関数

右の図のようなポテンシャル分布をもち、右図下のような一様な導波路に基本モード波が導波しているとする。ただし、波は x 方向に伝搬し、 z 成分のみ存在するとする。この波動は、Schrödinger 波動方程式

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) - k^2 \left[\frac{V}{E} - 1 \right] \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

を満足する。ここで、右図下のように、 x の正方向に伝搬する波の波動関数を $\psi^+(\mathbf{x})$ 、 x の負方向に伝搬する波の波動関数を $\psi^-(\mathbf{x})$ とおくと、これらは、次式のように表すことができる。

$$\psi^+(\mathbf{x}) = e^{-j\beta x} \psi(y) \quad (\text{A.2})$$

$$\psi^-(\mathbf{x}) = e^{j\beta x} \psi(y) \quad (\text{A.3})$$

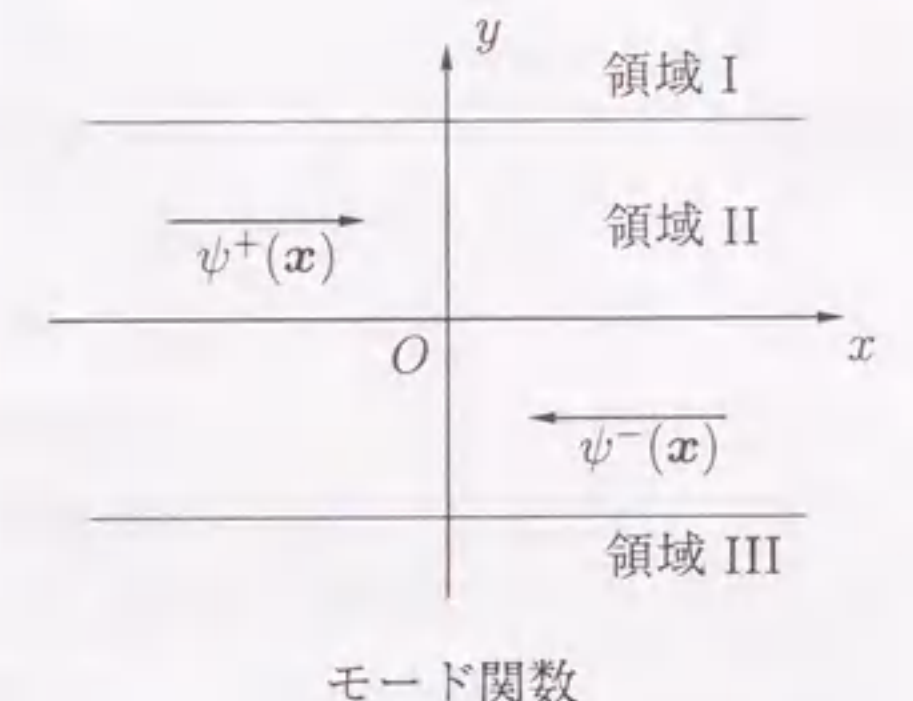
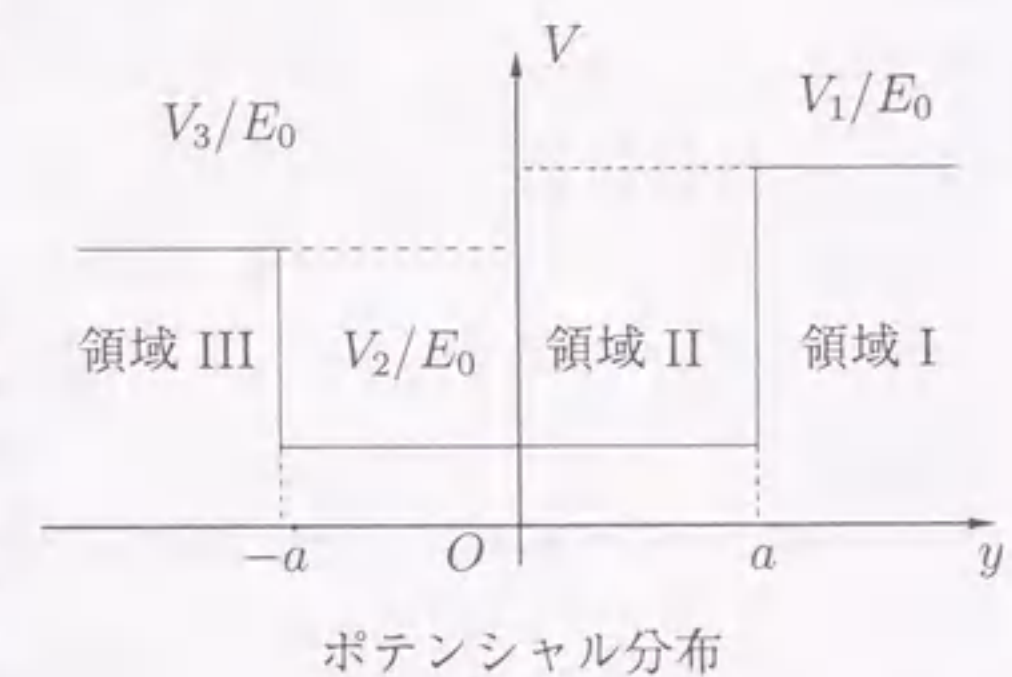
ただし、 β は導波路幅およびポテンシャルに依存する量で、伝搬定数と呼ばれる。また、ここでは時間を含まない Schrödinger 波動方程式を考えているため、波動関数の時間因子 $\exp[j\omega t]$ を省略する。

