

論文目録

申請者氏名 栖原秀郎



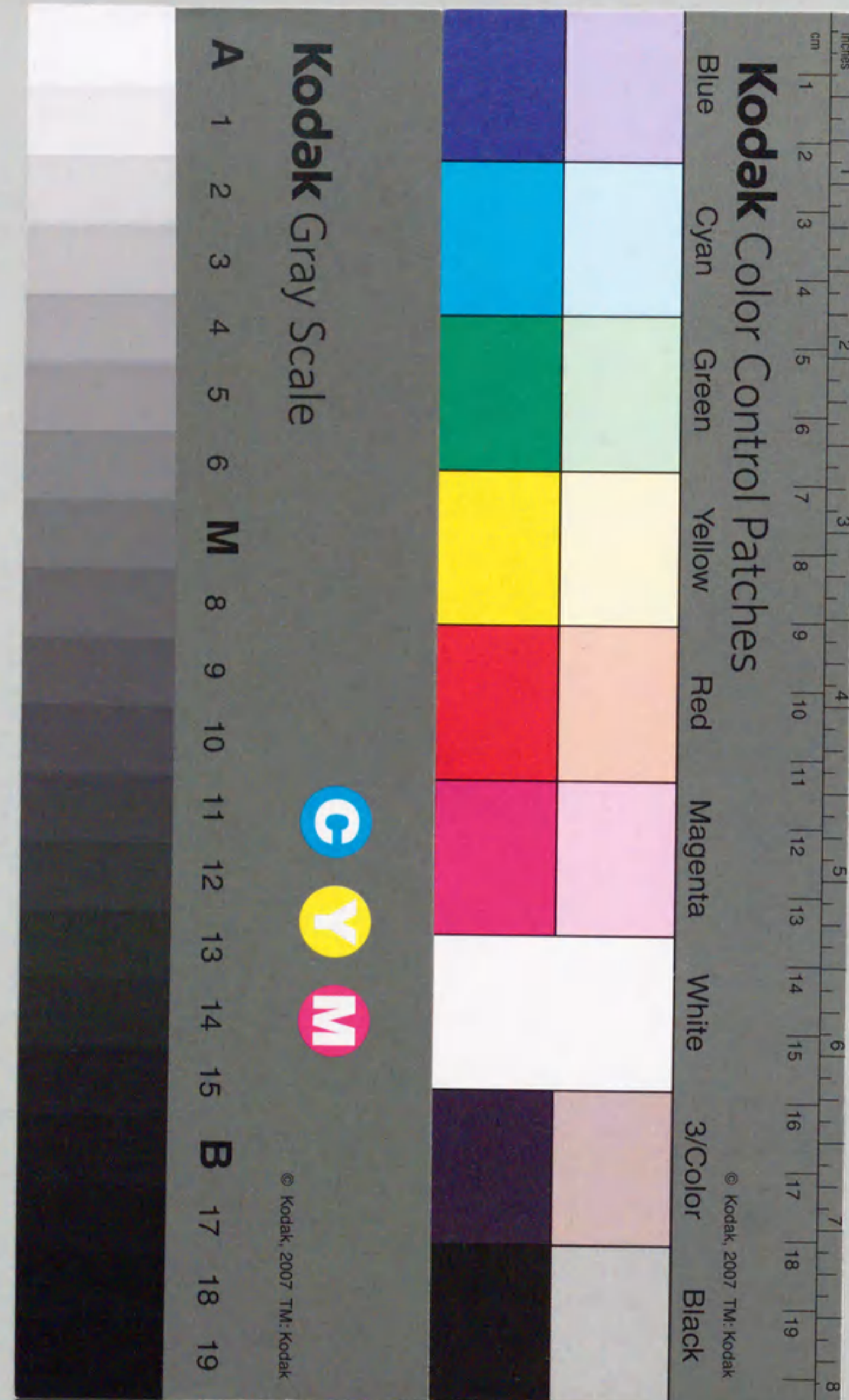
学位論文

題目： き裂先端で遷移区間を構成する応力関数のくさび貫入工法と
誘発目地工法への適用に関する研究

印刷公表の方法及び時期

参考論文（学位論文に直接関係するもの）

- 1) 栖原秀郎・中川建治： 亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数, 土木学会論文集, No. 501/ I -29, pp. 65-74, 1994. 10.
- 2) 栖原秀郎・藤井康寿・中川建治： くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案, 土木学会論文集, No. 528/ VI -29, 1995. 12.
- 3) 栖原秀郎・長谷川豊・藤井康寿・中川建治・服部育男： 半地下トンネルにおける誘発目地の設計法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 42A, 1996. 3.



き裂先端で遷移区間を構成する応力関数の
くさび貫入工法と誘発目地工法
への適用に関する研究

STUDIES ON ANALYSIS MODELS CONSISTING OF THE STRESS FUNCTIONS WITH
THE FRACTURE PROCESS ZONE AT THE CRACK TIP FOR THE WEDGE-STRIKING
BENCH CUT METHOD AND THE DUMMY JOINTS METHOD

平成 8 年 1 月

栖原 秀郎

②

き裂先端で遷移区間を構成する応力関数の
くさび貫入工法と誘発目地工法
への適用に関する研究

STUDIES ON ANALYSIS MODELS CONSISTING OF THE STRESS FUNCTIONS WITH
THE FRACTURE PROCESS ZONE AT THE CRACK TIP FOR THE WEDGE-STRIKING
BENCH CUT METHOD AND THE DUMMY JOINTS METHOD

平成 8 年 1 月

栖 原 秀 郎

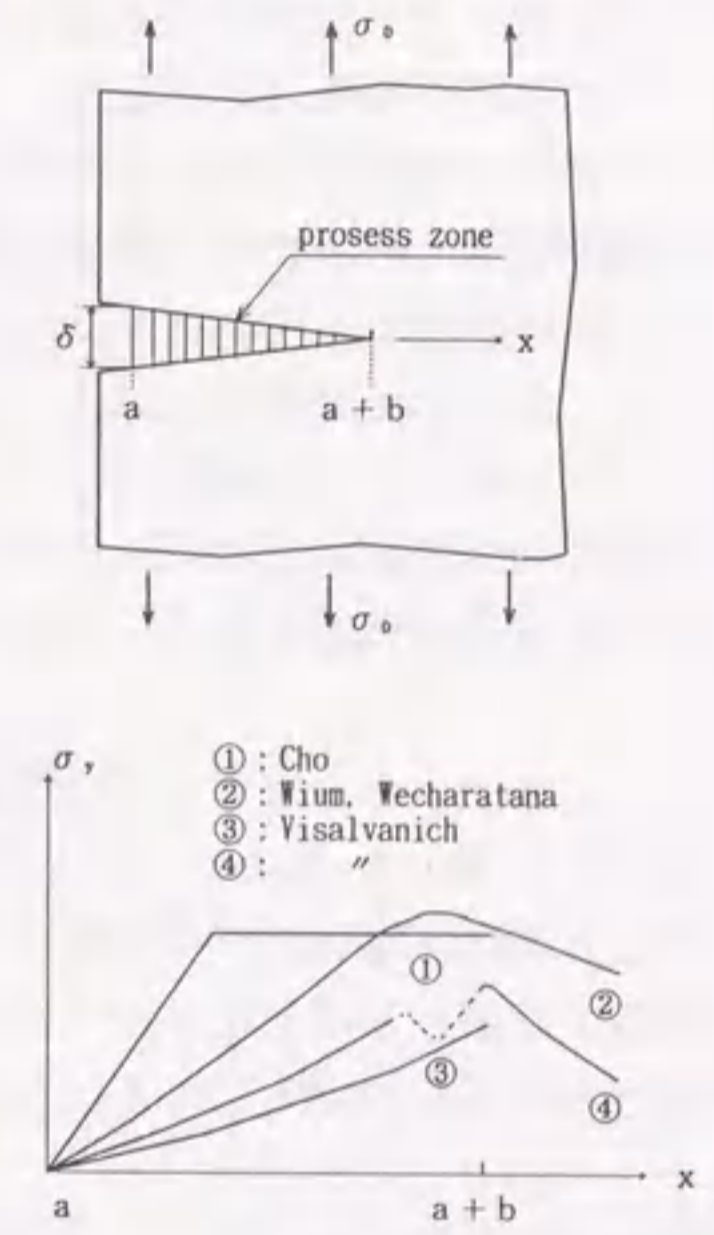
[第5章] 従来の開口関数に基づいた境界近傍のクラックの応力関数	64
5.1 自由辺近傍のクラック解析	64
5.2 固定辺近傍のクラック解析	74
5.3 まとめ	81
参考文献	81
[第6章] 実際例との比較検討(1)	
< くさび貫入工法(KNBB工法)への適用 >	82
6.1 概要	82
6.2 くさび貫入による岩盤掘削システム	83
6.3 解析手法	85
6.4 力学的諸係数および設定条件の決定	87
6.5 解析結果および従来の方法との比較検討	90
6.6 設計法に関する一提案	93
6.7 試験工事との比較検討	93
6.8 まとめ	95
参考文献	96
[第7章] 実際例との比較検討(2)	
< 誘発目地工法への適用 >	
7.1 概要	97
7.2 誘発目地工法	97
7.3 従来の設計法	98
7.4 解析手法	99
7.5 力学的諸係数および設定条件の決定	100
7.6 従来の方法と著者等の方法との比較検討	101
7.7 実施工での計測結果との比較検討	105
7.8 まとめ	105
参考文献	106
[第8章] 結論	
8.1 本研究の成果	107
8.2 今後の課題	108
謝辞	109
本論文に含まれる著者の発表論文ならびに参考論文	110

第1章 はじめに

1.1 クラック解析の現状と本研究の主題

中心に直線状のクラック1本を持つ無限板が無限遠点で一様引張りを受ける問題の応力関数として最も簡単なものは Westergaard¹⁾によって与えられたもので、線形破壊力学の解析的な基礎となっている。これは簡潔な応力関数であるがクラックの先端で無限大の応力集中を与える点が不都合である。これに対して応力集中が有限な降伏応力で打ち切られるように改良されたものが Dugdale²⁾の解である。何れも多くの研究の理論解の根幹として広く活用されている。

一様弾性体と考えられる構造物の主要材料であるコンクリートや構造物の基礎に関連する岩盤のクラックに関する研究では、クラック(あるいは空隙)周辺の応力集中解析は必要不可欠の研究課題である。これらの混成材料に関する実験的研究では、上記の関数解が与える様な直線状の一本のクラックの先端で無限大あるいは降伏応力で一定分布と言う応力状態は不自然である。例えば Cho³⁾, Wium⁴⁾, Visalvanich⁵⁾の研究によると、図-1.1に略記するような応力集中が実験結果を説明するには望ましいものであると報告されている。したがって図-1.1のような応力分布を与える応力関数を導くことは実験結果を理論的に検討したりシミュレーションしたりするには有意義なことであろう。既に段・中川等^{6), 7)}



⁸⁾はクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数の導き方について提案をしている。その1つは、Westergaardの解を開口の大きさを表すパラメータで直接重み積分して応力関数を導く方法であった。この様な応力関数構成法は簡便であるから、藤井・中川等はコンクリートの梁の曲げ破壊のシミュレーションに適用⁹⁾してその有用性を示した。

著者は、さらに中川等の直接重み積分して応力関数を導く方法を、自由辺あるいは固定辺周辺の応力解析にまで発展させ、くさび貫入工法および誘発目地工法へ適用し工学的意味を持たせた。これが本研究の主題の一つである。

弾性特性の異なる2種類の材料の接合面上のクラック(インターフェイスクラック)の解析的研究によると、クラック先端の応力集中は、集積特異点の様相を呈することになる(Erdgan¹⁰⁾, England¹¹⁾). この物理的に不自然な点を解消する為に Comninou¹²⁾は Contact Zoneという領域を想定した応力関数を提案しているが、引張りの場合にせん断

応力が無限大となる特性は解消されていない。異なる材質の板の接合面のクラックでは応力と変位の連続性を保つ条件として、bi-elastic constant という定数が定義されるがこれは指数関数で定義される。段・中川等はフーリエ変換で境界面亀裂の問題を解析する方法^{13)・14)}を報告しているが、これらはbi-elastic constantを含まない解となっている。他方有限な応力集中を生じる境界面亀裂の問題を指数関数で解析する村瀬・藤井・中川等の方法^{15)・16)}ではこの定数を伴う解となっている。したがって一様な弾性板中のクラックでも2種類の弾性板の境界面亀裂の先端でも有限な応力集中とプロセスゾーンを構成し得る関数を統一して指数関数で定義できることが望ましい。著者は、従来活用されている引張り(モードI)やせん断(モードII)状態の解に加えて、解析例の少ないクラック近傍における温度勾配による応力分布相当のx軸が面内に曲げられるものとy軸が面内に曲げられるものまでも含めて総合的に表現し得る関数群を導いた¹⁷⁾。さらに、有限連続板(外側クラック)までも含めた応力関数4形式を一括構成する一般解の構成法を導いた。これがもう一方の主題であり、著者等の一連の研究の理論的、数学的意味をより明らかなものとした。

1.2 本研究の特徴

本研究の特徴は、次の通りである。また一様弾性体中のクラックに関する研究の位置づけと本研究の内容を表-1.1 および表-1.2 に示す。

(1) クラックを有する等方等質な無限板が、引張りあるいはせん断外力等を受ける問題に対し Westergaard の解を平滑化することにより、プロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いた。基本解 12 組を導き、これらを組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を構成し、開口変位についてもいろいろな形状を表現し得ることを示した。

(2) 無限板の中心クラックの解のみならず有限連続板(外側クラック)までも含めた応力関数の基本4形式(引張り、せん断、x軸曲げ、y軸曲げ)を一括構成することにより、直線状中心クラックの解 12 組のほかに、さらに有限連続板の解析についても基本解 12 組を導いた。

(3) 従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の実用例(その1)として、自由辺近傍のクラックが内圧を受けて開口する場合等の応力関数を導いた。すなわち、種々のクラック等(中心クラック、両側クラック、円孔等)が存在する無限板のクラック近傍に自由辺を構成するような応力関数を導く方法について示した。

(4) 従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の実用例(その2)として、固定辺近傍のクラックを解析する応力関数を導いた。すなわち、

種々のクラック等(中心クラック、片側クラック、逆対称開口形状(8の字)クラック等)が存在する無限板のクラック近傍に固定辺を構成するような応力関数を導く方法について示した。

(5) 現在、発破を使わない岩掘削工法が数多く開発され実施されている。くさび貫入による岩掘削工法もその一つであり、工事に伴う振動・騒音問題や重要構造物の基礎岩盤のゆるみ問題等に対応した工法として、近年使用機会が増加している。種々のクラックが存在する無限板のクラック近傍に自由辺を構成するような応力関数でクラック先端の応力集中が有限なものを用いて当工法の打撃ピッチの決定方法等の設計方法について一提案を行い試験工事によってその整合性を確かめた。

(6) トンネルに限らず底板コンクリートを打設して、硬化後に側壁を打設すると底板で拘束されているために側壁にひびわれを生じる。このひびわれ対策の1つとして、誘発目地が施工されるが、本研究は誘発目地の開口量や応力分布を実施工の計測値と各パラメータを仮定した解析値によって検討し、解析例では計測結果とある程度整合した結果を得た。今後パラメータを適切に推定する方法をさらに検討することによって誘発目地間隔の推定法として合理的な方法を導き得よう。なお、理論解として種々のクラックが存在する無限板のクラック近傍に固定辺を構成するような応力関数でクラック先端の応力集中が有限なものを活用した。

表-1.1 研究の位置づけ

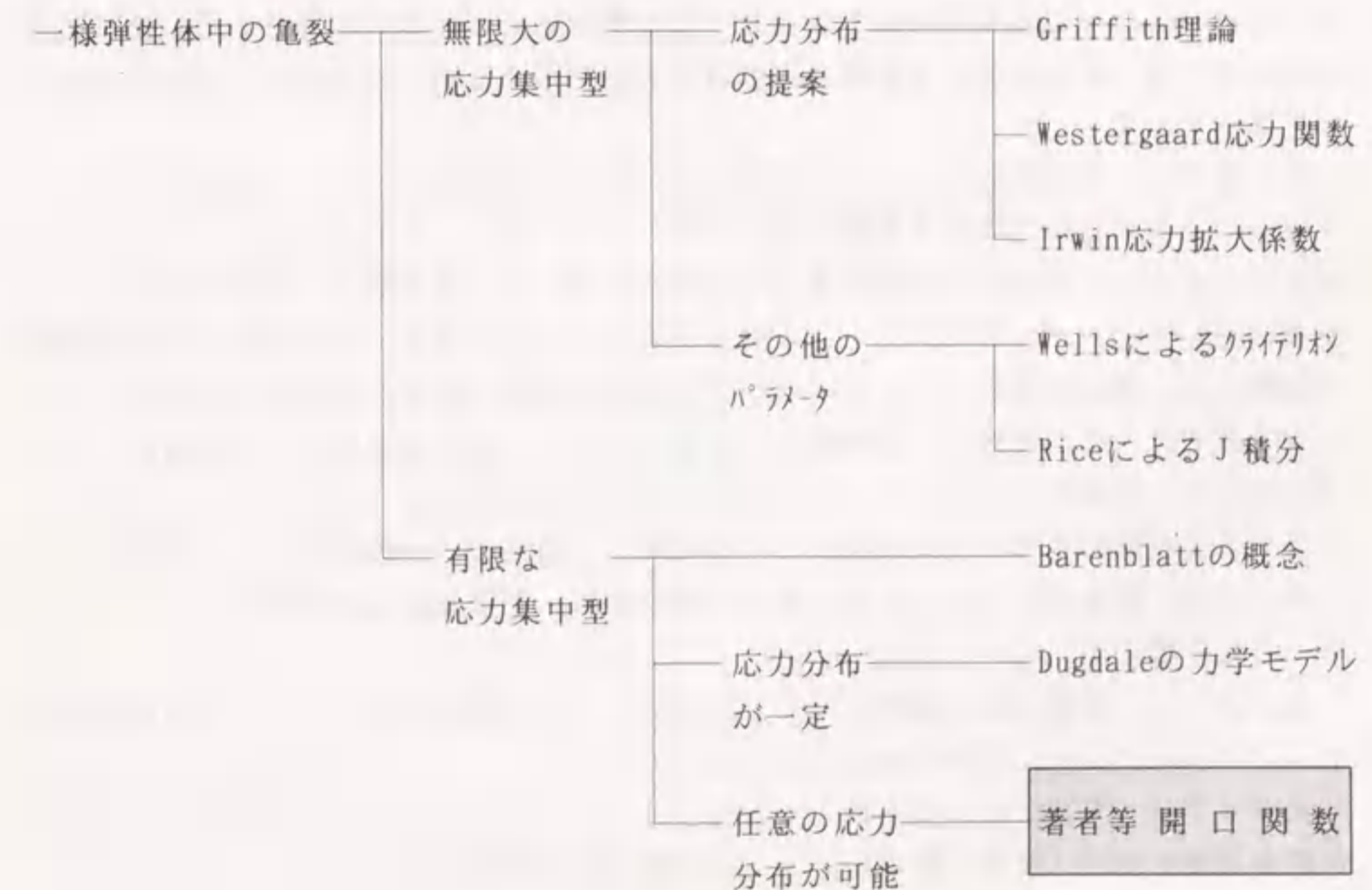
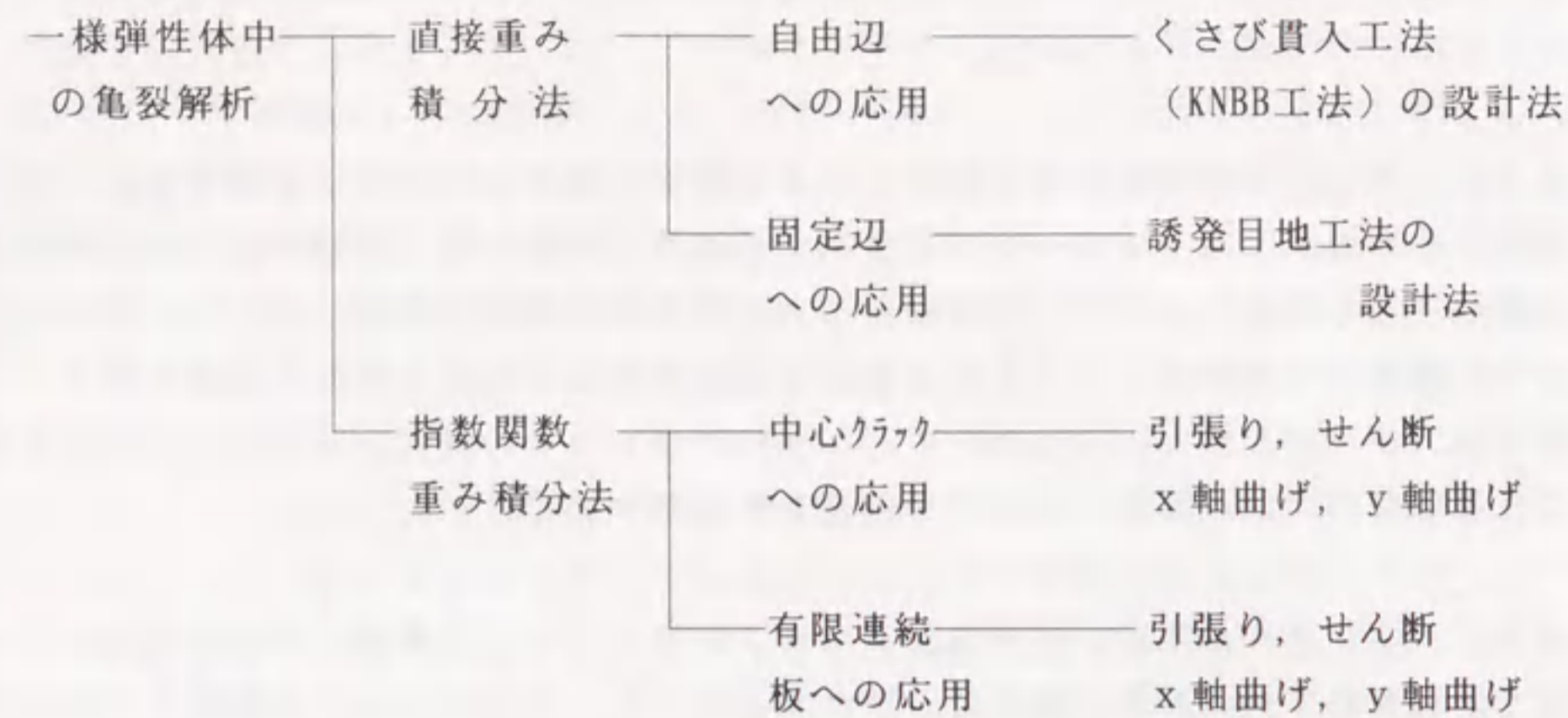


表-1.2 本研究の内容



1. 3 本研究の概要

本研究は、大きく二つに分けられる。一つは、クラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数に関する基礎的な研究であり第2章から第5章に述べている。もう一つは、くさび貫入工法 (KNBB工法) および誘発目地工法への適用に関する応用的な研究で第6章と第7章に述べている。以下に各章の概要を述べる。

第1章では、クラック解析の現状と本研究の主題および本研究の特徴を述べている。

第2章では、重み積分法によるクラック先端での応力の有限化手法について述べている。Westergaardの解の平滑化手法として著者等の従来の直接重み積分を行い開口関数を求める方法と指数関数による開口関数 $H(z)$ を用いる新しい方法の二つの方法について述べている。

第3章では、開口関数 $H(z)$ による一様弾性体中の直線状クラックの解析を行い、クラックを有する等方等質な無限板が、引張りあるいはせん断外力等を受ける問題に対しプロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いた。基本解 12 組を導き、これらを組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を構成し、開口変位についてもいろいろな形状を表現し得ることを示している。

第4章では、応力関数の一括構成法と外側クラック (有限連続板) への応用について述べている。無限板の中心クラックの解のみならず有限連続板 (外側クラック) までも含めた応力関数の基本 4 形式 (引張り, せん断, x 軸曲げ, y 軸曲げ) を一括構成することにより、直線状中心クラックの解 12 組の他に、有限連続板の解析についても基本解 12 組を導いている。

第5章では、従来の開口関数を用いた応用例として自由辺近傍のクラックの解析法と固定辺近傍のクラックの解析法について述べている。

第6章では、実施工への適用例 (1) として、くさび貫入工法 (KNBB工法) の設計法の提案を行い、試験工事等によってその整合性を確かめている。

第7章では、実施工への適用例 (2) として、半地下トンネルにおける誘発目地工法へ適用し、実施工での計測結果と解析結果との整合性を確かめている。

第8章では、以上の結果をまとめ本研究の成果を述べている。

参 考 文 献

- 1) H. M. Westergaard : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol. 33, A-49-53, 1939.
- 2) D. S. Dugdale : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 3) K. Z. Cho, et al. : Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Eng. Mech., Vol. 110, No. 8, pp. 1174-1184, 1984.
- 4) D. J. W. Wium, et al. : Hybrid Model for Discrete Crack in Concrete, J. of Eng. Mech., Vol. 110, No. 8, pp. 1211-1227, 1984.
- 5) K. Visalvanich, and A. Naaman: Fracture Model for Fiber Reinforced Concrete, ACI J. Title No. 80-14, pp. 128-138, 1983.
- 6) 段樹金・児嶋弘行・中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No. 374/ I-6, pp. 399-407, 1986.
- 7) 段樹金・中川建治 : せん断を受ける円盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える応力関数, 土質工学会論文集, Vol. 28, No. 1, pp. 153-160, 1988.
- 8) 段樹金・堀晃芳・中川建治 : 亀裂を持つ板の2次元問題を解析するための特異関数に関する研究, 土木学会論文集, No. 396/ V-9, pp. 21-28, 1988.
- 9) K. Fujii, S. Duan, and K. Nakagawa : A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam, Eng. Fract. Mech., Vol. 40, No. 1, pp. 37-44, 1991.
- 10) F. Erdogan : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 403-410, 1965.
- 11) A. H. England : A Crack between Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp. 400-402, 1965.
- 12) M. Comninou : The Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 44, pp. 631-636, 1977.
- 13) S. Duan, H. Yazaki, and K. Nakagawa : A Crack at the Interface of An Elastic Half Plane and A Rigid Body, Eng. Fract. Mech., Vol. 32, No. 4 pp. 573-580, 1989.
- 14) S. Duan, H. Yazaki, K. Fujii, and K. Nakagawa : A Mathematical Approach of the Interface Crack with the Fracture Process Zone, Research Report of the Factory of Eng., Gifu., No. 41, pp. 1-10, 1991.
- 15) 村瀬安彦・中川建治 : 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析 土木学会論文集, No. 483/ I-26, pp. 41~49, 1994.
- 16) K. Fujii, K. Nakagawa, S. Duan, and Y. Kato: Stress Function with Finite Magnitude of Stress Concentration around An Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol. 47, No. 6 pp. 881-891, 1994.
- 17) 栖原秀郎・中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数, 土木学会論文集, No. 501/ I-29, pp. 65-74, 1994.

第 2 章 重み積分法による
クラック先端応力の有限化

2. 1 Westergaardの解¹⁾

本研究においてはこの解を基礎とするので簡単に述べる。図-2.1 に示すように y 軸上に長さ 2a のクラックを持ち無限遠方で $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$, $\tau_{xy} = 0$ という一様応力を受ける等方等質の無限板の解は、Westergaard によって与えられていて次のように表される。

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0$$

$$W = \bar{z} \phi + \phi \quad (2-1)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$\phi' = -\frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$\left(\phi = -\frac{\sigma_0}{2} \cdot a^2 \cdot \log(z + \sqrt{z^2 + a^2}) \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ -\frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right\} \\ \tau_{xy} &= -\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} (2-2)$$

式(2-2)に示した Westergaardの基本解における解の特異性すなわち、 $y = \pm a$ において応力が無限大となることは、 $z/\sqrt{z^2+a^2}$ に起因しているため、この項のみに注目して次のような変形を行う。

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{z+ia}{z-ia}} + \sqrt{\frac{z-ia}{z+ia}} \right)$$

$$= \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{z+ia}{z-ia} \right) \right\}$$

ここで、 $h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z+ia}{z-ia} \right)$ とおくと

$\operatorname{Re}[h(z, a)]$ および $\operatorname{Im}[h(z, a)]$ の y 軸上の値は、それぞれ図-2.2, 図-2.3 のようになる。ただし、 $\operatorname{Im}[h(z, a)]$ の実線は $x = +\varepsilon$, 点線は $x = -\varepsilon$ に対する値とする。図示のように、関数 $h(z, a)$ は、 $y = \pm a$ において実数部分は $\pm\infty$ に発散し、虚数部分は 0 から $\pi/2$ または $\pi/2$ から 0 へ急激に変化する性質を持っていて、これがクラック先端に

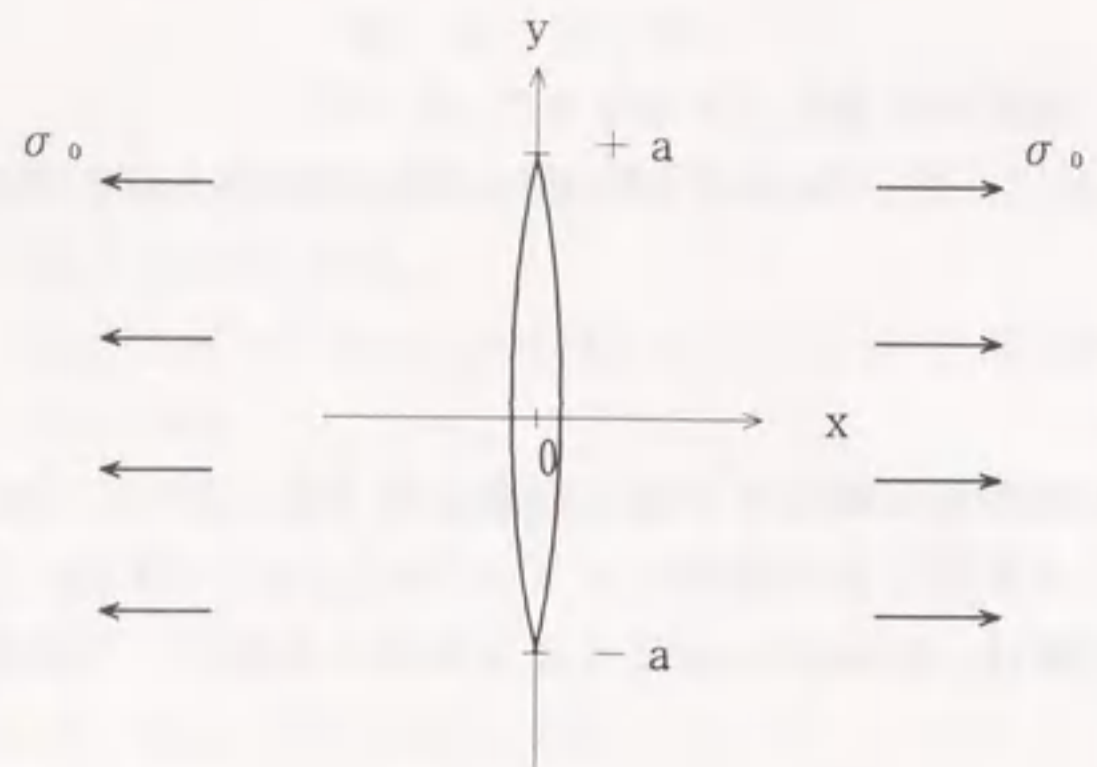


図-2.1 クラックを持つ無限板と一様応力

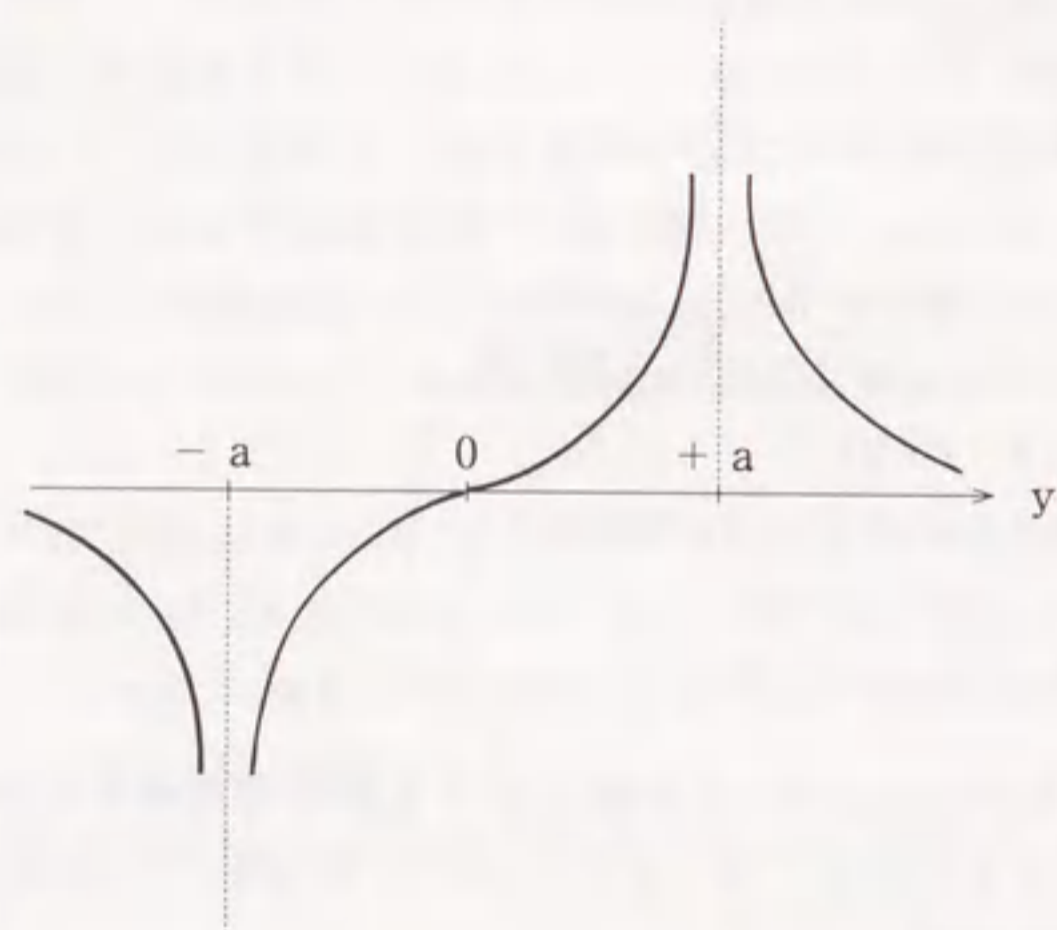


図-2.2 y軸上での $\text{Re}[h(z, a)]$

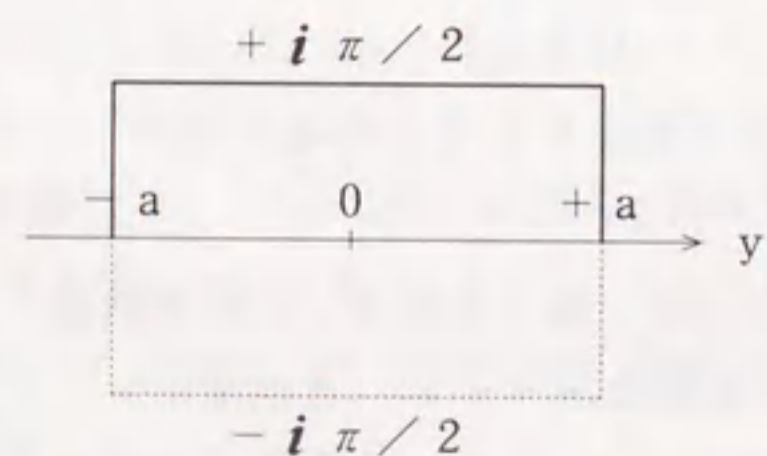


図-2.3 y軸上での $\text{Im}[h(z, a)]$

において応力が無限大に発散する原因に他ならない。さらに、y軸上 $|y| < a$ で、応力の条件 $\sigma_x = 0$ が満足されるのは $\text{Im}[h(z, a)]_{x=0} = \pm i\pi/2$ によるものである。したがって、応力を区間 $a < |y| < a+b$ で平滑化するについて完全開口部 $|y| < a$ においては、 $\text{Im}[h(z, a)]_{x=0} = \pm i\pi/2$ の特性は保持しなければならない。次にこれらの問題を解消して有限で滑らかに立ち上がる関数を求める手法について述べる。

2. 2 平滑化された著者等の従来の開口関数 $W(z, \bar{z})$

前節 2. 1 で示した特性を考慮してクラックの長さ $2a$ の Westergaard の解 $W(z, \bar{z}, a)$ にクラックの長さを表すパラメータ a を積分変数 t として適当な重み関数 $\rho(t)$ を乗じつつ区間 $(a < t < a+b)$ にわたって積分する。すなわち、

$$W(z, \bar{z}, a, b) = \int_a^{a+b} \rho(t) W(z, \bar{z}, t) dt \quad (2-3)$$

とする。これによって得られる $W(z, \bar{z}, a, b)$ の特異点は無限大の応力を生じないものになる。数学的には $W(z, \bar{z}, a)$ は対数分岐を持っていて無限大の応力とクラックの開口を与えるが $W(z, \bar{z}, a, b)$ は対数分岐と有理関数との積になり有限な応力と開口を与えるものになる。この方法は、段・中川等^{2), 3), 4)}により既に確立されており詳細は省略する。

2. 3 平滑化された指数関数による開口関数 $H(z)$ ^{5), 6), 7), 8)}

2. 1 で示した特性、すなわちクラック先端において応力が無限大に発散する原因は関数 $h(z, a)$ の特異性によるものであるから、調和関数の範囲内でこの関数 $h(z, a)$ の特異性を緩和して平滑化できれば、応力が有限で滑らかに立ち上がる関数を表現できることになる。

$$\text{すなわち、 } h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z + ia}{z - ia} \right)$$

の代わりに、新たに下記の条件を満足する関数 $H_j(z, a, b)$ を定義する。

1. $\lim_{z \rightarrow \infty} H_j(z, a, b) = h(z, a)$
2. $\text{Re}[H_j(z, a, b)] < \infty$
3. $\text{Im}[H_j(z, a, b)]|_{x=0}$ (y軸上の値) は、
 $|y| > a+b$ のとき 0
 $a+b \geq |y| > a$ のとき $y = \pm(a+b)$ で0から緩やかに立ち上がり
 $y = \pm a$ で $\pm i\pi/2$
 $a \geq |y|$ のとき $\pm i\pi/2$

具体的には、 $h(z, a)$ に対して $a = t$ として、 t に関する2次式あるいは4次式の重み $\rho_x(t, a, b)$ を乗じて重み積分を行うことによってこの問題は解決される。すなわち次のようにするのである。

$$H_k(z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho_k(t, a, b) \cdot h(z, t) dt \quad (2-4)$$

$$k = 2, 4$$

ここでは解析例に用いる、 $\rho_2(t, a, b)$ および $\rho_4(t, a, b)$ は、図-2.4 に示す形状を持ち、定義域を $(a, a+b)$ として総面積が1になるように基準化された重み関数であり、式(2-5)および式(2-6)のように表されるものとする。

$$\rho_2(t, a, b) = -\frac{6}{b^3} (t-a) \{t-(a+b)\} \quad (2-5)$$

$$\rho_4(t, a, b) = \frac{30}{b^5} (t-a)^2 \{t-(a+b)\}^2 \quad (2-6)$$

基本的には、図-2.5 に示すクラック線上の開口部の両端 $a < y < a+b$ の部分（プロセスゾーン相当）を構成するために、図-2.4 に定義する重み関数 ρ_k を開口関数 $h(z, a)$ に乗じて区間 $(a < |t| < a+b)$ にわたって積分して、 $|t| < a$, $a+b < |t|$ 区間では $\rho_k = 0$ であって重み積分は行わないことになる。式(2-5) および式(2-6)を、式(2-4)へ代入して重み積分すると次のような $h_2(z, a, b)$, $h_4(z, a, b)$ の関数が得られる。

$$h_2(z, a, b) = -\frac{i}{b^3} \left[\{z + i(a+b)\}^2 \{z + i(a - \frac{b}{2})\} \cdot \log\{z + i(a+b)\} \right. \\ \left. - (z + ia)^2 \{z + i(a + \frac{3}{2}b)\} \log\{z + ia\} \right. \\ \left. - \frac{ib}{3} \{3(z + ia + \frac{b}{2})^2 + 2b^2\} \right]$$

$$h_4(z, a, b) = \frac{i}{2b^5} \left[-\{(z + ia + ib)^5 - 5(z + ia) \cdot (z + ia + ib)^4 \right. \\ \left. + 10(z + ia)^2 (z + ia + ib)^3\} \cdot \log\{z + ia + ib\} \right. \\ \left. + \{(z + ia)^5 - 5(z + ia)^4\} (z + ia + ib) \right. \\ \left. + 10(z + ia)^3 (z + ia + ib)^2\} \cdot \log\{z + ia\} \right. \\ \left. + \frac{47}{60} \{(z + ia + ib)^5 - (z + ia)^5\} \right. \\ \left. - \frac{15}{12} (z + ia)(z + ia + ib) \cdot \{(z + ia + ib)^3 - (z + ia)^3\} \right. \\ \left. - \frac{55}{3} ib(z + ia)^2 (z + ia + ib)^2 \right]$$

求める関数 $H_2(z, a, b)$ 及び $H_4(z, a, b)$ は次のように表される。（ y 軸上の $|y| < a$ は応力0の開口部で、 $a < |y| < a+b$ は平滑化区間である。）

$$H_2(z, a, b) = h_2(z, a, b) - h_2(z, -a, -b) \quad (2-7)$$

$$H_4(z, a, b) = h_4(z, a, b) - h_4(z, -a, -b) \quad (2-8)$$

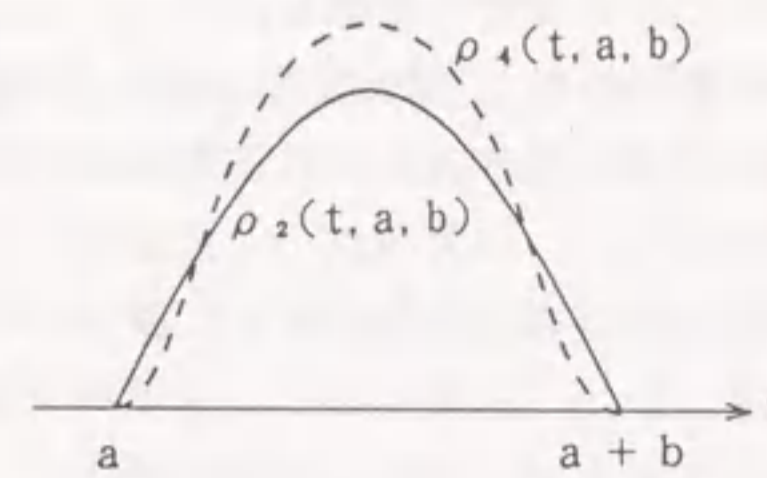


図-2.4 重み関数の形状

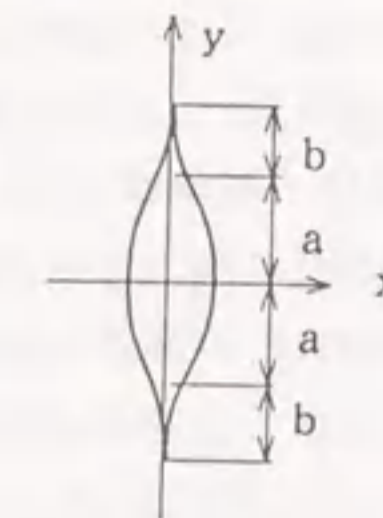


図-2.5 クラック幅 $2a$ とプロセスゾーンの関係

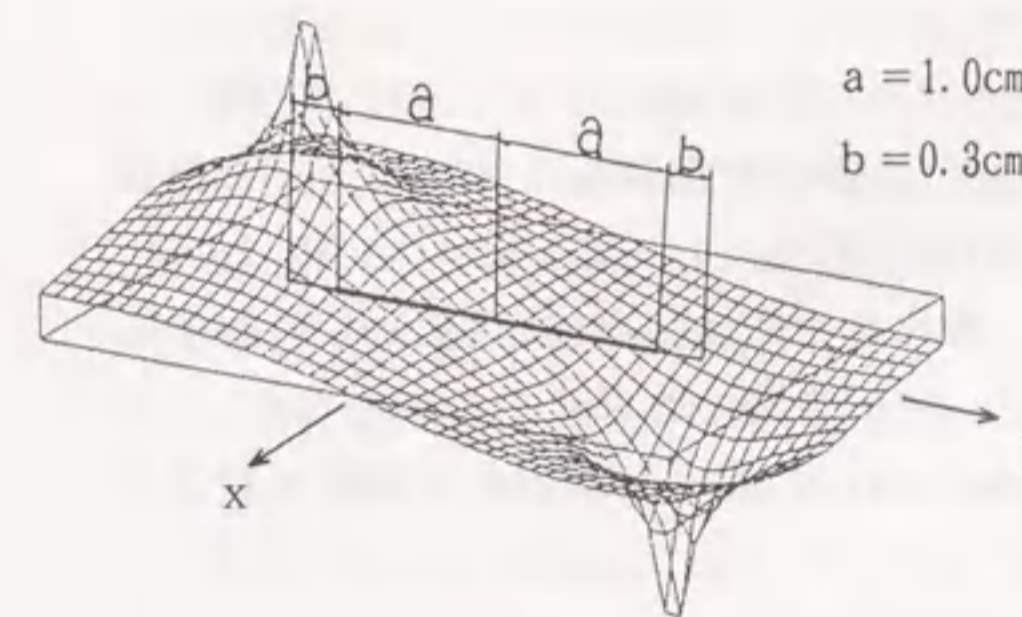


図-2.6 H_4 実数曲面(4次式重み)概略図

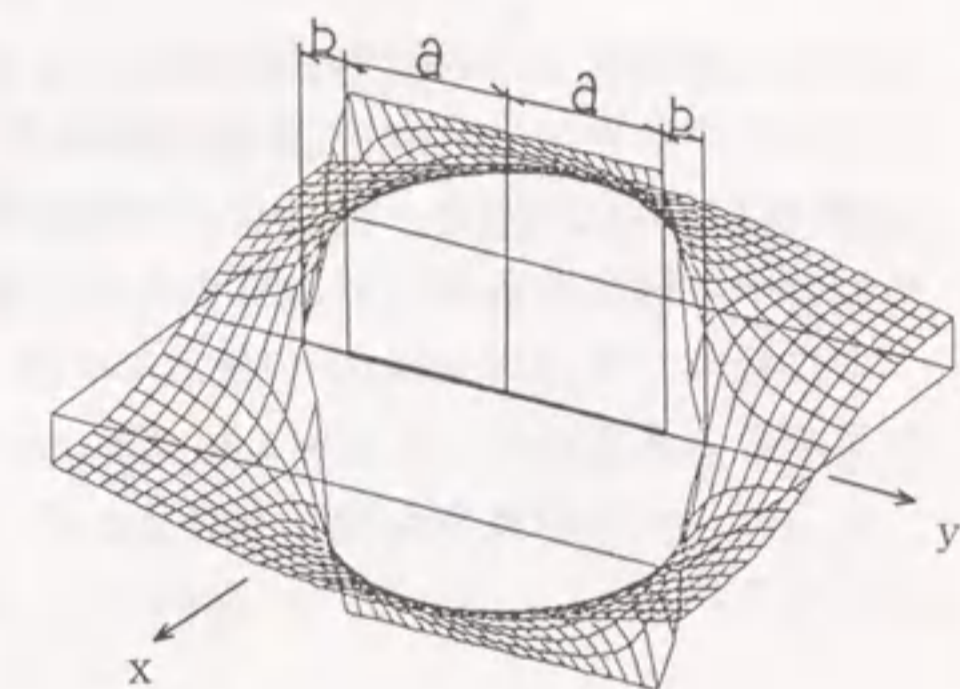


図-2.7 H_4 虚数曲面(4次式重み)概略図

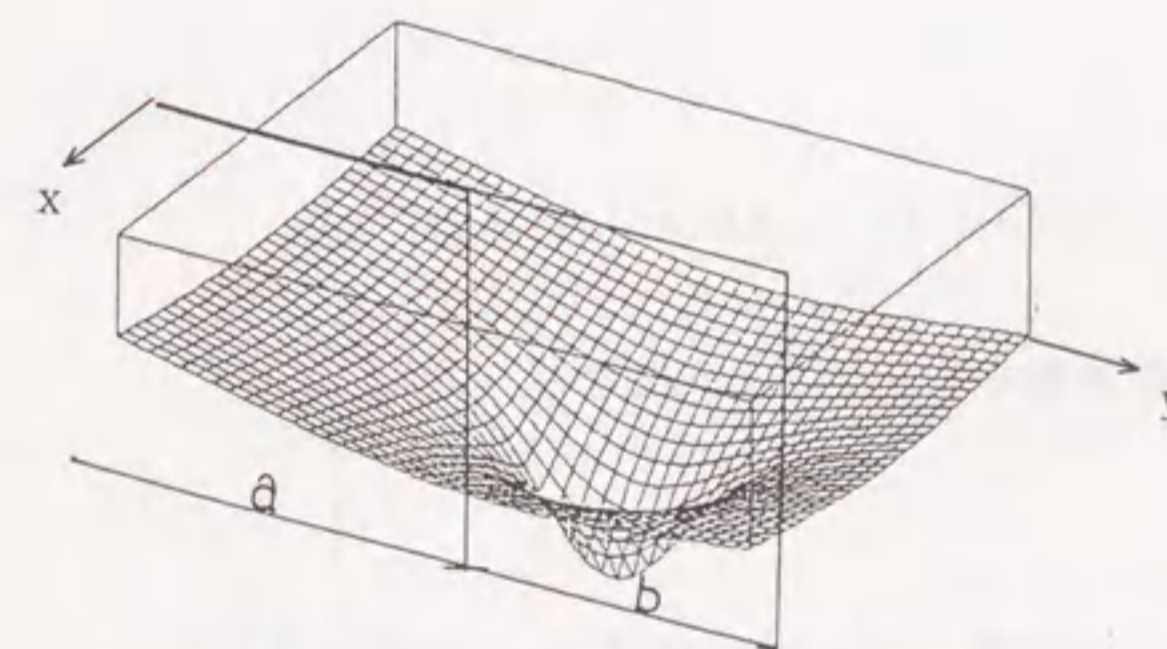


図-2.8 実数曲面(4次式重み)詳細図

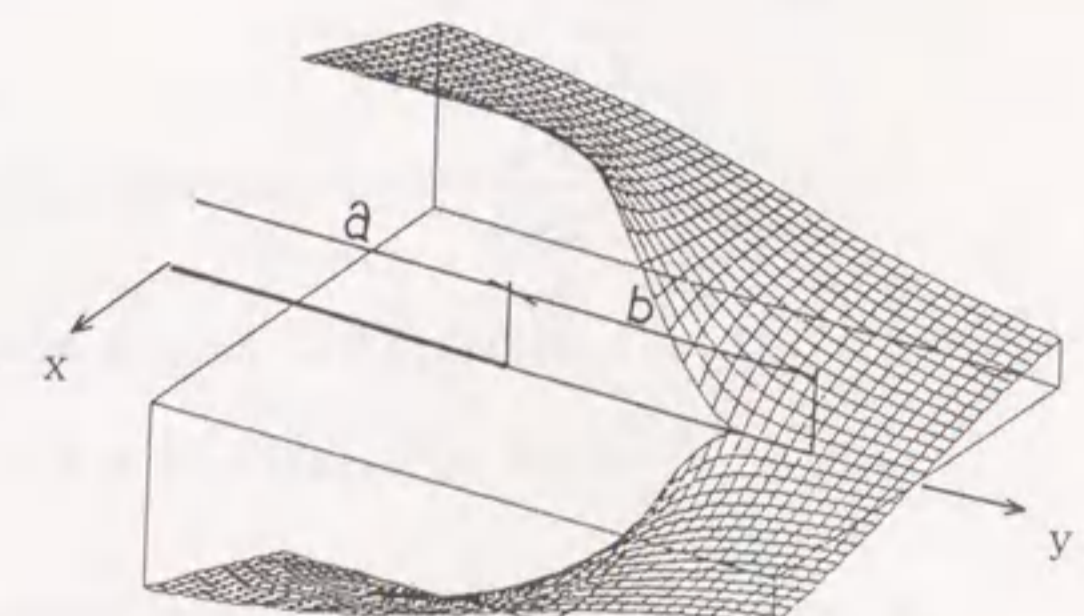


図-2.9 虚数曲面(4次式重み)詳細図

ここで上記の関数 $H_1(z, a, b)$ の詳細な誘導式は割愛するが、 $H_1(z, a, b)$ の実数曲面および虚数曲面の形状を図-2.6~2.9に示すことによってその有用性を確認しよう。図-2.6と図-2.7は開口部周辺 ($|x| < 1.5, |y| < 2$) の概略図であり、図-2.8と図-2.9は特異点 $y = a$ における詳細図 ($|x| < 0.3, 0.8 < y < 1.4$) である。これらの図より平滑化の状態が納得されよう。

つまり、Westergaard の解における $z / \sqrt{z^2 + a^2}$ および $1 / \sqrt{z^2 + a^2}$ 項について注目すると、

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{z + ia}{z - ia} \right) \right\} = \cosh\{h(z, a)\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} = -\frac{i}{a} \sinh \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{z + ia}{z - ia} \right) \right\}$$

$$= -\frac{i}{a} \sinh\{h(z, a)\}$$

となるので、Westergaard の応力関数の $\cosh\{h(z, a)\}$ を $\cosh\{H_1(z, a, b)\}$ で置換し、 $\sinh\{h(z, a)\}$ を $\sinh\{H_1(z, a, b)\}$ で置換すれば、応力関数の重調和条件はそのまま保持されつつ有限で滑らかな応力集中を与える関数が得られる。

すなわち、Westergaard の解の応力集中を平滑化するには、Westergaard の基本式の形をそのまま活用して、 $h(z, a)$ の代わりに $H_1(z, a, b)$ を用いればよいことになる。

よって、一様引張りを受けるクラックの Westergaard の解は次のように変換されることになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ W &= z\phi + \phi \\ \phi &= \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2} \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} (z^2 + a^2) \sinh\{h(z, a)\} \\ \phi' &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{h(z, a)\} + z(z^2 + a^2) h'(z, a) \cosh\{h(z, a)\}] \end{aligned} \right\} (2-9)$$

ここで、 $h(z, a)$ の代わりに $H_1(z, a, b)$ と置き換えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{i\sigma_0}{2a} (z^2 + a^2) \sinh\{H_1(z, a, b)\} \\ \phi' &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{H_1(z, a, b)\} + z(z^2 + a^2) H_1'(z, a, b) \cosh\{H_1(z, a, b)\}] \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{H_1(z, a, b)\} + z(z^2 + a^2) \sinh'\{H_1(z, a, b)\}] \end{aligned} \right\} (2-10)$$

参 考 文 献

- 1) H.M. Westergaard : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol. 33, A-49-53, 1939.
- 2) 段樹金・児嶋弘行・中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No. 374/ I-6, pp. 399-407, 1986.
- 3) 段樹金・中川建治 : せん断を受ける円盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える応力関数, 土質工学会論文集, Vol. 28, No. 1, pp. 153-160, 1988.
- 4) 段樹金・堀晃芳・中川建治 : 亀裂を持つ板の2次元問題を解析するための特異関数に関する研究, 土木学会論文集, No. 396/ V-9, pp. 21-28, 1988.
- 5) S. Duan, H. Yazaki, K. Fujii and K. Nakagawa : A Mathematical Approach of the Interface Crack with the Fracture Process Zone, Research Report of the Faculty of Eng., Gifu., No. 41, pp. 1-10, 1991.
- 6) 村瀬安彦・中川建治 : 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No. 483/ I-26, pp. 41-49, 1994.
- 7) K. Fujii, K. Nakagawa, S. Duan, and Y. Kato: Stress Function with Finite Magnitude of Stress Concentration around An Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol. 47, No. 6, pp. 881-891, 1994.
- 8) Y. Murase, S. Duan, and K. Nakagawa: Stress Analysis around A Circular Interface Crack between Dissimilar Media Loaded by Uniform Tension at Infinity, Eng. Fract. Mech., Vol. 48, No. 3, pp. 325-337, 1994.

第3章 開口関数 $H(z)$ による一様弾性体中の直線状クラックの解析

3.1 関数 $H_1(z, a, b)$ の特性と境界条件

前述した関数 $H_2(z, a, b)$ も $H_4(z, a, b)$ も、ほとんど等しい特性を具えているので、 $H = H_4(z, a, b)$ と略記して、応力関数を構成するについてこの H が望ましい特性を持つことを簡単に述べる。

$\operatorname{Re}[H]$ は有限で滑らかであるから $e^{H \cdot [H]}$ は滑らかである。 $\operatorname{Im}[H]$ は無限の複葉曲面であって y 軸上の区間 $a < y < a + b$ (あるいは $-a - b < y < -a$) を中心にして曲面上を周回するならばラセン階段状(対数分岐)となっていて1周につき $\pm i\pi$ づつ関数値が平行移動して $\pm \infty$ へ発散する。しかし応力関数としては図-8のように主要面一葉のみに着目すればよいので H は、

y 軸上 $|y| > a + b$ では 0 すなわち e^H : 実数
 y 軸上 $|y| < a$ では $\pm i\pi/2$ すなわち $e^H = \pm i e^{H \cdot [H]}$: 純虚数
 y 軸上 $a < |y| < a + b$ では e^H は 純虚数より実数へ滑らかに変化する。
 という特性を持っている。

複素応力関数表示された σ_x (あるいは τ_{xy}) が $|y| > a + b$ では 0 でなく y 軸上の $|y| < a$ では 0 になるということは σ_x (あるいは τ_{xy}) が実数あるいは複素数から純虚数になればよいこと、例えば $\sigma_x = e^H$ (あるいは $\sinh H, \cosh H$) という形で表されるならばこの条件が完全に満足される。詳細は割愛するが、 e^H は上述のように y 軸上 $|y| < a + b$ で不連続の開口を構成して、 y 軸上 $|y| < a$ で純虚数になるという条件を満足する直線状クラックの応力関数の条件は、『 y 軸上の $|y| < a + b$ 以外で変位が連続して、 y 軸上の $|y| < a$ で変位は開口を構成し $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$ という条件』を満足することである。

一方、関数曲面は多重曲面を構成しているので y 軸上 $|y| < a$ で連続とすれば $a < |y|$ では不連続となり、 i を乗じると $\operatorname{Re}[H]$ と $\operatorname{Im}[H]$ が反転し y 軸上の外側クラックの解が構成されることになる。

3.2 基本解

前節で示した直線状クラックの応力関数の条件『 y 軸上の $|y| < a + b$ 以外で変位が連続して、 y 軸上の $|y| < a$ で変位は開口を構成し $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$ という条件』を満足する基本解を導く。

z と $f_c = \cosh H, f_s = \sinh H$ をもって表-3.1 に掲げるような ψ と ϕ あるいは ϕ' を定義すると、これより構成される応力関数 $W = \bar{z}\psi + \phi$ 12組はすべてクラックの応力関数の条件『 y 軸上の $|y| < a + b$ 以外で変位が連続して、 y 軸上の $|y| < a$ で変位は開口を構成し $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$ という条件』を満足する。

また、 y 軸上の $a < |y| < a + b$ では応力は連続して変位は滑らかな開口となるがこれがプロセスゾーン相当部分を構成することになる。応力関数の変位図および応力図を図-3.1~3.12 に示す。変位や応力分布の状況が納得できればよいのでサイズの詳細は省いている。変位 U, V の図より y 軸上の開口形状が把握され、 σ_x, τ_{xy} の図より開口部で応力が 0 となる状況が納得されよう。

さらに、これらの 12 組の応力関数がどのような面内力を受けている 2次元問題の解であるかを変位図と応力図によって確かめた結果を表-3.2 に示す。 y 軸の正負領域で σ_x が反転して逆対称になるのは、同領域での温度差による伸縮あるいは x 軸が面内に曲げられるものに相当し、 x 軸の正負領域で σ_y の符号が逆転して逆対称になるのは y 軸が面内に曲げられるものに相当する。

Westergaard の解¹⁾ や Dugdale の解²⁾ は、それぞれ1つの形しか存在しないにもかかわらず、ここではそれぞれのモードに対して3組づつ(たとえば、引張りでは基本解その4, その7, その12)の解が導かれた。

これはつぎのような事情によるものである。 y 軸上の $a < |y| < a + b$ は、開口変位も応力も生じている緩和区間(プロセスゾーン相当区間)であり、開口形状と応力分布形状は一義的に拘束されない分だけ自由度を含んでいる。Westergaard の解はこの区間を持たないし、Dugdale の解ではこの区間の応力は、 σ_y と完全に拘束されている。本基本解 12 組ではこの区間に作用反作用力(打ち消して 0 となって外力相当にならない力)がそれぞれ特定の形(他の形状にも変更可能)となって作用して開口していることになる。したがって、各々のクラックモードに対する3組の基本解に特定の係数を乗じつつ重ね合わせ、さらに a, b を変化させた基本解も重ね合わせると、プロセスゾーン相当部分の応力や開口の形状を相当大きな自由度をもって変化させることができることになる。これによって特性の異なる材料(たとえば鋼材、コンクリート、岩石、ガラス等)のクラックの先端部分の状態を特定の形状に予め規定しても未定係数法によって近似的に表現し得ることになる。表-3.1 に定義した基本解以外に、 z に関してさらに高次のものも定義できるが無限遠方で応力が発散する解となるので割愛する。

なお、無限遠点における応力の発散を検討するについて必要となる基本関数 f_c, f_s と表-3.1 に示す基本解の $z \rightarrow \infty$ の特性はつぎのようになる。

ここで、 $f_c = \cosh H, f_s = \sinh H$ とすると、 H および H' の $z \rightarrow \infty$ の特性は、 $H_\infty = i(a+b/2)/z, H'_\infty = -i(a+b/2)/z^2$ である。

また、 $\sinh \varepsilon \approx \varepsilon, \cosh \varepsilon \approx 1$ であるので、 f_c および f_s の $z \rightarrow \infty$ の特性は、 $f_{c\infty} = 1, f_{s\infty} = i(a+b/2)/z$ となる。

同様に、 $f_{c'} = df_c/dH \cdot dH/dz = -f_s \cdot H', f_{s'} = df_s/dH \cdot dH/dz = f_c \cdot H'$ となる。よって、 $f_{c'}$ および $f_{s'}$ の $z \rightarrow \infty$ の特性は

$f_{c'\infty} = -(a+b/2)^2/z^3, f_{s'\infty} = -i(a+b/2)/z^2$ となる。

以上の結果を表-3.1 開口条件を満足する基本解 に代入することにより、 z に関する次数が決定され無限遠点における状況が決定される。

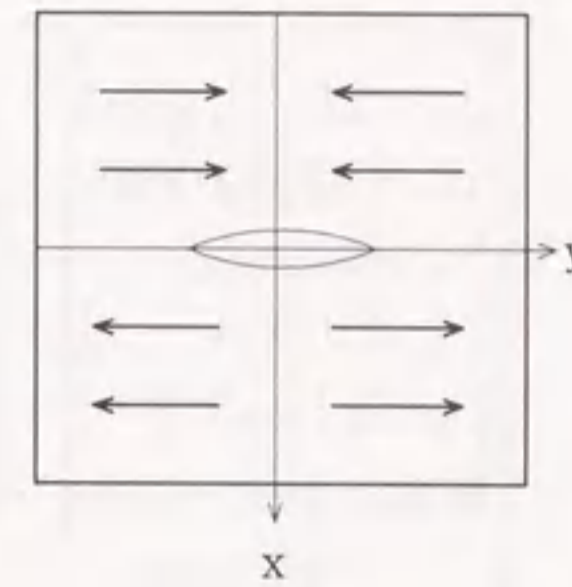
表-3.1 開口条件を満足する基本解

基本解	ϕ	ϕ or ϕ'
その1	$\phi_1 = f_c$	$\phi_1 = z f_c$
その2	$\phi_2 = f_s$	$\phi_2 = z f_s$
その3	$\phi_3 = i f_c$	$\phi_3' = i(z f_c' - f_c)$
その4	$\phi_4 = i f_s$	$\phi_4' = i(z f_s' - f_s)$
その5	$\phi_5 = i z f_c$	$\phi_5 = i z^2 f_c$
その6	$\phi_6 = i z f_s$	$\phi_6 = i z^2 f_s$
その7	$\phi_7 = z f_c$	$\phi_7' = z^2 f_c'$
その8	$\phi_8 = z f_s$	$\phi_8' = z^2 f_s'$
その9	$\phi_9 = z^2 f_c$	$\phi_9 = z^3 f_c$
その10	$\phi_{10} = z^2 f_s$	$\phi_{10} = z^3 f_s$
その11	$\phi_{11} = i z^2 f_c$	$\phi_{11}' = i(z^2 f_c' + z^3 f_c')$
その12	$\phi_{12} = i z^2 f_s$	$\phi_{12}' = i(z^2 f_s' + z^3 f_s')$

表-3.2 面内力分布による基本解の分類

面内力の種類	対応する基本解		
y 軸曲げ	(その1)	(その6)	(その9)
せん断	(その2)	(その5)	(その10)
x 軸曲げ	(その3)	(その8)	(その11)
引張り	(その4)	(その7)	(その12)

y 軸曲げ



$$W = \bar{z}\phi_1 + \phi_1$$

$$\phi_1 = f_c$$

$$\phi_1 = z f_c$$

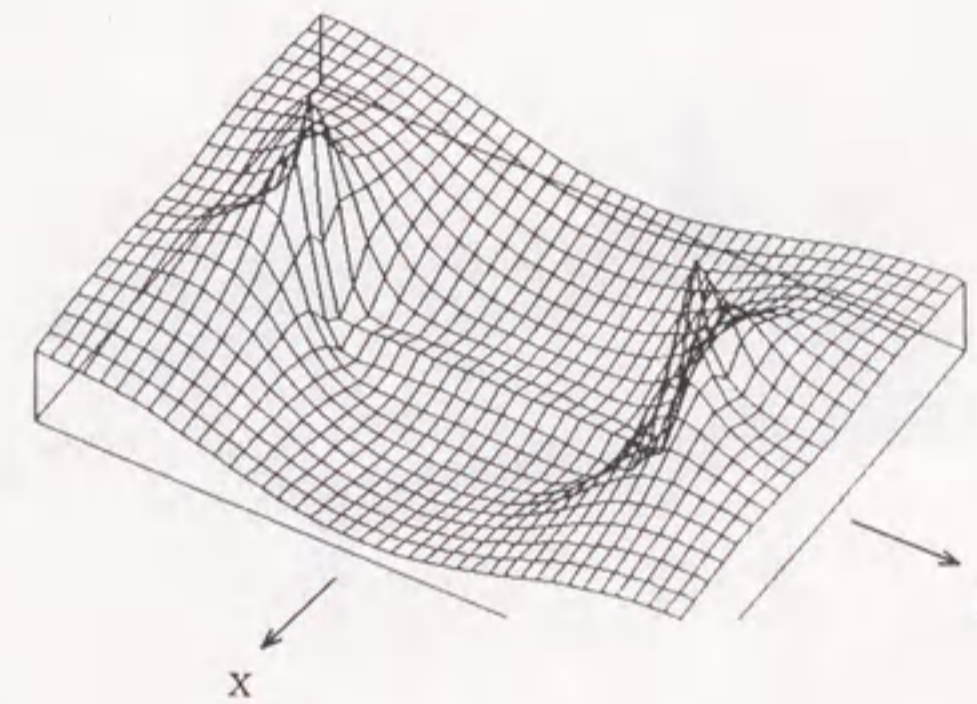
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

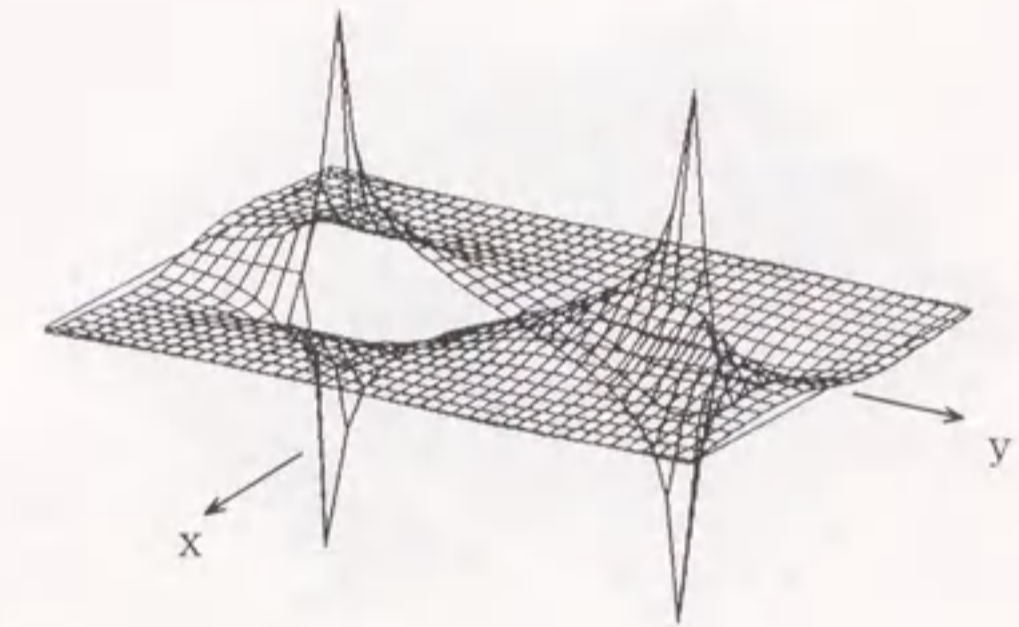
$$a = 1 \text{ cm}$$

$$b = 0.3 \text{ cm}$$

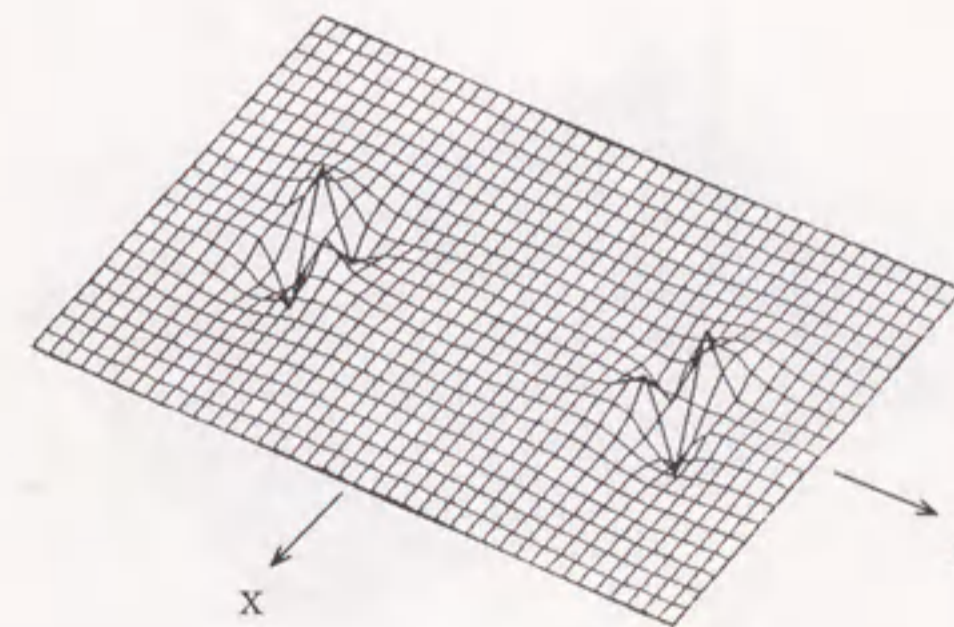
領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$



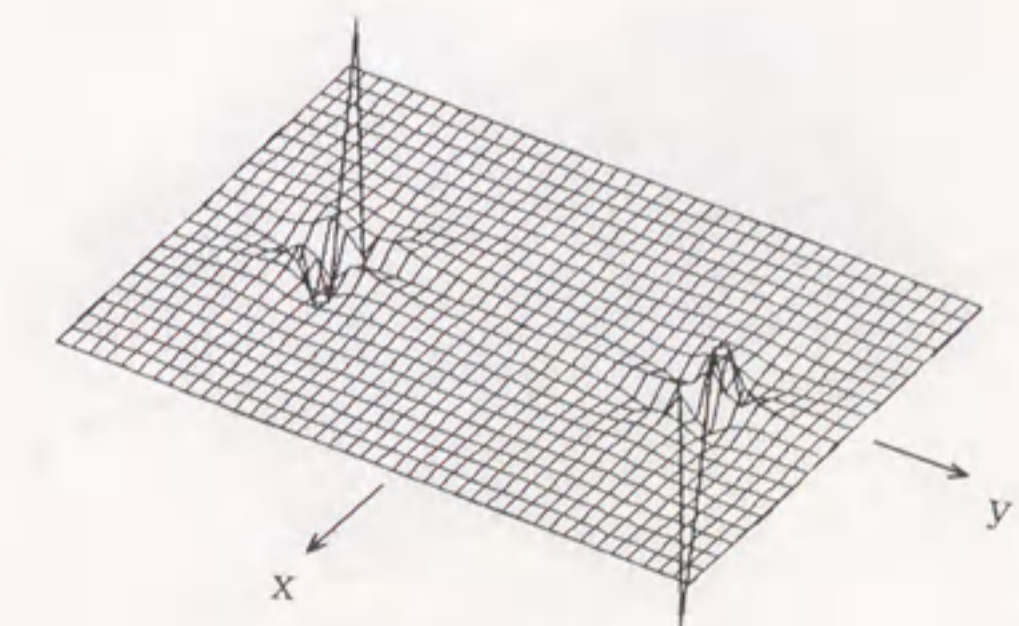
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.1 平滑化された基本解(その1)

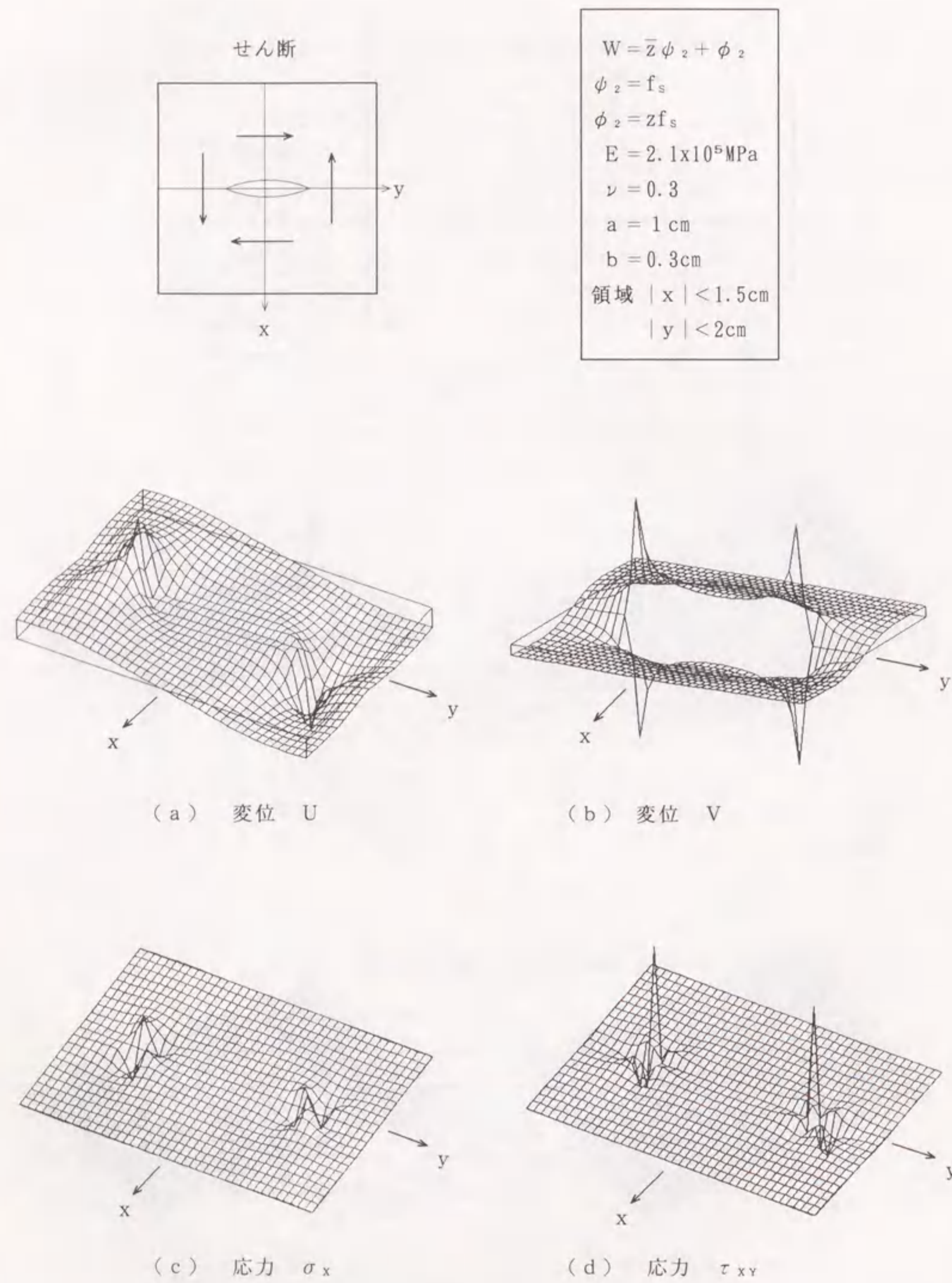


図-3.2 平滑化された基本解 (その2)

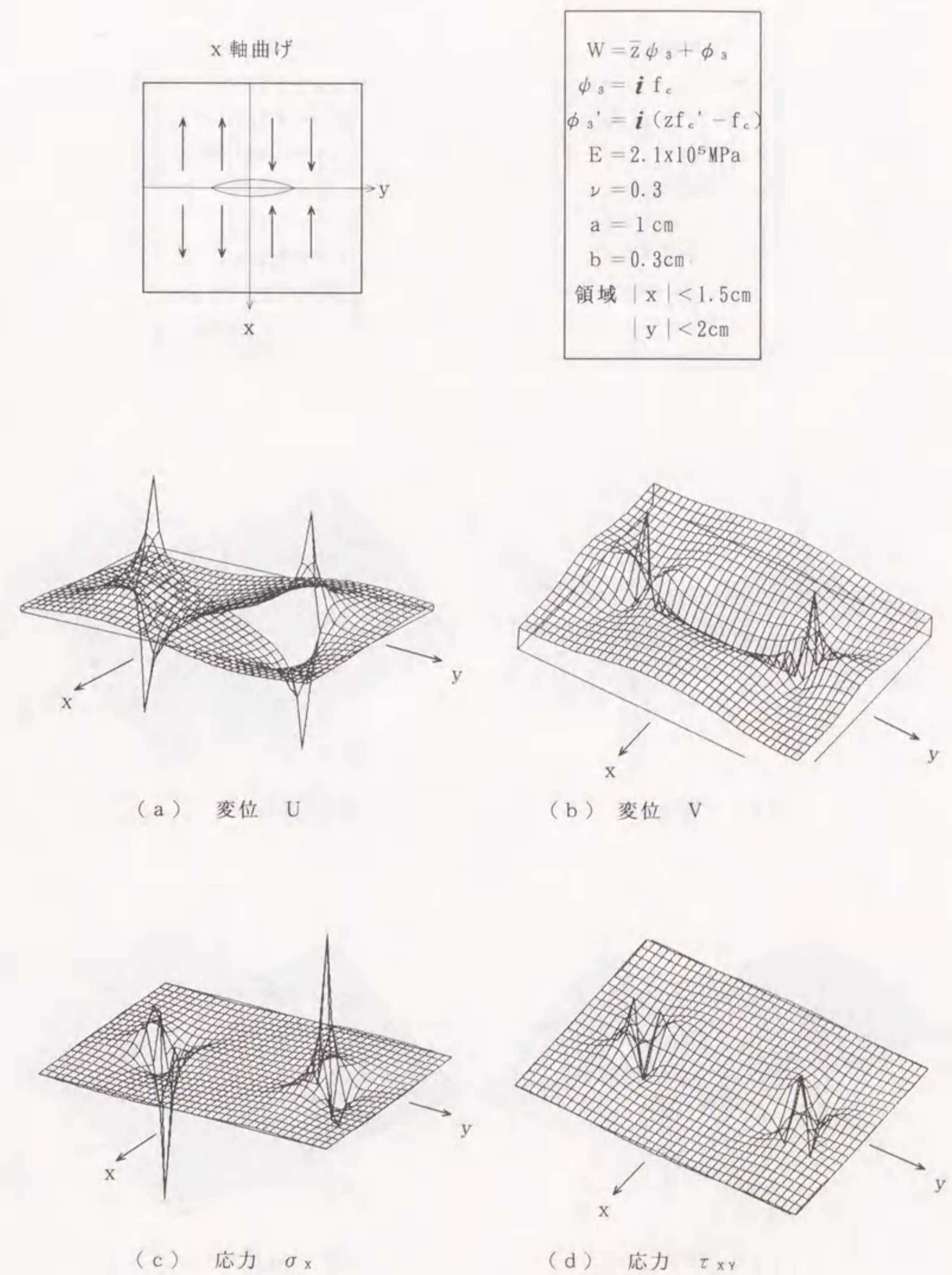
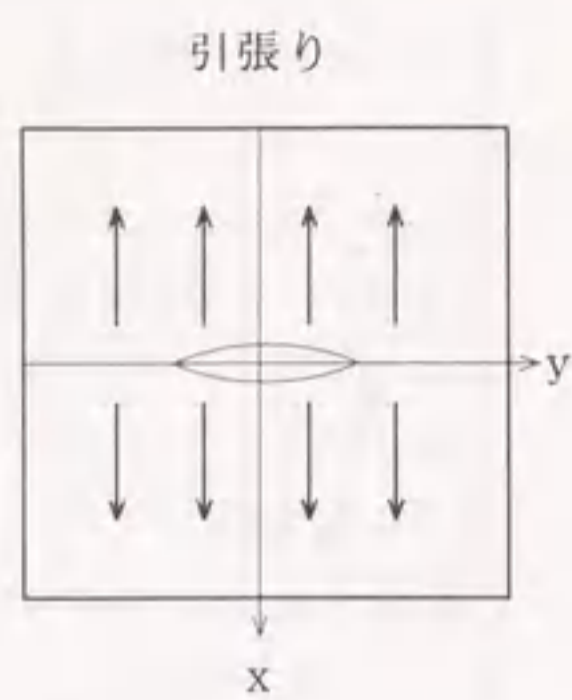


図-3.3 平滑化された基本解 (その3)



$$W = \bar{z}\phi_4 + \phi_4$$

$$\phi_4 = i f_s$$

$$\phi_4' = i (z f_s' - f_s)$$

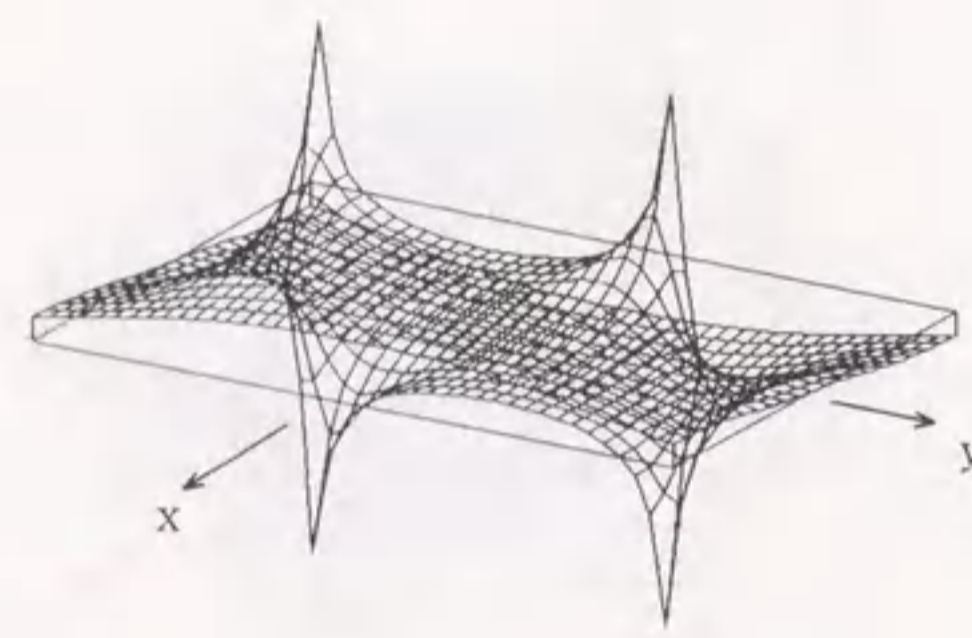
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

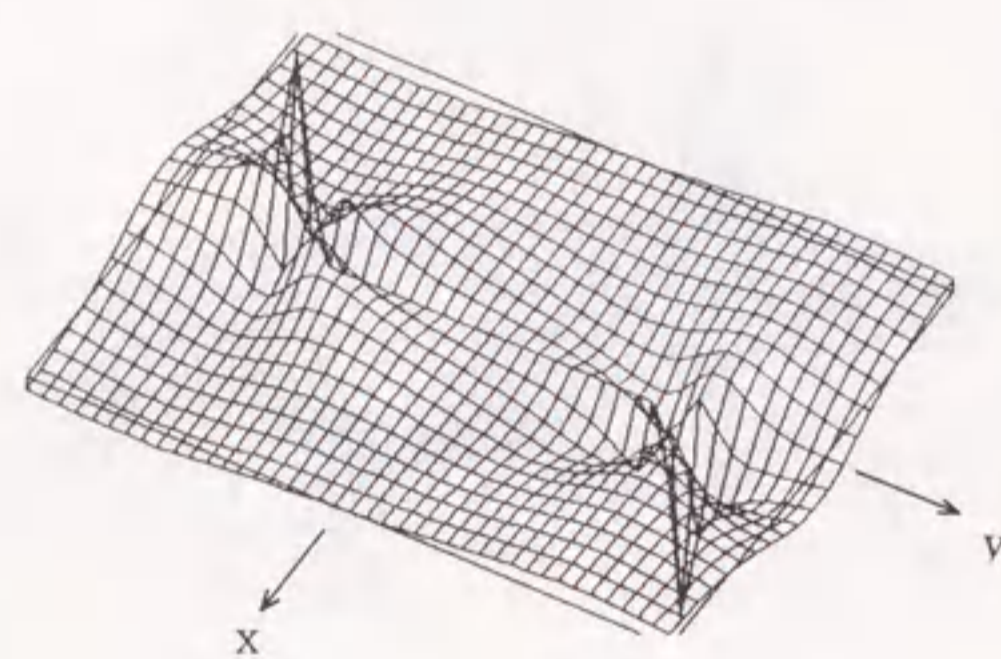
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

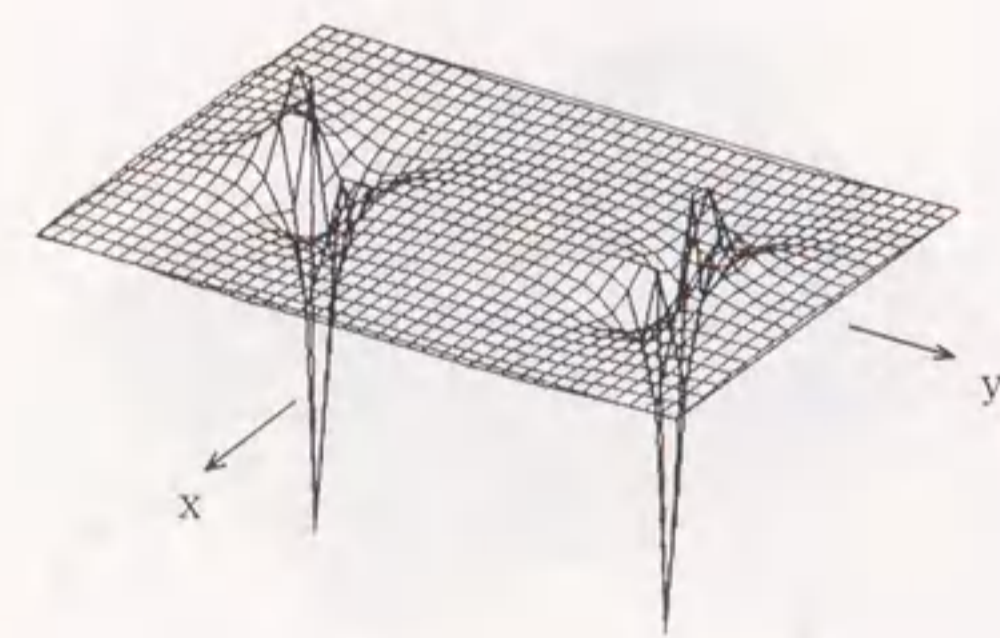
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



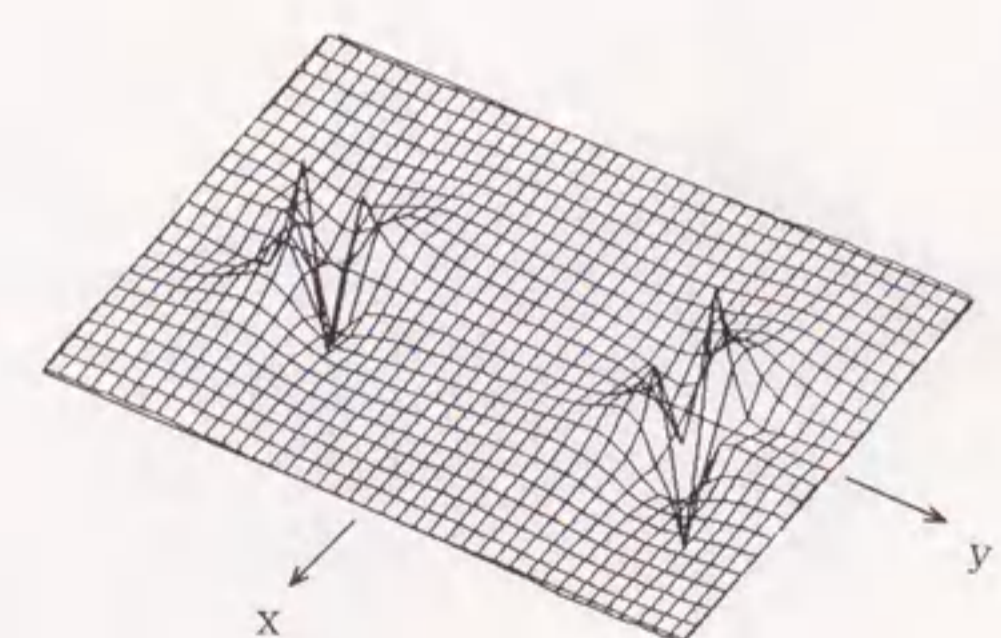
(a) 変位 U



(b) 変位 V

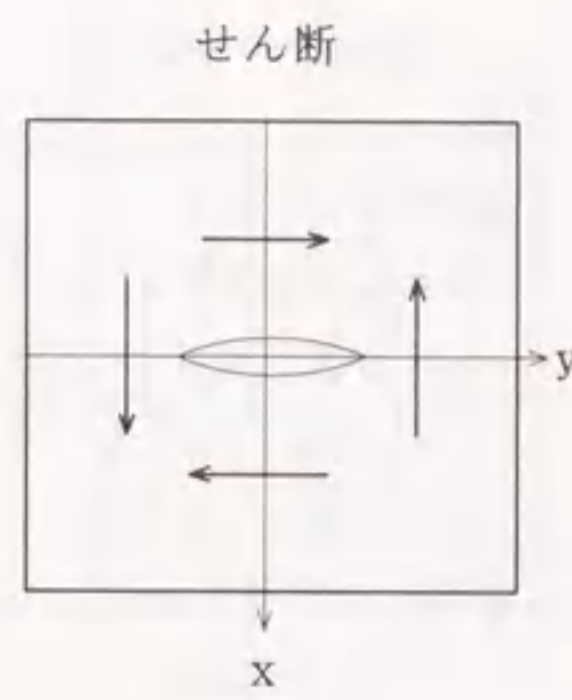


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.4 平滑化された基本解 (その4)



$$W = \bar{z}\phi_5 + \phi_5$$

$$\phi_5 = i z f_c$$

$$\phi_5' = i z^2 f_c$$

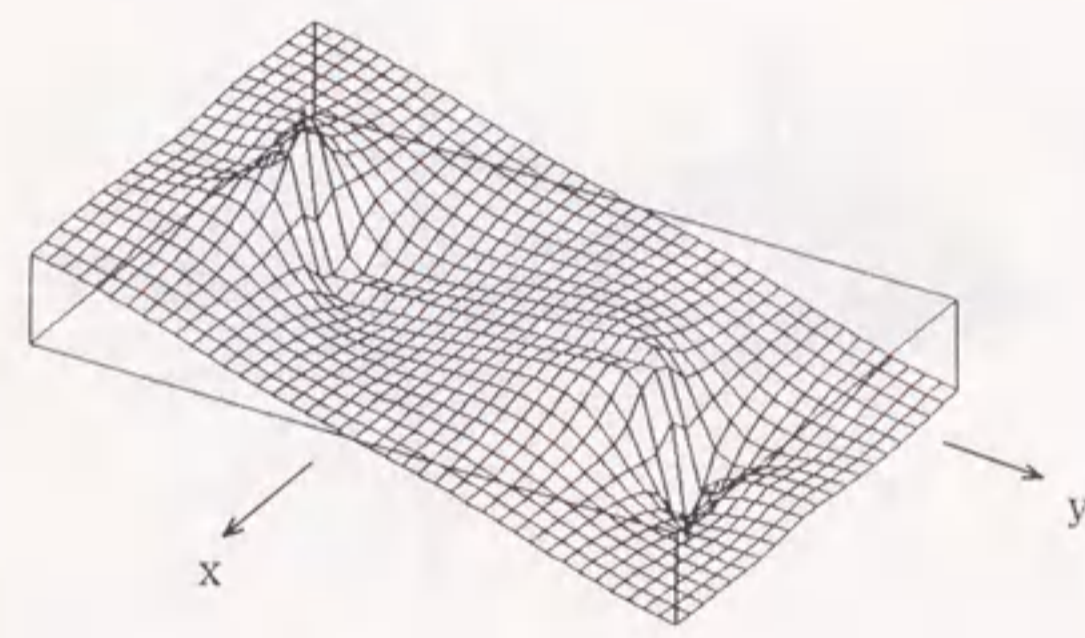
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

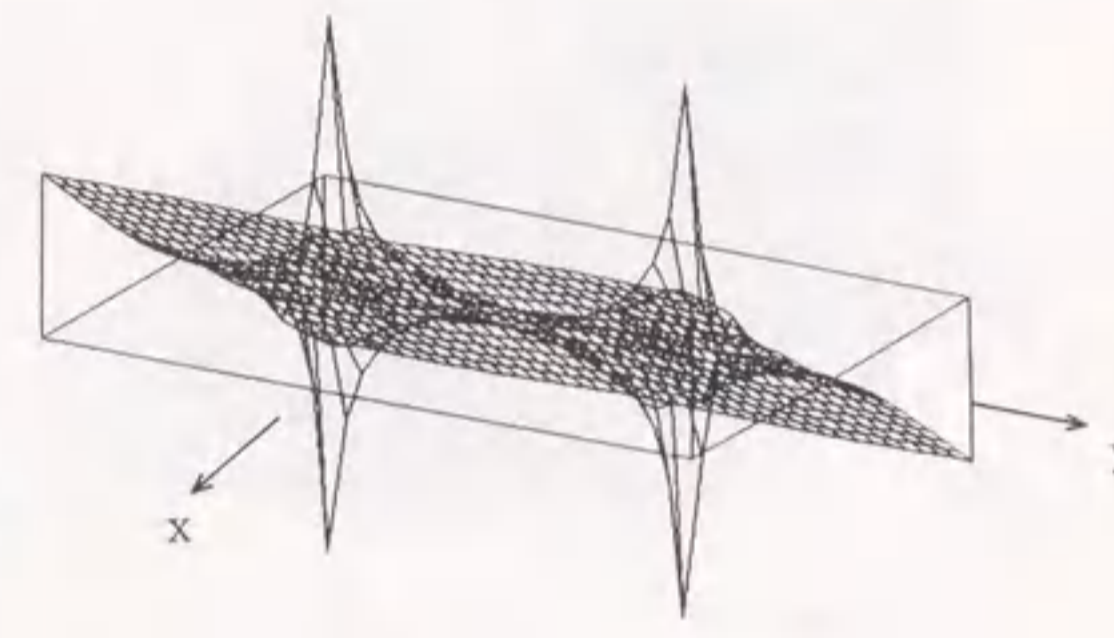
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

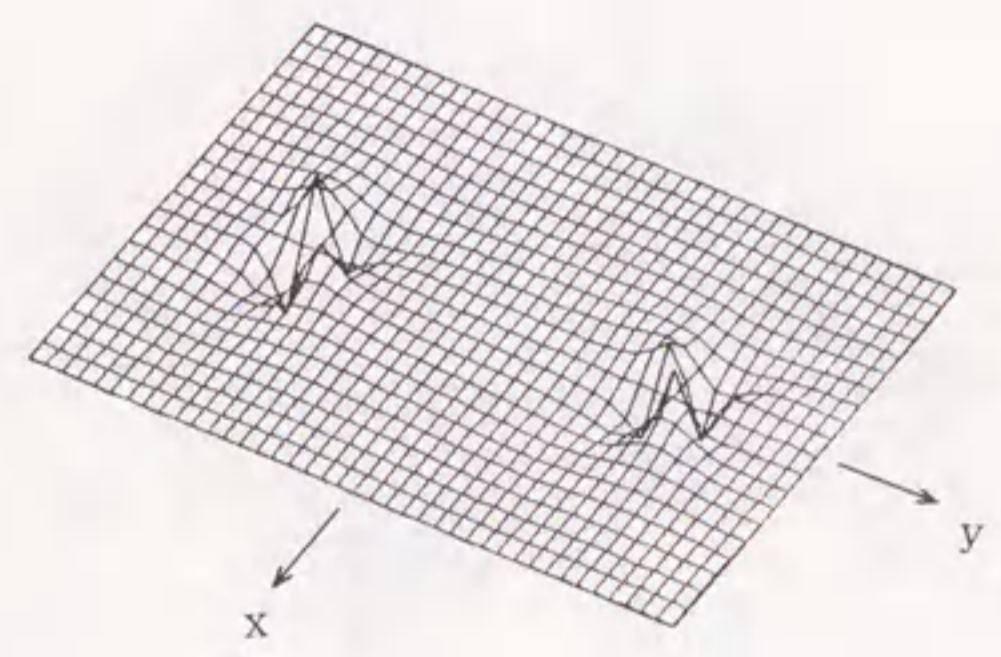
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



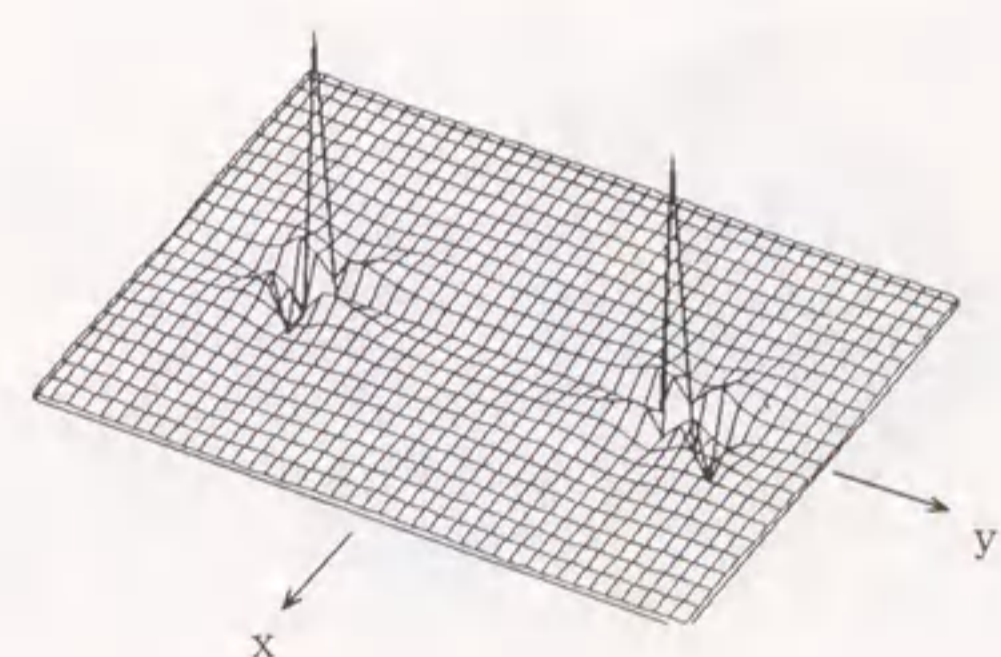
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.5 平滑化された基本解 (その5)

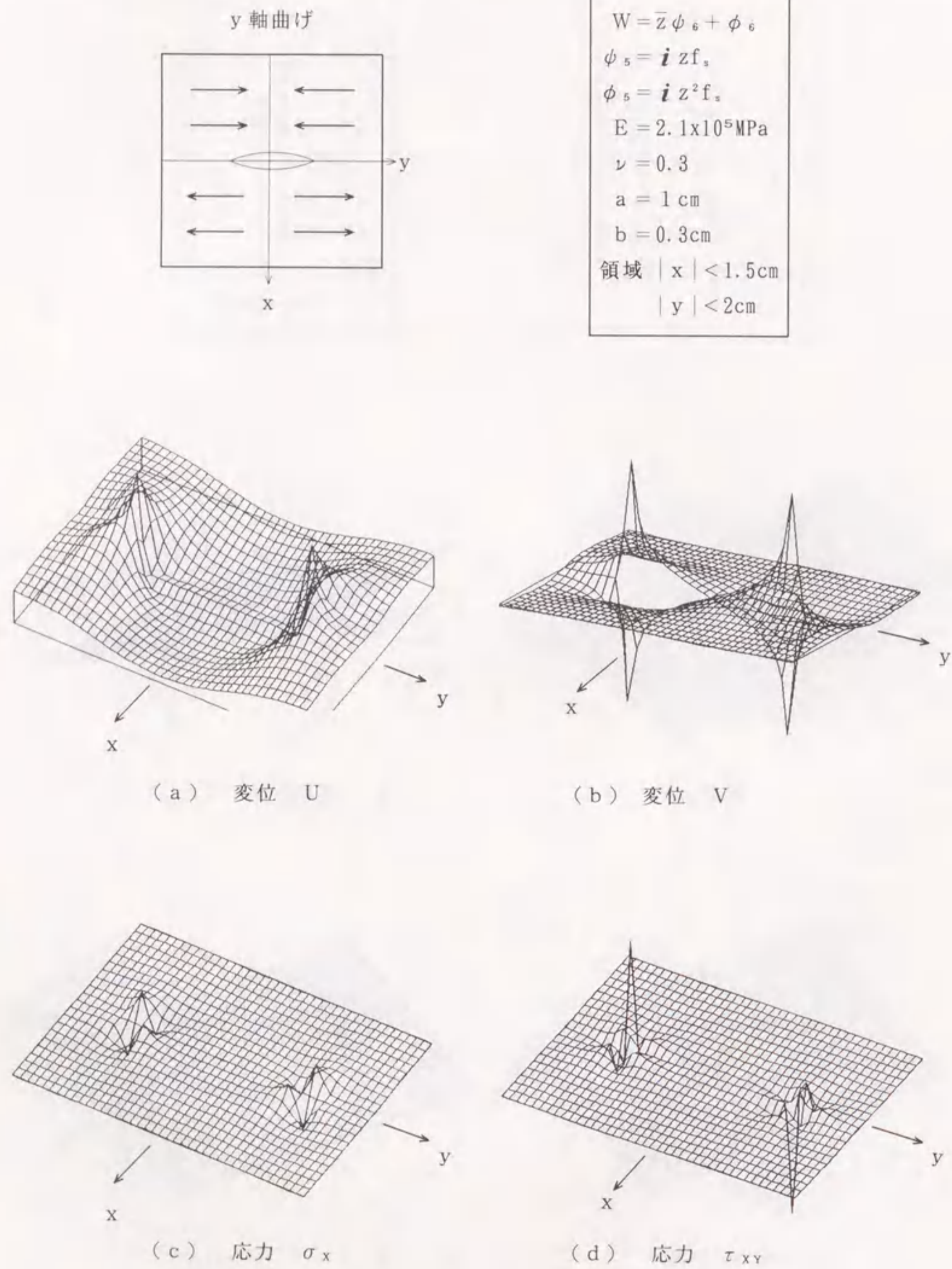


図-3.6 平滑化された基本解 (その6)