まず、導波路内 (領域 II) における波動関数 $\psi_2^+(\mathbf{x})$ について考える。波動関数 $\psi_2^+(\mathbf{x})$ は式 (A.1) を満足するので、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} [e^{-j\beta x} \psi_2(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [e^{-j\beta x} \psi_2(y)] - k^2 \left[\frac{V_2}{E} - 1 \right] e^{-j\beta x} \psi_2(y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} + \left\{ k^2 \left[1 - \frac{V_2}{E} \right] - \beta^2 \right\} \psi_2(y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

が成り立つ。同様に、領域 I における波動関数 $\psi_1^+(\mathbf{x})$ 、領域 III における波動関数 $\psi_3^+(\mathbf{x})$ も式 (A.1) を満足する。従って、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} [e^{-j\beta x} \psi_i(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [e^{-j\beta x} \psi_i(y)] - k^2 \left[\frac{V_i}{E} - 1 \right] e^{-j\beta x} \psi_i(y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2 \psi_i(y)}{\partial y^2} - \left\{ k^2 \left[\frac{V_i}{E} - 1 \right] + \beta^2 \right\} = 0 \quad (i = 1, 3) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



波動関数は、導波路から遠ざかる方向では減衰し、導波路軸方向に伝搬する。したがって、偏微分方程式 (A.4), (A.5) を満足する波動関数は、

$$\psi_1^+(y) = A \exp[-\delta_1 y] \quad (\text{A.6})$$

$$\psi_2^+(y) = B \cos(\kappa y) + C \sin(\kappa y) \quad (\text{A.7})$$

$$\psi_3^+(y) = D \exp[\delta_3 y] \quad (\text{A.8})$$

である。ただし、

$$\delta_1 = \sqrt{\beta^2 + k^2 \left[\frac{V_1}{E} - 1 \right]} \quad (\text{A.9})$$

$$\kappa = \sqrt{k^2 \left[\frac{V_2}{E} - 1 \right] - \beta^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\delta_3 = \sqrt{\beta^2 + k^2 \left[\frac{V_3}{E} - 1 \right]} \quad (\text{A.11})$$

である。

境界面 $y = \pm a$ における界の連続性の条件は、

$$\psi_1^+(a) = \psi_2^+(a) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \psi_1^+(a)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2^+(a)}{\partial y} \quad (\text{A.13})$$

$$\psi_2^+(-a) = \psi_3^+(-a) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \psi_2^+(-a)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_3^+(-a)}{\partial y} \quad (\text{A.15})$$

である。従って、

$$A \exp(-\delta_1 a) = B \cos(\kappa a) + C \sin(\kappa a) \quad (\text{A.16})$$

$$-\delta_1 A \exp(-\delta_1 a) = -\kappa B \sin(\kappa a) + \kappa C \cos(\kappa a) \quad (\text{A.17})$$

$$B \cos(-\kappa a) + C \sin(-\kappa a) = D \exp(-\delta_3 a) \quad (\text{A.18})$$

$$-\kappa B \sin(-\kappa a) + \kappa C \cos(-\kappa a) = \delta_3 D \exp(-\delta_3 a) \quad (\text{A.19})$$

を満足しなければならない。これらが、 $A = B = C = D \neq 0$ である解を持つためには、次式を満足しなければならない。

$$\begin{vmatrix} \exp(-\delta_1 a) & -\cos(\kappa a) & -\sin(\kappa a) & 0 \\ -\delta_1 \exp(-\delta_1 a) & \kappa \sin(\kappa a) & -\kappa \cos(\kappa a) & 0 \\ 0 & \cos(-\kappa a) & \sin(-\kappa a) & -\exp(-\delta_3 a) \\ 0 & -\kappa \sin(-\kappa a) & \kappa \cos(-\kappa a) & -\delta_3 \exp(-\delta_3 a) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.20})$$

式 (A.20) を整理すると、

$$\begin{aligned} & [\kappa \sin(\kappa a) - \delta_1 \cos(\kappa a)][\kappa \cos(\kappa a) + \delta_3 \sin(\kappa a)] \\ & + [\kappa \cos(\kappa a) + \delta_1 \sin(\kappa a)][\kappa \sin(\kappa a) - \delta_3 \cos(\kappa a)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となる。この式から伝搬定数 β を求めることができる。また、式 (A.21) を分散関係式という。ここで、式 (A.16), (A.17) から B, C の比は、

$$\begin{aligned} -\delta_1 B \cos(\kappa a) - \delta_1 C \sin(\kappa a) &= -\kappa B \sin(\kappa a) + \kappa C \cos(\kappa a) \\ [\kappa_2 \sin(\kappa a) - \delta_1 \cos(\kappa a)] B &= [\kappa \cos(\kappa a) + \delta_1 \sin(\kappa a)] C \\ \frac{B}{C} &= \frac{\kappa \cos(\kappa a) + \delta_1 \sin(\kappa a)}{\kappa \sin(\kappa a) - \delta_1 \cos(\kappa a)} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