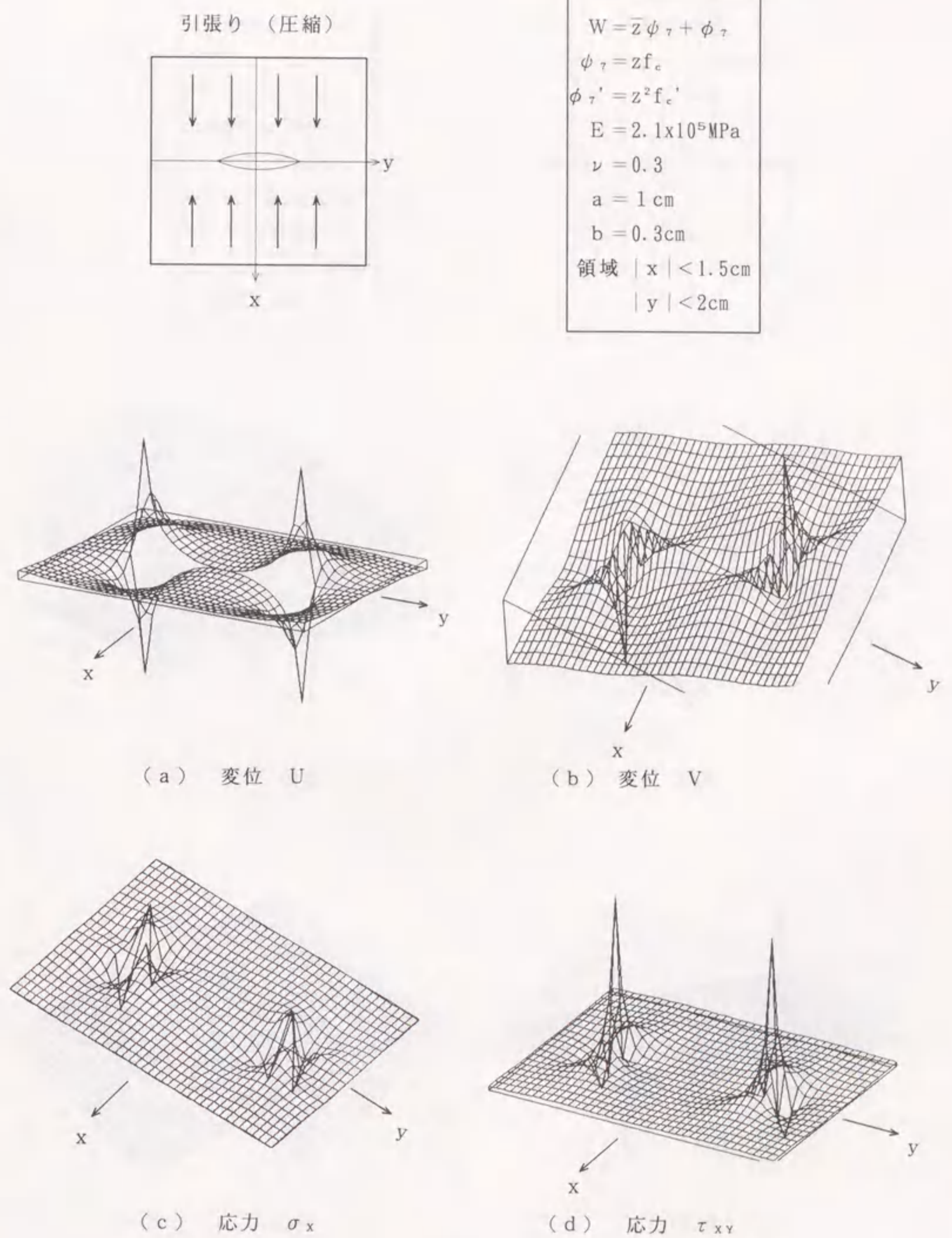
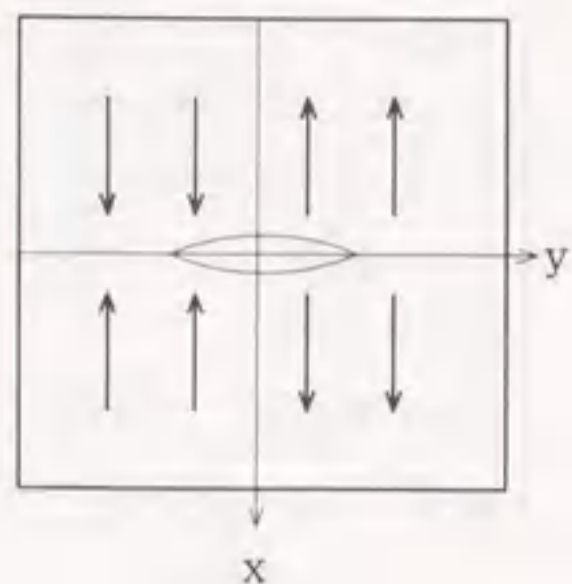


図-3.7 平滑化された基本解 (その7)

x 軸曲げ



$$W = \bar{z}\phi_s + \phi_s$$

$$\phi_s = zf_s$$

$$\phi_s' = z^2 f_s'$$

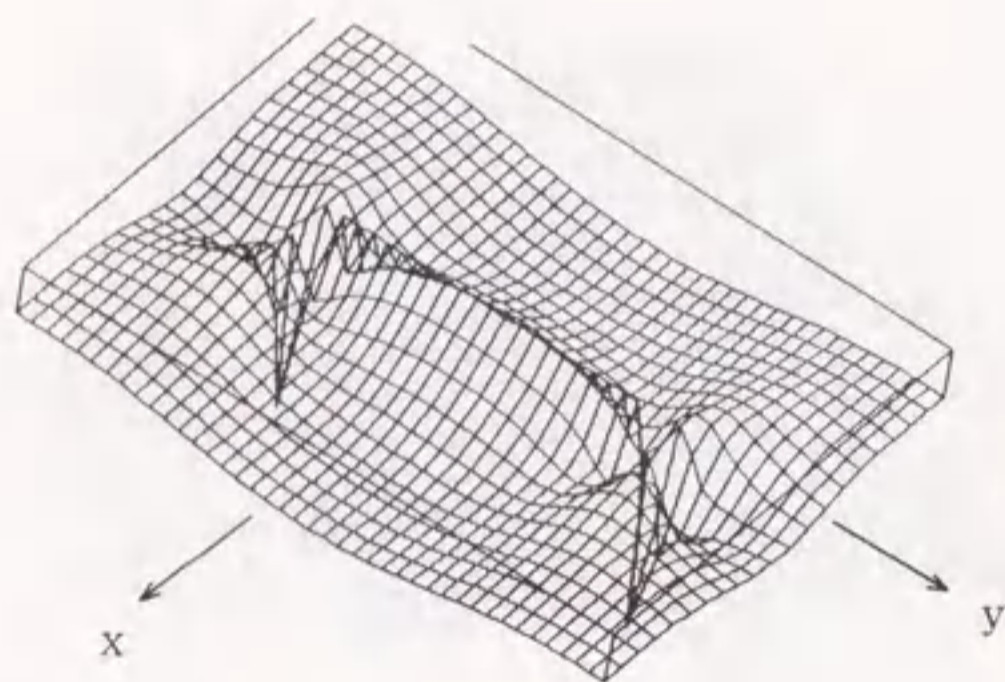
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

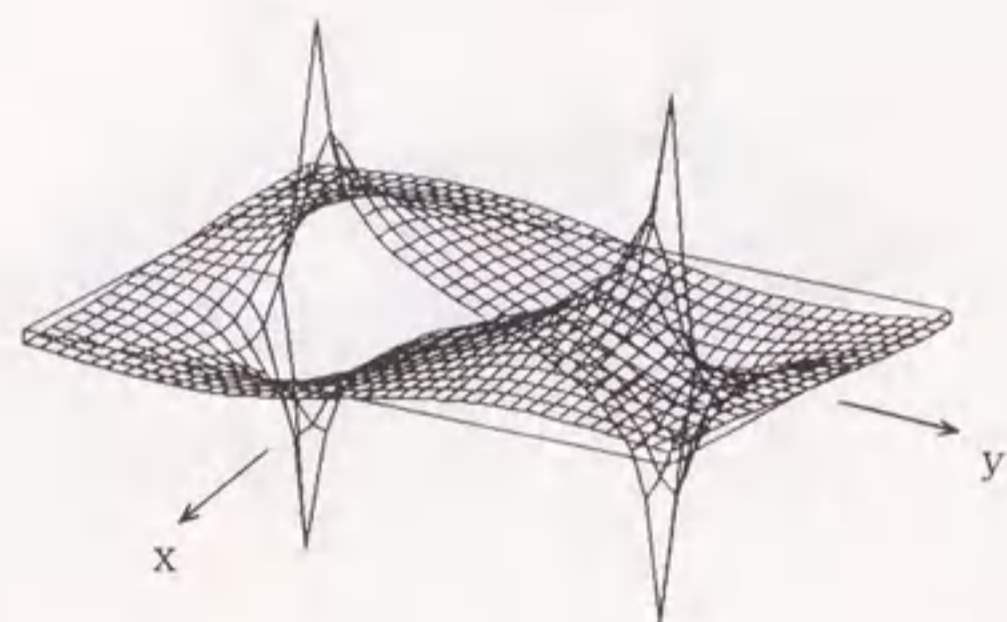
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

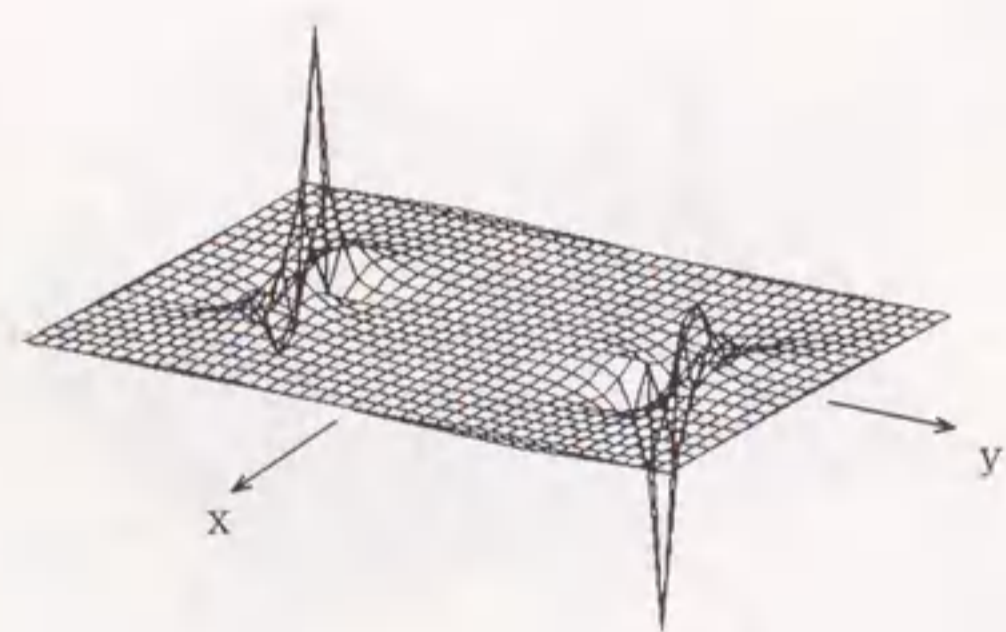
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



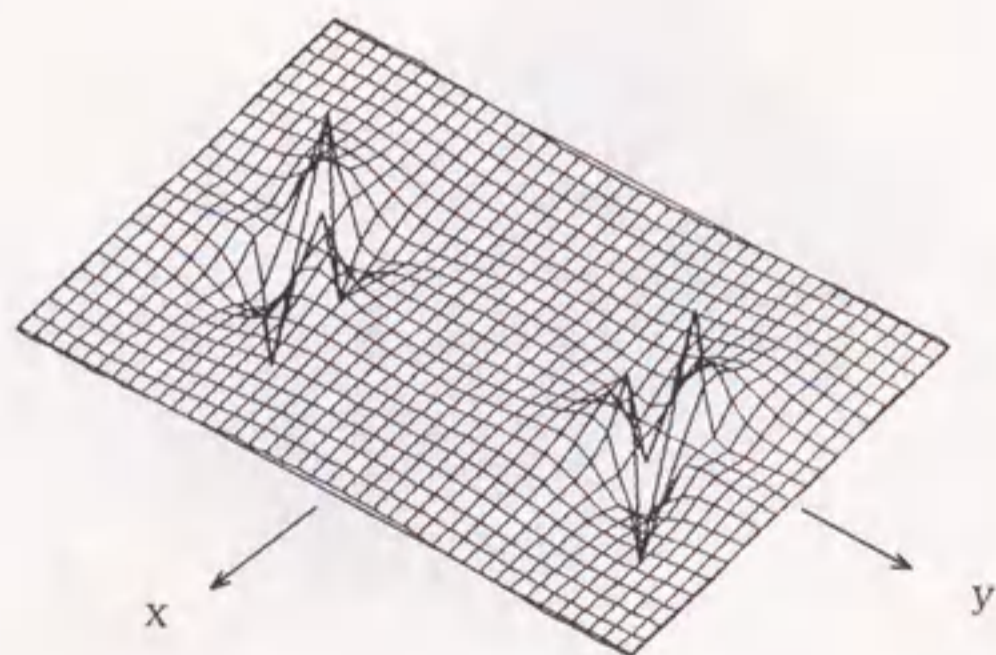
(a) 変位 U



(b) 変位 V



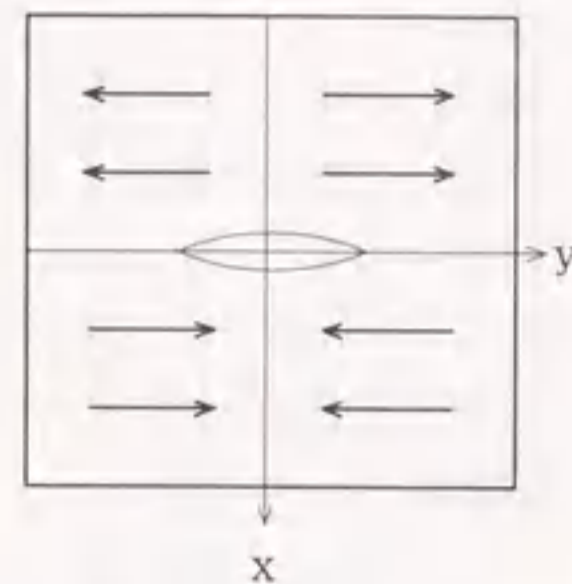
(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.8 平滑化された基本解 (その8)

y 軸曲げ



$$W = \bar{z}\phi_o + \phi_o$$

$$\phi_o = z^2 f_o$$

$$\phi_o' = z^3 f_o'$$

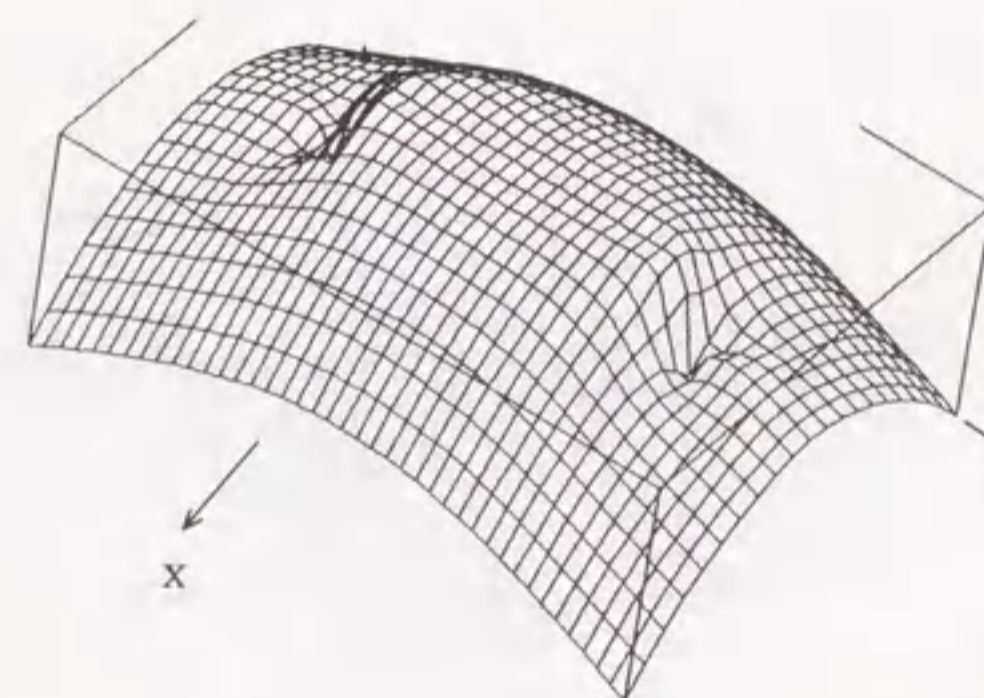
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

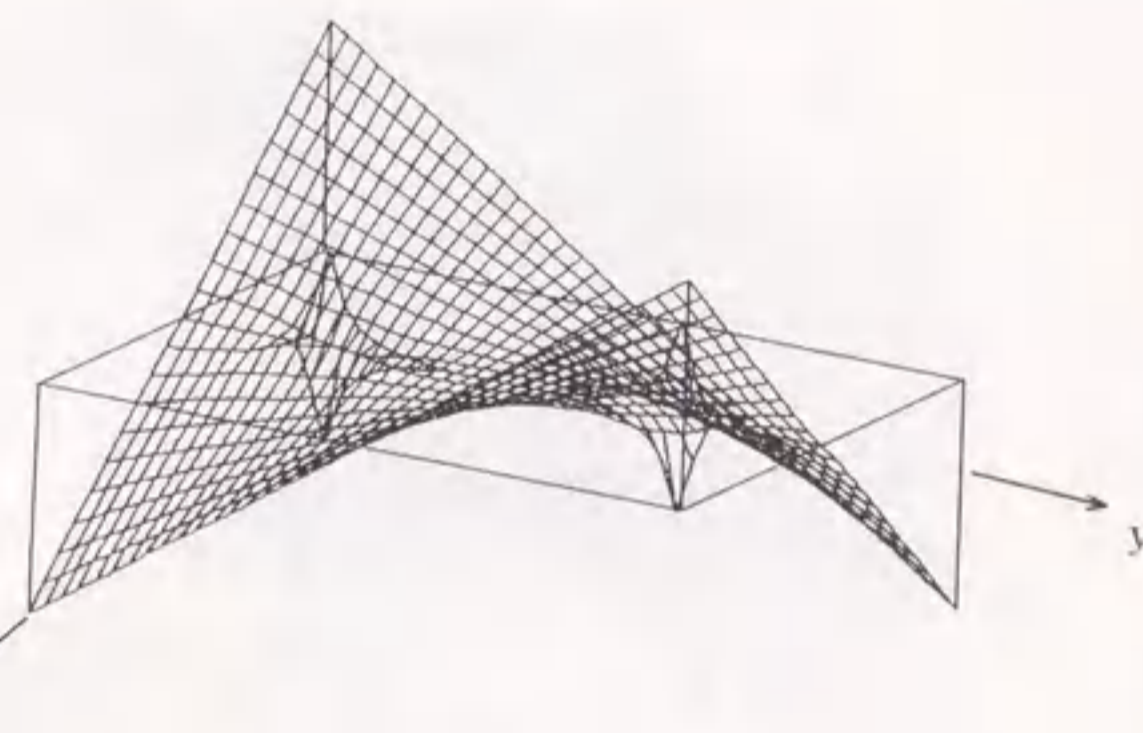
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

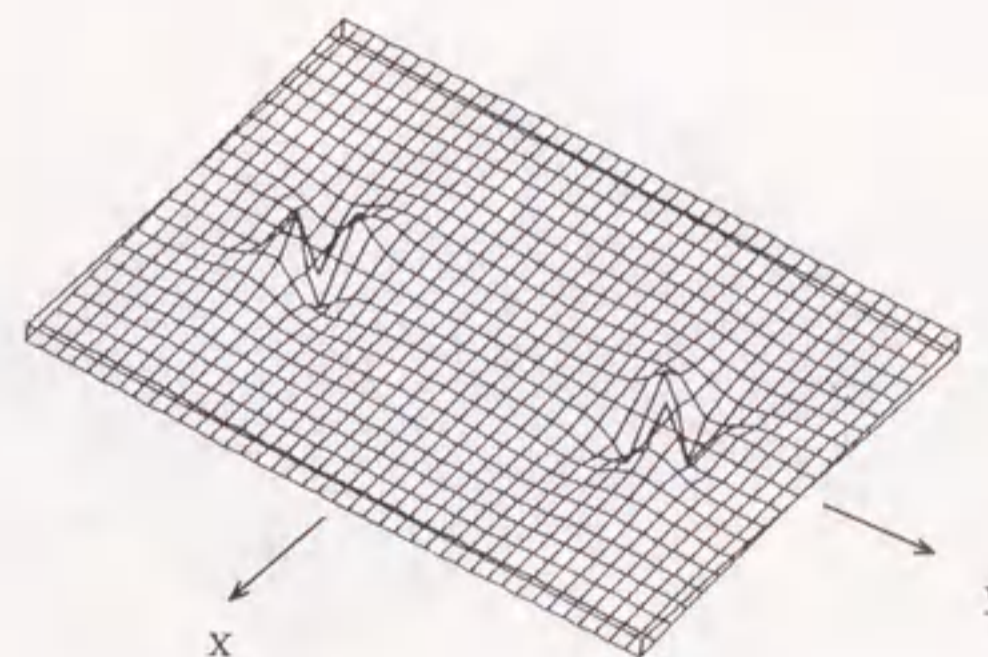
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



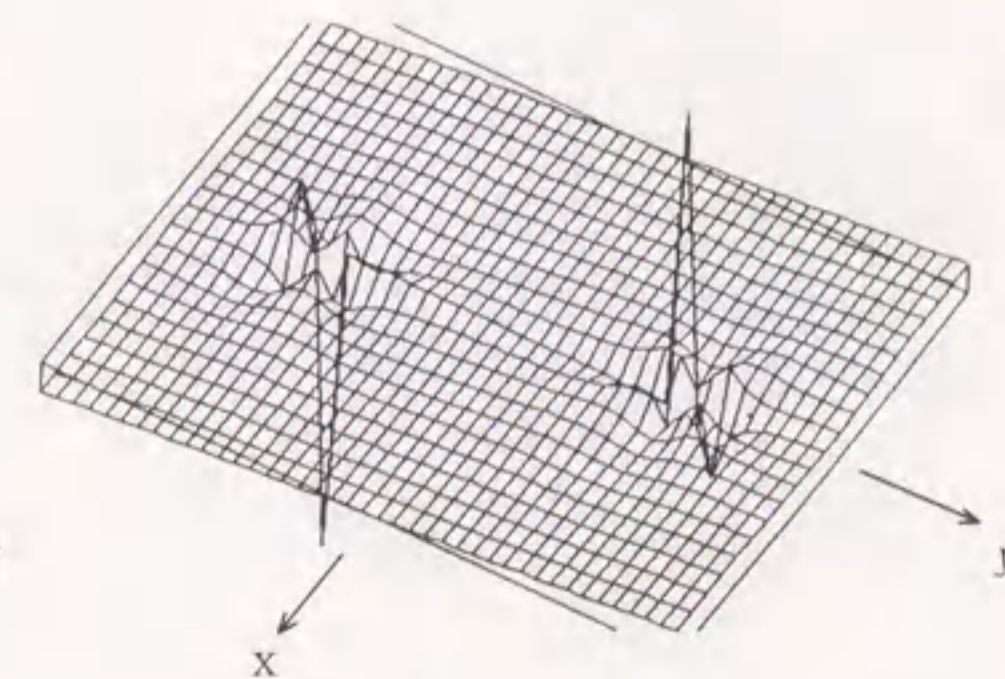
(a) 変位 U



(b) 変位 V

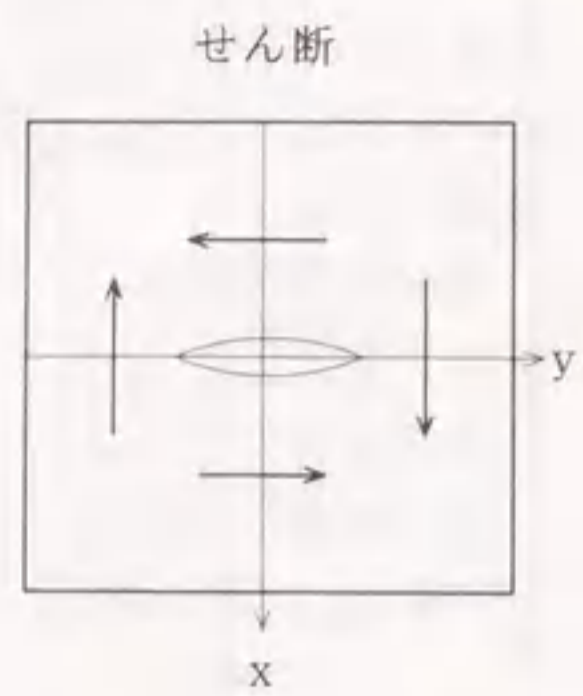


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.9 平滑化された基本解 (その9)



$$W = \bar{z}\phi_{10} + \phi_{10}$$

$$\phi_{10} = z^2 f_s$$

$$\phi_{10} = z^3 f_s$$

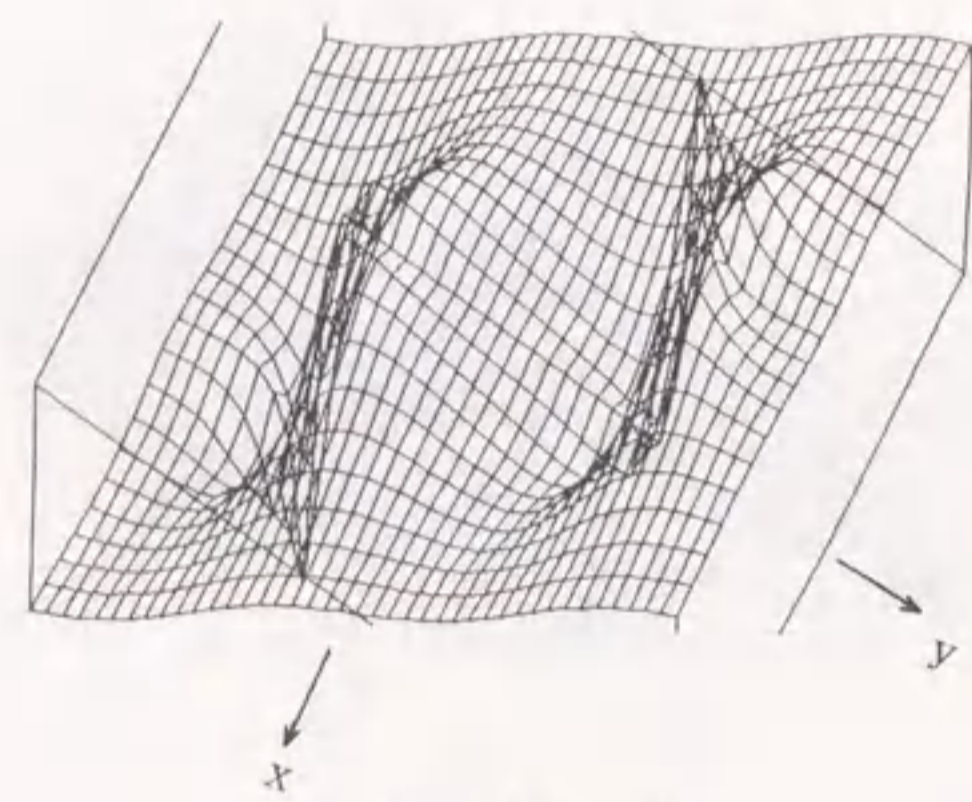
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

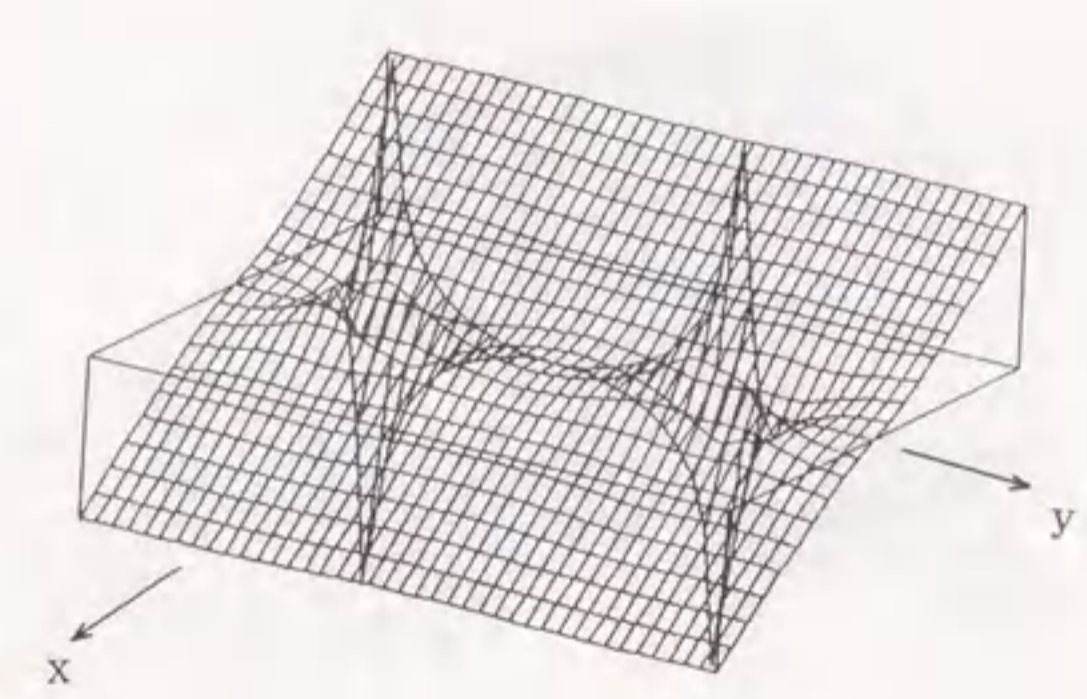
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

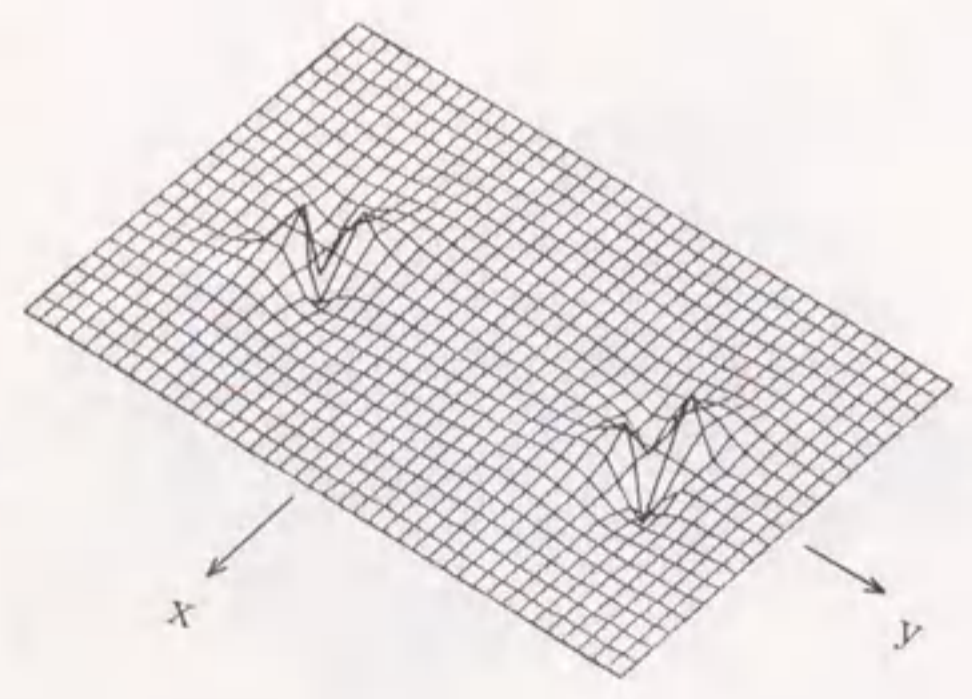
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



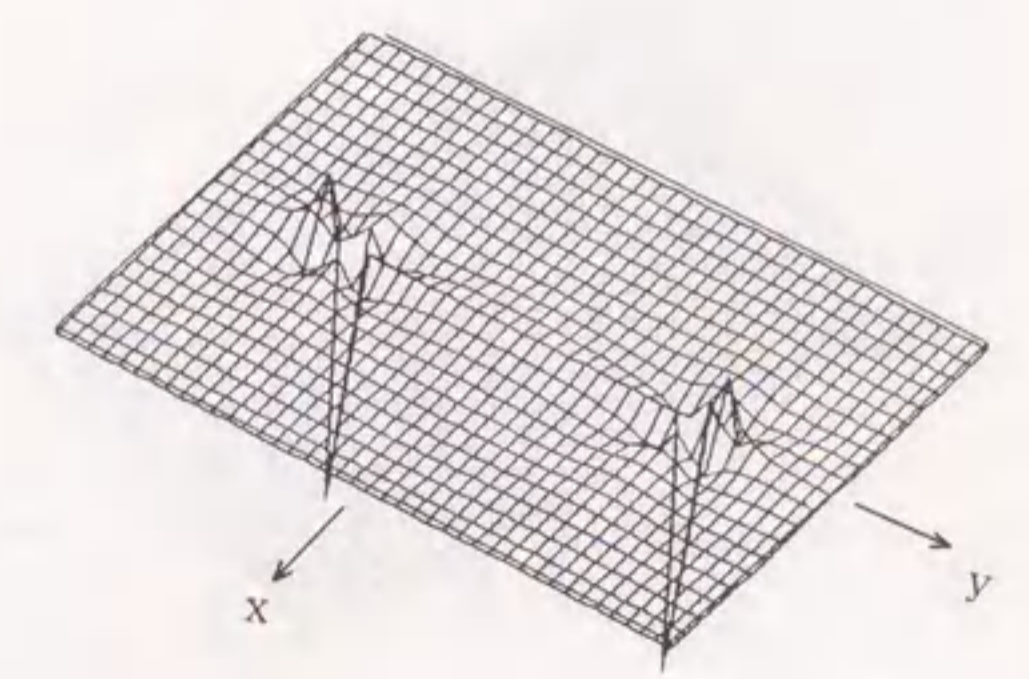
(a) 変位 U



(b) 変位 V

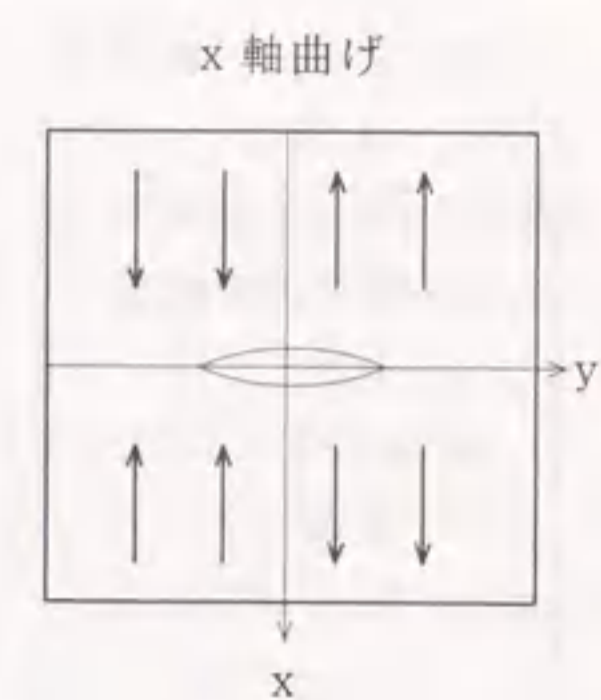


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.10 平滑化された基本解 (その10)



$$W = \bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}$$

$$\phi_{11} = \bar{z} z^2 f_c$$

$$\phi_{11}' = \bar{z} (z^2 f_c + z^3 f_c')$$

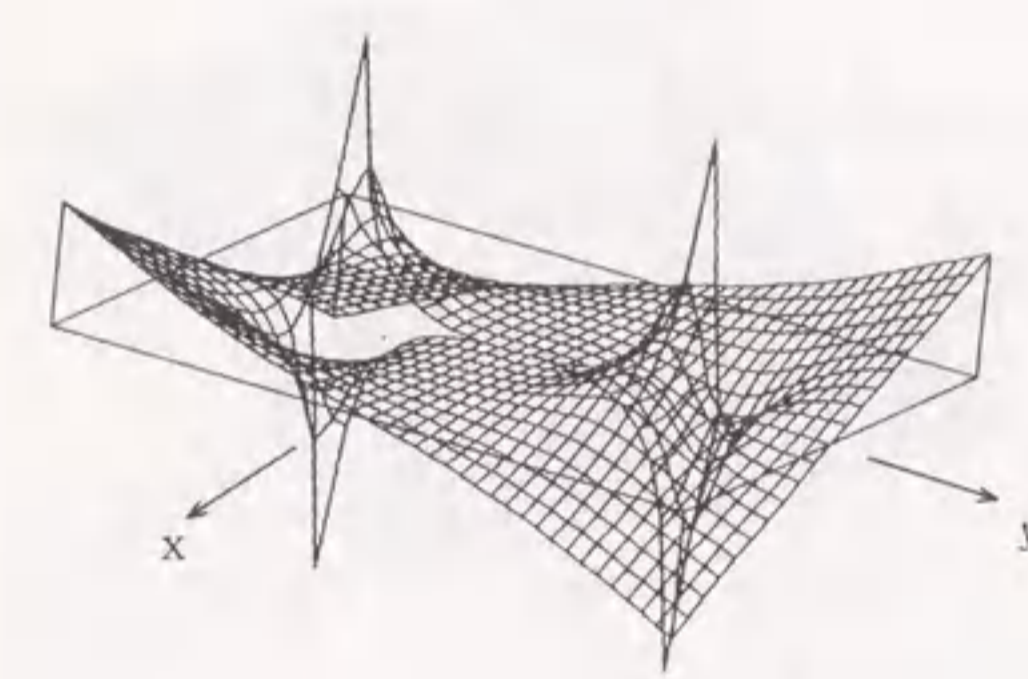
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

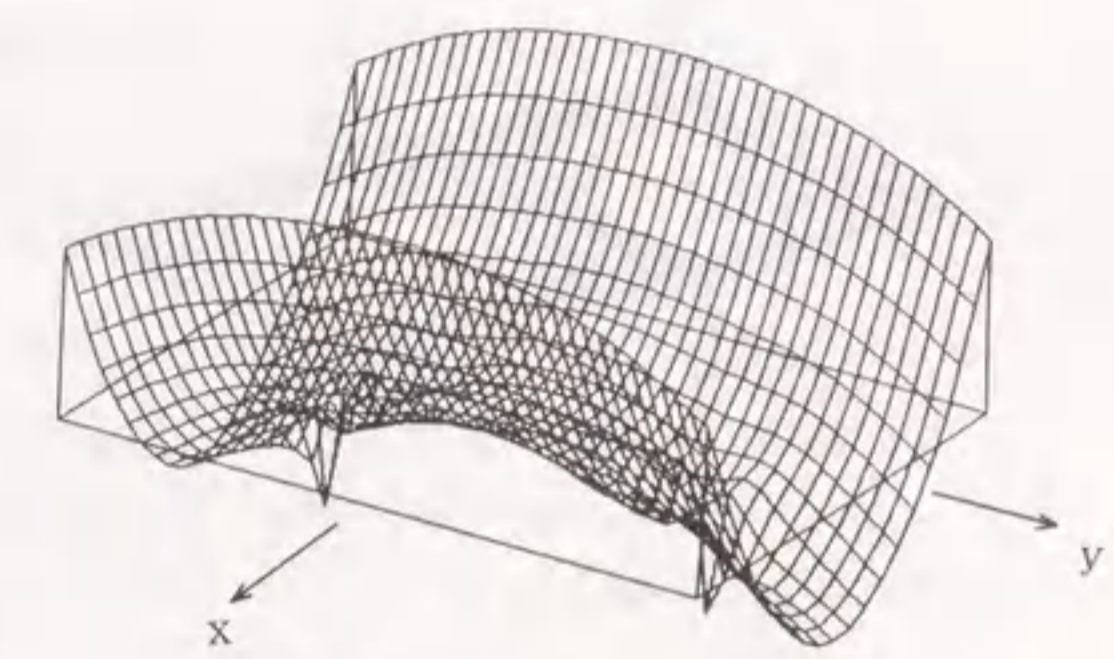
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

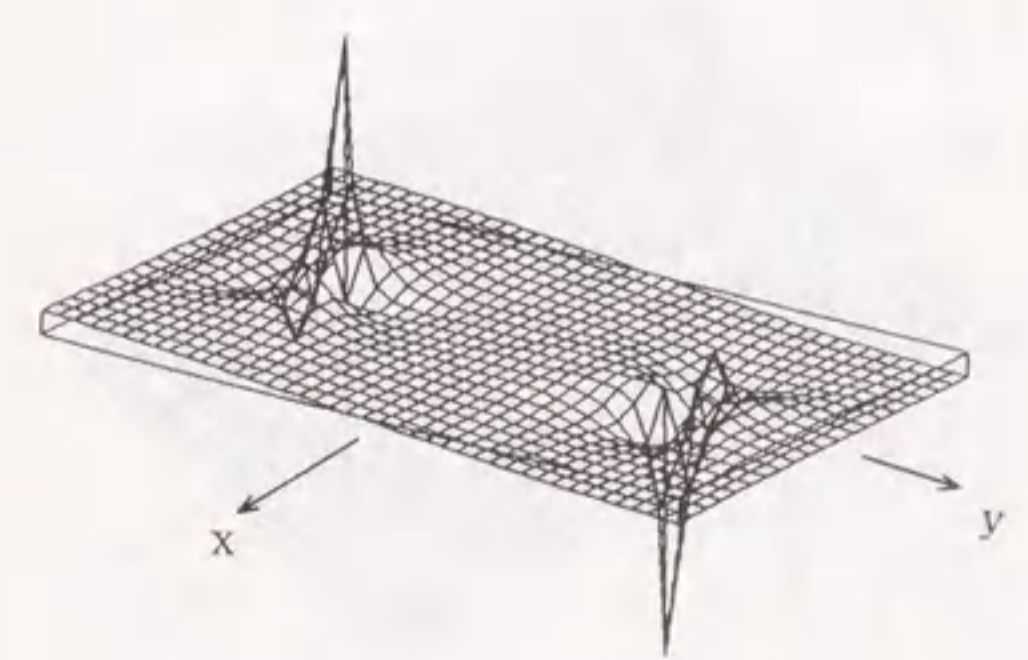
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



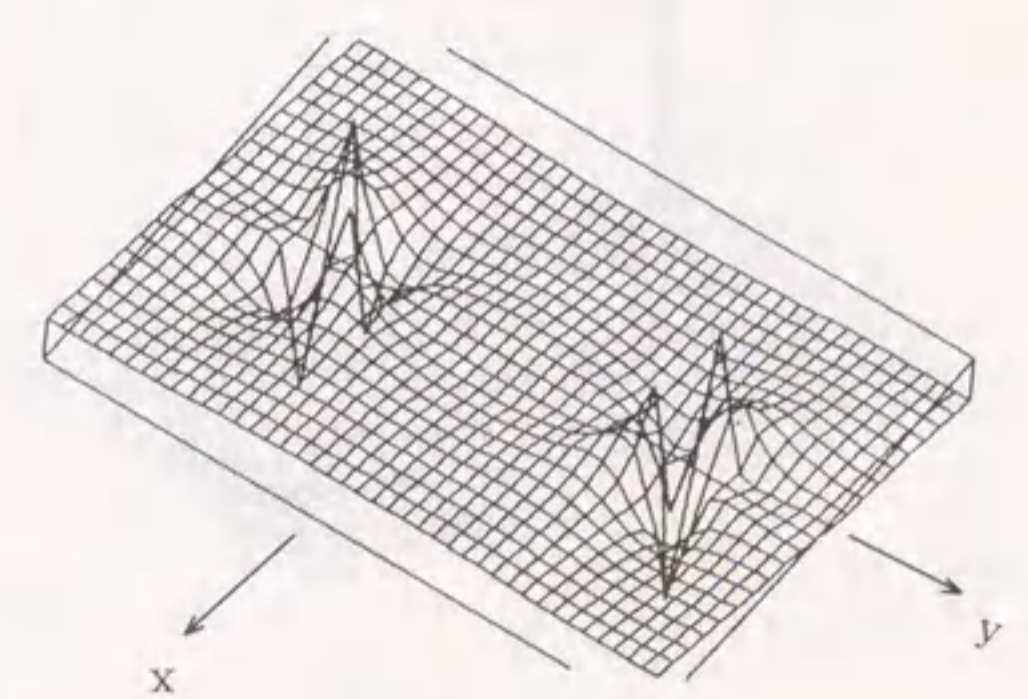
(a) 変位 U



(b) 変位 V



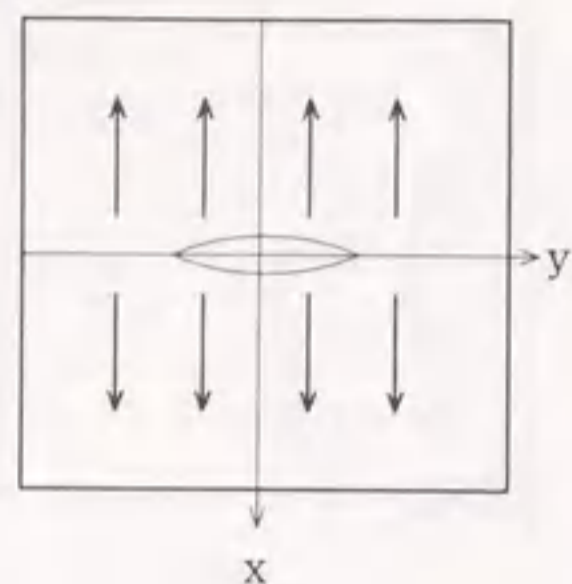
(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.11 平滑化された基本解 (その11)

引張り



$$W = \bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}$$

$$\phi_{12} = i z^2 f_s$$

$$\phi_{12}' = i (z^2 f_s' + z^3 f_s'')$$

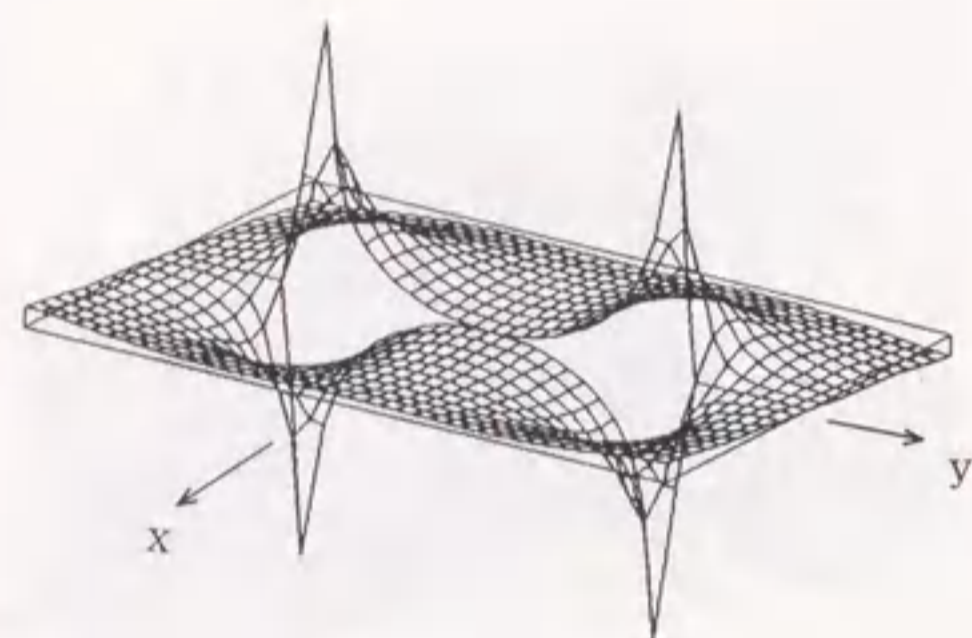
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

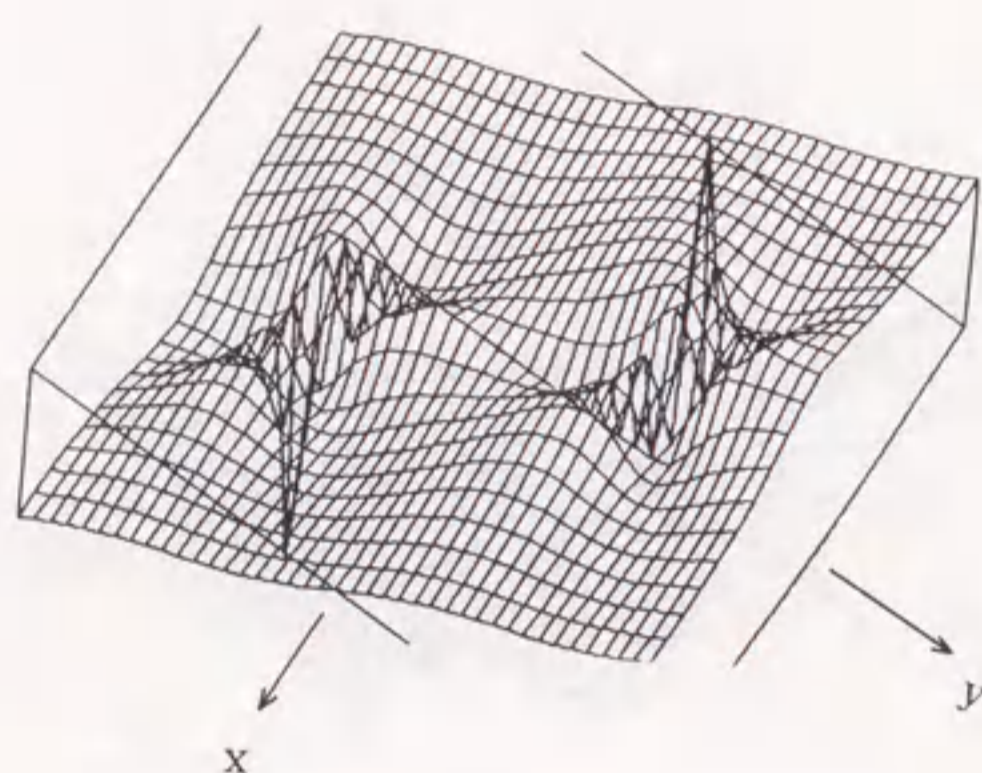
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

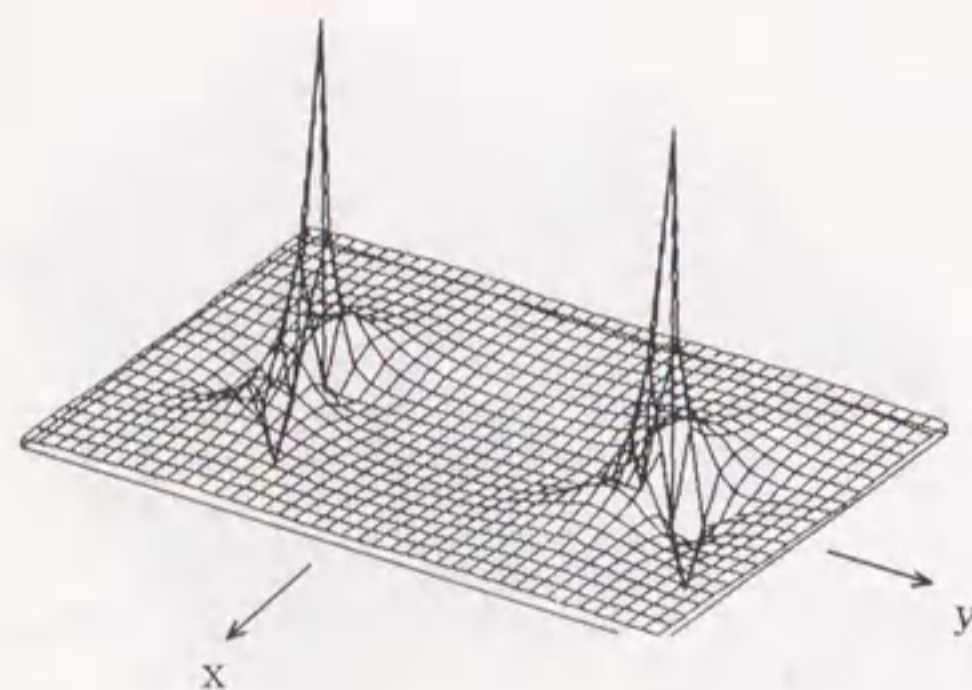
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



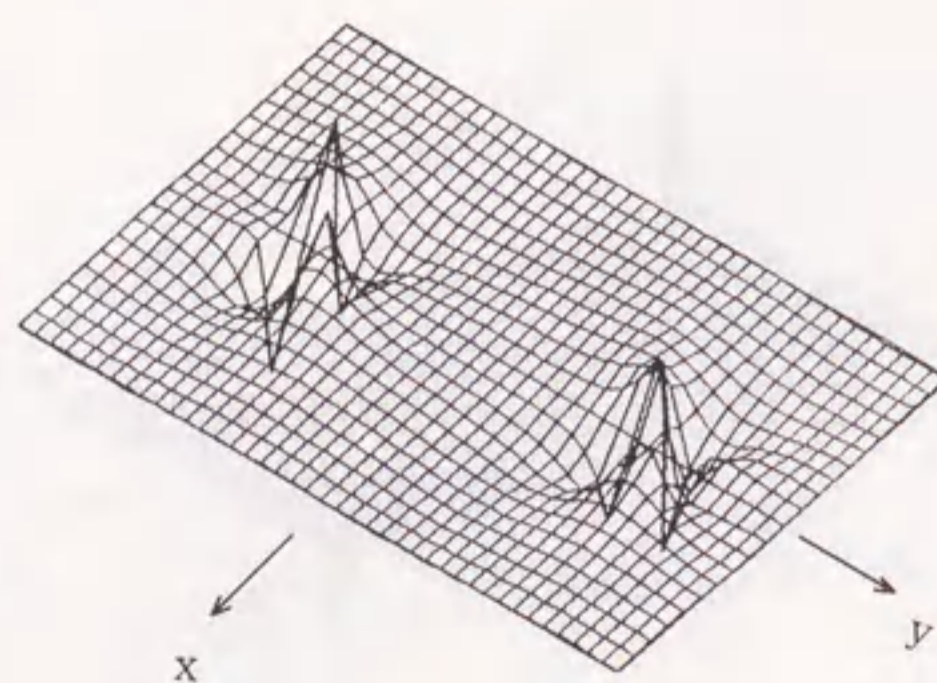
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.12 平滑化された基本解 (その12)

3.3 計算例

ここでは、前節で求めた平滑化された基本解 (その1) ~ (その12) を重ね合わせて滑らかな開口形状を与える応力関数を導いてみる。

(1) 引張りクラックの場合

Westergaard の引張りクラックの解において、 $h(z, a)$ を $H_1(z, a, b)$ によって置換して平滑化した応力関数を導くと次のように変形される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ W &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= D_{12}\phi_{12} + D_4\phi_4 \\ \phi' &= D_{12}\phi_{12}' + D_4\phi_4' \end{aligned} \quad (3-1)$$

よって、平滑化された Westergaard の解は次のように変形される。

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-2)$$

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_4 = 1.0$, $D_{12} = 0.65$ とすると、変位および応力は図-3.13 のような形状となる。この例では、プロセスゾーンに負の応力が現れて不自然であるが、これは Westergaard の解の $i a / \sqrt{z^2 + a^2}$ を $\sinh\{H_4(z, a, b)\}$ で単純に置換したためである。この不自然さを改良するために、(その7) の解も活用して、式(3-2) に重ね合わせると次のようになる。

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-3)$$

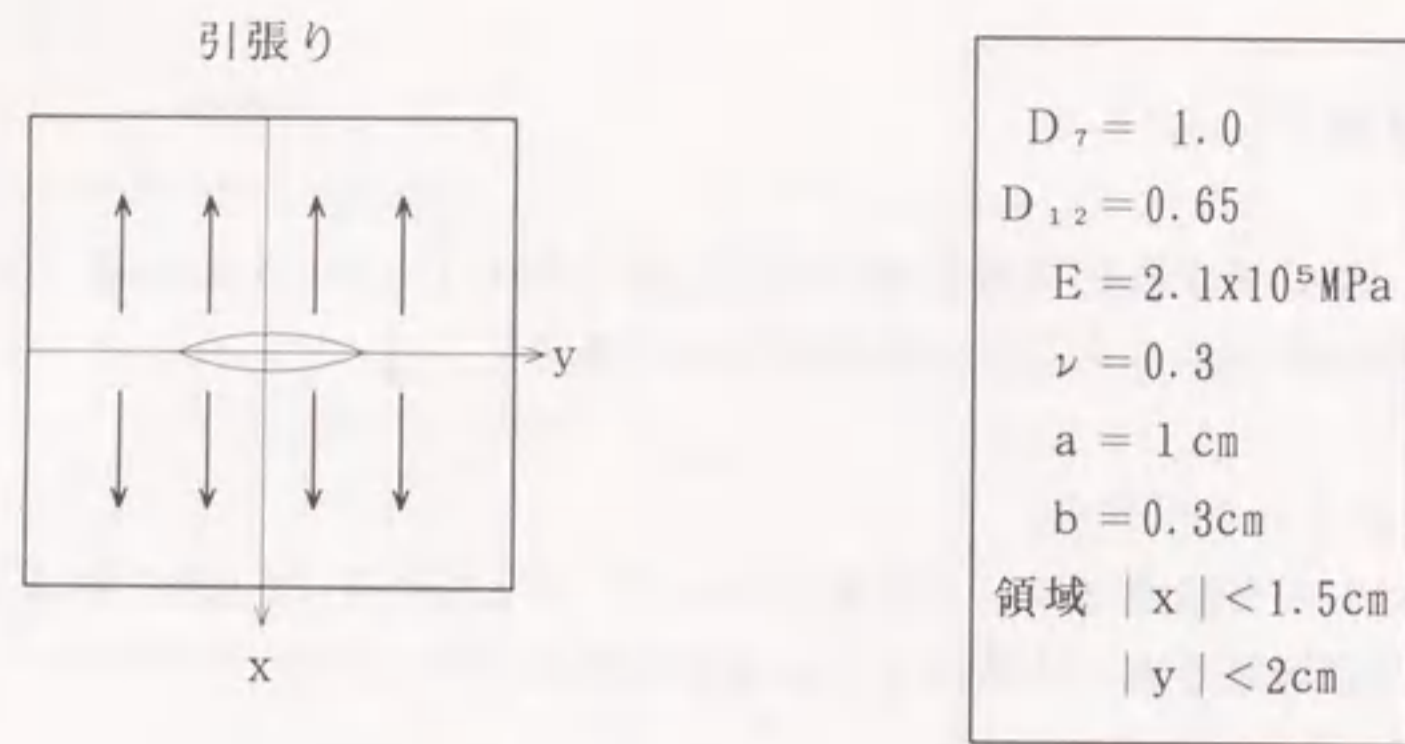
ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_4 = 1.0$, $D_7 = 1.1$, $D_{12} = -0.2$ とすると、応力と変位は図-3.14 のような形状となる。これらは引張りを受ける基本解3個より成るモードIの解として有限な応力と開口を示すものである。

(2) せん断クラックの場合

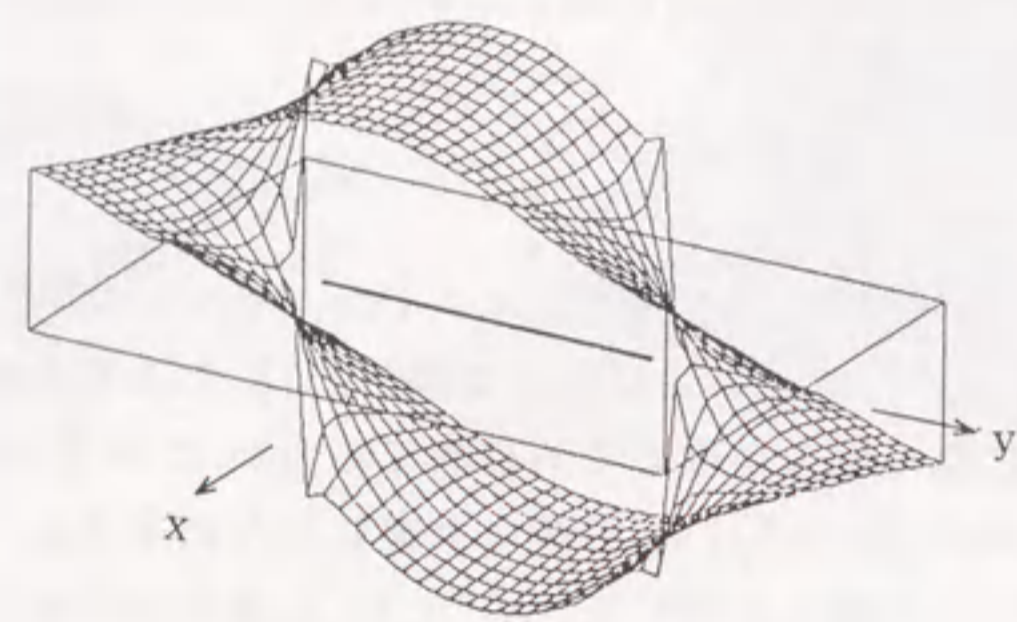
表-3.2 のせん断の組合わせをとり

$$W = D_2(\bar{z}\phi_2 + \phi_2) + D_5(\bar{z}\phi_5 + \phi_5) + D_{10}(\bar{z}\phi_{10} + \phi_{10}) \quad (3-4)$$

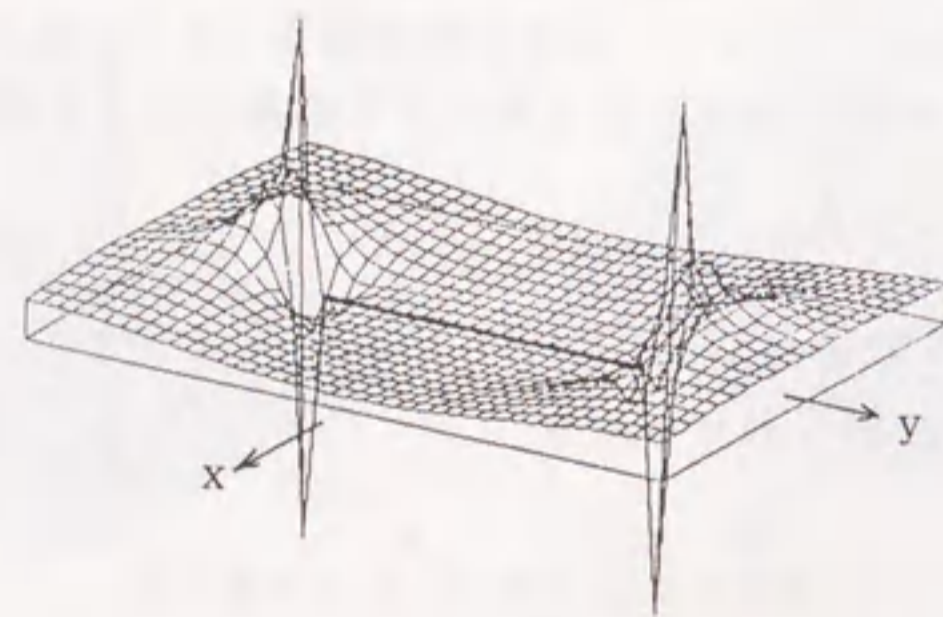
と定義する。



$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-2)$$

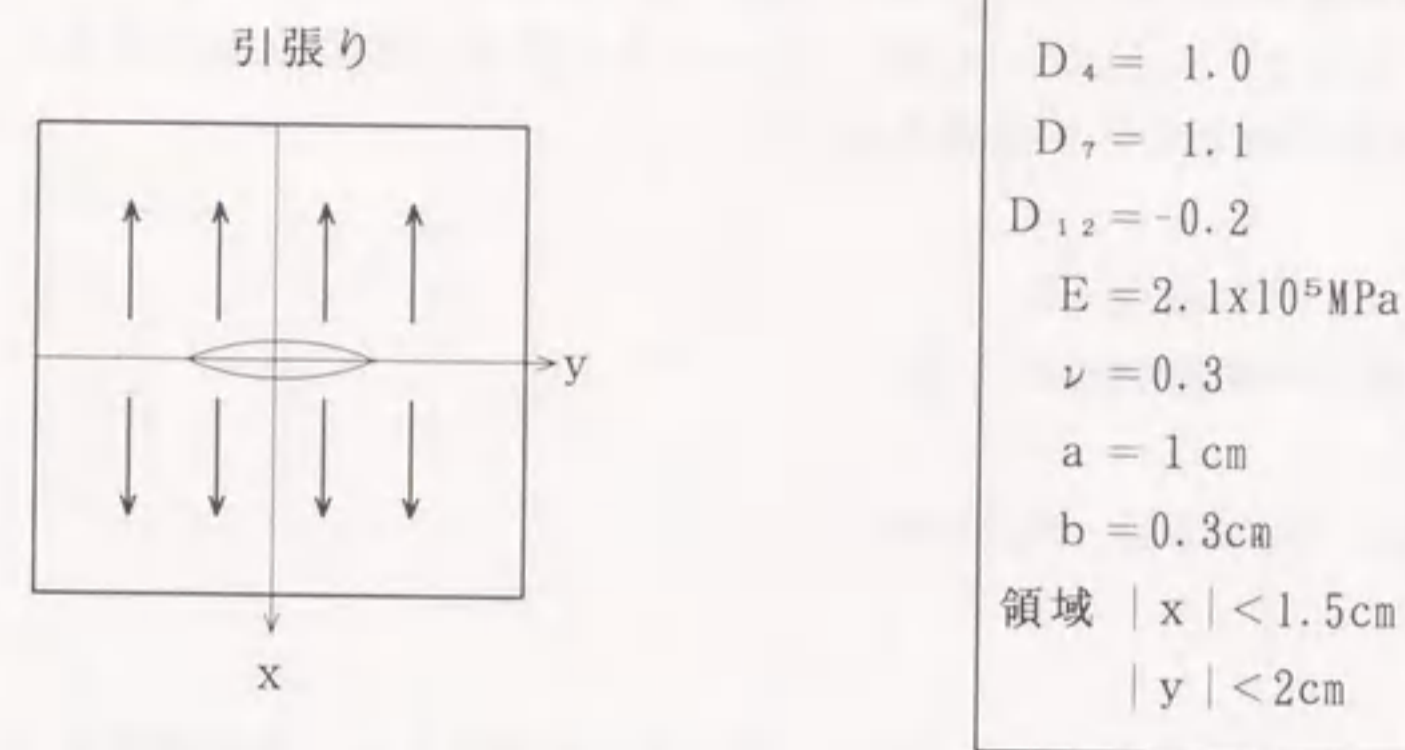


(a) 変位 U

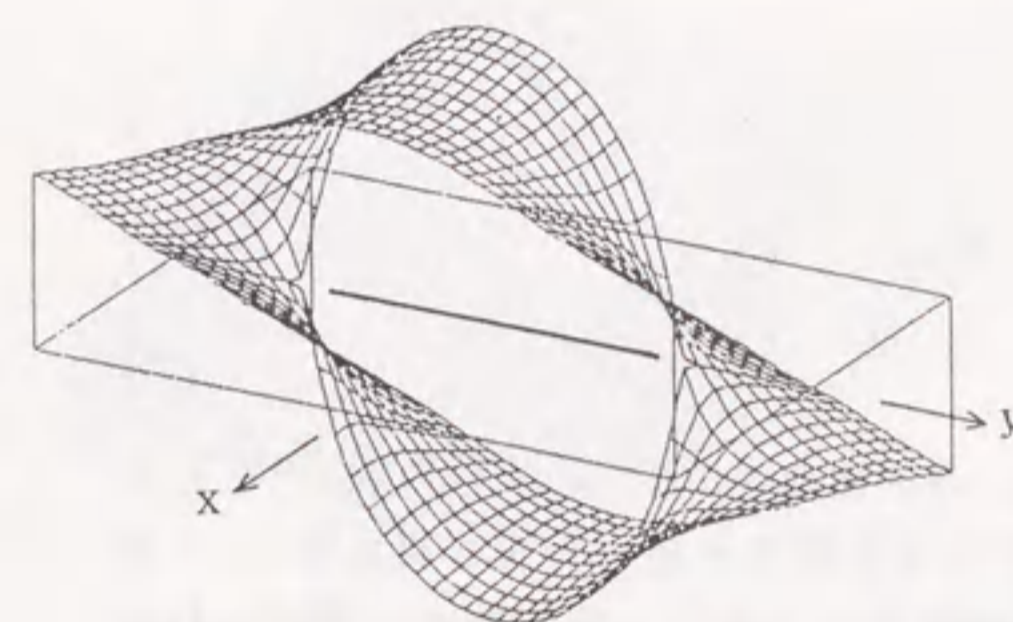


(b) 応力 σ_x

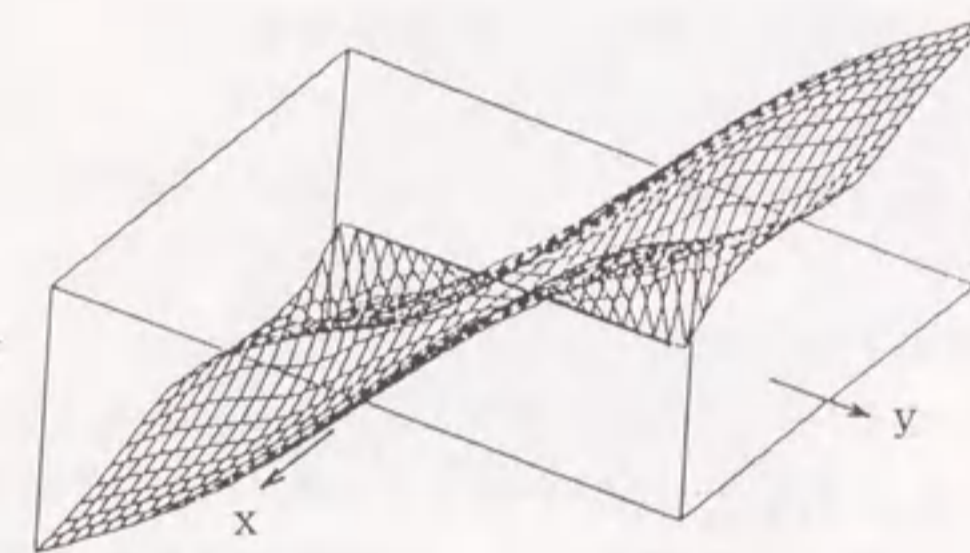
図-3.13 平滑化されたWestergaardの解 ($|x| < 1.5 \text{cm}$, $|y| < 2 \text{cm}$)



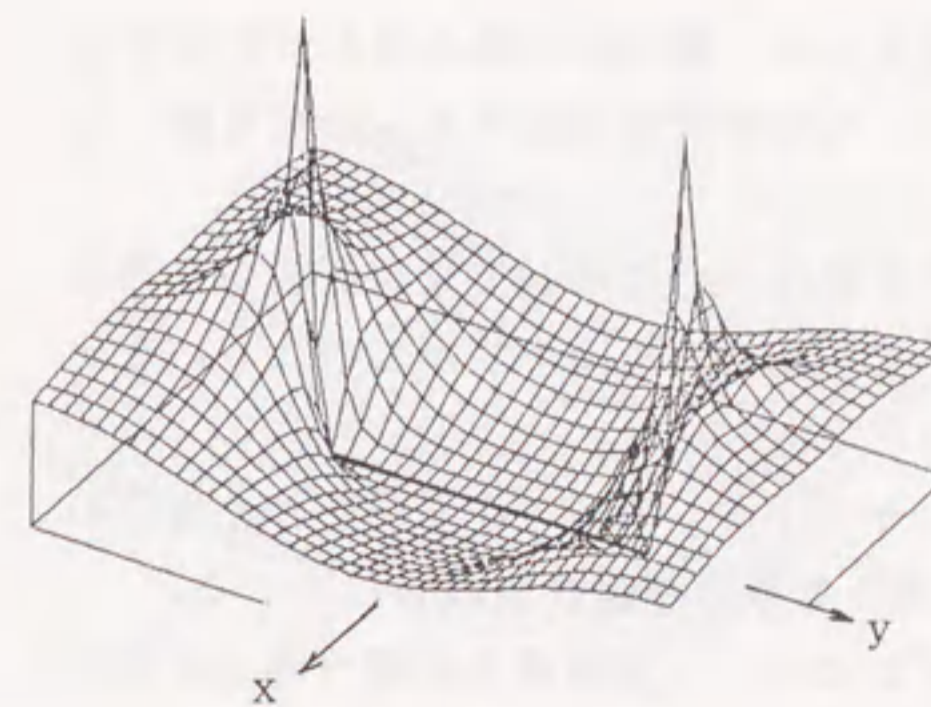
$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-3)$$



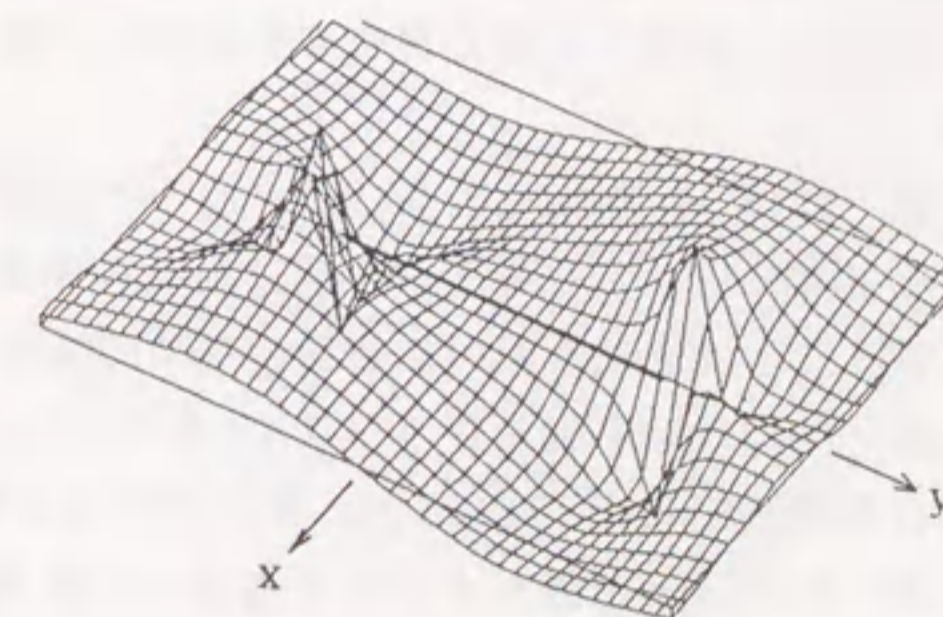
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-3.14 引張りクラックの解

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_2 = 1.0$, $D_5 = -1.1$, $D_{10} = -0.2$ とすると、図-3.15 に示すような変位と応力分布が得られる。これは、モードIIの状態であることが納得されよう。

(3) x軸曲げクラックの場合

表-3.2 のx軸曲げの組み合わせをとり

$$W = D_3(\bar{z}\phi_3 + \phi_3) + D_8(\bar{z}\phi_8 + \phi_8) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (3-5)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_2 = 1.0$, $D_5 = -2.3$, $D_{10} = -1.26$ とすると、図-3.16 に示すような変位と応力分布が得られる。これは、温度差による伸縮あるいはx軸が面内に曲げられるものに相当する。

(4) y軸曲げクラックの場合

表-3.2 のy軸曲げの組み合わせをとり

$$W = D_1(\bar{z}\phi_1 + \phi_1) + D_6(\bar{z}\phi_6 + \phi_6) + D_9(\bar{z}\phi_9 + \phi_9) \quad (3-6)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_2 = 1.0$, $D_5 = 2.3$, $D_{10} = -1.26$ とすると、図-3.17 に示すような変位と応力分布が得られる。これは、x軸の正負領域で σ_y の符号が逆転して逆対称になるのはy軸が面内に曲げられるものに相当する。

(5) その他の例

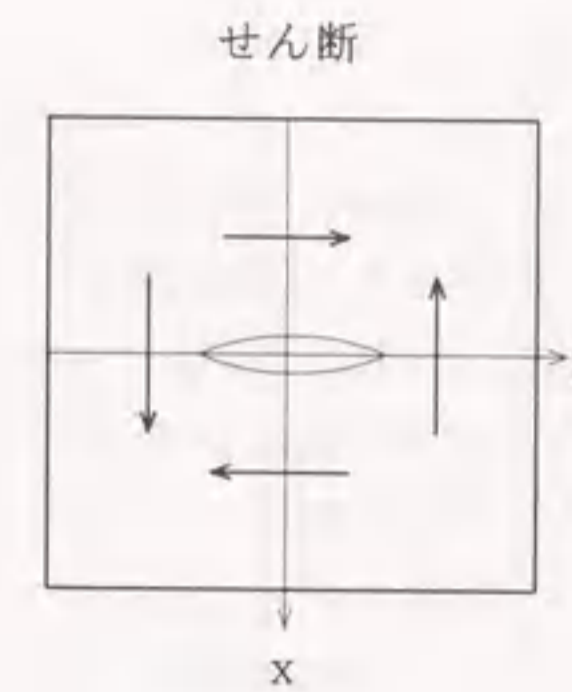
著者の導いた応力関数は、プロセスゾーンを変えたり、基本解の組み合わせを変えることにより応力が有限で開口変位に関してはいろいろな形状を表現することが可能になる。

図-3.18 は、引張りを受けるクラックの解である式(3-3)において未定係数を3通り変化させた場合のそれぞれの開口形状の相違を示す。開口変位の形状がこのように変化し得ることは適用範囲の広さを意味するものであろう。

図-3.19 は、引張りクラックにおいて主にプロセスゾーンの長さを変化させた場合の開口形状の変化を示している。特にクラック先端部の形状の相違が表現されている。

図-3.20 は、引張りクラックにおいて両端のプロセスゾーンの長さが違う場合の開口変位と応力集中の変化を示している。

以上の結果より有限で滑らかな応力集中を持ちしかも開口変位について種々の形状を表現できることが納得されよう。



$D_2 = 1.0$
$D_5 = -1.1$
$D_{10} = -0.2$
$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
$\nu = 0.3$
$a = 1 \text{cm}$
$b = 0.3 \text{cm}$
領域 $ x < 1.5 \text{cm}$
$ y < 2 \text{cm}$

$$W = D_2(\bar{z}\phi_2 + \phi_2) + D_5(\bar{z}\phi_5 + \phi_5) + D_{10}(\bar{z}\phi_{10} + \phi_{10}) \quad (3-4)$$

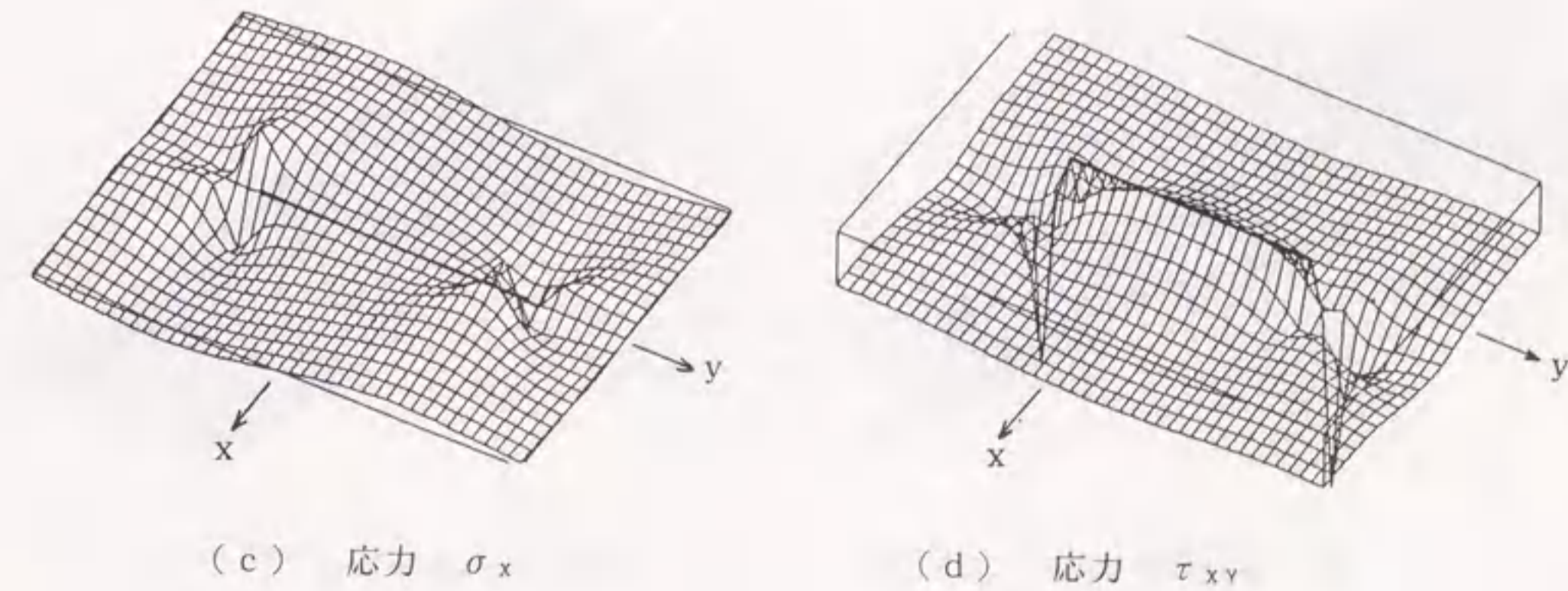
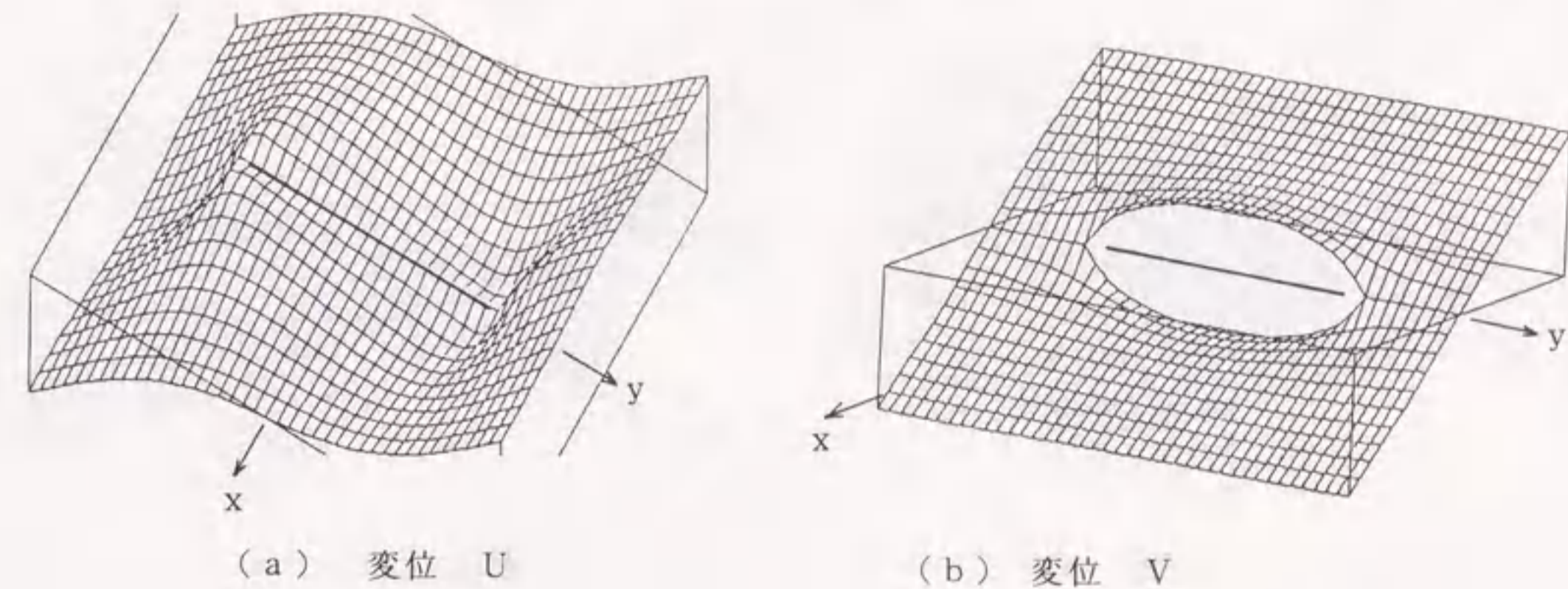
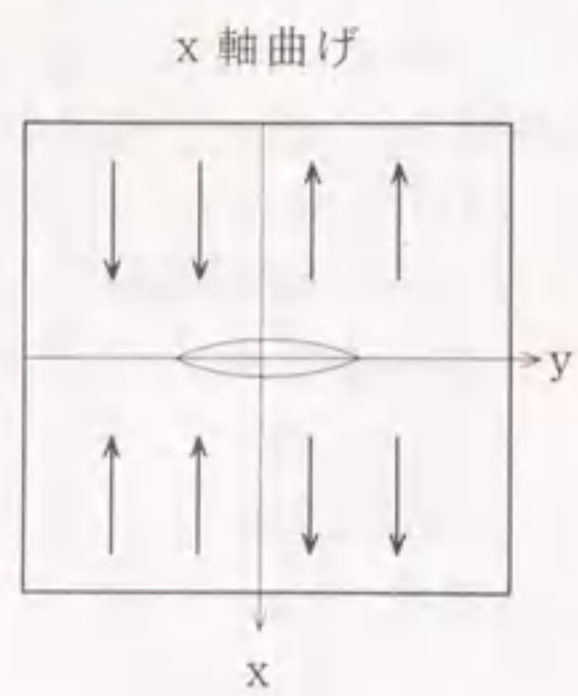


図-3.15 せん断クラックの解



$D_3 = 1.0$
 $D_8 = -2.3$
 $D_{11} = -1.26$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$

$$W = D_3(\bar{z}\phi_3 + \phi_3) + D_8(\bar{z}\phi_8 + \phi_8) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (3-5)$$

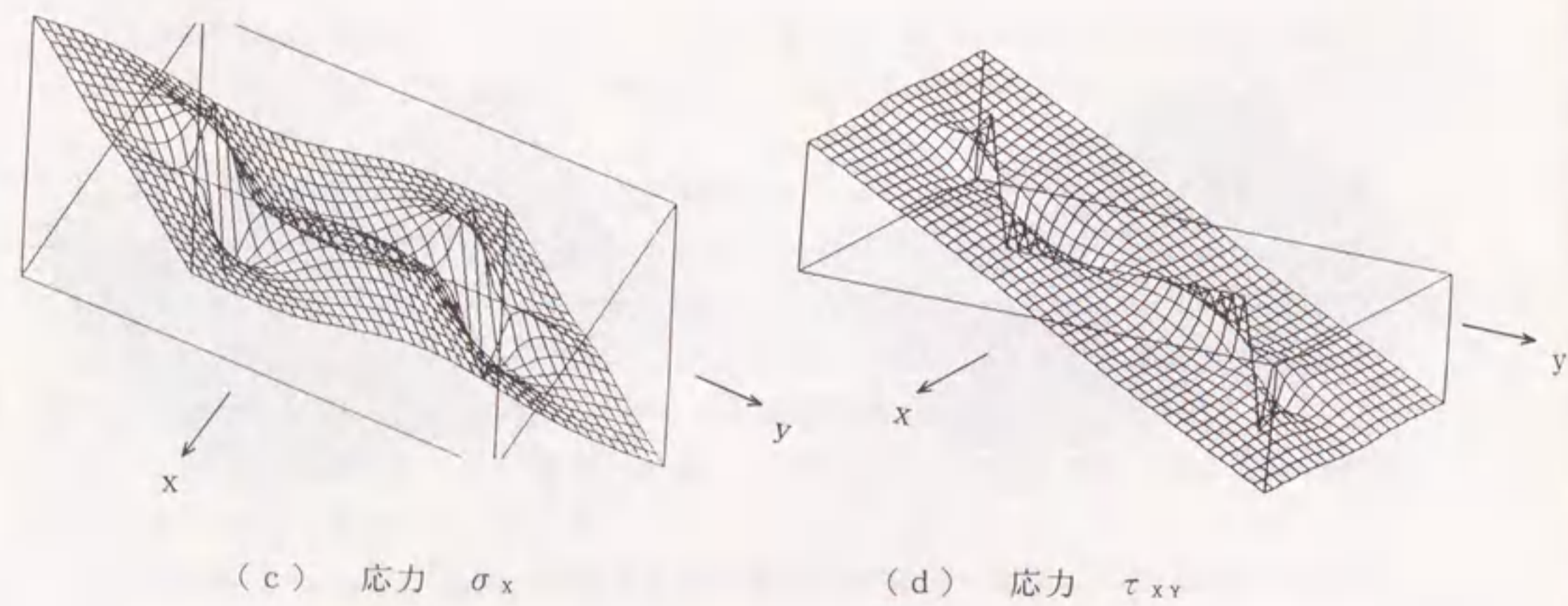
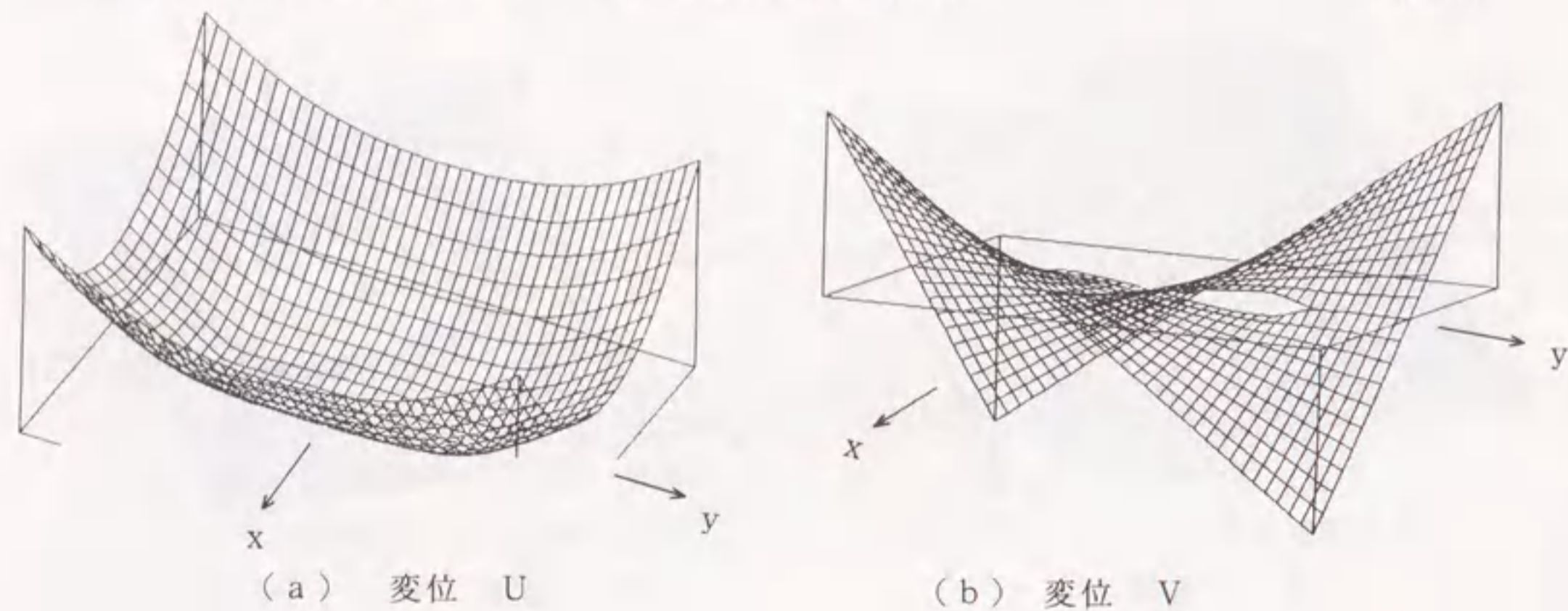
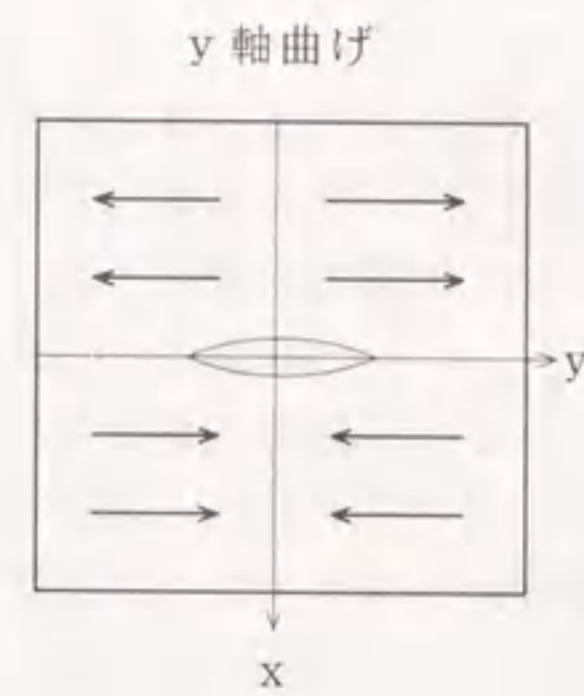


図-3.16 x 軸曲げクラックの解



$D_1 = 1.0$
 $D_6 = 2.3$
 $D_9 = -1.26$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$

$$W = D_1(\bar{z}\phi_1 + \phi_1) + D_6(\bar{z}\phi_6 + \phi_6) + D_9(\bar{z}\phi_9 + \phi_9) \quad (3-6)$$

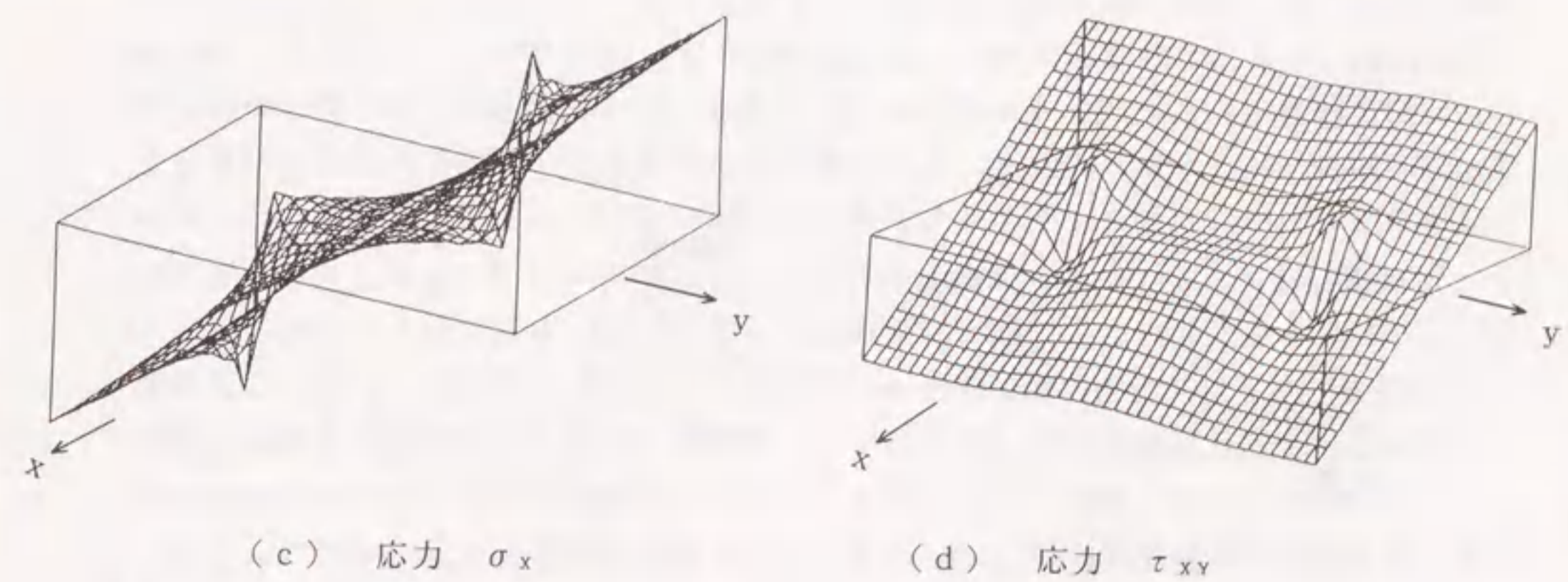
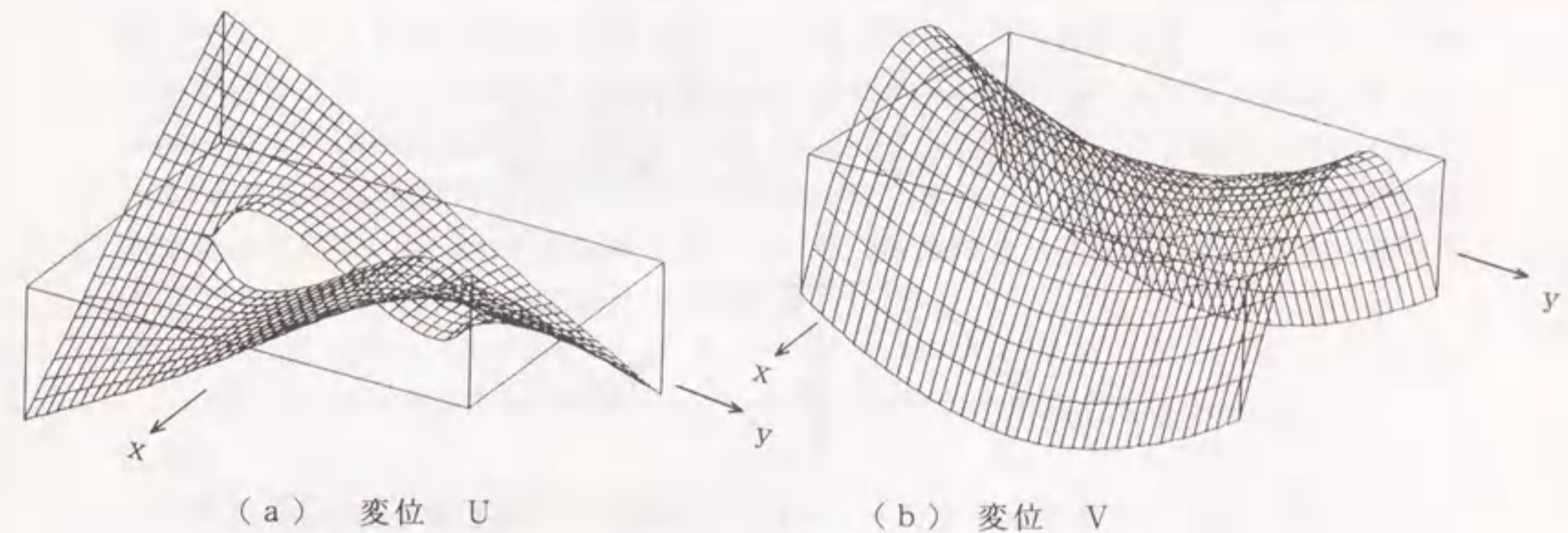


図-3.17 y 軸曲げクラックの解

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-3)$$

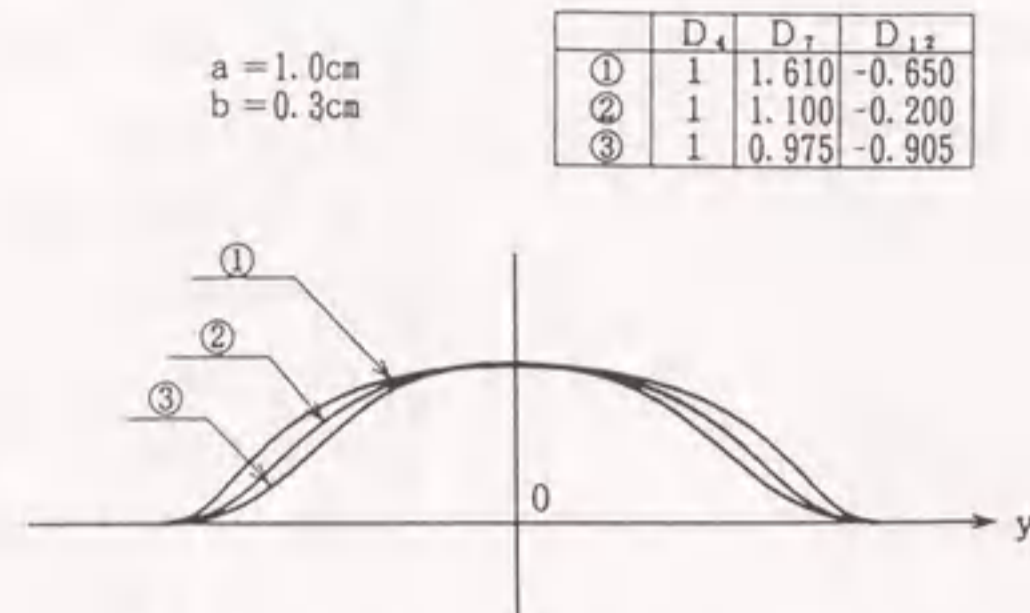


図-3.18 基本解の組み合わせの違いによる開口変位の変化
(引張りクラック, その4, その7, その12)

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-3)$$

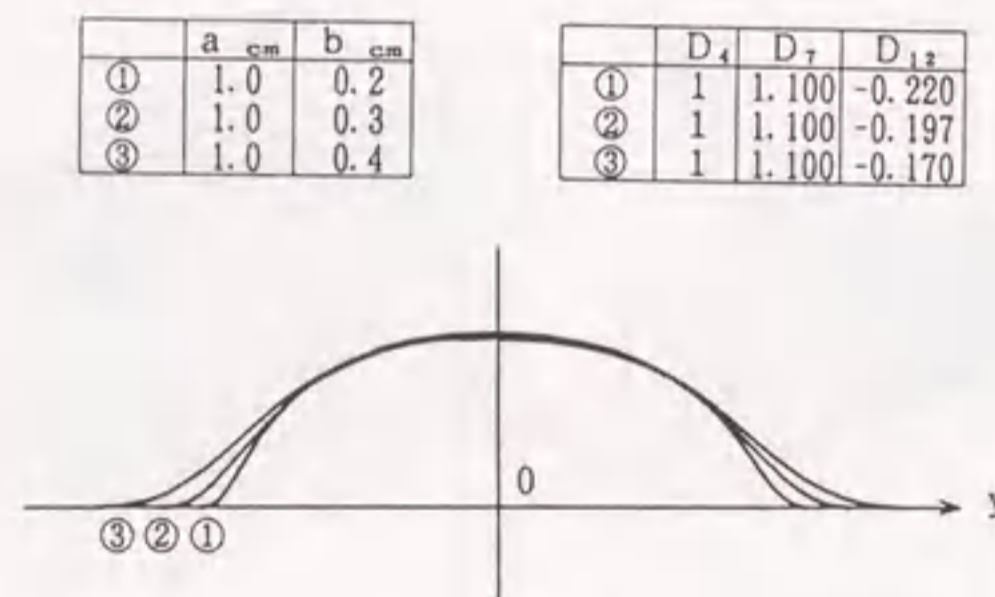


図-3.19 主にプロセスゾーンの長さの違いによる開口変位の変化
(引張りクラック, その4, その7, その12)

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (3-3)$$

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3, a = 1 \text{ cm}, b = 0.3 \text{ cm}, b' = 0.3 \text{ cm}$$

$$D_2 = 1.0, D_5 = 1.1, D_{10} = -0.185$$

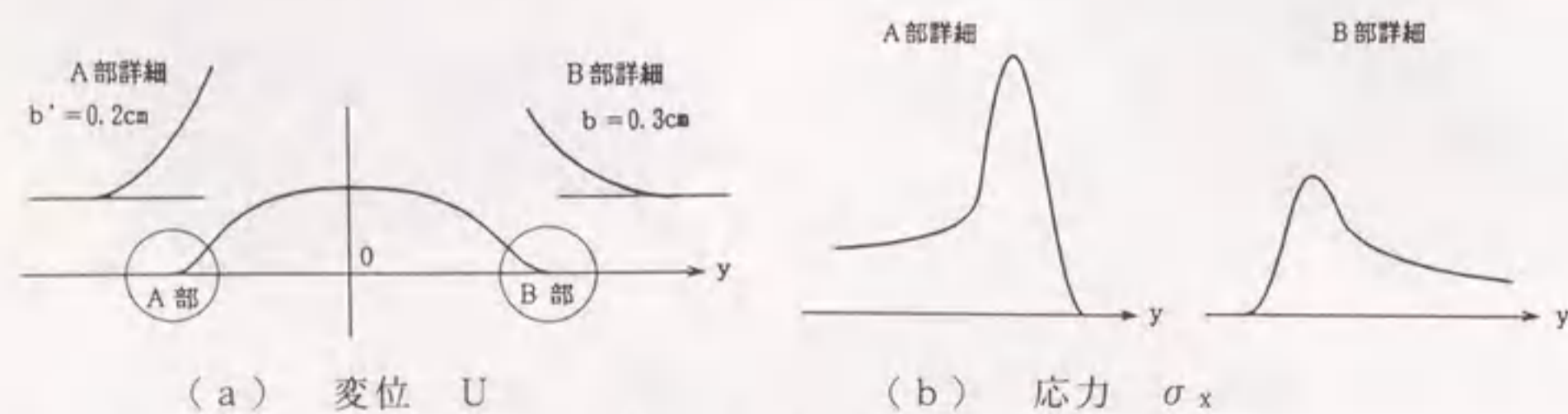


図-3.20 クラック両端のプロセスゾーンの長さの違いによる
開口変位および応力集中の変化 (引張りクラックの場合)

3.4 拡張性

本文で示した応力関数の形は、クラックの応力集中を表す応力関数の1つの系の代表例であって、解析目的に合わせて広く拡張し得るものである。

(1) 重み関数：計算例では2次式と4次式で図-2.4に示すものとしたがこれは、プロセスゾーン先端 $y = a$, $y = a + b$ で応力集中が極端に滑らかになるように、かつ積分結果が極力簡単になるように配慮したものである。重み $\rho(t)$ を変えることによって関数 $H(z)$ が変わるので、応力集中の形状を大幅に変更することは可能でありこれによって多くの応力集中形状を構成し得る。

(2) 基本解 (表-3.1)：無限遠方で発散する解でも複数個重ね合わせて発散項を0にすることは可能である。有限領域のみを対象にする場合は高次の発散項を増設することは構わない。すなわち表-3.1の z^k を $k \geq 4$ とする項も活用し得る。

(3) 境界値問題への関連：基本解は y 軸(クラック線)上の $|y| > a + b$, $|y| < a$ の領域の境界条件を完全に満足している。計算例ではプロセスゾーンの応力分布を極力平滑化するという目的で未定係数を決定したものである。境界値問題としてたとえば、ある材料中のクラック先端のプロセスゾーン相当部分 ($a < |y| < a + b$) の応力分布の形状(あるいは開口変位)を指定するというような問題の場合には、次のようにすることが望ましい。重み関数 $\rho_x(t)$ を2, 3変化させてそれらに対応する表-3.1の基本関数群を用意して、せん断・引張り・曲げ等の外力条件に合う基本関数を選び未定係数法でプロセスゾーン部分のみで選点法を試みる。

3.5 まとめ

本章を要約すると次のとおりである。

クラックを有する等方等質な無限板の引張りあるいはせん断外力に対する問題に対し、Westergaardの解¹⁾を平滑化することにより複数の基本解(その1)~(その12)を導き、これらを複数組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を持ち、しかも開口変位(特にクラック先端部)についてもいろいろな形状を表現し得る応力関数を導いた。たとえば、岩盤やコンクリート等の材料では、クラック先端における無限大の応力集中は不相当である。またDugdaleの解²⁾は塑性域を解析するには好都合であるが、応力が緩やかに立ち上がる部分が無く、かつ平均応力がいかに小さくなくても σ_{ya} が生じるという点は不自然であろう。たとえばコンクリートや岩盤に適用する場合には、著者が導いた応力集中が緩やかに立ち上がる関数の方が合理的であろう。この関数は、境界面亀裂の解にも活用し得る^{3), 4)}。すなわち土木工学の分野で対象とする材料のクラック解析用としては望ましい関数を導き得たと思われる。また、著者の導いたこの関数は、コンクリートのクラック進展についての数値シミュレーション⁵⁾や無発破工法の割岩機構の解析⁶⁾あるいは、粘土地盤における薬液注入機構の解析等に活用できる。なお、本研究の手法をさらに拡張して y 軸上の有限部分 $|y| < a$ で連続で、 $|y| > a + b$ がクラック(自由辺)という有限連続板の問題に対してもそれ

それぞれの応力状態における応力関数を求めることが可能である。これに関しては、第4章で詳述する。

参考文献

- 1) H. M. Westergaard : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol. 33, A-49-53, 1939.
- 2) D. S. Dugdale : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 3) K. Fujii, K. Nakagawa, S. Duan and Y. Kato: Stress Function with Finite Magnitude of Stress Concentration around An Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol. 47, No. 6, pp. 881-891, 1994.
- 4) Y. Murase, S. Duan, S. and, K. Nakagawa : Stress Analysis around A Circular Interface Crack between Dissimilar Media Loaded by Uniform Tention at Infinity, Eng. Fract. Mech., Vol. 48, No. 3, pp. 325-337, 1994.
- 5) S. Duan, H. Yazaki, K. Fujii and K. Nakagawa : A Mathematical Approach of the Interface Crack with the Fracture Prosess Zone, Research Report of the Factory of Eng., Gifu., No. 41 pp. 1-10, 1991.
- 6) 村瀬安彦・中川建治 : 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析 土木学会論文集, No. 483/ I-26, pp. 41~49, 1994.
- 7) K. Fujii, S. Duan and K. Nakagawa : A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam, Eng. Fract. Mech., Vol. 40, No. 1, pp. 37-44, 1991.
- 8) 栖原秀郎・藤井康寿・中川建治 : くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案, 土木学会論文集, No. 528, VI-29, 1995.