であるから、 B, C を次のようにおくことができる。

$$B = \psi [\kappa \cos(\kappa a) + \delta \sin(\kappa a)] \quad (\text{A.23})$$

$$C = \psi [\kappa \sin(\kappa a) - \delta \cos(\kappa a)] \quad (\text{A.24})$$

これらを、式 (A.7) に代入すると、

$$\psi_2^+(y) = \psi'(y) \cos(\kappa y - \phi) \quad (\text{A.25})$$

となる。ただし、

$$\tan \phi = \frac{\psi [\kappa \sin(\kappa a) - \delta \cos(\kappa a)]}{\psi [\kappa \cos(\kappa a) + \delta \sin(\kappa a)]} \quad (\text{A.26})$$

$$\psi' = \psi \cdot \frac{1}{\sqrt{[\kappa \cos(\kappa a) + \delta \sin(\kappa a)]^2 + [\kappa \sin(\kappa a) - \delta \cos(\kappa a)]^2}} \quad (\text{A.27})$$

である。

ここで、式 (A.6), (A.7), (A.16), (A.25) より、 $y = a$ のとき、

$$A = \psi' \cos(\kappa a - \phi) \exp(\delta_1 a) \quad (\text{A.28})$$

となり、同様に、式 (A.7), (A.8), (A.18), (A.25) より、 $y = -a$ のとき、

$$D = \psi' \cos(\kappa a + \phi) \exp(\delta_3 a) \quad (\text{A.29})$$

である。式 (A.6), (A.8), (A.28), (A.29) より、

$$\psi_1^+(y) = \psi' \cos(\kappa a - \phi) \exp[\delta_1(a - y)] \quad (\text{A.30})$$

$$\psi_3^+(y) = \psi' \cos(\kappa a + \phi) \exp[\delta_1(a + y)] \quad (\text{A.31})$$

となる。従って、式 (A.2), (A.25), (A.30), (A.31) より、 x 正方向に伝搬する波の波動関数は、

$$\psi_1^+(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa a - \phi) \exp[\delta_1(a - y)] \exp[-j\beta x] \quad (\text{A.32})$$

$$\psi_2^+(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa y - \phi) \exp[-j\beta x] \quad (\text{A.33})$$

$$\psi_3^+(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa a + \phi) \exp[\delta_3(a + y)] \exp[-j\beta x] \quad (\text{A.34})$$

である。同様に x 負方向に伝搬する波の波動関数は、

$$\psi_1^-(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa a - \phi) \exp[\delta_1(a - y)] \exp[j\beta x] \quad (\text{A.35})$$

$$\psi_2^-(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa y - \phi) \exp[j\beta x] \quad (\text{A.36})$$

$$\psi_3^-(\mathbf{x}) = \psi' \cos(\kappa a + \phi) \exp[\delta_3(a + y)] \exp[j\beta x] \quad (\text{A.37})$$

である。

謝辞

本研究と本論文の作成にあたり、終始熱心な御指導と御鞭撻を賜った岐阜大学工学部応用情報学科 田中 嘉津夫教授に心から厚く御礼申し上げます。

また、岐阜大学工学部応用情報学科 河瀬 順洋教授、藤田 廣志教授には、本論文の御校閲を賜わり、心からお礼申し上げます。

本研究遂行上の便宜をはかって頂いくとともに、暖かい励ましを頂いた、浜松大学 名誉学長 長谷川 弘道教授、和田 康夫 事務局長、経営情報学部 小島 克之教授、丹下 忠之教授、鈴木 治電算機管理室長、事務職員 河合 清和氏をはじめ、浜松大学教職員各位に心から感謝致します。

本研究において御協力頂き、暖かい励ましを頂いた、岐阜大学 工学部 応用情報学科 田中 雅宏助手、岐阜大学 工学部 田中研究室 木村 雅彦氏、岐阜医療技術短期大学 山田 功教授、NDS 長瀬 亮氏、日本電信電話 面谷 竜弥氏、アイシン・エイ・ダブリュ 小笠原 秀明氏、トヨタマックス 市川 克也氏、任天堂 鈴木 忍氏、日本電気 大寺 宏紀氏、SONY 吉野 能且氏、名古屋工業大学 舟橋 健司助手、中部電力 高木 昭直氏をはじめとする岐阜大学工学部電子情報工学科（現 応用情報学科）田中研究室諸氏に心より感謝致します。また、本研究において、暖かい励ましを頂いた岐阜大学工学部 応用情報学科 兵藤 安昭助手、富士通 源馬 正記氏、谷口 博幸氏に心から感謝致します。

最後に、本研究の遂行において、多大なご助力を賜りました関係者諸氏に心よりお礼申し上げます。