第4章 応力関数の一括構成法と外側クラック（有限連続板）への応用

4.1 概要

前章までに、クラックを有する等方等質な無限板が、引張りあるいはせん断外力等を受ける問題に対して、Westergaardの解を平滑化することにより、プロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いた。また、基本解12組を導き、これらを組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を構成し、開口変位についてもいろいろな形状を表現し得ることを示した¹⁾。

これらの理論の根幹は、Westergaardの解を基本としている。一方、Westergaardは「y軸上、あるいはx軸上に沿って $\tau_{xy} \equiv 0$ となる応力問題」に対して、解法と応力関数を前述の方法と異なる形で示している²⁾。また、同様の方法で、「y軸上あるいはx軸上に沿って、 $\sigma_x \equiv 0$ となる応力問題」の解も求める事ができる³⁾。応力関数は重調和関数であり、 \bar{z} 以外は、解析関数で構成される。解析関数の特性として、実数部分と虚数部分とに分解すると実部がy軸に沿って原点を中心に対称形状ならば虚部は逆対称であり、これのまた逆も成立する。これらの関係を利用することによって、前述のような応力集中が有限でプロセスゾーン相当部分を伴った直線状中心クラックの解のみならず有限連続板のクラックまでも含めた応力関数の基本4形式（引張り、せん断、x軸曲げ、y軸曲げ）を一括構成することが可能になる。また、本手法を用いることによって、第3章に述べた直線状中心クラックの解12組のほかに、更に有限連続板の（外側）クラックについても基本解12組を導き得る。

4.2 Westergaardの解とその応用

Westergaardは「y軸上、あるいはx軸上に沿って $\tau_{xy} \equiv 0$ となる応力問題」に対して、解法と応力関数を導く方法を示している。正確には、x軸上に沿って $\tau_{xy} \equiv 0$ となる応力問題について述べているのであるが、y軸上に沿った問題についても同様の方法で求められる。これらの考え方をさらに進めて「y軸上、あるいはx軸上に沿って $\sigma_x \equiv 0$ となる応力問題」に対する解法と応力関数も求められる。ここでは一般的な応力関数表示を用いて表現して、本研究に必要なy軸上の応力を指定する問題の解を示す。

(1) y軸上に沿って $\tau_{xy} \equiv 0$, $\sigma_x = \sigma_0(y)$ となる応力問題の解法

a) 一般の応力関数 $F = \bar{z}\phi + \phi$ において、

$$\phi'' = z\phi'' \quad (4-1)$$

と仮定すると、 $\phi' = z\phi' - \phi$ であり、応力は次のように表されてその実部をとることになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\phi' - (\bar{z}\phi'' + \phi''') = 2\phi' - (\bar{z} + z)\phi'' \\ \sigma_y &= 2\phi' + (\bar{z}\phi'' + \phi''') = 2\phi' + (\bar{z} + z)\phi'' \\ \tau_{xy} &= -i(z\phi'' + \phi''') = -i(\bar{z} + z)\phi'' \end{aligned} \right\} (4-2)$$

b) y軸上では, $\bar{z} + z = 2x \equiv 0$ であるから,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}|_{x=0} &= 0 \\ \sigma_x|_{x=0} &= 2\phi' \\ \sigma_y|_{x=0} &= 2\phi' \end{aligned} \right\} (4-3)$$

となる.

もし, y軸上で $\tau_{xy}|_{x=0} = 0$ の解で, y軸に沿う $\sigma_x = \sigma_y$ の分布が $f_N(y)$ と与えられるならば,

$$\sigma_x|_{x=0} = 2\phi'(z)|_{x=0} = f_N(y)$$

これは, $2\phi'(z)|_{x=0} = f_N(z/i)|_{x=0}$ で満足されるので, $2\phi'(z) = f_N(z/i)$ とすればよい. また, $\phi'' = z\phi''$ であるから積分によって ϕ' , ϕ を決定できる.

(2) y軸上に沿って $\sigma_x \equiv 0$, $\tau_{xy} = \tau_0(y)$ となる問題の解法

a) 一般の応力関数 $F = \bar{z}\phi + \phi$ において,

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= z\phi' + 2\phi \\ \phi'' &= z\phi'' + 2\phi' \end{aligned} \right\} (4-4)$$

と仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\phi' - (\bar{z}\phi'' + \phi''') = (\bar{z} + z)\phi'' \\ \sigma_y &= 2\phi' + (\bar{z}\phi'' + \phi''') = 4\phi' + (\bar{z} + z)\phi'' \\ \tau_{xy} &= -i(\bar{z}\phi'' + \phi''') = -i2\phi' - i(\bar{z} + z)\phi'' \end{aligned} \right\} (4-5)$$

b) y軸上では, $x = 0$ であるから,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} &= 0 \\ \sigma_y|_{x=0} &= 4\phi'(iy) \\ \tau_{xy}|_{x=0} &= -i2\phi'(iy) \end{aligned} \right\} (4-6)$$

となる.

もし, y軸上で $\sigma_x \equiv 0$ の解で y軸に沿う $\tau_{xy}|_{x=0}$ の分布が $f_T(y)$ と与えられれば,

$$-i2\phi'(z)|_{x=0} = f_T(y) = f_T(-iz)|_{x=0}$$

であって, $\phi'(z) = if_T(-iz)/2$ となる.

よって, $\phi'(z)$ が決定され, $\phi = z\phi$ より ϕ' , ϕ を決定できる.

4.3 応力関数基本4形式の一括構成法

(1) 基本的な考え方

前節では, y軸上に沿って $\tau_{xy} \equiv 0$ あるいは $\sigma_x \equiv 0$ という独立した応力状態に対する応力関数が求められた. 本節では, 前者をN型, 後者をT型と呼ぶこととする.

一方 y軸上の応力を表す関数は, 解析関数であるのでその関数 $F(z)$ を実数部分と虚数部分に分解したときに, 次のような特性を持っている.

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \text{Re}[F] + i\text{Im}[F] \\ &= F_R(z) + iF_I(z) \end{aligned} \right\} (4-7)$$

とする.

a) $F_R(z)$ が y軸に沿って原点を中心に対称形状ならば, $F_I(z)$ が y軸に沿って原点を中心に逆対称形状となる. (図-4.1参照)

b) 同様にして, $F_R(z)$ が y軸に沿って原点を中心に逆対称形状ならば, $F_I(z)$ が y軸に沿って原点を中心に対称形状となる. これに対し更に開口を表す境界条件を与えることによって, 基本応力関数は次項に示すように i型と ii型に分類される.

(2) 基本応力関数 i型と ii型

a) 基本応力関数 i型 (対称型)

zの関数である $f_s(z)$ を次のような形で定義する. $f_s(z)$ の第1導関数実部の y軸上の形が対称型でこれに伴い $f_s(z)$ の第1階導関数虚部の y軸上の形が逆対称型とする. さらに, y軸上で,

$$\left. \begin{aligned} |y| < a \text{ で } \quad \text{Re}[f_s'(iy)] &= 0 \\ |y| > a + b \text{ で } \quad i\text{Im}[f_s'(iy)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

とする. (図-4.2参照)

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} f_s(z) &= \text{Re}[f_s(z)] + i\text{Im}[f_s(z)] \\ &= f_{sR}(z) + if_{sI}(z) \end{aligned} \right\}$$

y軸上 $|y| < a$ で $f_s'(iy)$: 純虚数

$|y| > a + b$ $f_s'(iy)$: 実数

と定義する.

b) 基本応力関数 ii型 (逆対称型)

zの関数である $f_A(z)$ を次のような形で定義する. $f_A(z)$ の第1導関数実部の y軸上の形が逆対称型でこれに伴い $f_A(z)$ の第1階導関数虚部の y軸上の形が対称型とする.

さらに y軸上で

$$\left. \begin{aligned} |y| < a \text{ で } \quad \text{Re}[f_A'(iy)] &= 0 \\ |y| > a + b \text{ で } \quad i\text{Im}[f_A'(iy)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

とする. (図-4.2参照)

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} f_A(z) &= \text{Re}[f_A(z)] + i\text{Im}[f_A(z)] \\ &= f_{AR}(z) + if_{AI}(z) \end{aligned} \right\}$$

y軸上 $|y| < a$ で $f_A'(iy)$: 純虚数

$|y| > a + b$ $f_A'(iy)$: 実数

と定義する.

(3) 基本応力関数 R型と I型

以上のように, 開口を表す応力関数は, その応力状態によって N型と T型に, 対称性

によって i 型と ii 型に分類することができる。ここで、i 型と ii 型は更に虚数部分を利用することすなわち z の関数である $f_s(z)$ および $f_A(z)$ に対し、 $i f_s(z)$ および $i f_A(z)$ を定義することによって R 型と I 型に分類することができる。

具体的には、次の通りである。

R 型 $f_s(z) = f_{sR}(z) + i f_{sI}(z)$ に対し

I 型 $i f_s(z) = -f_{sI}(z) + i f_{sR}(z)$ となる。

同様に

R 型 $f_A(z) = f_{AR}(z) + i f_{AI}(z)$ に対し

I 型 $i f_A(z) = -f_{AI}(z) + i f_{AR}(z)$ となる。

これら関数の実部および虚部の第 1 階導関数を、図-4.3 に示す。

(4) 本節のまとめ

以上のように、開口を表す応力関数は、その応力状態によって N 型と T 型、対称性によって i 型と ii 型に、さらに虚数部分を利用することによって R 型と I 型に分類することができる。

以上をまとめると表-4.1 のように分類されるが、現実的に前記のような応力と開口形状を表現し得る関数は著者等が既に報告した¹⁾ 開口関数 f_s, f_c に他ならない。応力分布の対称、逆対称の特性を説明するために f_s, f_A と定義したが、著者等の導いた関数 f_s, f_c あるいは $z^k f_s, z^k f_c$ は、一対となって前記の f_s, f_A の一対に対応する。($k=0, 1, 2, 3$ --- によってそれぞれ対称、逆対称の対応は反転するだけである。)

したがって、次節では著者等の f_s, f_c と z によって応力関数を定義することにして、対称、逆対称という表現は用いないことにする。

4. 4. 有限連続板のクラックへの応用

著者等による重み積分された関数 $H_j(z, a, b)$ ¹⁾ を基にして

$f_c = \cosh\{H_j(z, a, b)\}$ あるいは、

$f_s = \sinh\{H_j(z, a, b)\}$ とすることで、

$x=0, |y| < a$ で連続で、 $|y| > a+b$ でクラック

という有限連続板の条件を満足する基本解は、従来の研究¹⁾ と 4. 3. 開口関数基本 4 形式の一括構成法より求められる。求められた有限連続板のクラックの基本解を表-4. 2 開口条件を満足する基本解に示す。

これら求められた基本解 12 組は、有限連続板における有限応力と開口変位の共存部分を構成する解であるがもし無限遠方を除外して有限領域のみで活用するなら z の高次を含むその他の項も有効な解となる。

基本解 (その 1) から (その 12) までの 12 組の応力関数の変位図および応力図を図-4. 4~図-4. 15 に示す。

また、これらの解は直線上中央クラックの場合と同様に面内力の種類により 4 通りの解に分類される。分類された基本解 12 組を表-4. 3 に示す。

表-4.1 開口を表す応力関数の分類

		N 型 $\tau_{xy} = 0$ [$\phi'' = z \phi''$]	T 型 $\sigma_x = 0$ [$\phi'' = z \phi'' + 2\phi'$]
実部対称型 i 型 $f_s(z)$ $\text{Re}[f_s(iy)]$ 	R 型 $\phi' = f_s(z)$	[i-N-R] 引張り 	[i-T-R] y 軸曲げ
	I 型 $\phi' = i f_s(z)$	[i-N-I] x 軸曲げ 	[i-T-I] せん断
実部逆対称型 ii 型 $f_A(z)$ $\text{Re}[f_A(iy)]$ 	R 型 $\phi' = f_A(z)$	[ii-N-R] x 軸曲げ 	[ii-T-R] せん断
	I 型 $\phi' = i f_A(z)$	[ii-N-I] 引張り 	[ii-T-I] y 軸曲げ

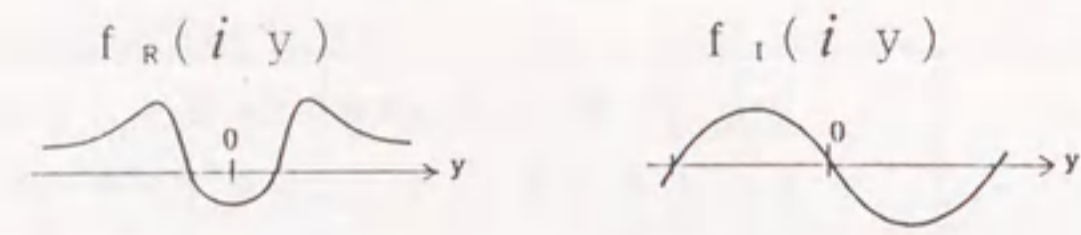


図-4.1 解析関数の形状

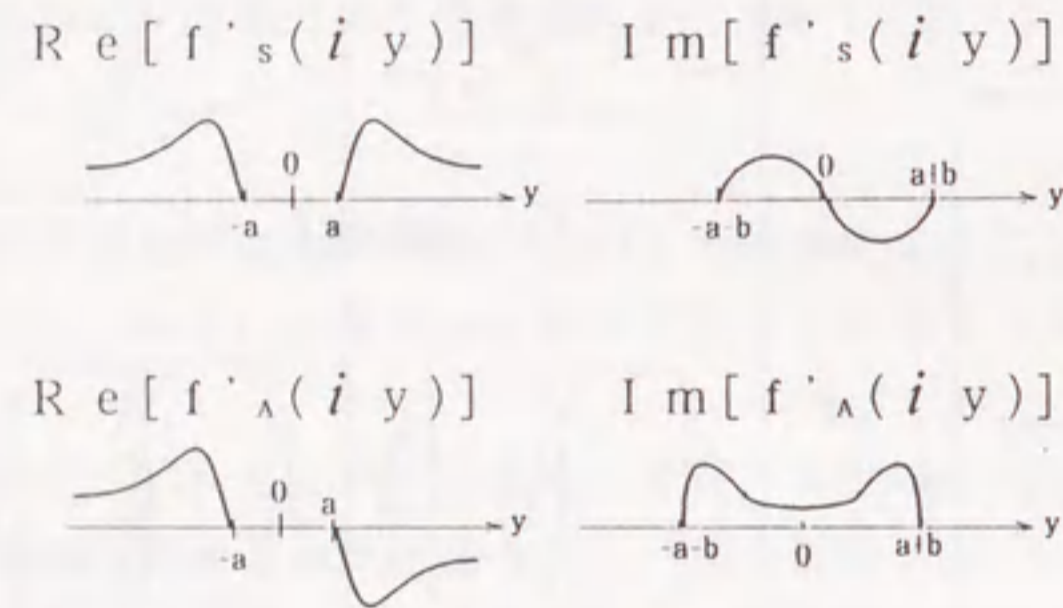


図-4.2 基本応力関数 i 型と ii 型の形状特性

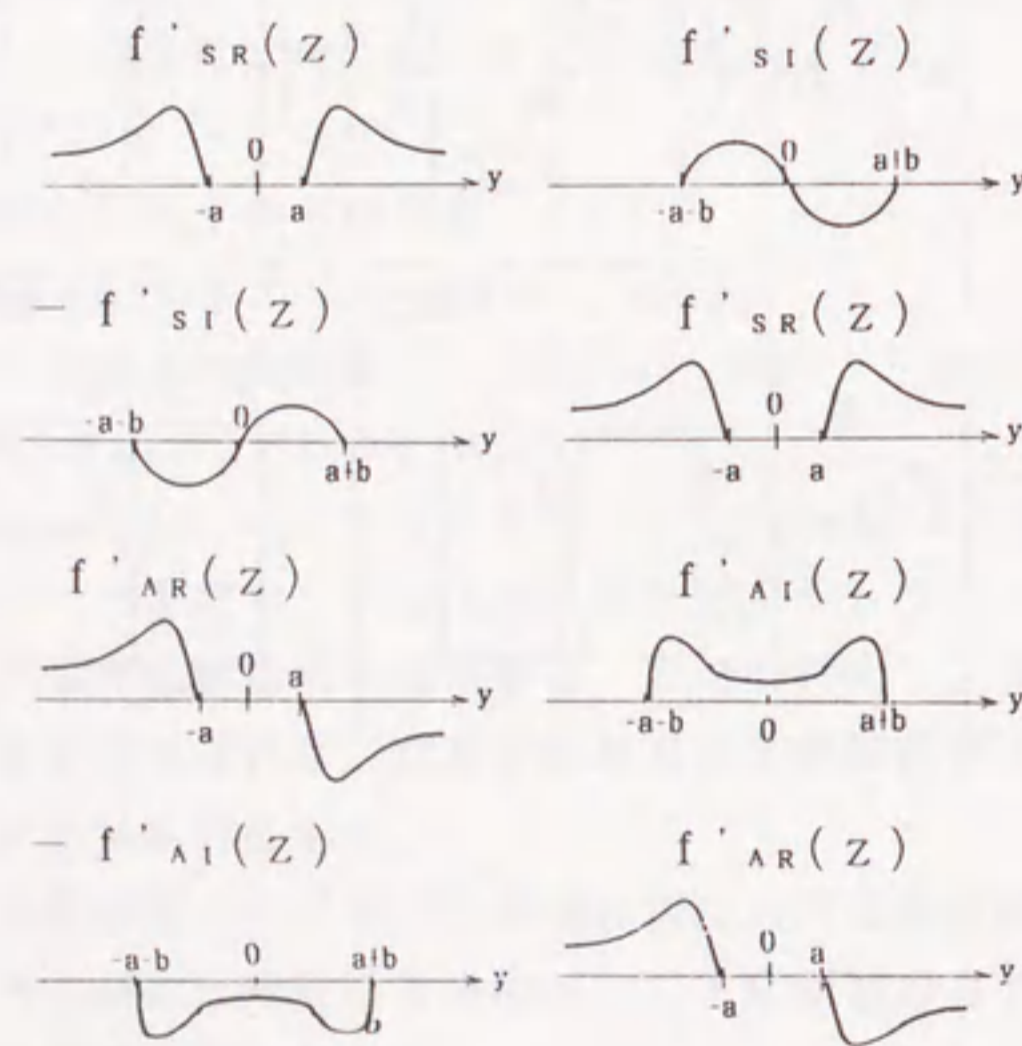


図-4.3 基本応力関数 R 型と I 型の形状特性

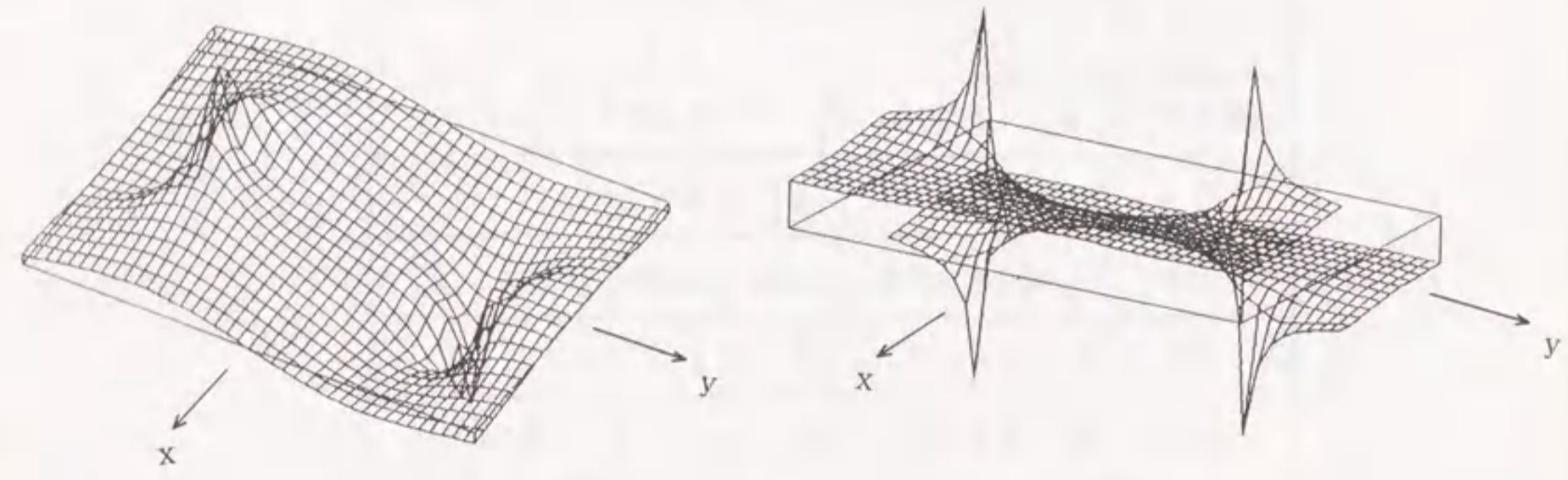
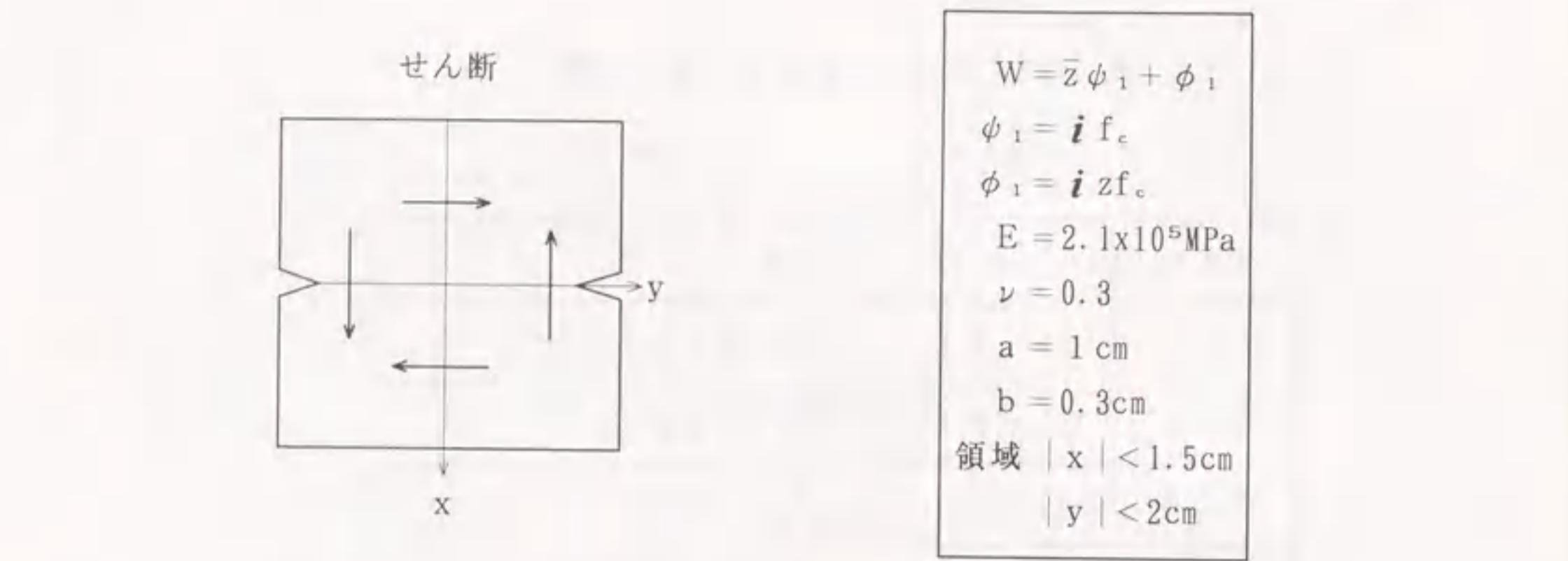
表-4.2 開口条件を満足する基本解

$$f_c = \cos H \quad f_s = \sin H$$

基本解	ϕ	ϕ or ϕ'
その1	$\phi_1 = i f_c$	$\phi_1 = i z f_c$
その2	$\phi_2 = i f_s$	$\phi_2 = i z f_s$
その3	$\phi_3 = f_c$	$\phi_3' = (z f_c' - f_c)$
その4	$\phi_4 = f_s$	$\phi_4' = (z f_s' - f_s)$
その5	$\phi_5 = z f_c$	$\phi_5 = z^2 f_c$
その6	$\phi_6 = z f_s$	$\phi_6 = z^2 f_s$
その7	$\phi_7 = i z f_c$	$\phi_7' = i z^2 f_c'$
その8	$\phi_8 = i z f_s$	$\phi_8' = i z^2 f_s'$
その9	$\phi_9 = i z^2 f_c$	$\phi_9 = i z^3 f_c$
その10	$\phi_{10} = i z^2 f_s$	$\phi_{10} = i z^3 f_s$
その11	$\phi_{11} = z^2 f_c$	$\phi_{11}' = (z^2 f_c' + z^3 f_c')$
その12	$\phi_{12} = z^2 f_s$	$\phi_{12}' = (z^2 f_s' + z^3 f_s')$
その他	$\phi_n = z^m f_s$	$\phi_n' = (z^m f_s' + z^{m+1} f_s')$

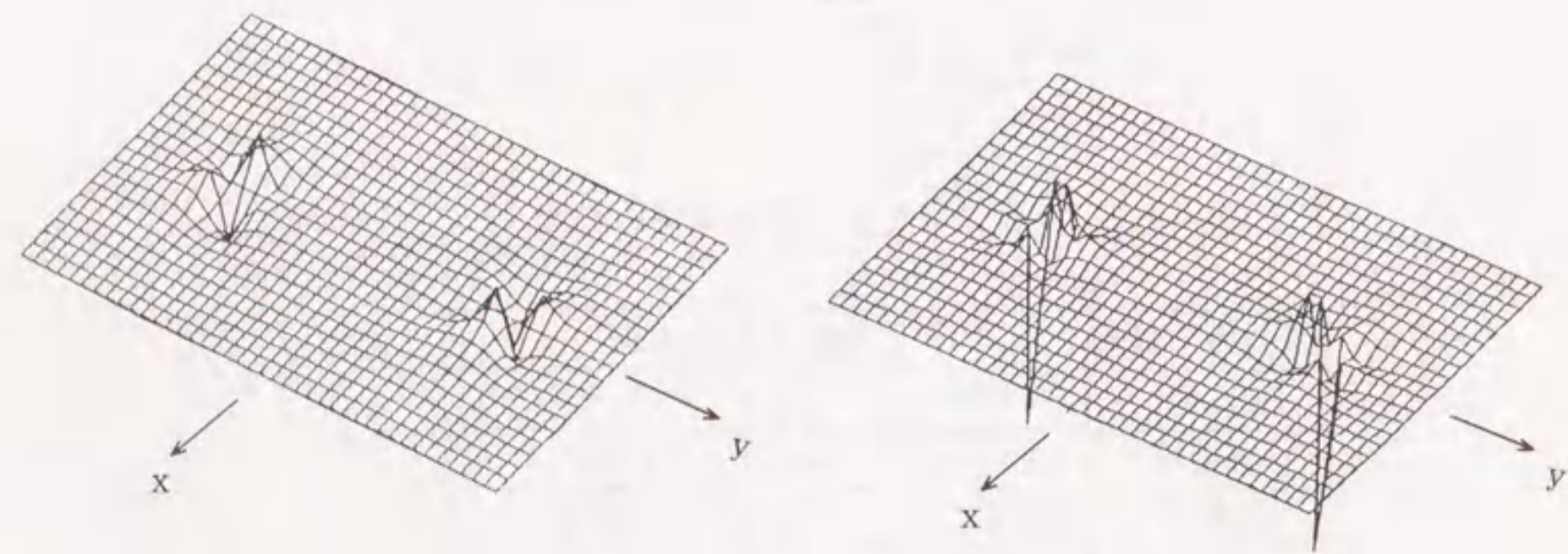
表-4.2 面内力分布による基本解の分類

面内力の種類	対応する基本解
せん断	(その1) (その6) (その9)
y 軸曲げ	(その2) (その5) (その10)
引張り	(その3) (その8) (その11)
x 軸曲げ	(その4) (その7) (その12)



(a) 変位 U

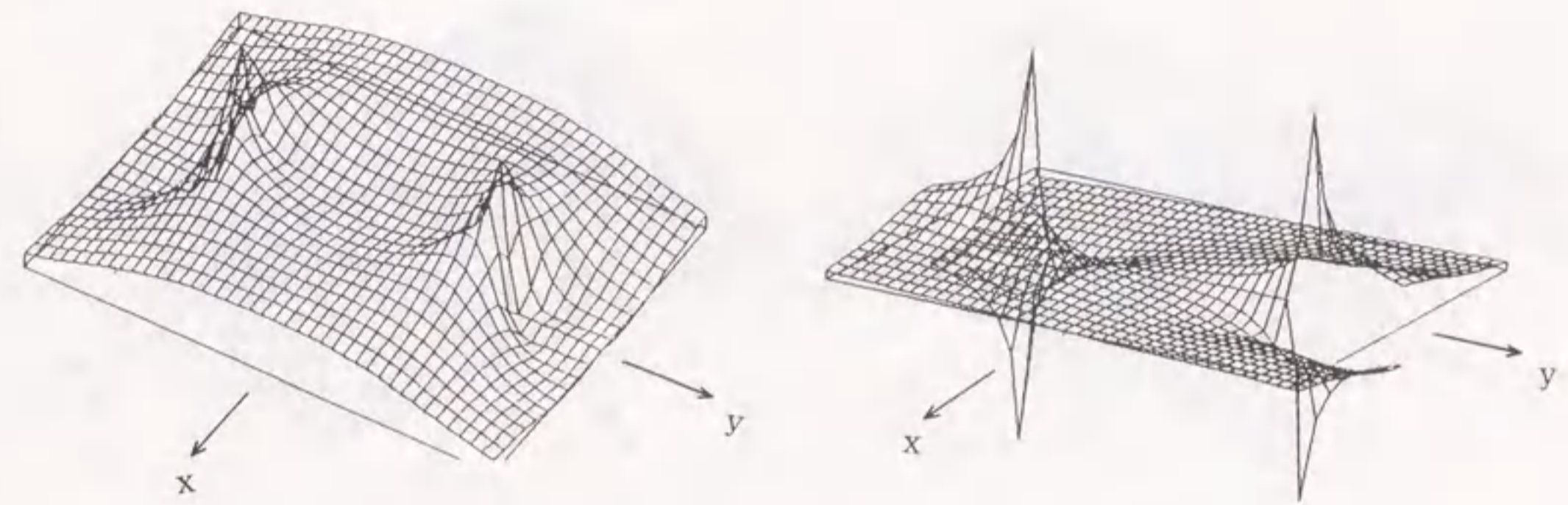
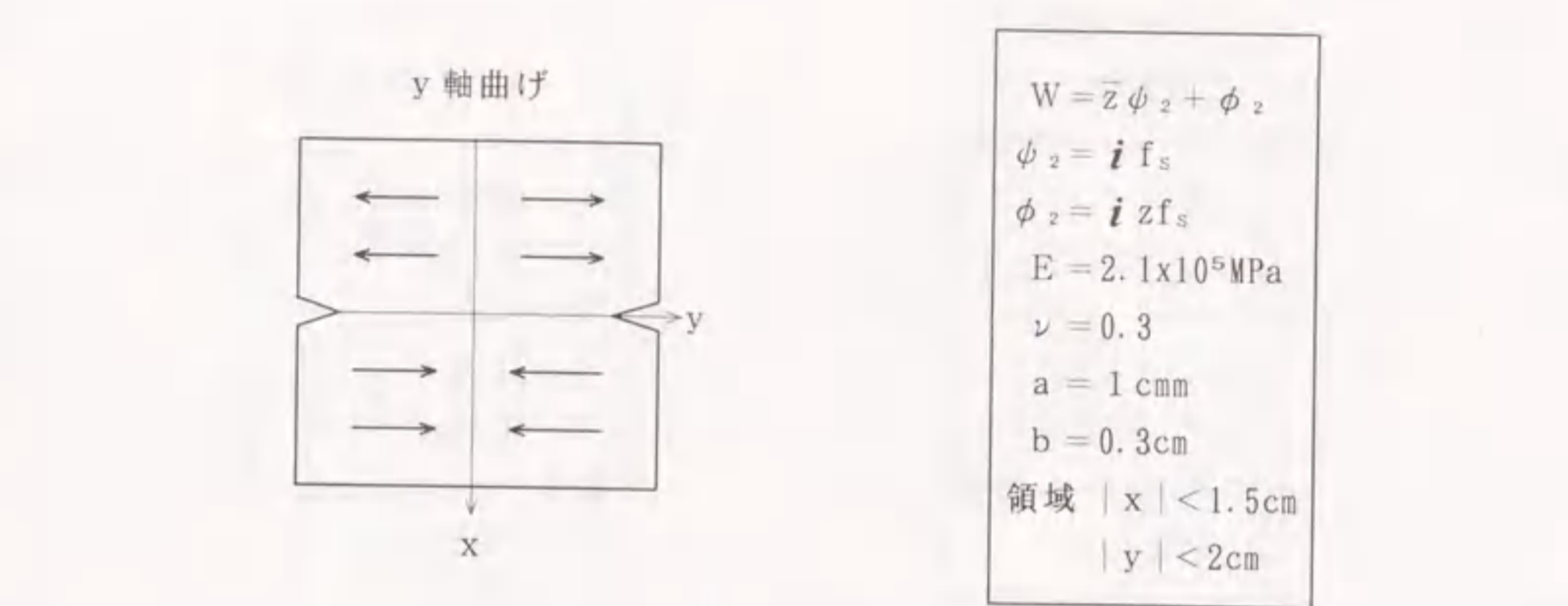
(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

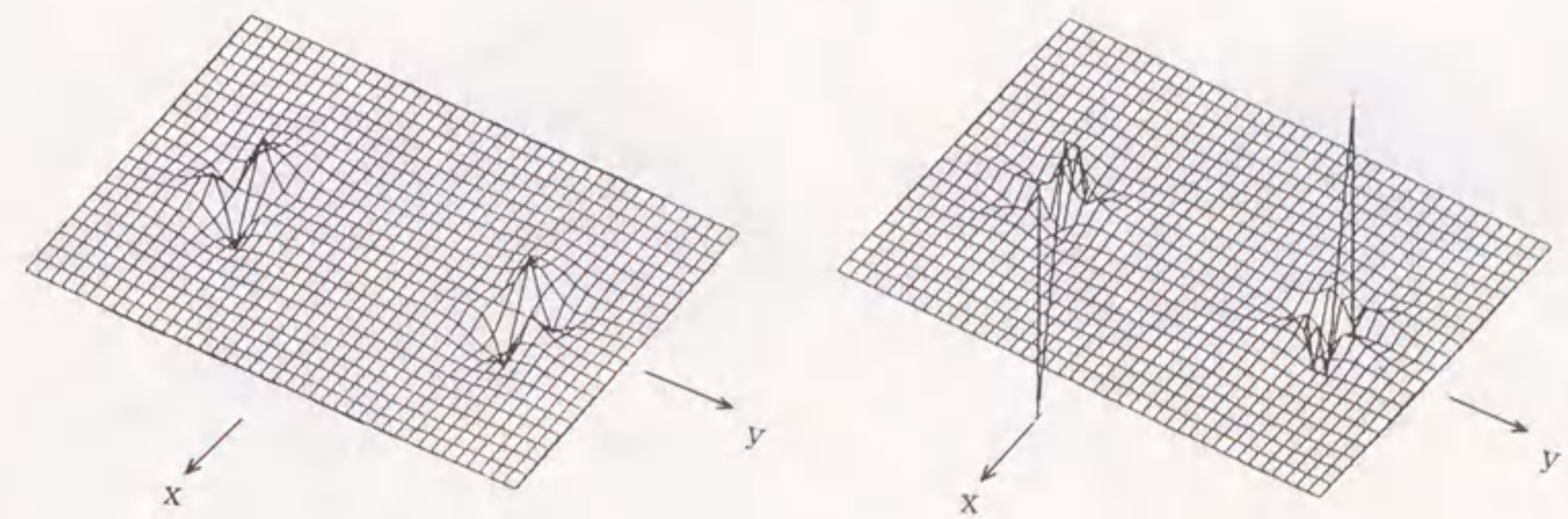
(d) 応力 τ_{xy}

図-4.1 平滑化された基本解 (その1)



(a) 変位 U

(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.2 平滑化された基本解 (その2)

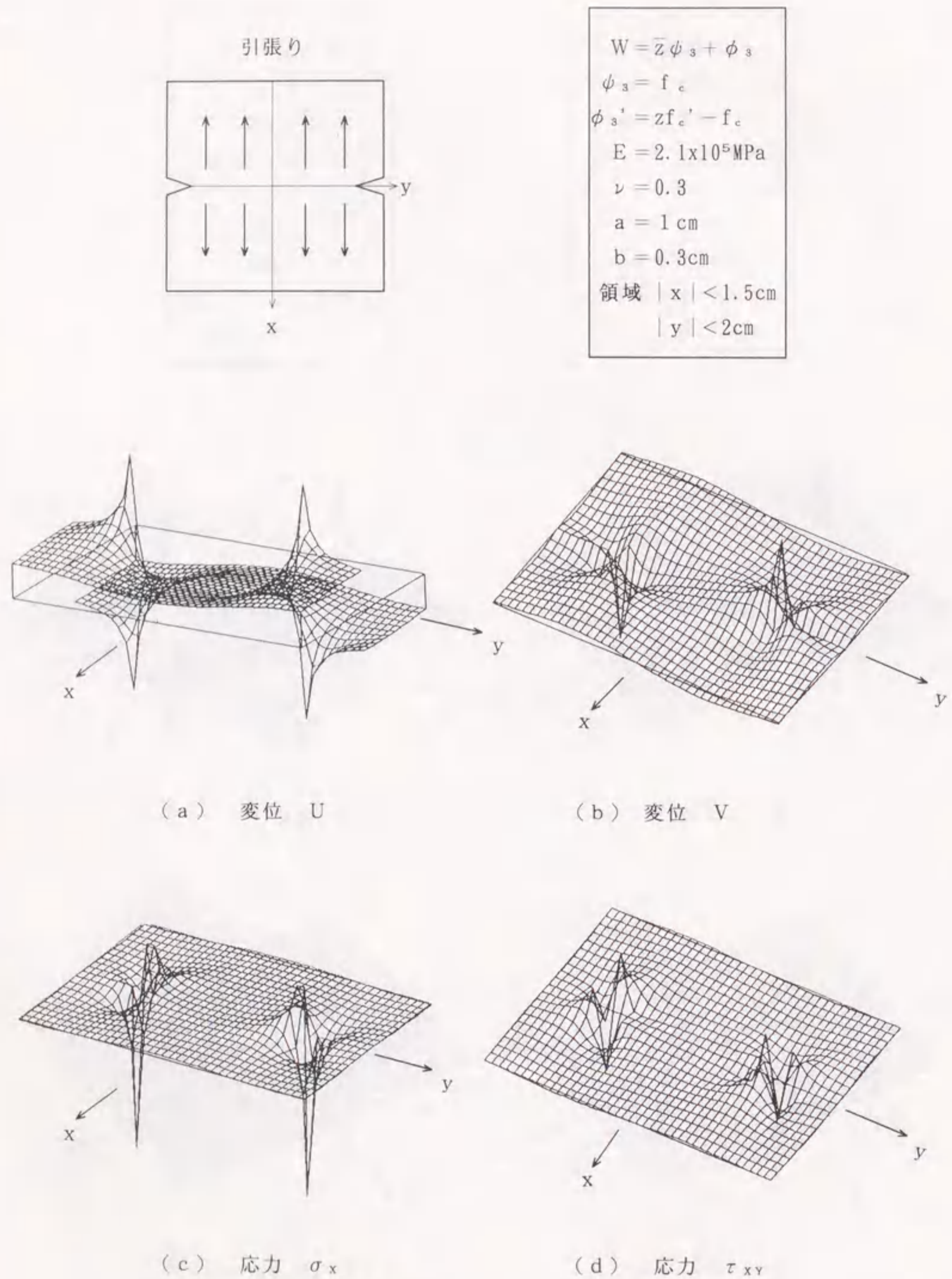


図-4.3 平滑化された基本解 (その3)

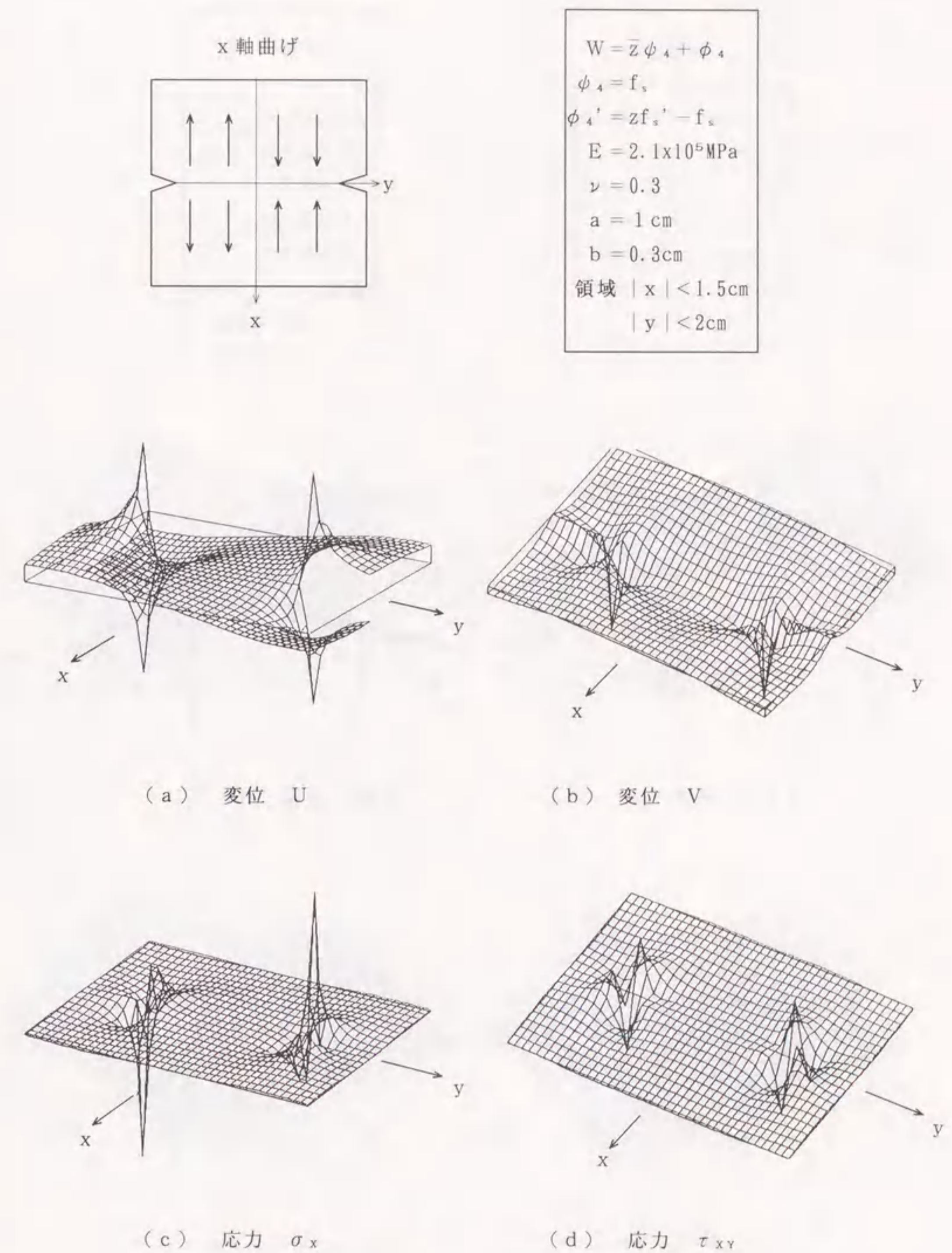
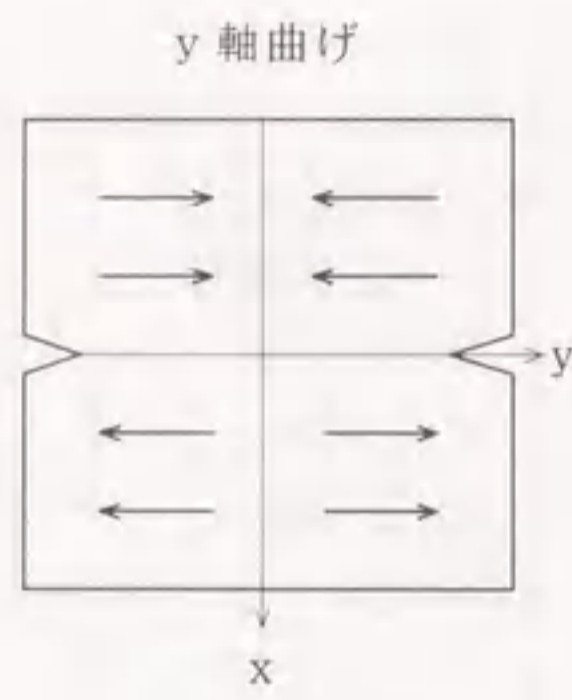


図-4.4 平滑化された基本解 (その4)



$$W = \bar{z}\phi_5 + \phi_6$$

$$\phi_5 = z f_c$$

$$\phi_6 = z^2 f_c$$

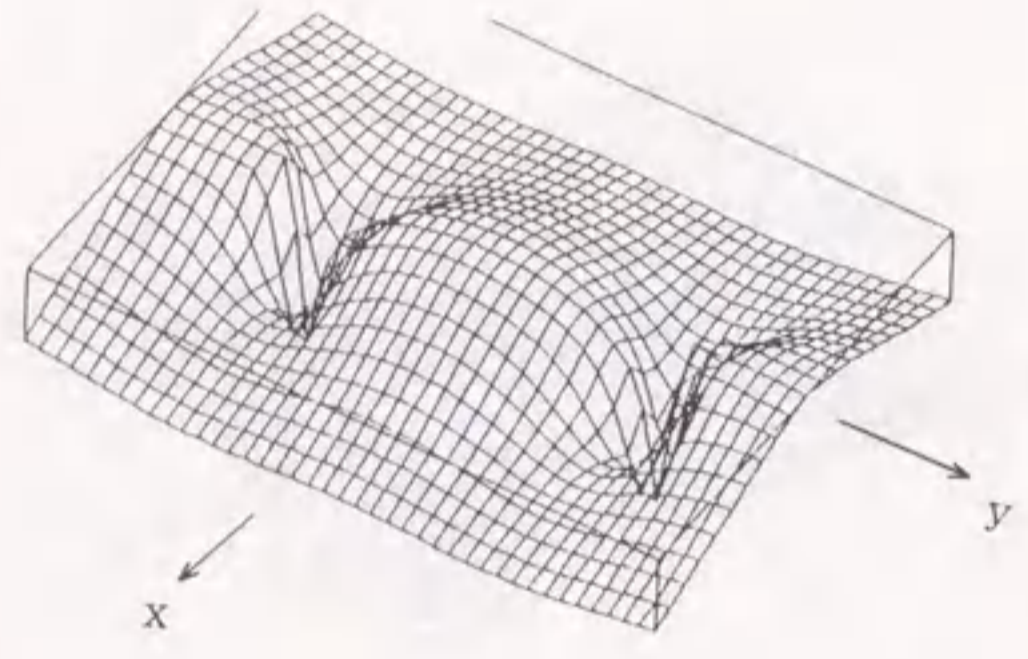
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

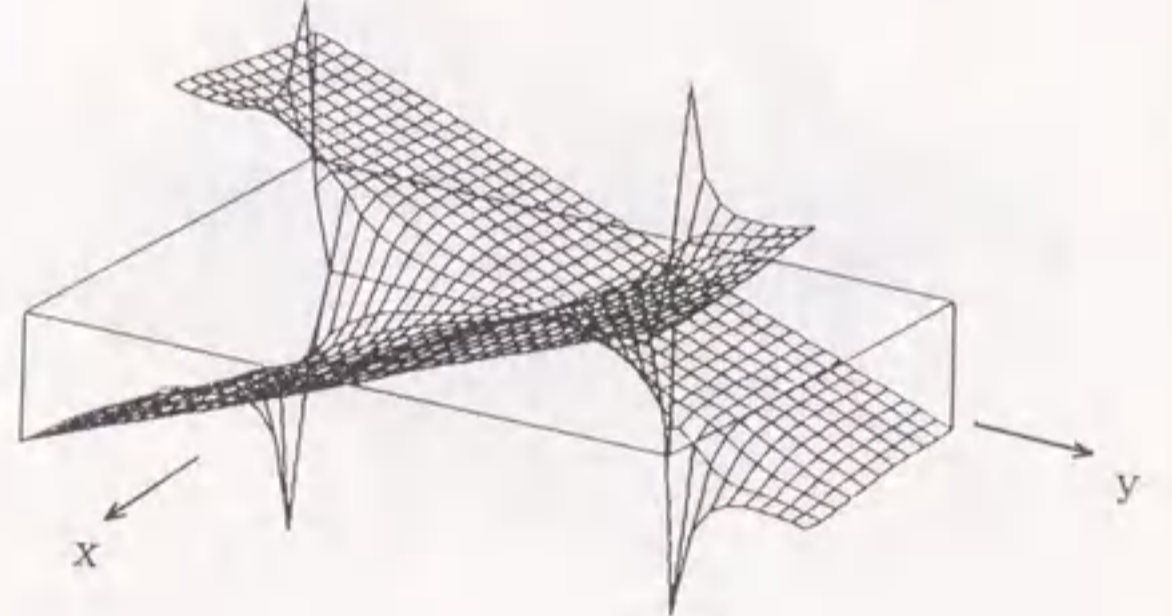
$$a = 1 \text{ cm}$$

$$b = 0.3 \text{ cm}$$

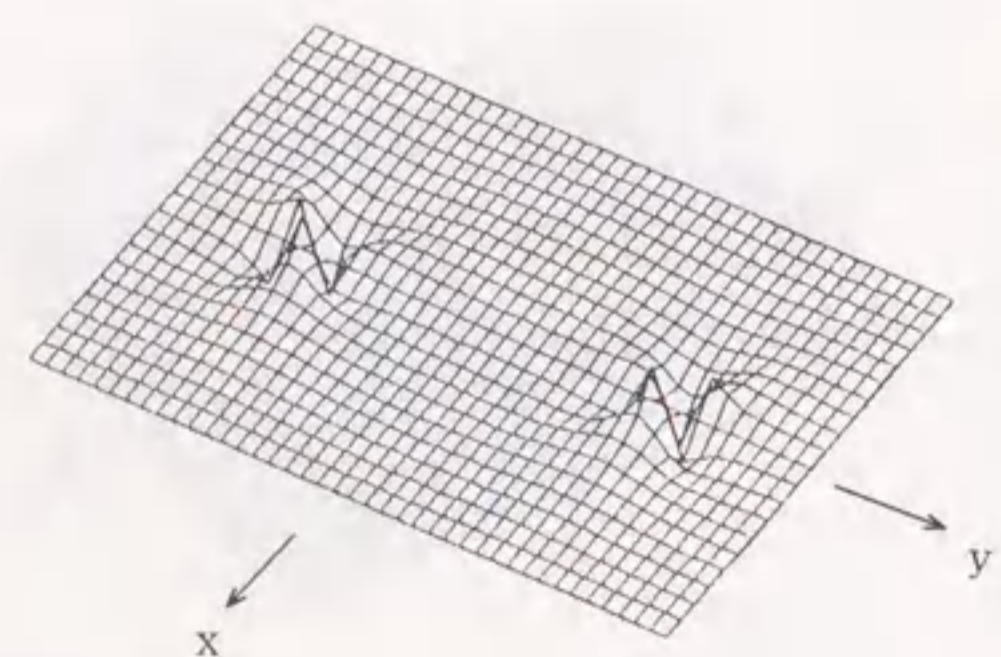
領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$



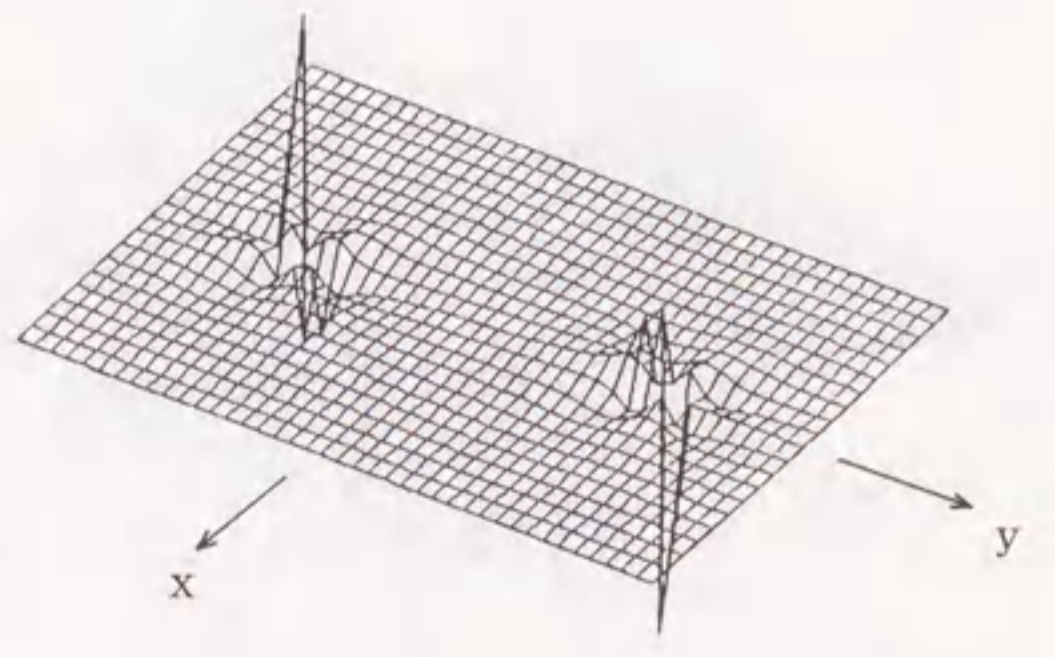
(a) 変位 U



(b) 変位 V

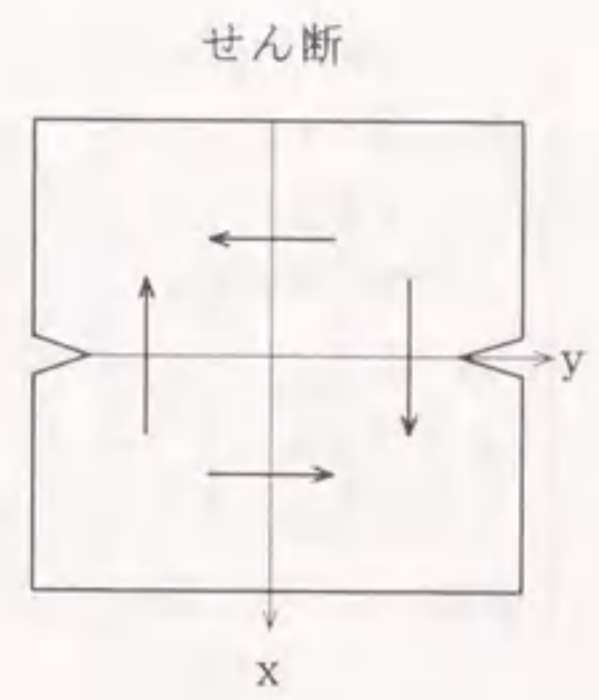


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-4.5 平滑化された基本解 (その5)



$$W = \bar{z}\phi_6 + \phi_6$$

$$\phi_5 = z f_s$$

$$\phi_6 = z^2 f_s$$

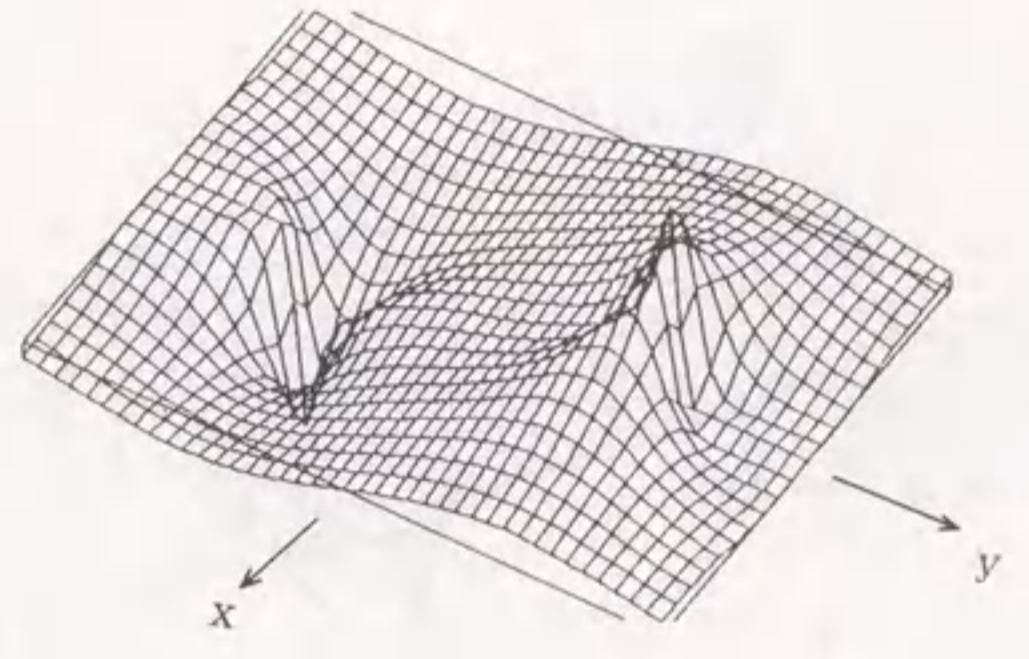
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

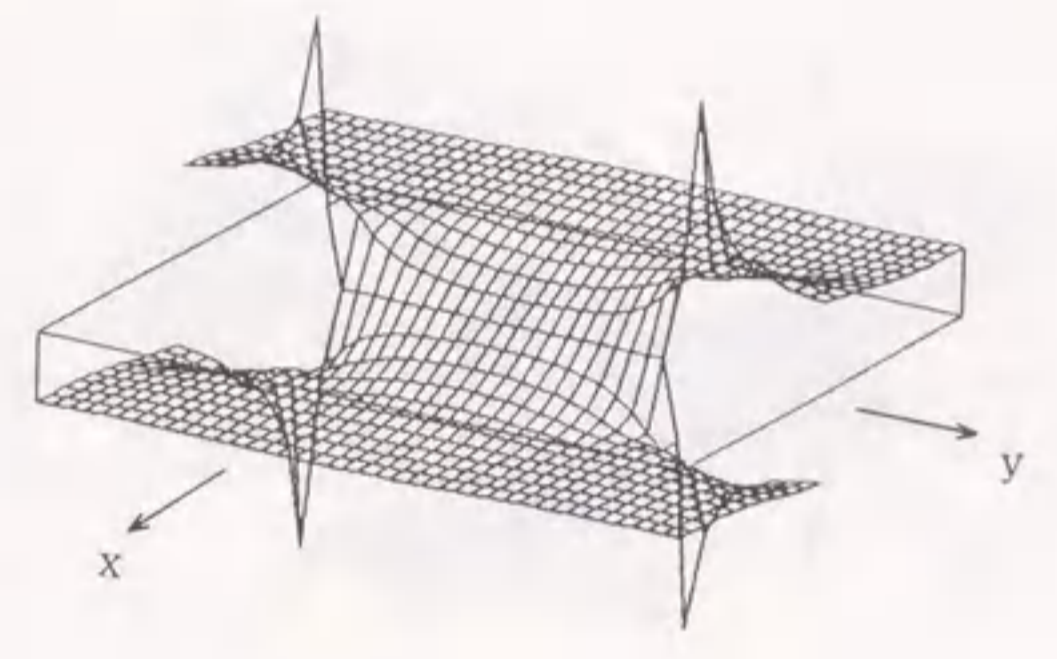
$$a = 1 \text{ cm}$$

$$b = 0.3 \text{ cm}$$

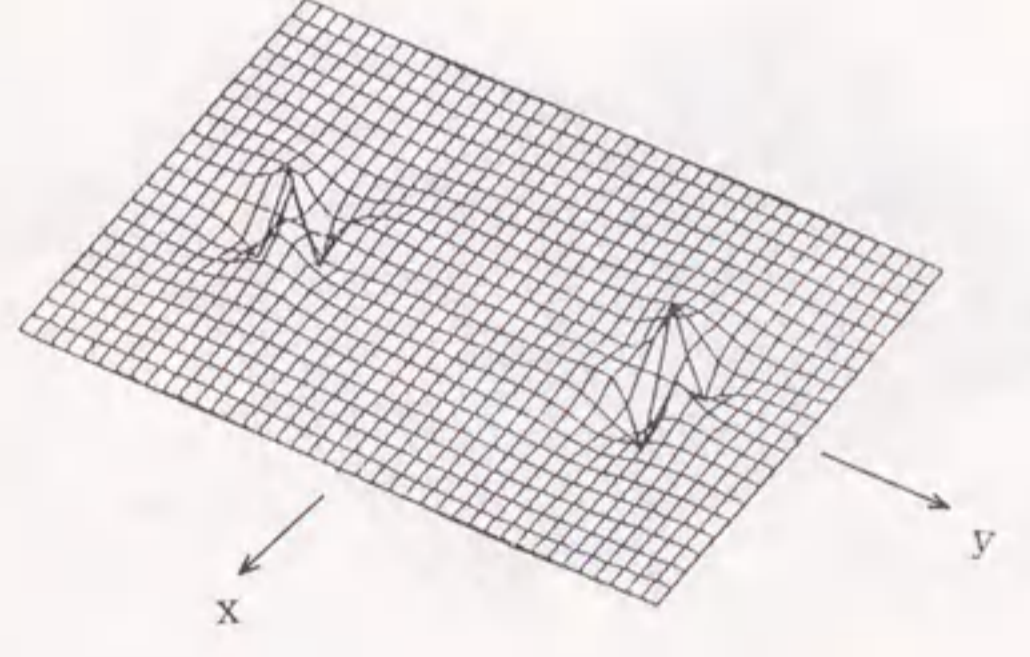
領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$



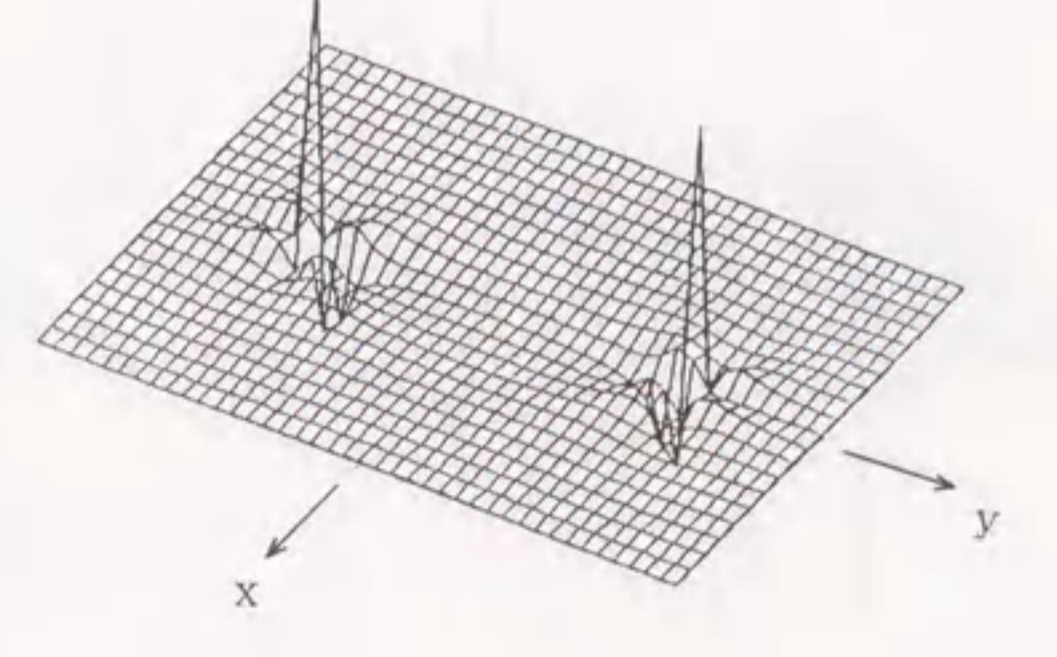
(a) 変位 U



(b) 変位 V

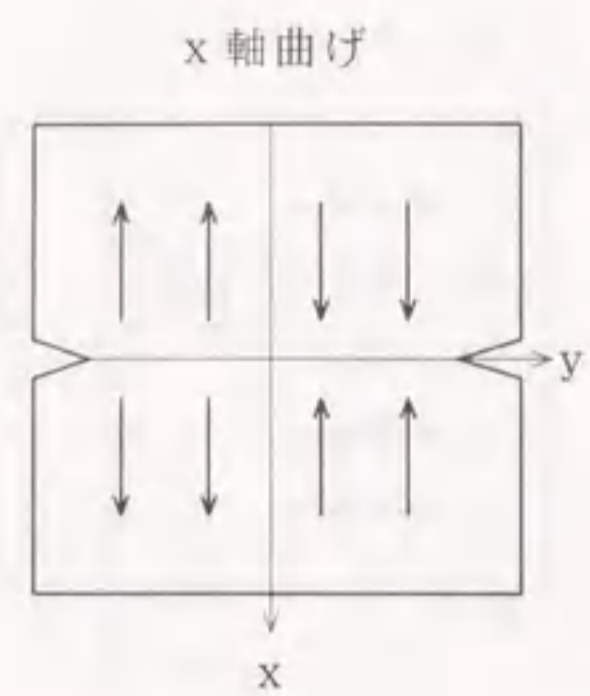


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-4.6 平滑化された基本解 (その6)



$$W = \bar{z}\phi_7 + \phi_7$$

$$\phi_7 = i z f_c$$

$$\phi_7' = i z^2 f_c'$$

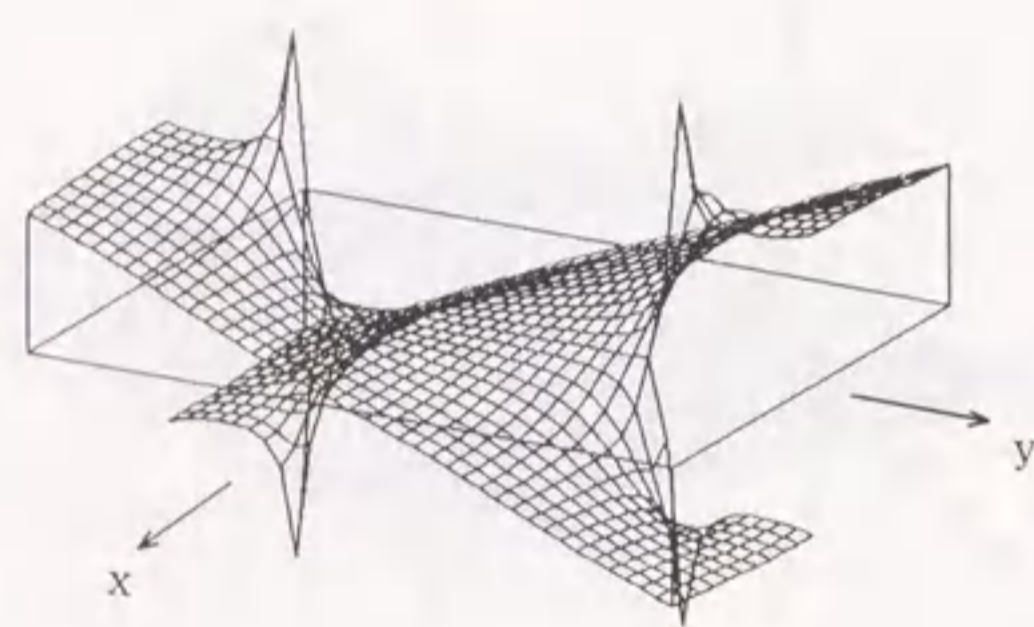
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

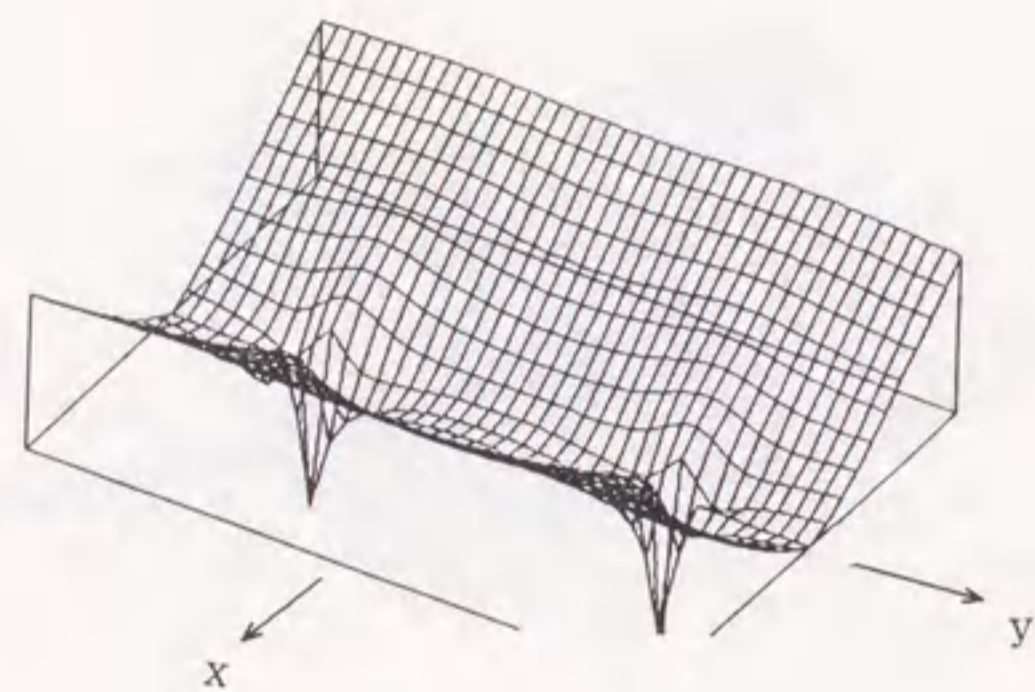
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

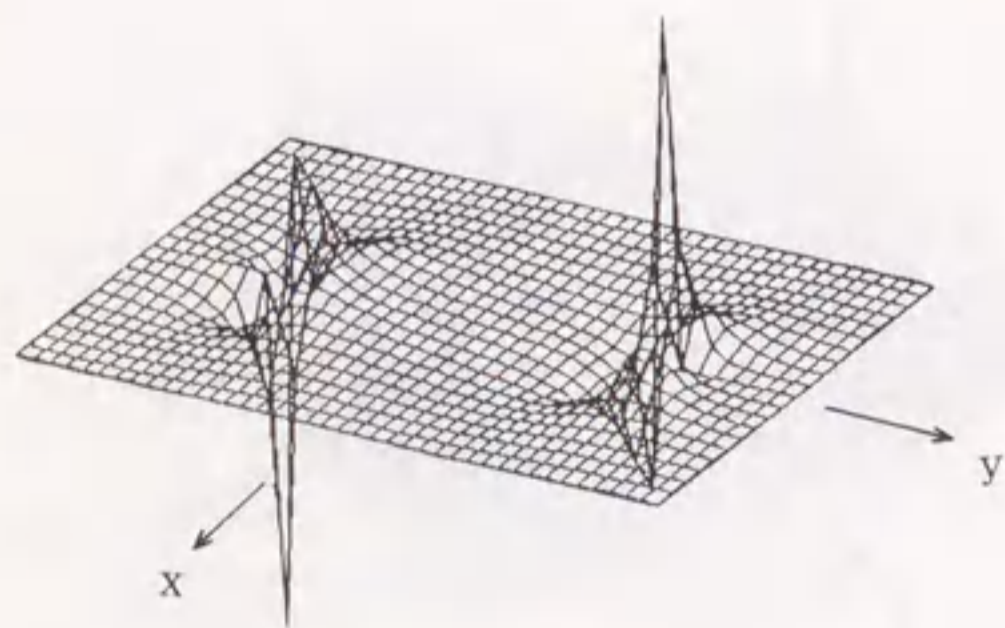
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



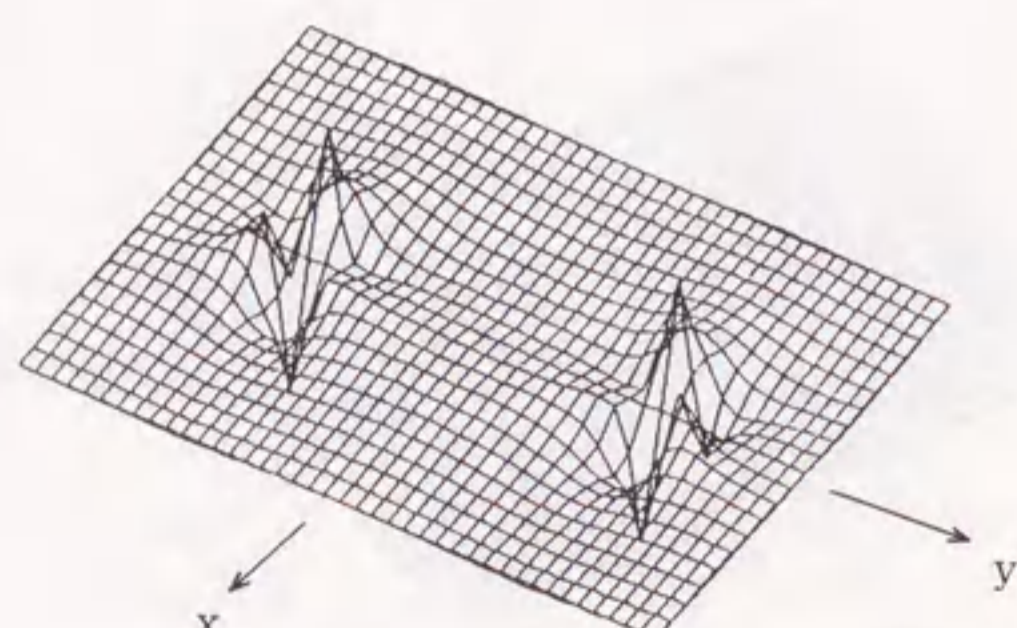
(a) 変位 U



(b) 変位 V

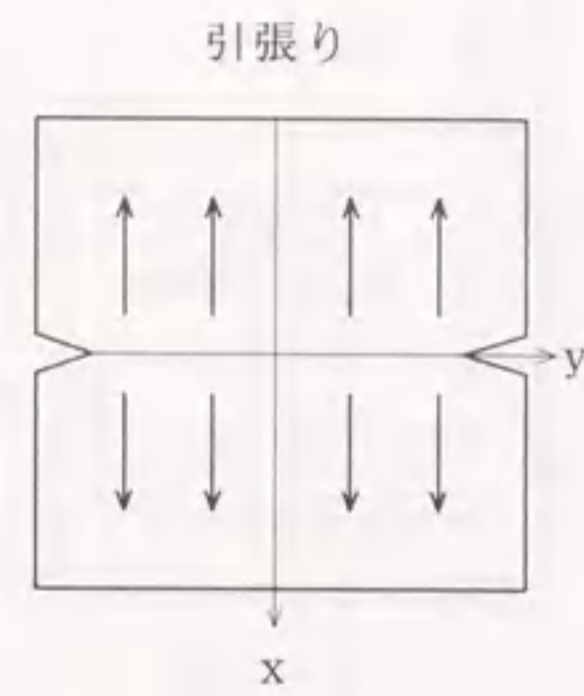


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-4.7 平滑化された基本解 (その7)



$$W = \bar{z}\phi_8 + \phi_8$$

$$\phi_8 = i z f_s$$

$$\phi_8' = i z^2 f_s'$$

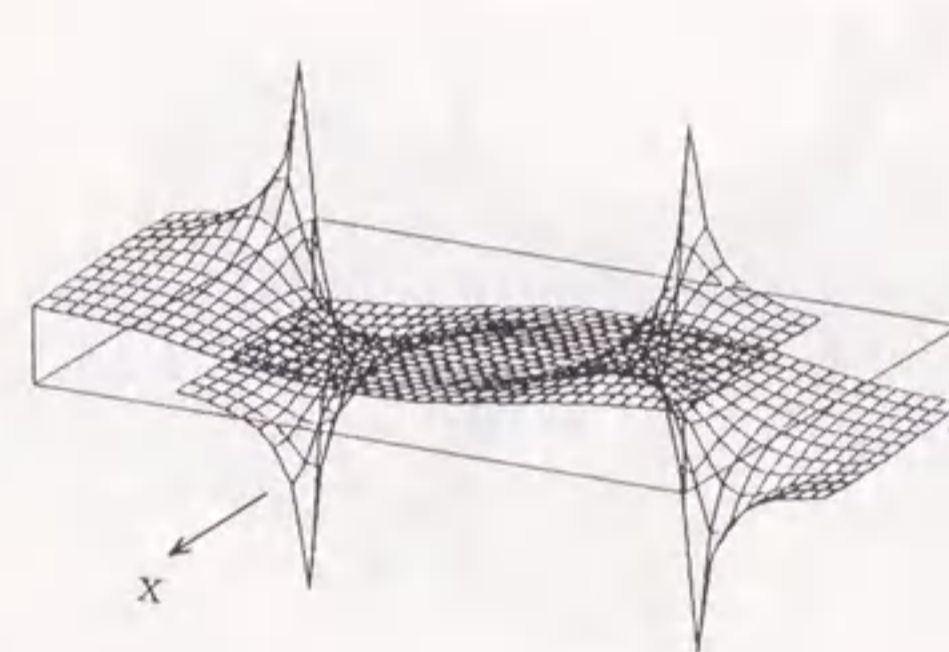
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

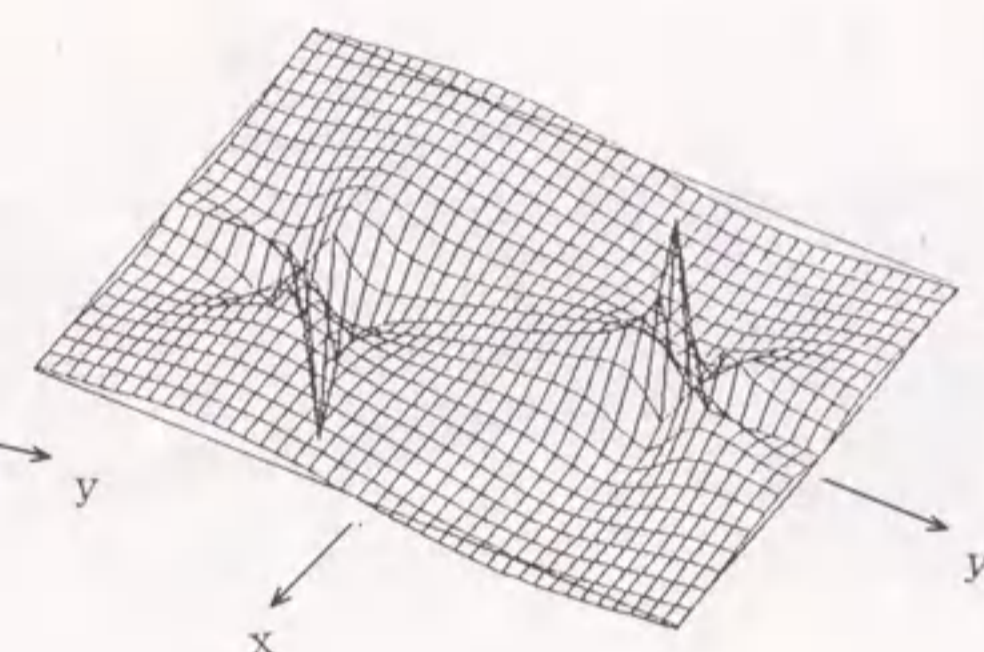
$$a = 1 \text{cm}$$

$$b = 0.3 \text{cm}$$

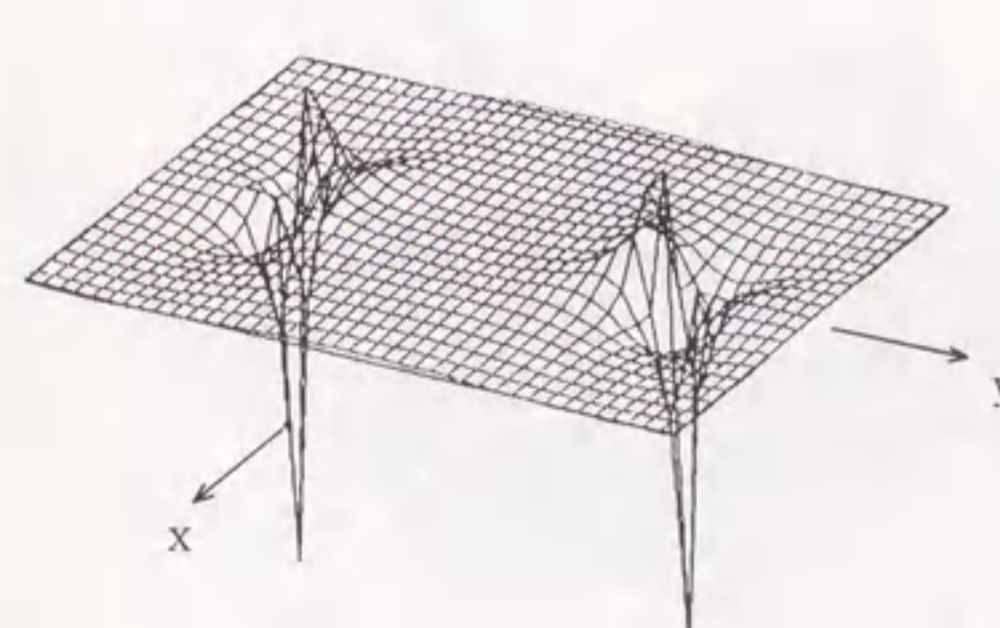
領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



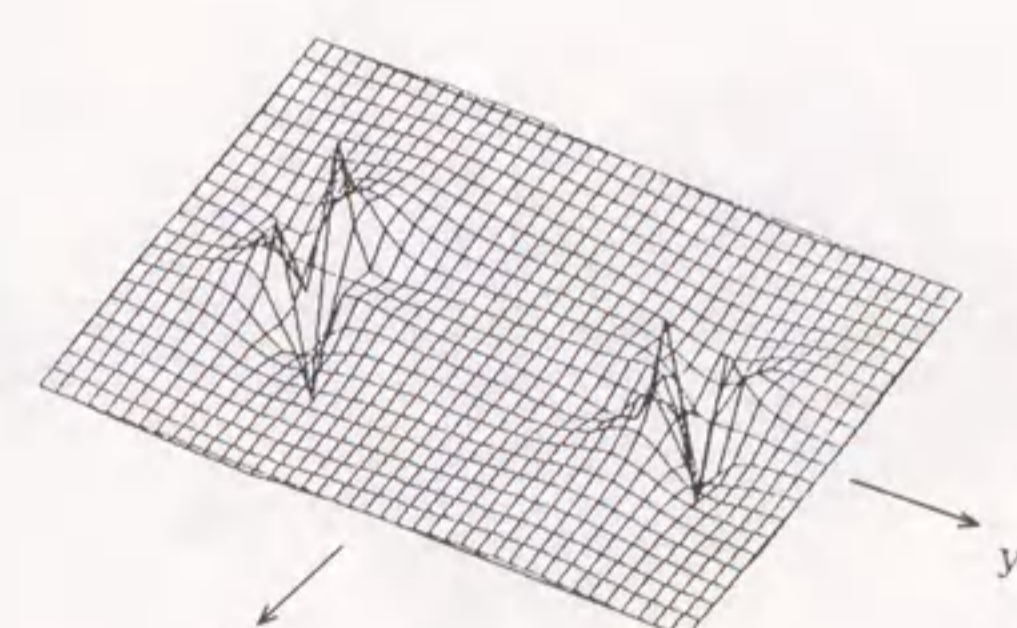
(a) 変位 U



(b) 変位 V

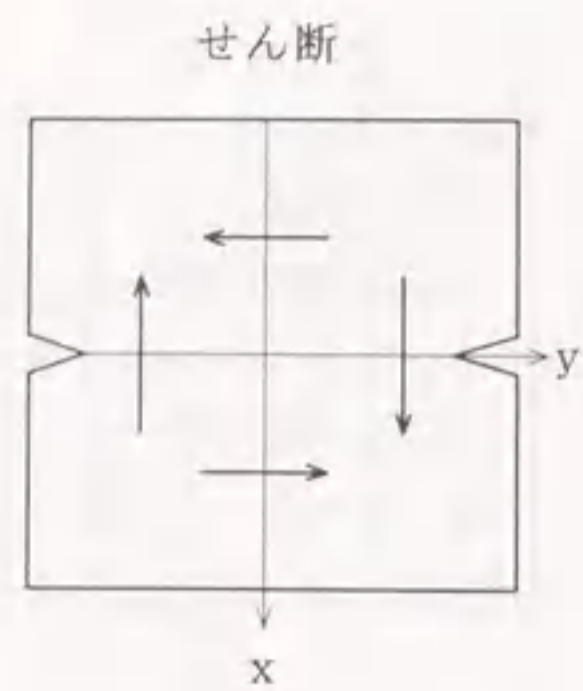


(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-4.8 平滑化された基本解 (その8)



$$W = \bar{z}\phi_0 + \phi_0$$

$$\phi_0 = i z^2 f_c$$

$$\phi_0' = i z^3 f_c$$

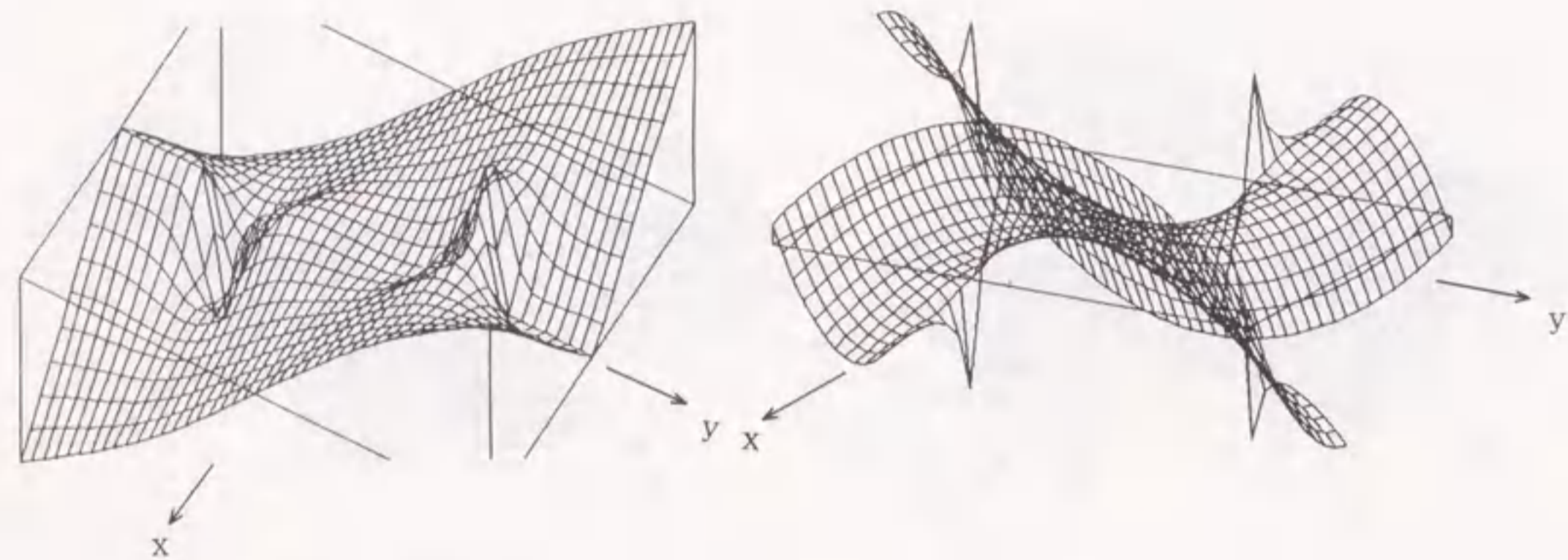
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 1 \text{cm}$$

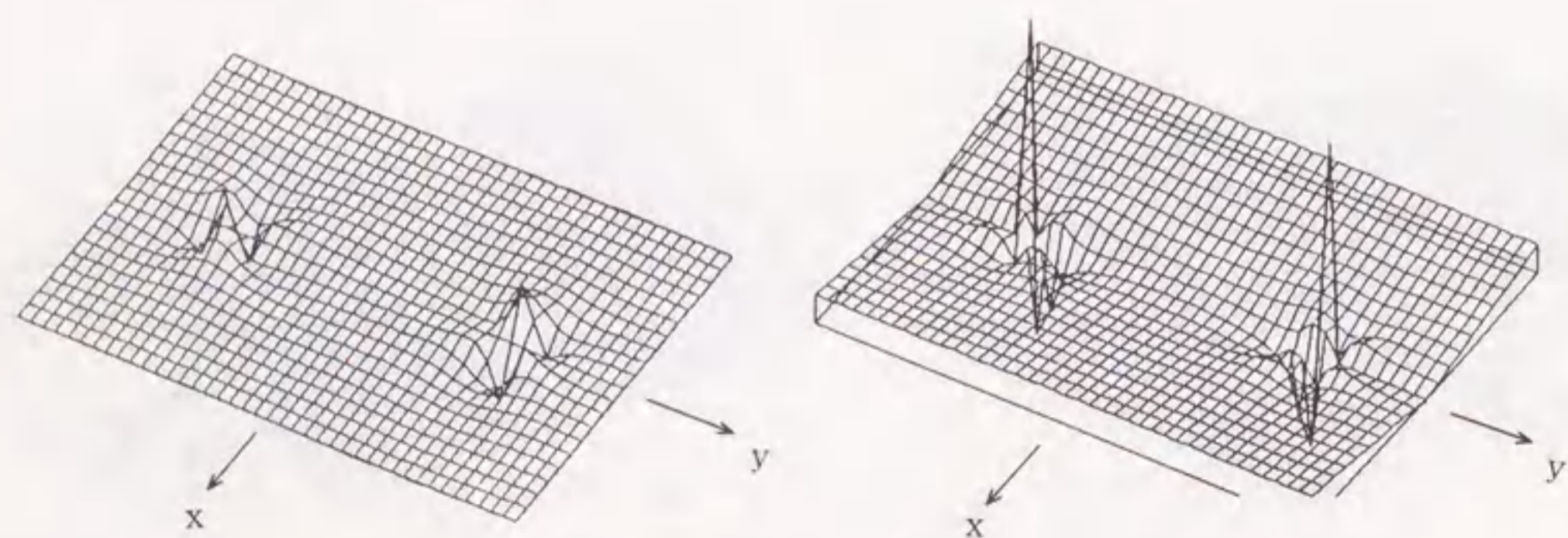
$$b = 0.3 \text{cm}$$

領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



(a) 変位 U

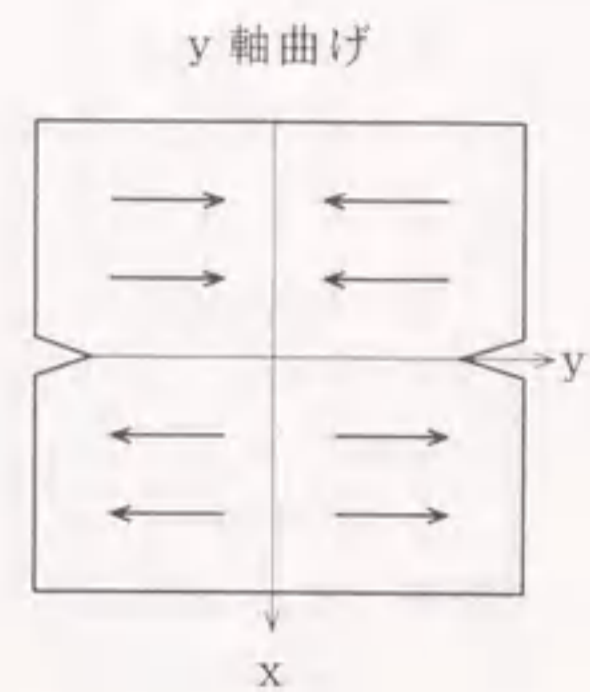
(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.9 平滑化された基本解 (その9)



$$W = \bar{z}\phi_{10} + \phi_{10}$$

$$\phi_{10} = i z^2 f_c$$

$$\phi_{10}' = i z^3 f_c$$

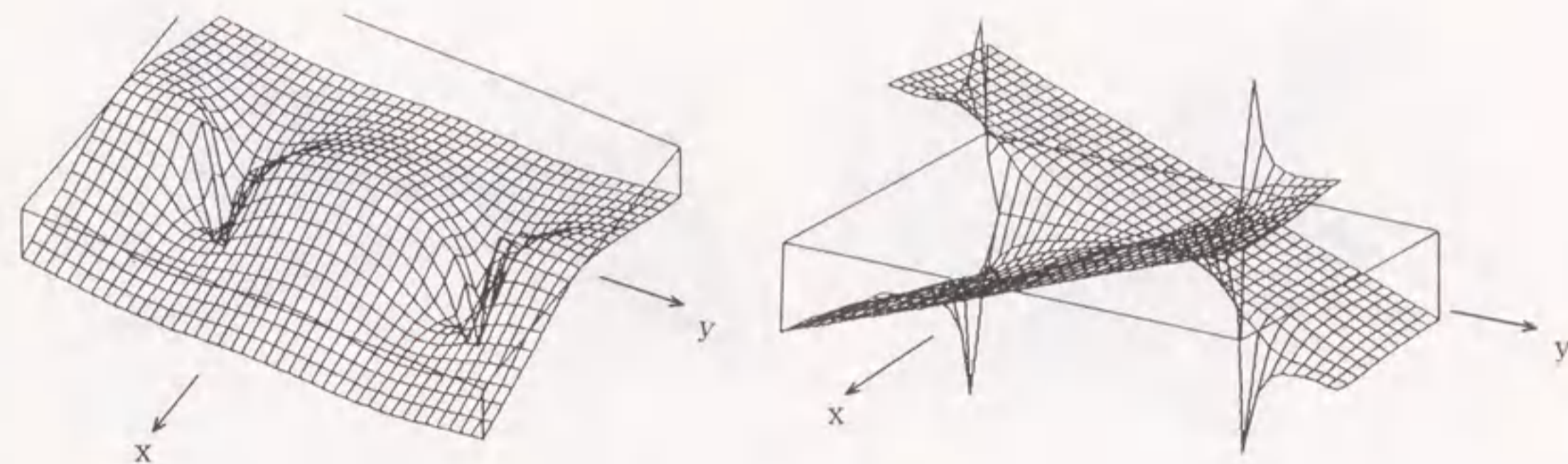
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 1 \text{cm}$$

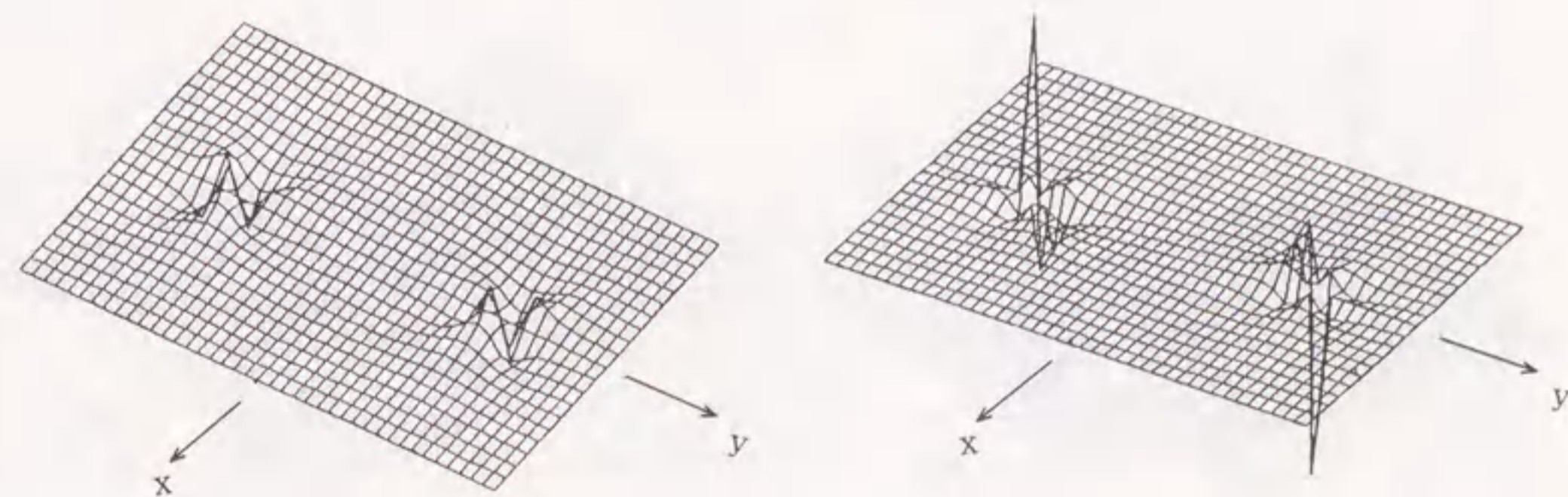
$$b = 0.3 \text{cm}$$

領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



(a) 変位 U

(b) 変位 V

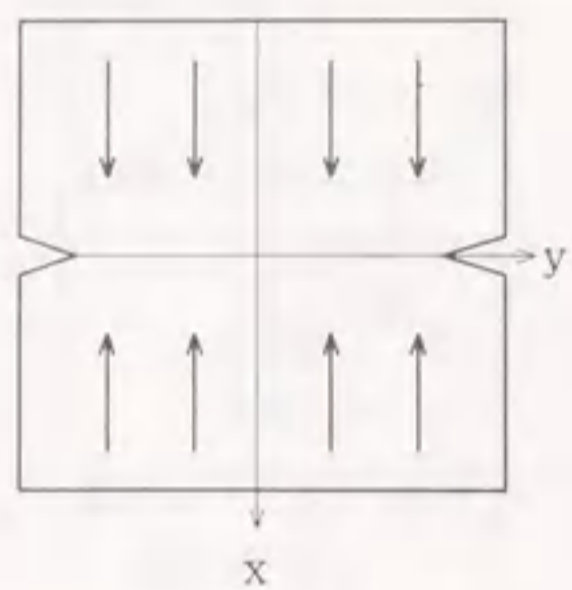


(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.10 平滑化された基本解 (その10)

引張り (圧縮)



$$W = \bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}$$

$$\phi_{11} = z^2 f_c$$

$$\phi_{11}' = z^2 f_c' + z^3 f_c''$$

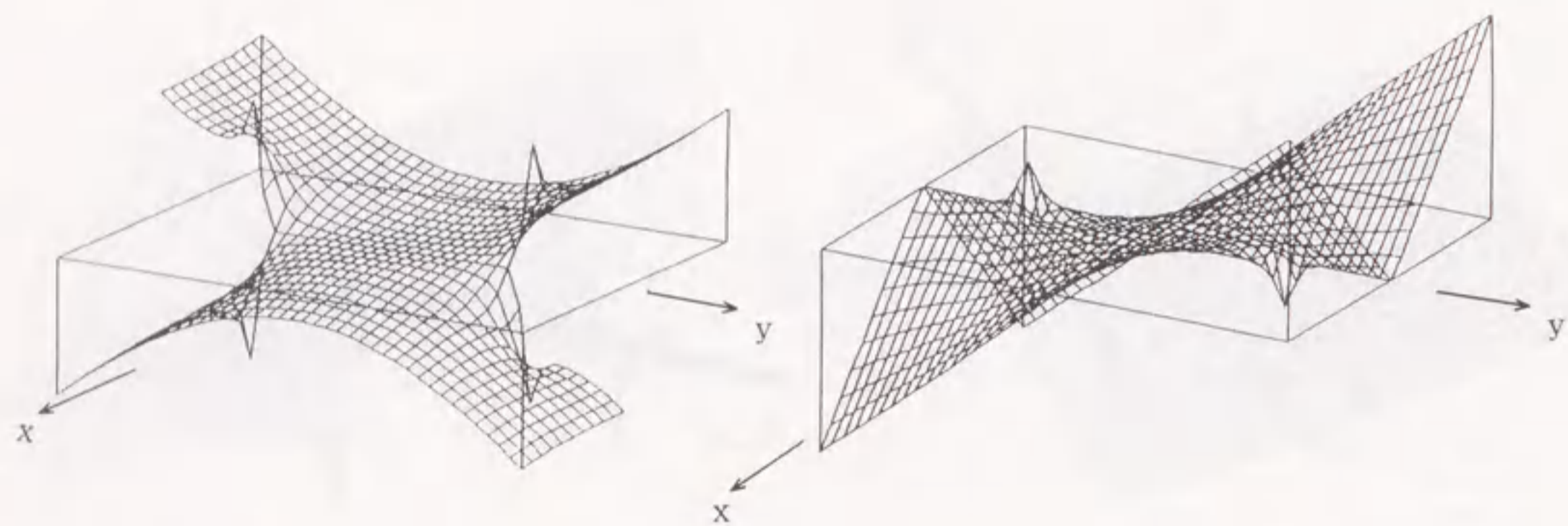
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 1 \text{cm}$$

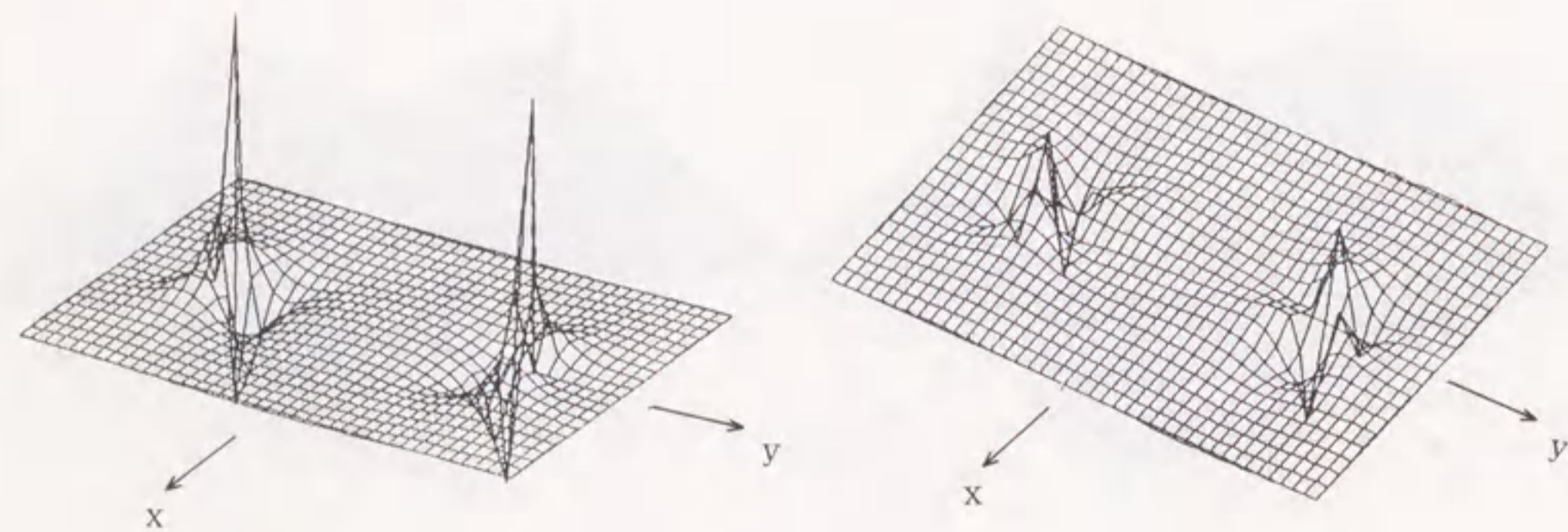
$$b = 0.3 \text{cm}$$

領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



(a) 変位 U

(b) 変位 V

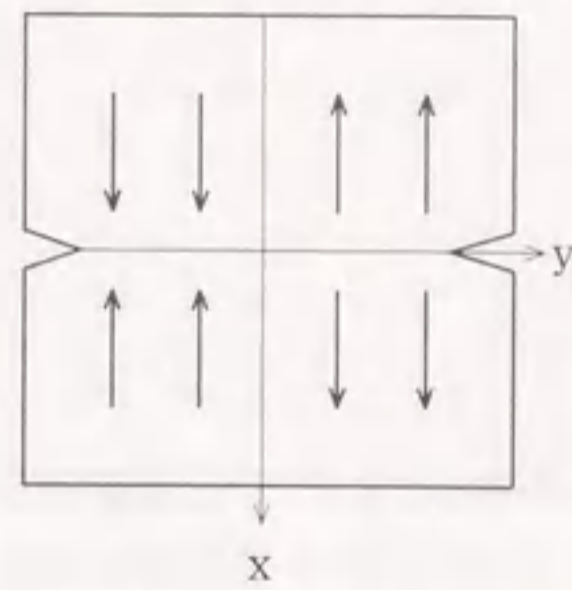


(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.11 平滑化された基本解 (その11)

x 軸曲げ



$$W = \bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}$$

$$\phi_{12} = z^2 f_s$$

$$\phi_{12}' = z^2 f_s' + z^3 f_s''$$

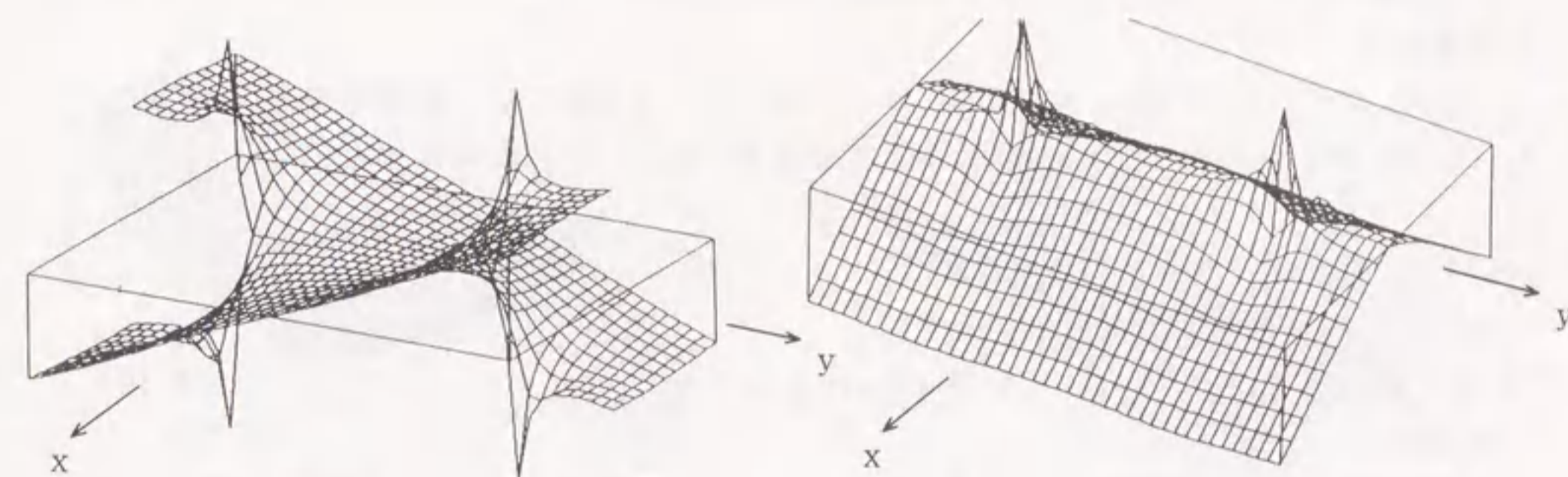
$$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$a = 1 \text{cm}$$

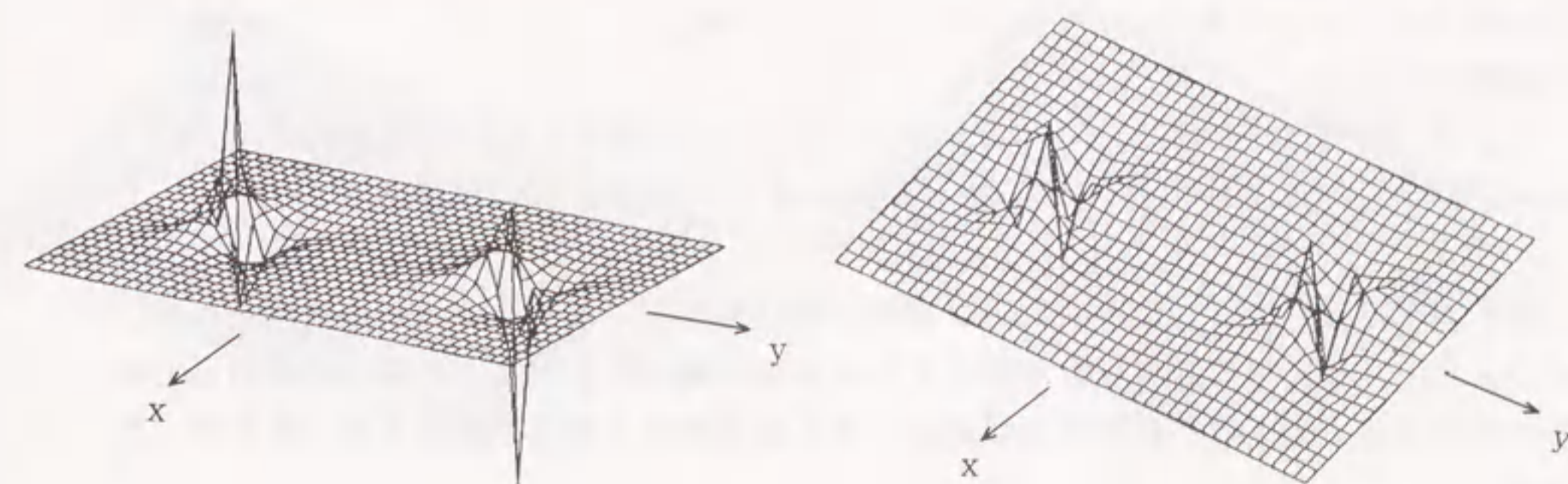
$$b = 0.3 \text{cm}$$

領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$



(a) 変位 U

(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.12 平滑化された基本解 (その12)

4.5 計算例

ここでは、前節で求めた平滑化された基本解（その1）～（その12）を重ね合わせて滑らかな開口形状を与える応力関数を導いてみる。

(1) 引張クラックの場合

表-4.2 の引張りの組合せをとり

$$W = D_3(\bar{z}\phi_3 + \phi_3) + D_8(\bar{z}\phi_8 + \phi_8) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (4-8)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_3 = 1.0$, $D_8 = -2.30$, $D_{11} = -1.26$ とすると、応力と変位は図-4.16 のような形状となる。

(2) せん断クラックの場合

表-4.2 のせん断の組合せをとり

$$W = D_1(\bar{z}\phi_1 + \phi_1) + D_6(\bar{z}\phi_6 + \phi_6) + D_9(\bar{z}\phi_9 + \phi_9) \quad (4-9)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_2 = 1.0$, $D_5 = 2.30$, $D_{10} = -1.26$ とすると、応力と変位は図-4.17 のような形状となる。

(3) x軸曲げクラックの場合

表-4.2 のx軸曲げの組合せをとり

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (4-10)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_4 = 1.0$, $D_7 = -1.1$, $D_{12} = -0.2$ とすると、応力と変位は図-4.18 のような形状となる。

(4) y軸曲げクラックの場合

表-4.2 のy軸曲げの組合せをとり

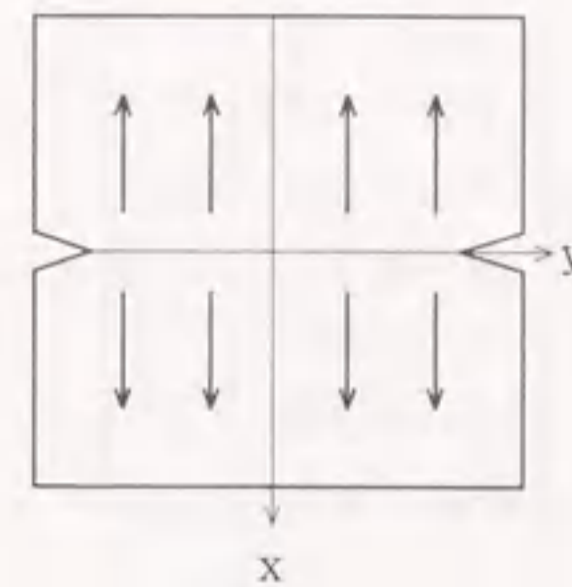
$$W = D_2(\bar{z}\phi_2 + \phi_2) + D_5(\bar{z}\phi_5 + \phi_5) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (4-11)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $a = 1 \text{cm}$, $b = 0.3 \text{cm}$ とし、未定係数を $D_4 = 1.0$, $D_7 = 1.1$, $D_{12} = -0.2$ とすると、応力と変位は図-4.19 のような形状となる。

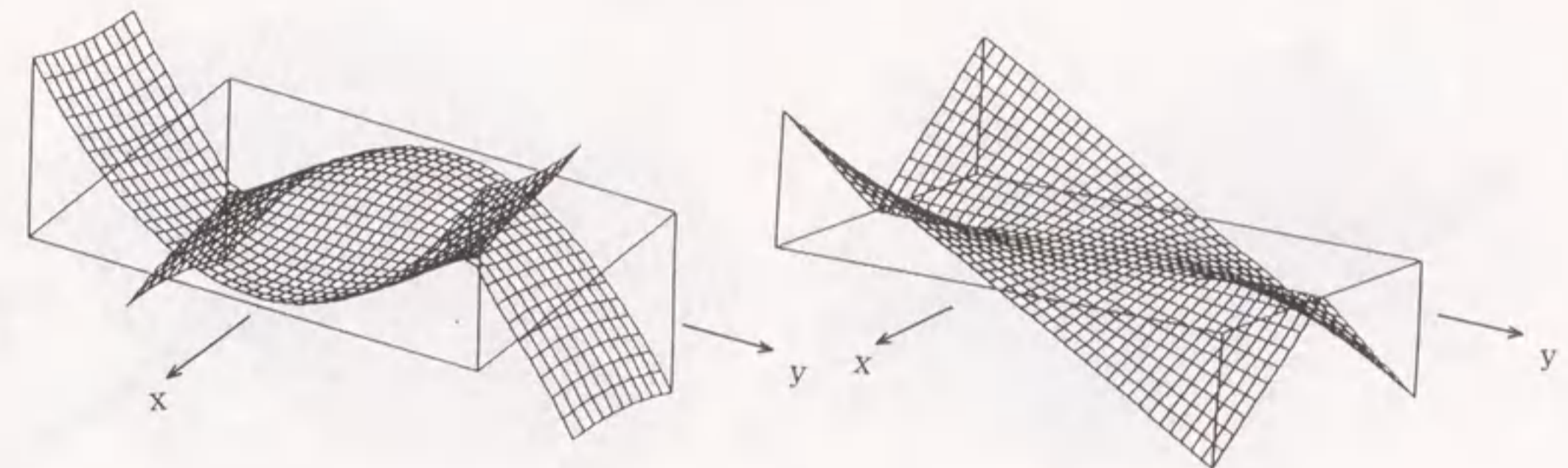
基本解それぞれではプロセスゾーン部分の開口変位が尖りやくい込みの状況を生じ、応力 σ_x の分布にも不自然な点が現れているものが見られるがしかし以上の重ね合わせの計算例では、見事に不自然さが解消して滑らかな変位と応力を生じさせた解となっている。

引張り



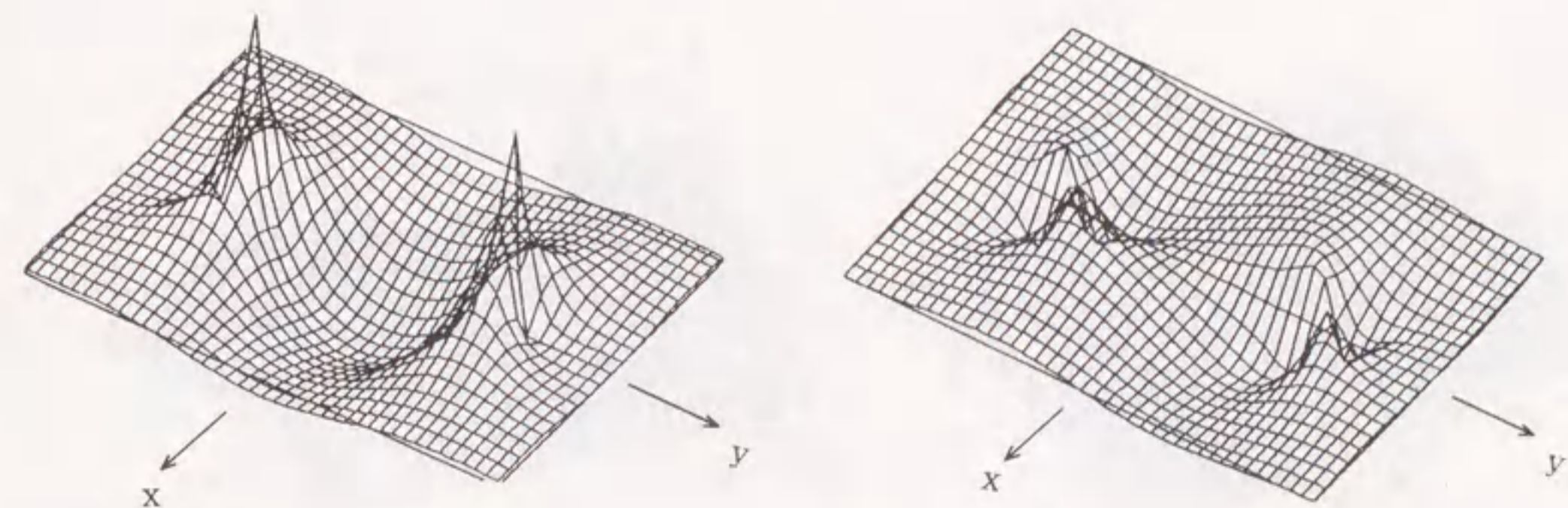
$D_3 = 1.0$
 $D_8 = -2.3$
 $D_{11} = -1.26$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{cm}$
 $b = 0.3 \text{cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 2 \text{cm}$

$$W = D_3(\bar{z}\phi_3 + \phi_3) + D_8(\bar{z}\phi_8 + \phi_8) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (4-8)$$



(a) 変位 U

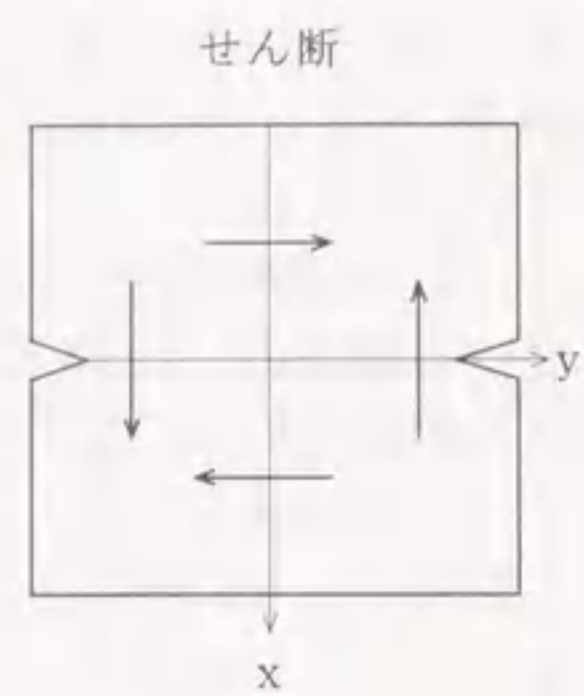
(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

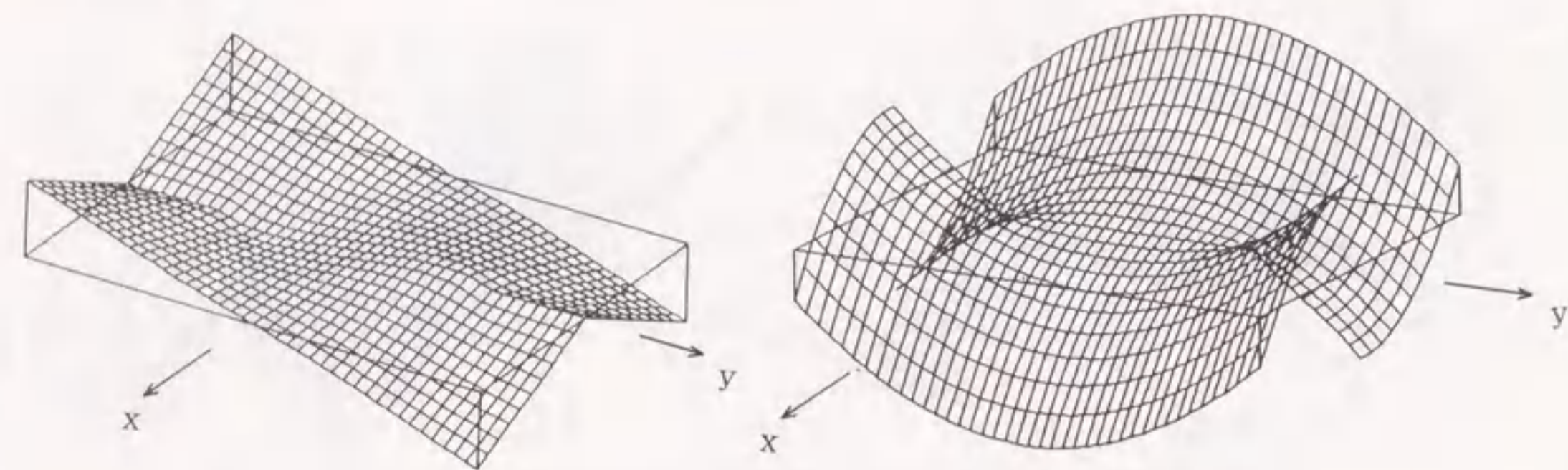
(d) 応力 τ_{xy}

図-4.14 引張りクラックの解



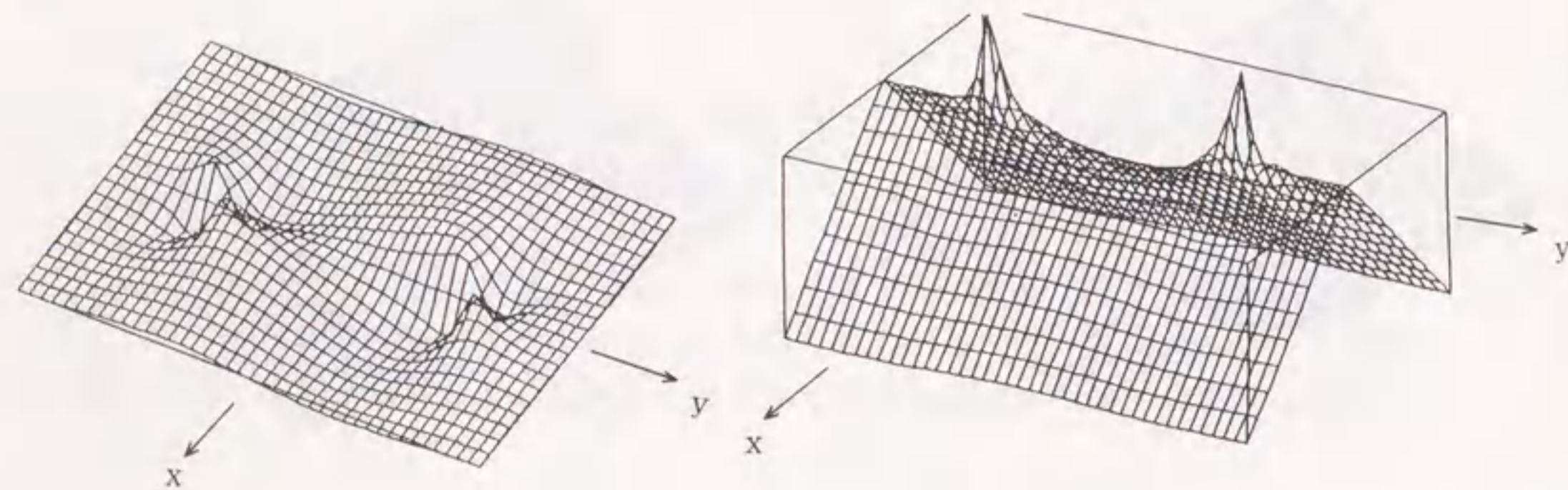
$D_1 = 1.0$
 $D_6 = 2.3$
 $D_9 = -1.26$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$

$$W = D_1(\bar{z}\phi_1 + \phi_1) + D_6(\bar{z}\phi_6 + \phi_6) + D_9(\bar{z}\phi_9 + \phi_9) \quad (4-9)$$



(a) 変位 U

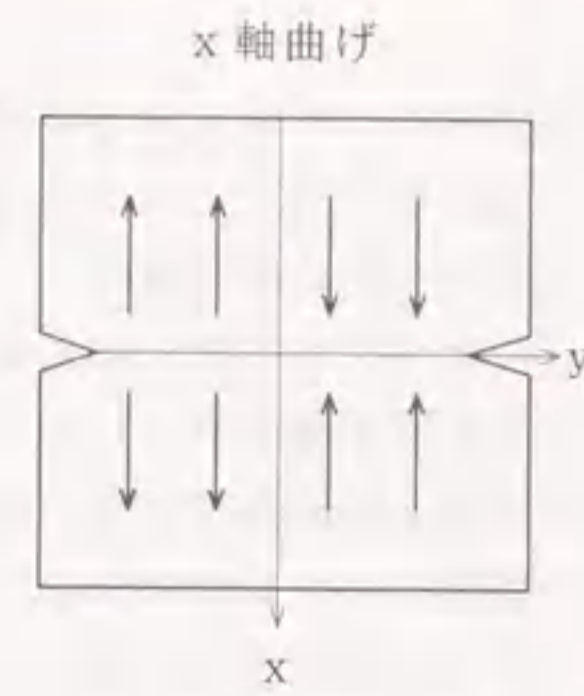
(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

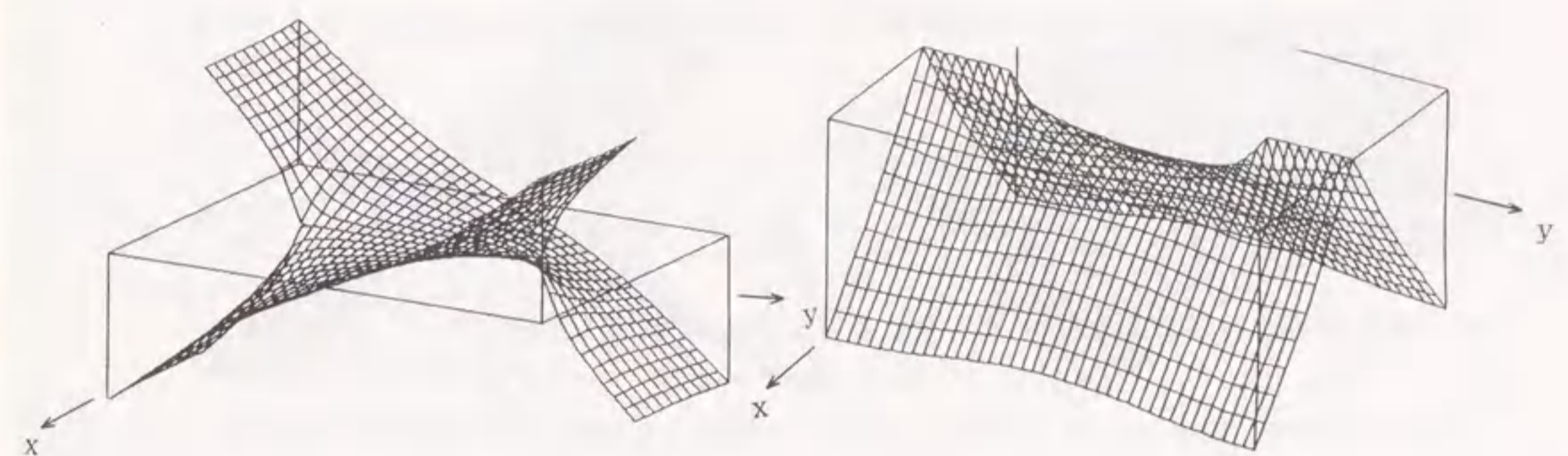
(d) 応力 τ_{xy}

図-4.15 せん断クラックの解



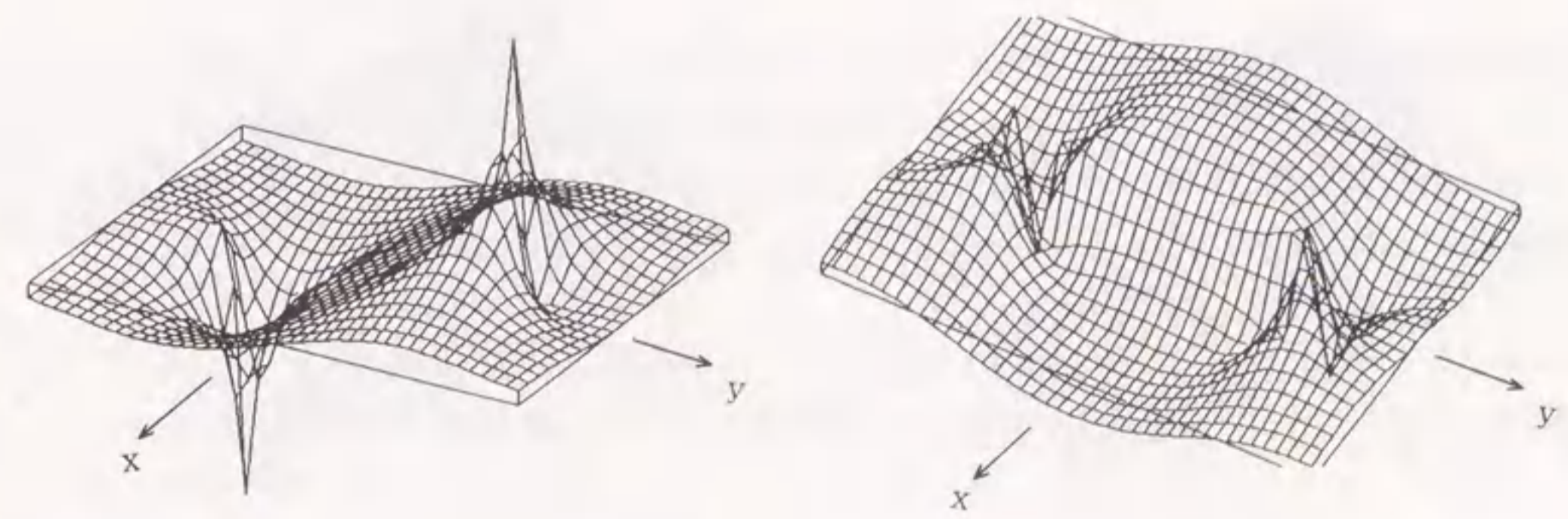
$D_4 = 1.0$
 $D_7 = -1.1$
 $D_{12} = -0.2$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \quad (4-10)$$



(a) 変位 U

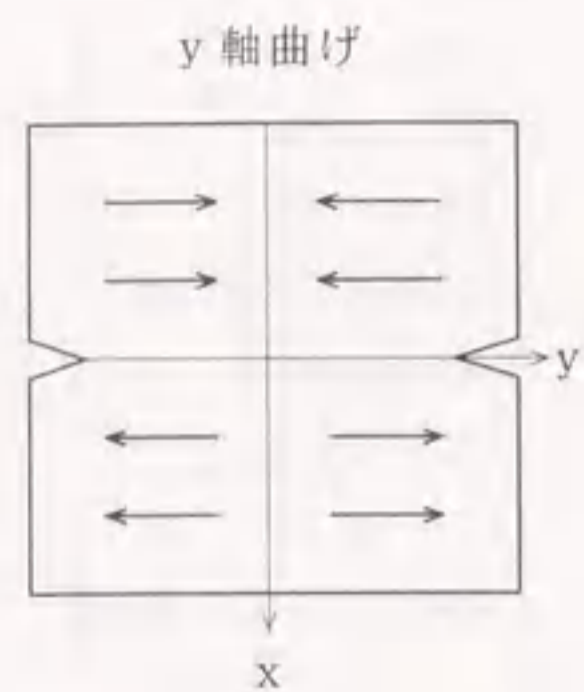
(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x

(d) 応力 τ_{xy}

図-4.16 x 軸曲げクラックの解



$D_2 = 1.0$
 $D_5 = 1.1$
 $D_{11} = -0.2$
 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 2 \text{ cm}$

$$W = D_2(\bar{z}\phi_2 + \phi_2) + D_5(\bar{z}\phi_5 + \phi_5) + D_{11}(\bar{z}\phi_{11} + \phi_{11}) \quad (4-11)$$

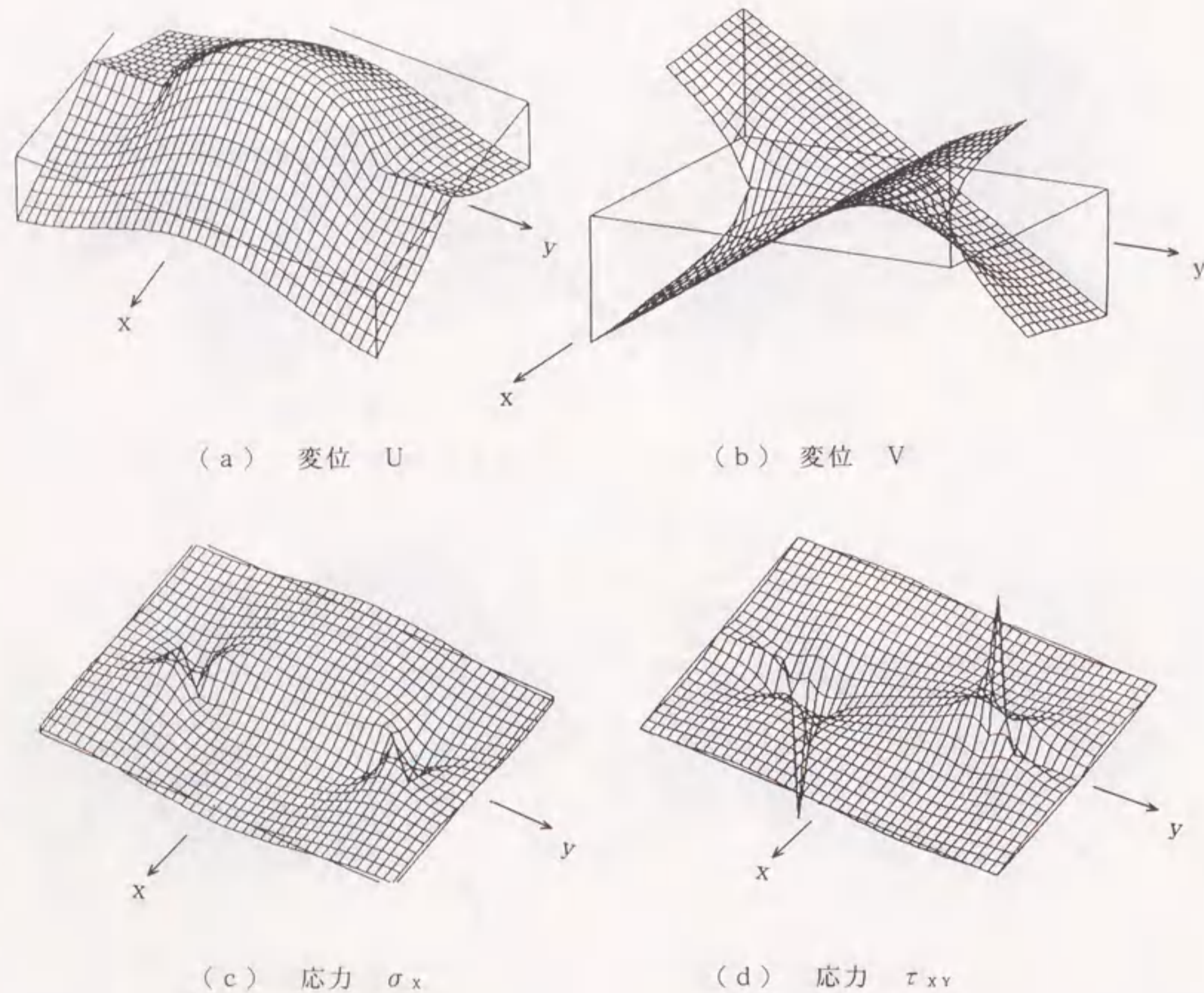


図-4.17 y 軸曲げクラックの解

4.6 まとめ

本章の特色を要約すると次の通りである。

無限板のクラックの解のみならず有限連続板のクラックまでも含めた応力関数の基本 4 形式 (引張り, せん断, x 軸曲げ, y 軸曲げ) を一括構成することにより, 前節に述べた直線上中央クラックの解 12 組のほかに, 更に有限連続板の (外側)クラックについても基本解 12 組を導いた。また, これらを複数組み合わせることによって, 有限で滑らかな応力集中を持つ応力関数を導いた。

前節でも述べたように, 岩盤やコンクリート等の材料では, クラック先端における無限大の応力集中は不適當である。また Dugdale の解⁴⁾ は塑性域を解析するには好都合であるが, 応力が緩やかに立ち上がる部分が無く, かつ平均応力がいかに小さくとも σ_{ya} が生じるという点は不自然であろう。たとえばコンクリートや岩盤に適用する場合には, 著者等が導いた応力集中が緩やかに立ち上がる関数の方が合理的であろう。この関数は, 境界面亀裂の解にも活用し得る^{5), 6)}。すなわち土木工学の分野で対象とする材料のクラック解析用としては望ましい関数を導き得たと思われる。

参考文献

- 1) 栖原秀郎・中川建治 : 亀裂先端で有限な応力集中を構成する応力関数に関する研究, 土木学会論文集, No. 501/ I-29, pp65-74, 1994.
- 2) H.M. Westergaard : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol. 61, A-49-53, 1939.
- 3) 村上裕則・大南正瑛 : 破壊力学入門, pp. 34-36, オーム社, 1979.
- 4) D.S. Dugdale : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 5) 村瀬安彦・中川建治 : 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No. 483/ I-26, pp. 41-49, 1994.
- 6) K. Fujii, K. Nakagawa, S. Duan and Y. Kato : Stress Function with Finite Magnitude of Stress Concentration around An Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol. 47, No. 6 pp. 881-891, 1994.
- 7) K. Fujii, S. Duan and K. Nakagawa : A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam, Eng. Fract. Mech., Vol. 40, No. 1, pp. 37-44, 1991.

第5章 従来の開口関数に基づいた境界近傍のクラックの応力関数

5.1 自由辺近傍のクラック解析¹⁾

(1) 概要

従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の実用例として、自由辺近傍のクラックや円孔が内圧を受けて開口する場合、および両側クラックを持つ板が一方のクラック部 $y = s$ で集中力 P を受けている問題の応力関数を導く。すなわち、種々のクラック等(中心クラック、両側クラック、円孔等)が存在する無限板のクラック近傍に自由辺を構成するような応力関数を導く方法について述べる。

(2) 自由辺の構成法

自由辺近傍のクラックあるいは円孔で集中荷重等の面内力を受ける半無限板の応力関数を構成法する方法は次のような重ね合わせ法を用いる。(図-5.1参照)

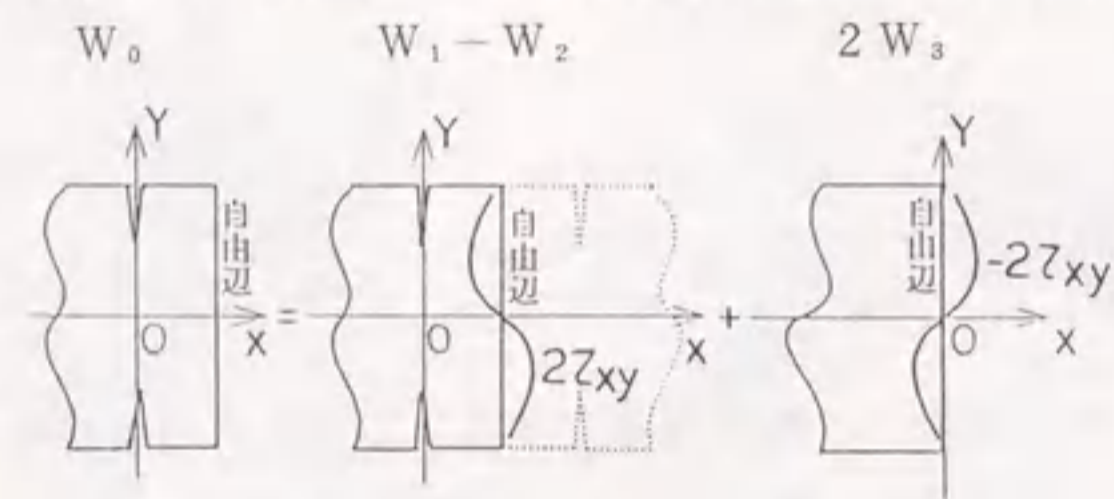


図-5.1 自由辺の構成法(両側クラックの例)

自由面近傍のクラックあるいは円孔を構成する応力関数 W_0 を次のように表す。

$$W_0 = W_1 - W_2 + 2W_3 \quad (5-1)$$

W_0 : 自由面近傍のクラックあるいは円孔を構成する応力関数

c_0 : y 軸(クラック中心線もしくは、円孔の中心位置)から自由面までの距離

W_1 : 無限板内に含まれるクラックあるいは円孔の開口のみを構成する基本応力関数

W_2 : W_1 を x 軸方向に $+2c_0$ シフトした曲面(よって、 $-W_2$ は $x = c_0$ 軸を回転軸として W_1 を反転した曲面を表す。)

τ_{xy0} : W_1 および W_2 による $x = c_0$ におけるせん断応力 τ_{xy}

W_3 : W_1 および W_2 によって $x = c_0$ に生じるせん断応力断力を打消す曲面(y 軸上で $\tau_{xy} = -\tau_{xy0}$, $\sigma_x|_{x=0} \equiv 0$ となる曲面)

すなわち、直線状の自由辺を有する半無限板の開口を表現する応力関数を構成するには、まず無限板中のクラックあるいは円孔を表す基本曲面 W_1 に $x = c_0$ 軸を対称軸として W_1 を反転した解 ($-W_2$) を重ね合わせる。ここで、 $x = c_0$ 軸上の σ_x は 0、 τ_{xy} は $2\tau_{xy0}$ となる。ただし、 τ_{xy0} は W_1 および W_2 の $x = c_0$ 軸上のせん断応力である。次に、

このせん断応力に対し半無限板の自由辺に $-\tau_{xy0}$ が作用したものである W_3 (せん断応力打消し曲面) を重ね合わせると、 $x = c_0$ 軸上で $\sigma_x = 0$ 、 $\tau_{xy} = 0$ を実現し自由面を構成できる。例えば中心クラック問題の W_1 および W_3 は、式(5-8)および(5-10)のように表される。ただし、 W_3 を重ねて自由辺を実現させると円孔やクラック部分における応力解放の条件 ($\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ 、あるいは $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$) が乱される。あたかも内圧 (σ_r , σ_x) を受けたようになるが、この応力分布は緩やかなものであるから、くさびによって作用させられた内圧(あるいは開口用外力)とみなして逆活用するのである。

(3) 開口用応力関数

前記の解析手法を用いて自由辺近傍に円孔、あるいは種々のクラック等が存在する場合の応力関数を導く。すなわち、各々の場合について、実質的には式(5-5)における W_1 と W_3 を求めればよいことになる (W_2 は、 W_1 が求められた時点で座標変換で求められる)。

[1] 自由辺近傍に円孔を持ち一様圧縮力 σ_0 が作用する解(図-5.2参照)

a) 無限板の中心にある円孔(半径 $r = a$)の周辺に一様圧縮力 σ_0 が作用する問題の応力関数は式(5-2)のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_1 &= 0 \\ W_1 &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= 0 \\ \phi &= -\sigma_0(a^2 \log z) \end{aligned} \quad (5-2)$$

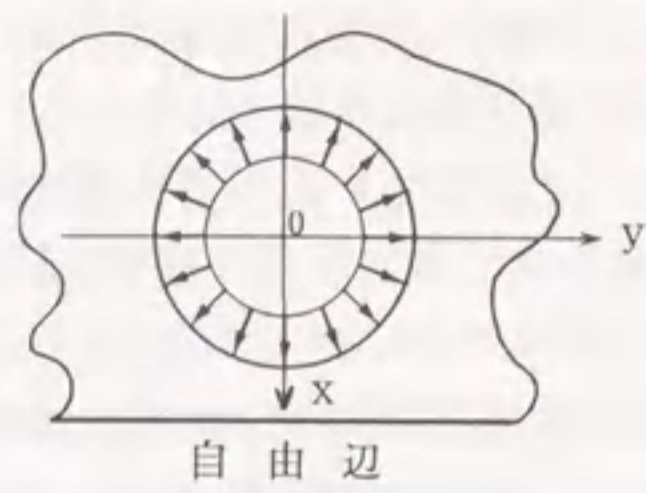
b) 無限板の円孔周辺に一様圧縮力 σ_0 が作用する問題の $x = c_0$ における、せん断応力を打消す応力関数は式(5-3)のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= \frac{-a^2}{2(z-c_0)} \\ \phi &= \frac{-a^2 z}{2(z-c_0)} \end{aligned} \quad (5-3)$$

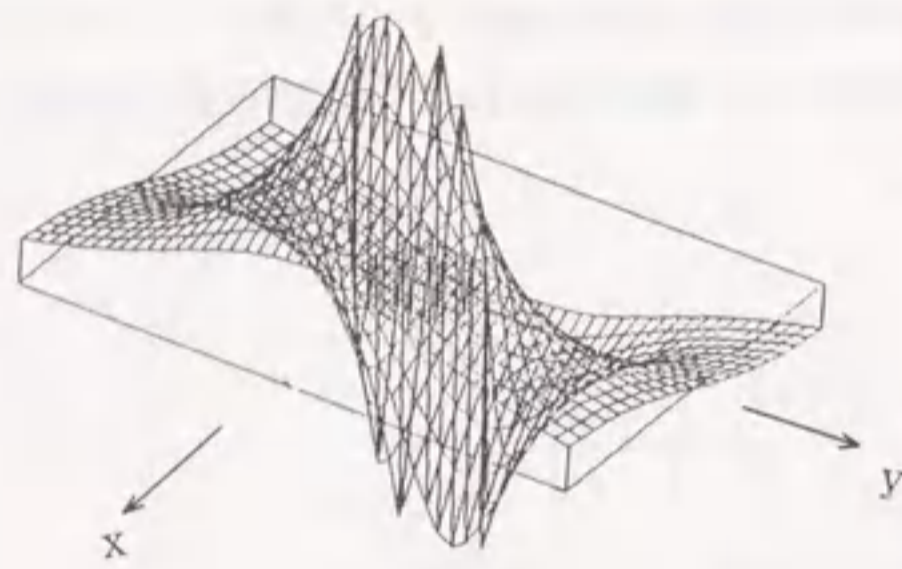
[2] 自由辺近傍に円孔を持ち $\sigma_0 \cos 2\theta$ を円孔周辺に受ける解

a) 無限板の中心にある円孔(半径 $r = a$)の周辺に $\sigma_0 \cos 2\theta$ が作用する問題の応力関数は式(5-4)のように表される。

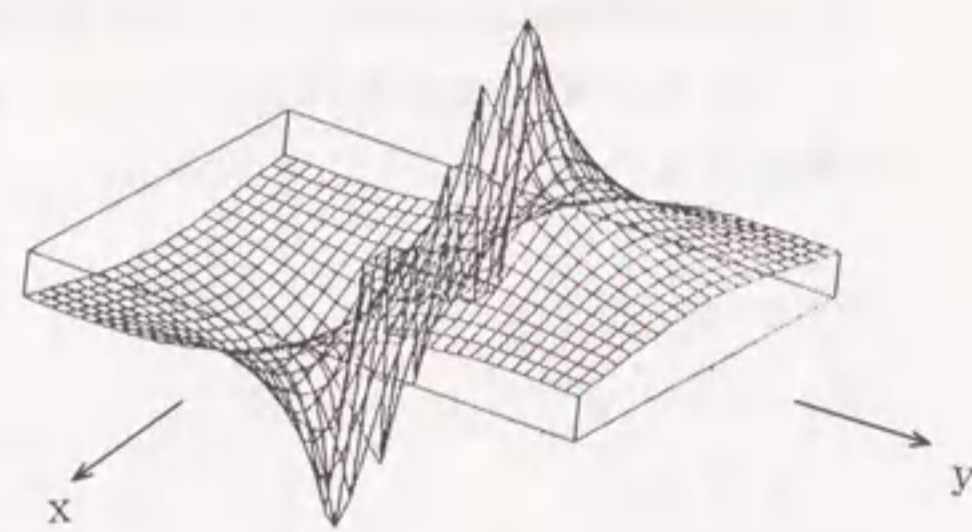
$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_1 &= 0 \\ W_1 &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= -\frac{\sigma_0 a^2}{2z}, \quad \phi = \frac{\sigma_0 a^4}{6z^2} \end{aligned} \quad (5-4)$$



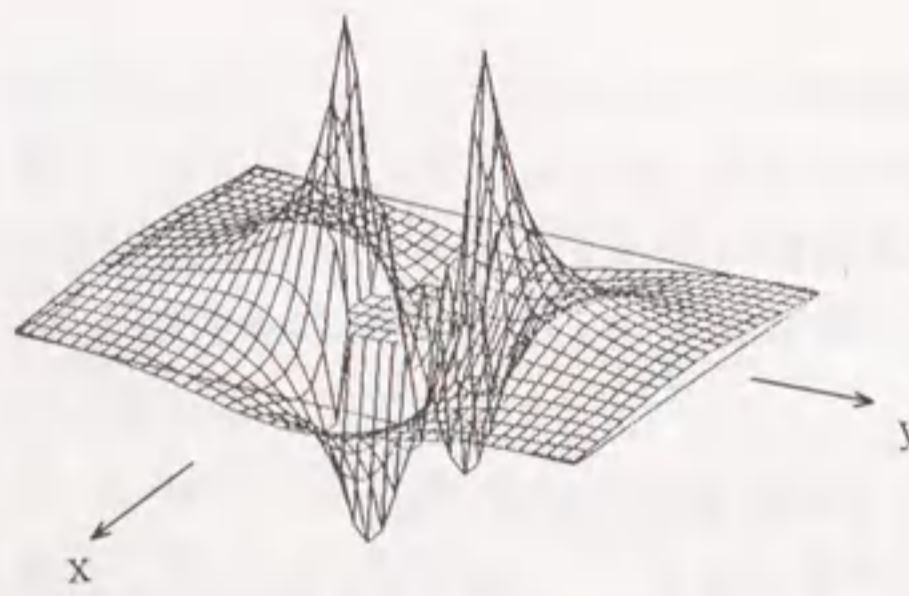
$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 3 \text{ cm}$
 $|y| < 5 \text{ cm}$



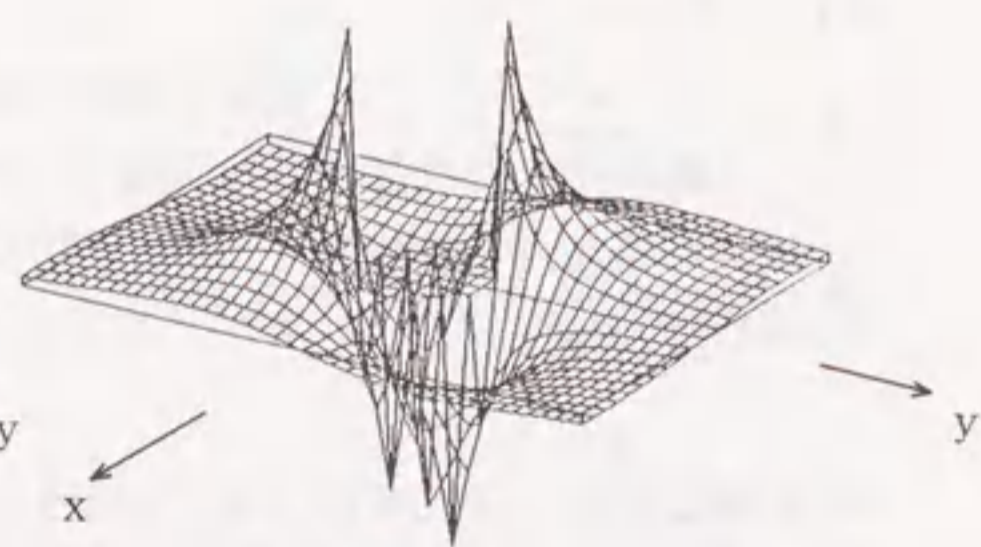
(a) 変位 U



(b) 変位 V

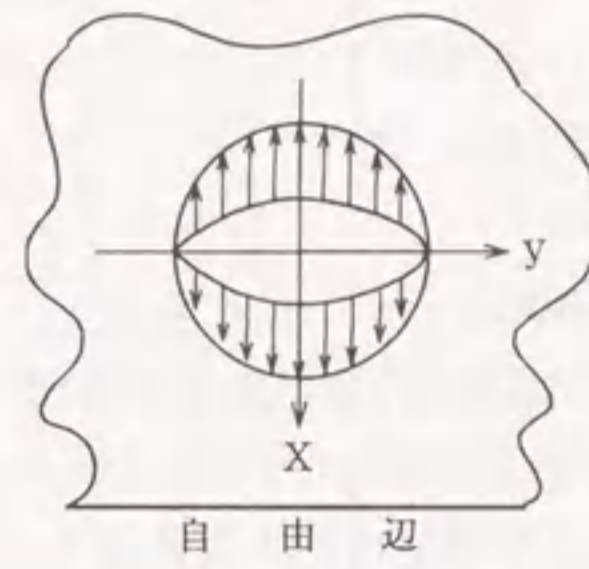


(c) 応力 σ_x

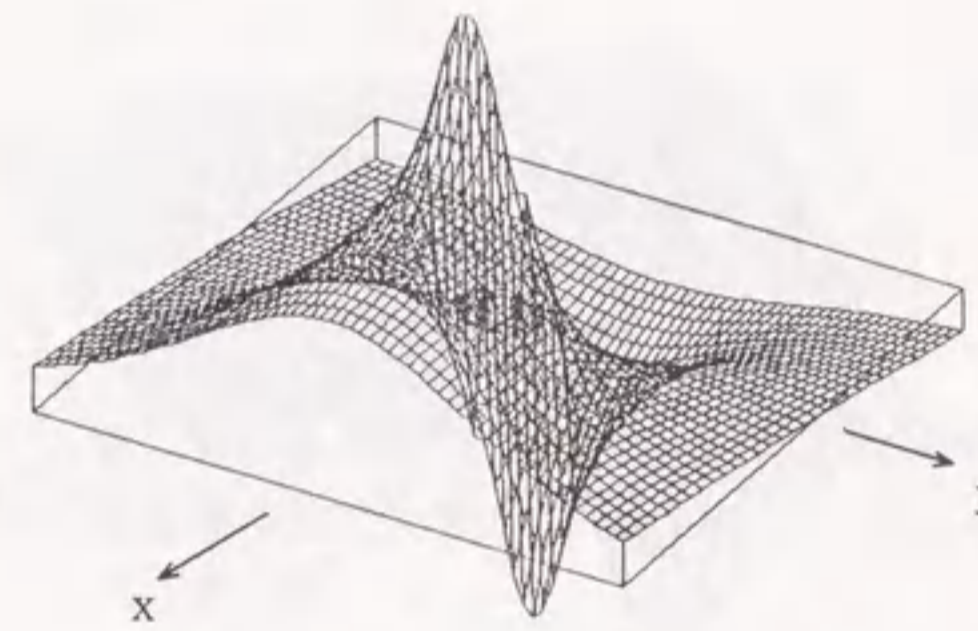


(d) 応力 τ_{xy}

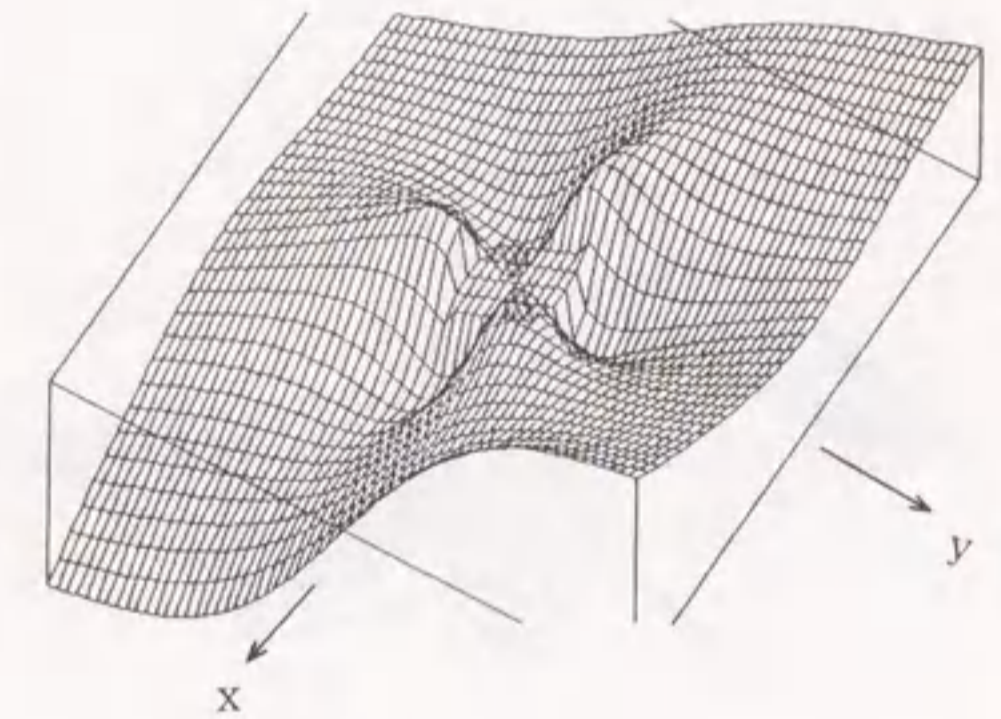
図-5.2 自由辺近傍に円孔を持ち一様圧縮力 σ_0 が作用する解



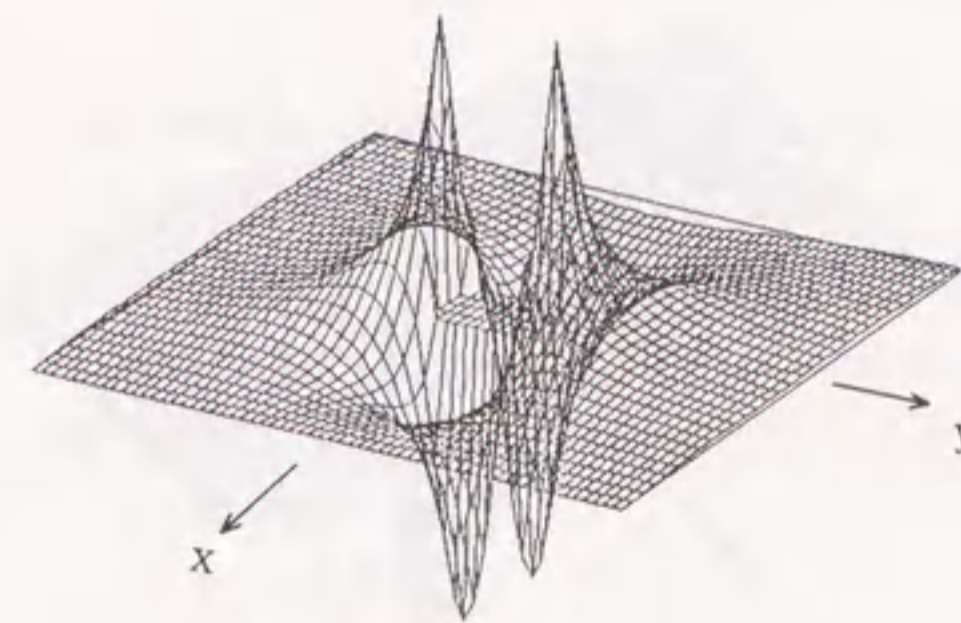
$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 領域 $|x| < 4 \text{ cm}$
 $|y| < 4 \text{ cm}$



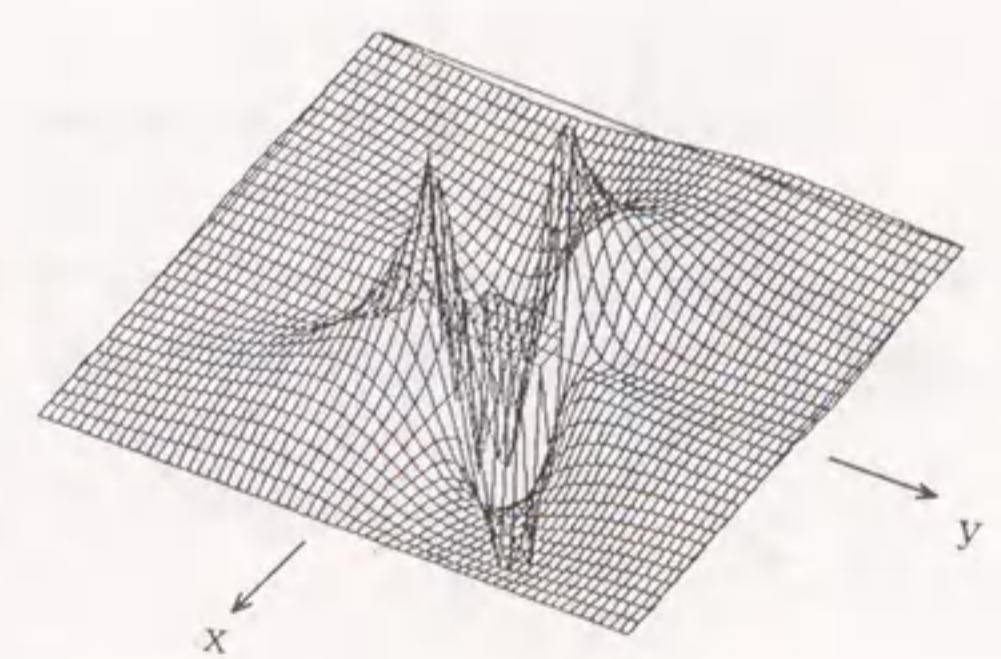
(a) 変位 U



(b) 変位 V

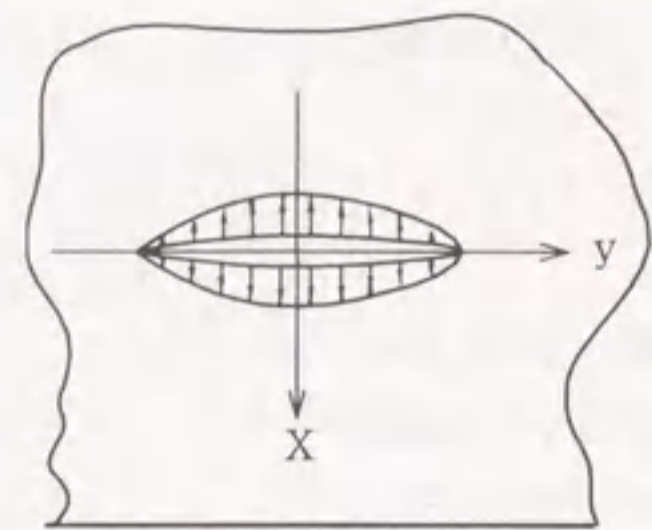


(c) 応力 σ_x



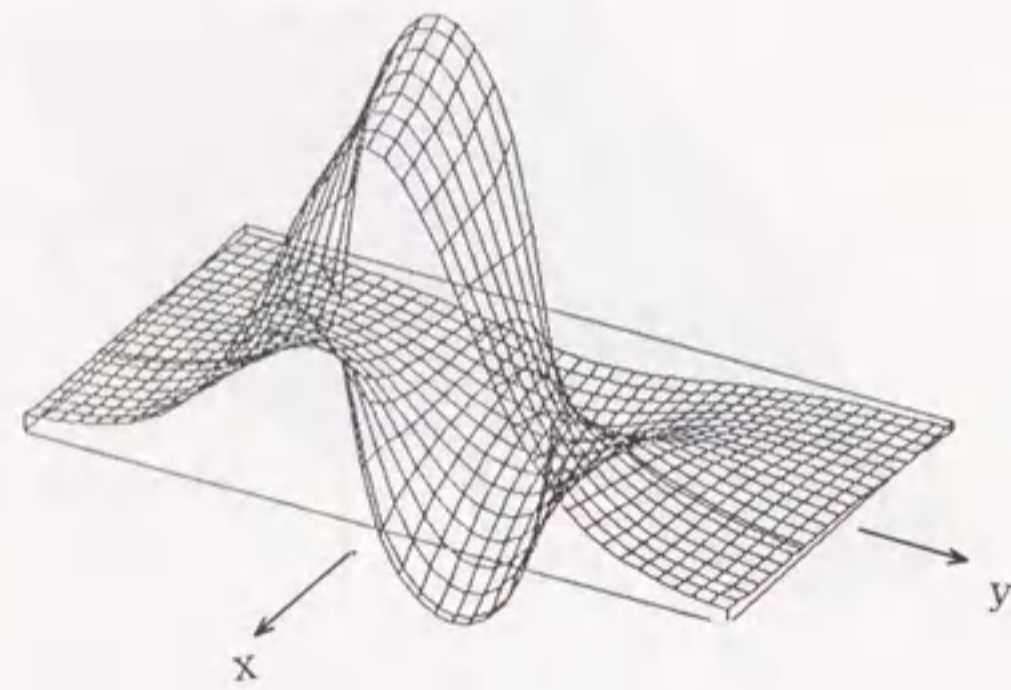
(d) 応力 τ_{xy}

図-5.3 自由辺近傍に円孔を持ち円孔を左右に開口させる解

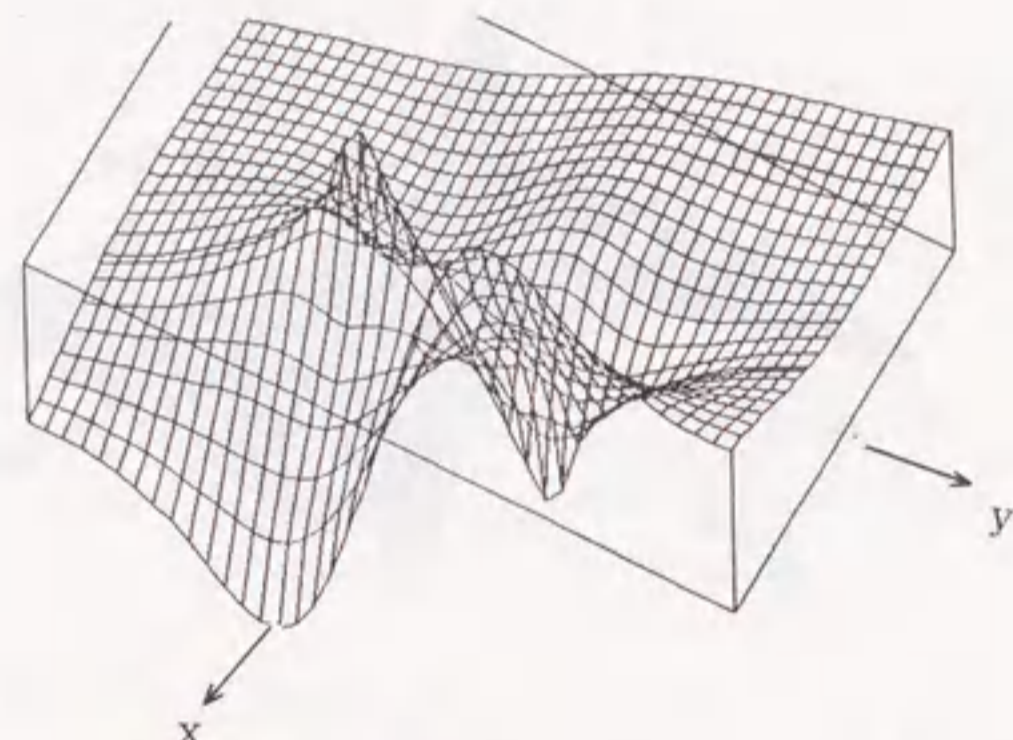


自由辺

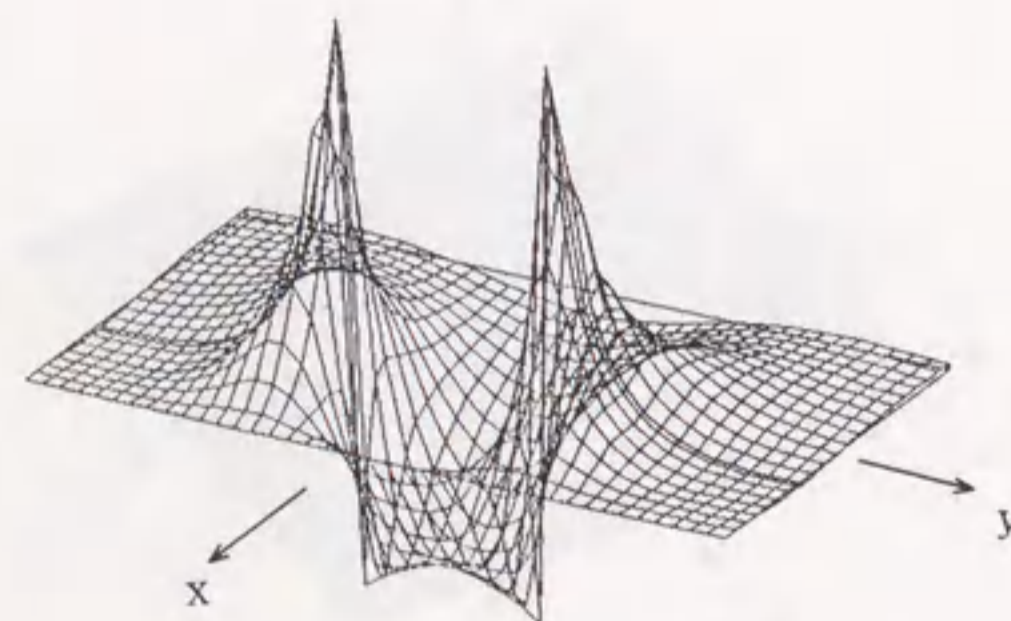
$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域
 $-3 \text{ cm} < x < 1.5 \text{ cm}$
 $|y| < 4 \text{ cm}$



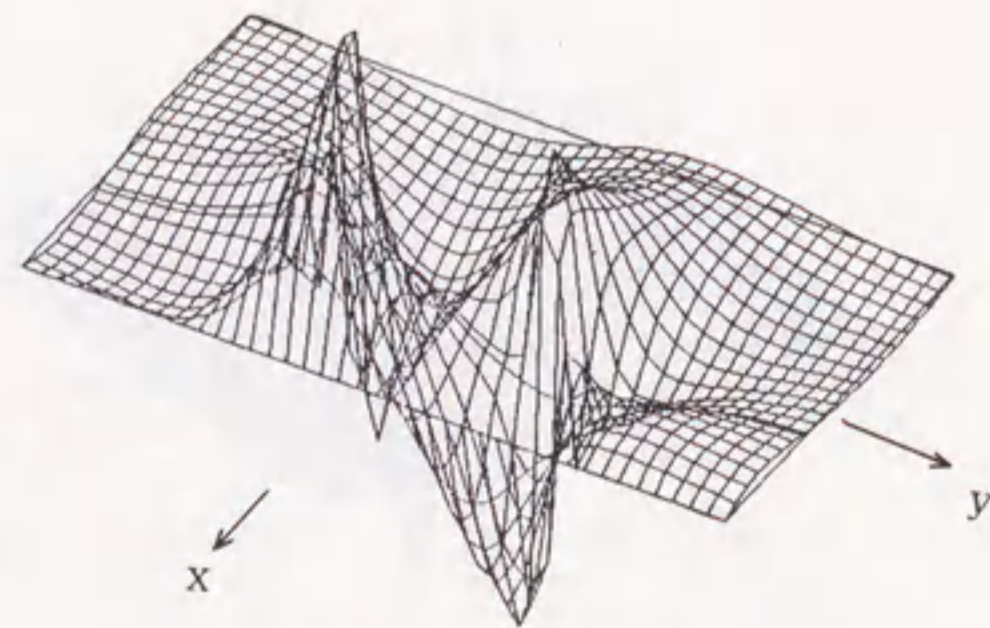
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-5.4 自由辺に平行な直線状クラックが内圧で押し開かれる問題の解

b) 無限板の円孔周辺に $\sigma_0 \cos 2\theta$ が作用する問題の $x = c_0$ における, せん断応力を打消す応力関数は式(5-5)のように表される.

$$\nabla^2 \nabla^2 W_3 = 0$$

$$W_3 = \bar{z}\phi + \phi \tag{5-5}$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 a^2}{2} \left[-\frac{1}{(z-c_0)} - \frac{c_0}{(z-c_0)^2} - \frac{a^2}{3(z-c_0)^3} \right]$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 z a^2}{2} \left[-\frac{1}{(z-c_0)} - \frac{c_0}{(z-c_0)^2} - \frac{a^2}{3(z-c_0)^3} \right]$$

[3]自由辺近傍に円孔を持ち円孔を左右に開口させる解 (図-5.3参照)

a) 無限板の中心にある円孔(半径 $r = a$) を左右に開口させる問題の応力関数は[1]と[2]の解を重ね合わせる事(正確には, $\sigma_0 > 0$ を引張りとしているので[1]を反転して重ねる)によって表され式(5-6)のように表される.

$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi \tag{5-6}$$

$$\phi = -\frac{\sigma_0 a^2}{2z}$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 a^4}{6z^2} + \sigma_0 (a^2 \log z)$$

b) 無限板の円孔周辺に $\sigma_0 \cos 2\theta$ が作用する問題の $x = c_0$ における, せん断応力を打消す応力関数は式(5-7)のように表される.

$$\nabla^2 \nabla^2 W_3 = 0$$

$$W_3 = \bar{z}\phi + \phi \tag{5-7}$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 a^2}{2} \left[-\frac{c_0}{(z-c_0)^2} - \frac{a^2}{3(z-c_0)^3} \right]$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 z a^2}{2} \left[-\frac{c_0}{(z-c_0)^2} - \frac{a^2}{3(z-c_0)^3} \right]$$

[4]自由辺に平行な直線状クラックが内圧で押し開かれる問題の解 (図-5.4参照)

a) Westergaardの解

前述の図-2.1 に示すWestergaardの解, すなわち y 軸上に長さ $2a$ のクラックを持ち無限遠方で $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$, $\tau_{xy} = 0$ という一様応力を受ける等方等質の無限板の解は, 次のように表される. (再掲)

$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi \tag{5-8}$$

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$\phi' = -\frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\phi = -\frac{\sigma_0}{2} \cdot a^2 \cdot \log(z + \sqrt{z^2 + a^2}) \right) \\ \sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ -\frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right\} \\ \sigma_y = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{z^2+a^2} \right\} \\ \tau_{xy} = -\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2(z+\bar{z})}{(z^2+a^2)^{3/2}} \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ i \frac{\sigma_0 a^2 x}{(z^2+a^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} (5-9)$$

b) $x=c_0$ に生じるせん断応力 $\tau_{xy}(y)$

$x=c_0$ に生じるせん断応力 $\tau_{xy}(y)$ を求めると

$$\tau_{xy}(y) = -\operatorname{Re} \left[i \frac{\sigma_0 a^2 c_0^2}{\{a^2+(c_0+iy)^2\}^{3/2}} \right]$$

となる。

c) せん断力打消し曲面

y 軸上で開口曲面 $x=c_0$ における $\tau_{xy}c_0$ を打ち消す曲面すなわち

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y) &= -\tau_{xy}c_0 \\ &= i \frac{\sigma_0 a^2 c_0^2}{\{a^2+(c_0+iy)^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma_0 a^2 c_0}{2} \left[\frac{i}{\{a^2+(c_0+iy)^2\}^{3/2}} - \frac{i}{\{a^2+(c_0-iy)^2\}^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

となるようにすれば良いが、実部をとるので

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y) &= f(y) \\ &= \frac{-i \sigma_0 a^2 c_0}{\{a^2+(c_0-iy)^2\}^{3/2}} \end{aligned}$$

となる。よって、第4章で述べたWestergaardの方法に従うと、 y 軸に沿って $\sigma_x=0|_{x=0}$ で、 $\tau_{xy}|_{x=0}=\tau_{xy}(z)=f(z)=-i \sigma_0 a^2 c_0 / \{a^2+(z-c_0)^2\}^{3/2}$ と与えて解く問題に帰着する。よって、

$$\begin{aligned} \phi &= z \psi \\ \tau_{xy}(z) &= -i 2 \phi' - i (z+\bar{z}) \phi'' \end{aligned}$$

より

$$\psi' = \frac{\sigma_0 a^2 c_0}{2\{a^2+(z-c_0)^2\}^{3/2}}$$

となり、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z} \phi + \phi \end{aligned} \quad (5-10)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 c_0 (z-c_0)}{2\{a^2+(z-c_0)^2\}^{1/2}}, \quad \psi = \frac{\sigma_0 c_0 z (z-c_0)}{2\{a^2+(z-c_0)^2\}^{1/2}}$$

と表される。

d) 著者等の手法で有限化された直線状クラックが内圧で押し開かれる問題の解

著者等は、既に種々の問題について重み積分法によりクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数を導いている。その手法を式(5-8)、(5-9)に適用する。

なお、今回の重み積分に使用する重み関数は、図-5.5に示す形状を持ち、定義を

$$\rho(t, a, b) = 2t/b \cdot (2a+b) = \zeta t$$

$(a, a+b)$ として総面積が1になるように基準化されたもので、これは最も積分計算に都合がよい形を採用したものである。

なお、この重み関数を用いて積分し応力を有限化するという事は、あたかも作用する集中荷重による応力分布を分布荷重による応力分布に置き換えたような意味合いを持っている。

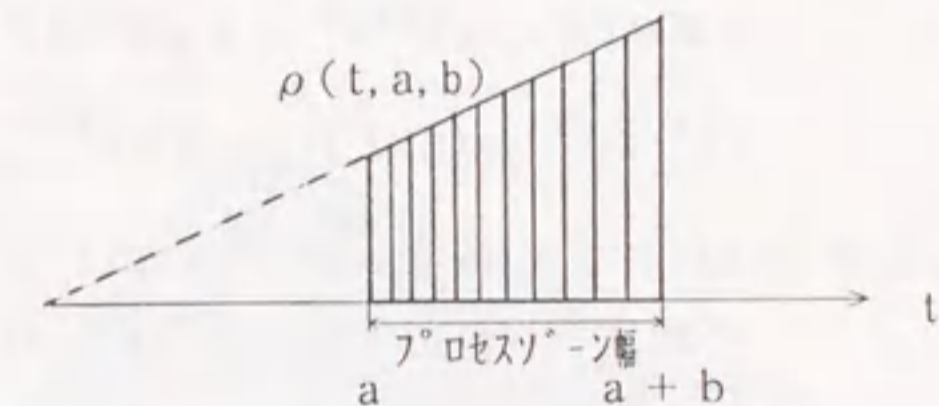


図-5.5 重み関数 ρ の形状

1. 有限化された開口曲面

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_1 &= 0 \\ W_1 &= \bar{z} \phi + \phi \end{aligned} \quad (5-11)$$

$$\phi = \frac{\zeta}{6} [(z^2+a^2)^{3/2}]_a^{t-a+b}, \quad \zeta = 2/b \cdot (2a+b)$$

$$\phi' = -\frac{\zeta}{2} \left[\frac{1}{3}(z^2+a^2)^{3/2} - z^2 \cdot (z^2+a^2)^{1/2} \right]_a^{t-a+b}$$

2. 有限化されたせん断力打消し曲面

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z} \phi + \phi \end{aligned} \quad (5-12)$$

$$\phi = \frac{c_0 \zeta}{2} (z-c_0) [\{t^2+(z-c_0)^2\}^{1/2}]_a^{t-a+b}$$

$$\phi = \frac{c_0 \zeta}{2} (z-c_0) \cdot z \cdot [\{t^2+(z-c_0)^2\}^{1/2}]_a^{t-a+b}$$

[5]自由辺を有する両側クラックが $y = s$ で集中力 p を受けている問題の解

(図-5.6参照)

a) 両側クラックを有する無限板が、一方のクラック部の $y = s$ で集中力 P を受けている問題の解は、著者等の有限化手法により次のように表される。ここで、 ρ は前述のとおり図-5.5 に示す重み関数であり、 δ は、 s を a の関数として表した時の係数である。また、 μ は式の簡略化の為に用いた δ の関数である。すなわち、

$$s = \delta a = \delta t, \quad \delta > 1, \quad \delta^2 - 1 = \mu^2 \quad \text{とすると}$$

$$\sqrt{a^2 - s^2} = \sqrt{1 - \delta^2} = i \mu t \quad \text{となる。}$$

よって、

$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi$$

(5-13)

$$\begin{aligned} \phi = & (P \zeta / 2\pi) [(t^2/2) \log(z - i \delta t) - (t^2/2) \cdot \log(\delta z - i t + \mu \sqrt{t^2 + z^2}) \\ & - (\mu z / 2\delta) \sqrt{t^2 + z^2} + (i \mu z^2 / 2\delta^2) \log(t + \sqrt{t^2 + z^2}) + (z^2 / 2\delta) \log(z - i \delta t) \\ & - (z^2 / 2\delta) \log(z - i t + \mu \sqrt{t^2 + z^2})]_a^{t-a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi' = & (P \zeta / 2\pi) [(i \mu z / \delta^2) \log(t + \sqrt{t^2 + z^2}) + (z / \delta^2) \log(z - i \delta t) \\ & - (z / \delta^2) \log(z - i t + \mu \sqrt{t^2 + z^2}) + 1 / (2\sqrt{t^2 + z^2}) \{ i \mu t (z + i \delta t) / \delta^2 \\ & - (\mu z / \delta^2) (z + i t) \} - \mu \sqrt{t^2 + z^2} / 2\delta]_a^{t-a+b} \end{aligned}$$

$$\phi' = z\phi' - \phi$$

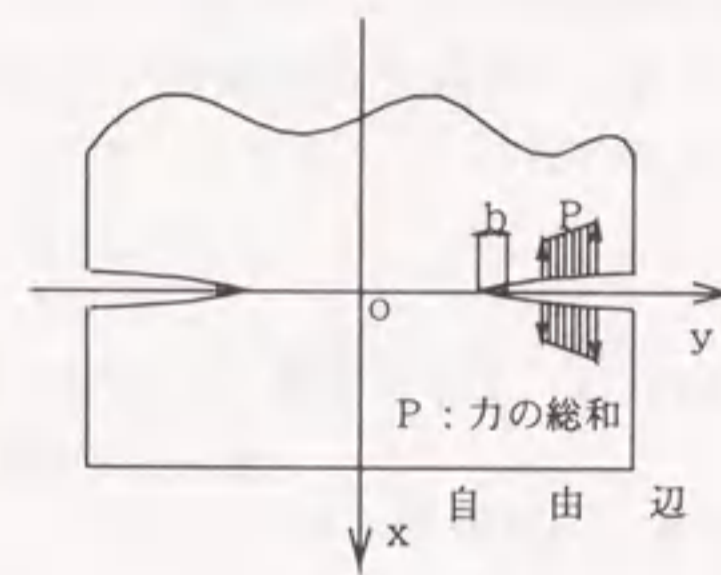
b) 両側クラックを有する無限板が $y = s$ で集中力 P を受けている問題のせん断応力打消し曲面の解は、著者等の有限化手法により次のように表される。

$$\nabla^2 \nabla^2 W_3 = 0$$

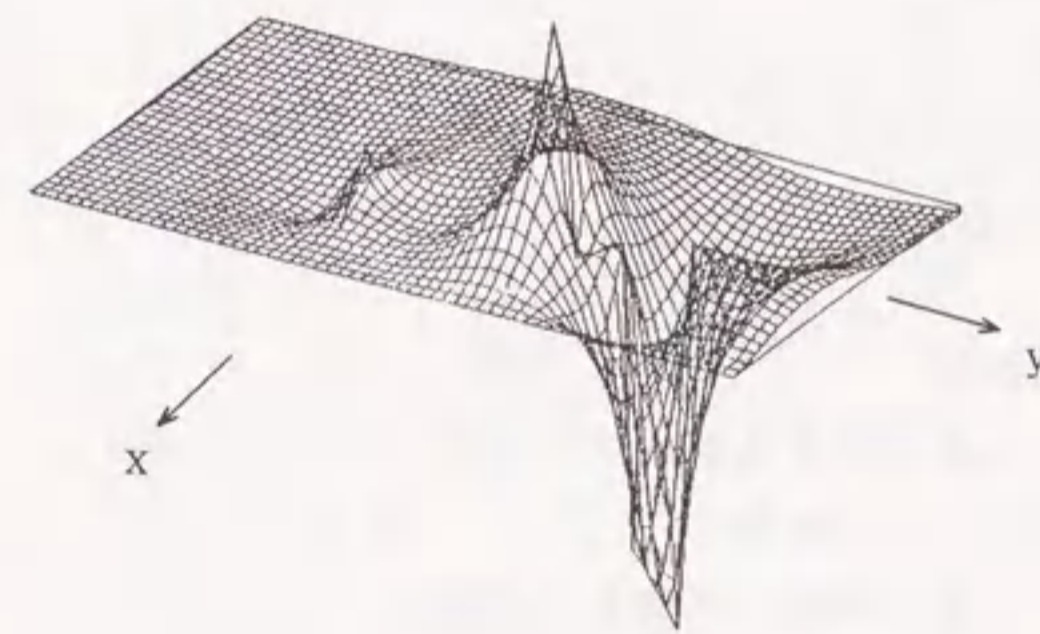
$$W_3 = \bar{z}\phi + \phi$$

$$\begin{aligned} \phi = & (P c_0 \zeta / 2\pi \delta^2) [\mu \delta \sqrt{(z - c_0)^2 + t^2} - i \mu (z - c_0) \log\{t + \sqrt{(z - c_0)^2 + t^2}\} \\ & - (z - c_0) \log\{\delta t + i (z - c_0)\} + (z - c_0) \log\{\delta (z - c_0) - i t \\ & + \mu (z - c_0)^2 + t^2\}]_a^{t-a+b} \end{aligned}$$

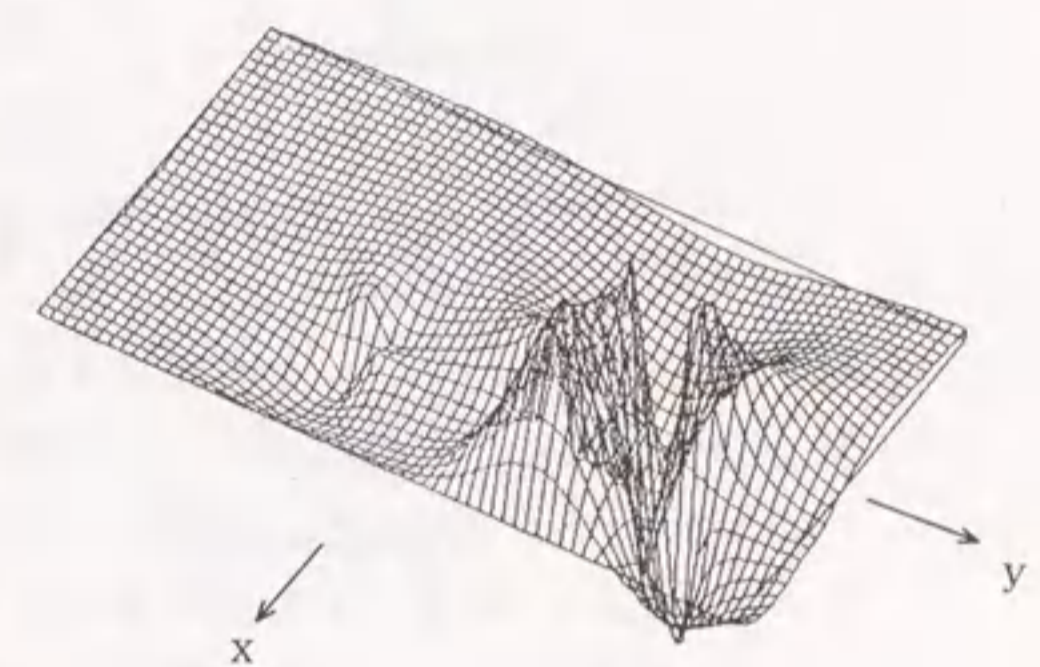
$$\begin{aligned} \phi = & (P c_0 \zeta / 2\pi \delta^2) \cdot z \cdot [\mu \delta \sqrt{(z - c_0)^2 + t^2} - i \mu (z - c_0) \log\{t + \sqrt{(z - c_0)^2 + t^2}\} \\ & - (z - c_0) \log\{\delta t + i (z - c_0)\} + (z - c_0) \log\{\delta (z - c_0) - i t \\ & + \mu (z - c_0)^2 + t^2\}]_a^{t-a+b} \end{aligned}$$



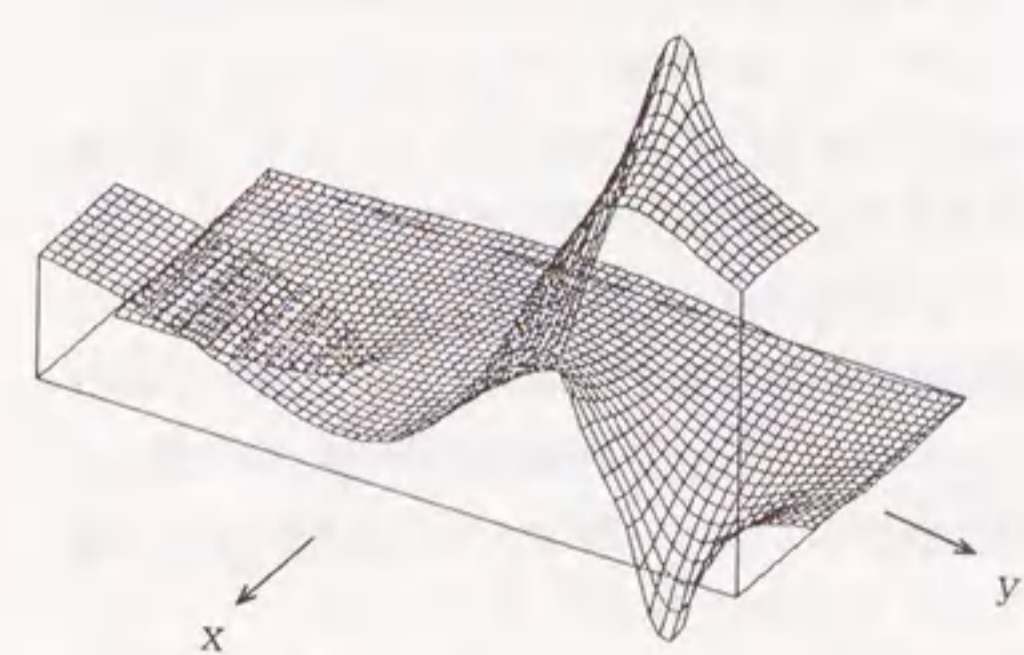
$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{cm}$
 $b = 0.3 \text{cm}$
 領域
 $-3 \text{cm} < x < 1.5 \text{cm}$
 $|y| < 4 \text{cm}$



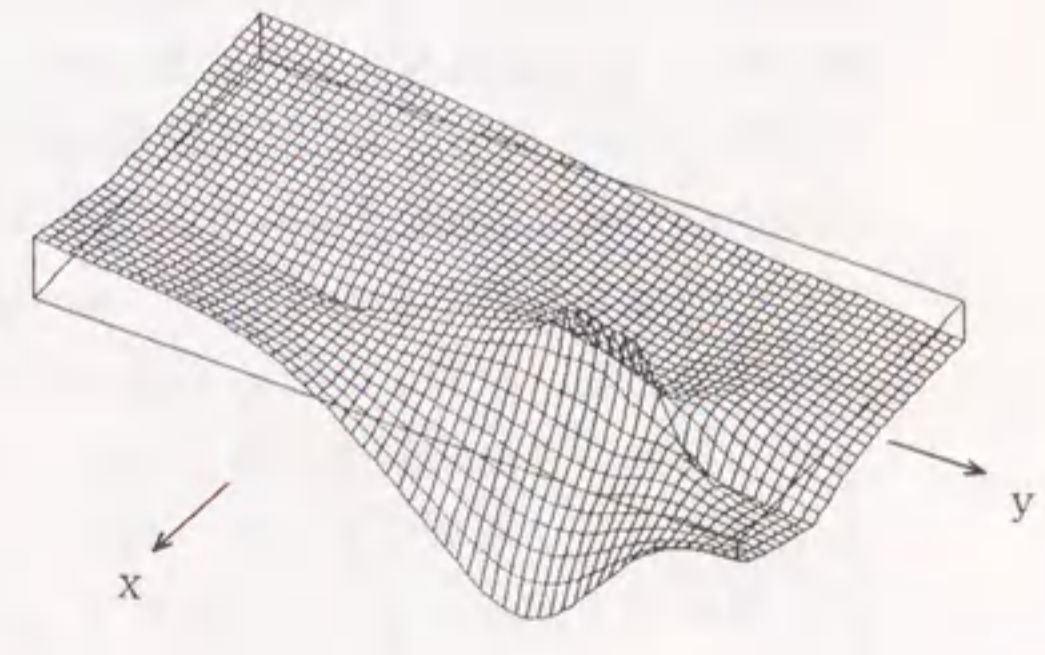
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-5.6 自由辺を有する両側クラックが $y = s$ で集中力 p を受けている問題の解

5. 2 固定辺近傍のクラック解析²⁾

(1) 概要

従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して平滑化する解析法の応用例として、固定辺近傍のクラックを解析する応力関数を導く。まず種々のクラック等(中心クラック、片側クラック、逆対称開口形状(8の字)クラック等)が存在する無限板の応力関数を導きクラック近傍に固定辺を構成する方法について述べる。

(2) 固定辺の構成法

固定辺近傍のクラックを構成する応力関数 W_0 は、式(5-14)のように表すことができる。(図-5.7参照)

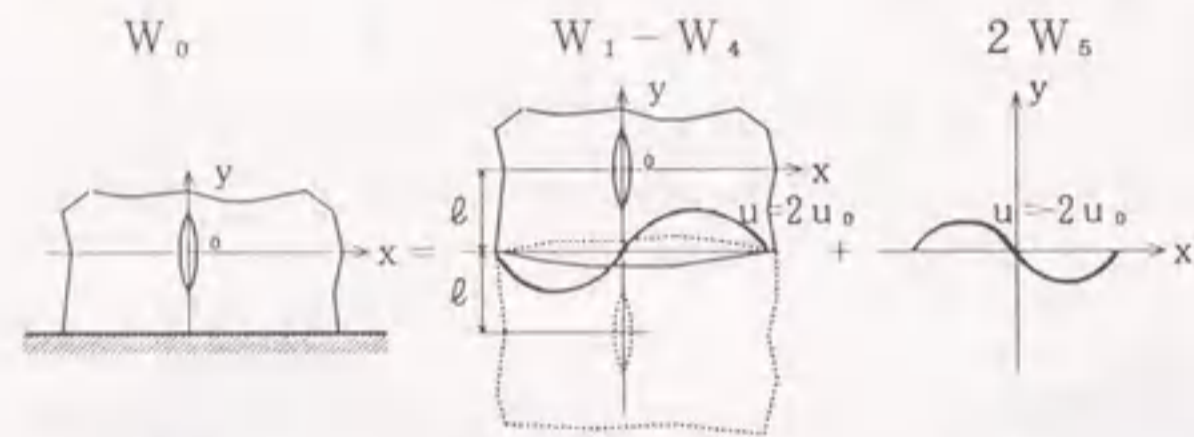


図-5.7 固定辺の構成法(中心クラックの例)

$$W_0 = W_1 + W_4 + 2W_5 \quad (5-14)$$

- W_0 : 固定辺近傍のクラックを構成する応力関数
- W_1 : 無限板内に含まれるクラックの開口のみを構成する基本応力関数
- ℓ : x 軸(クラックの中心位置)から固定辺までの距離
- W_4 : W_1 を点 $x=0, y=-\ell$ を回転中心として $x-y$ 平面内で回転した曲面
- u_0 : W_1 および W_4 による $y=-\ell$ における変位 u_0
- W_5 : W_1 および W_4 による $y=-\ell$ における変位 u_0 を打消す曲面

すなわち、固定辺を有する半無限板の開口を表現する応力関数を構成するには、まず無限板中のクラックを表す基本曲面 W_1 に $y=-\ell$ 軸が対称軸となるように W_1 を反転した解(W_4)を正負反対にして重ね合わせる。ここで、 $y=-\ell$ 軸軸上の v は0、 u は $2u_0$ となる。ただし、 u_0 は W_1 および W_4 の $y=-\ell$ 軸上の x 方向変位である。次に、 $y=-\ell$ 線上的変位が $u=-2u_0$ 、 $v=0$ となるような半無限板($y \geq -\ell$ 有効領域)の解 W_5 (u_0 打消し曲面)を重ね合わせると、 $y=-\ell$ 軸上で $u=0$ 、 $v=0$ を実現し固定辺を構成できるのである。ただしこれらを重ね合わせて固定辺を実現させるとクラック部分における応力解放の条件が多少乱されるがこれらについてはクラック開口長さやプロセスゾーンの長さの異なるものをいくつか重ねて選点法によってクラック部分で重ね合わせた最終状態の応力が0となるよう調整する。

(3) 開口用応力関数

前記の解析手法を用いて固定辺近傍に円孔、あるいは種々のクラック等が存在する場

合の応力関数を導く。すなわち、各々の場合について実質的には式(5-14)における W_1 と W_5 を求めればよいことになる(W_4 は、 W_1 が求められた時点で座標移動で求められる)。

[1] 固定辺に直角に直線状クラックが存在する解(図-5.9参照)

a) 直線状クラックを有する無限板が一様引張応力を受けている問題の解は式(5.15)のように表される。

$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi \quad (5-15)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2}, \quad \phi' = \frac{-\sigma_0 \cdot a^2}{2 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

b) 直線状クラックを有する無限板が一様引張応力を受けている問題の $y=-\ell$ における変位 u_0 を打消す 曲面の解は、式(5-16)のように表される。

$$\nabla^2 \nabla^2 W_5 = 0$$

$$W_5 = \bar{z}\phi + \phi \quad (5-16)$$

$$\phi = \frac{-\sigma_0}{4} \left\{ \sqrt{(z+i\ell)^2 + a^2} - \frac{z^2 + \ell^2 - a^2}{\kappa \sqrt{(z+i\ell)^2 + a^2}} \right\}$$

$$\phi' = \frac{-\sigma_0}{4} \left[\frac{(z+i\ell)^2 - 2z/\kappa}{\sqrt{(z+i\ell)^2 + a^2}} + \frac{(z^2 + \ell^2 - a^2)(z+i\ell)}{\kappa \{(z+i\ell)^2 + a^2\}} \right]$$

$$\phi' = -\kappa \phi - z\phi' \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面ひずみ状態}) \\ (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力状態}) \end{cases}$$

c) 著者等の手法で有限化された直線状クラックの問題

著者等は、既に種々の問題について重み積分法によりクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数を導いている。その手法を式(5-15)、式(5.16)に適用すると、クラック先端に無限大の応力集中を生じる基本曲面 W_1 と W_1 および W_4 による $y=-\ell$ における変位 u_0 を打消す曲面 W_5 は、式(5.17)、式(5.18)の通りとなる。これらについても、式(5-14)を適用しそれぞれの曲面(W_1 、 W_4 、 W_5)を重ね合わせることによって固定面近傍のクラックの開口曲面を表現する応力関数を構成することができる。なお、今回の重み積分に使用する重み関数 p は図-5.5 に示す形状を持ち、定義域を $(a, a+b)$ として総面積が1になるように基準化されたもの

で次のように表される。これは、最も積分計算に都合がよい形を採用したものである。ここで、この重み関数を用いて積分し応力を有限化するという事は、あたかも作用する集中荷重による応力分布を分布荷重による応力分布に置き換えたような意味合いを持っている。(図-5.5, 5.9参照) 具体的には、プロセスゾーン幅で重み積分を行い応力を有限化する。

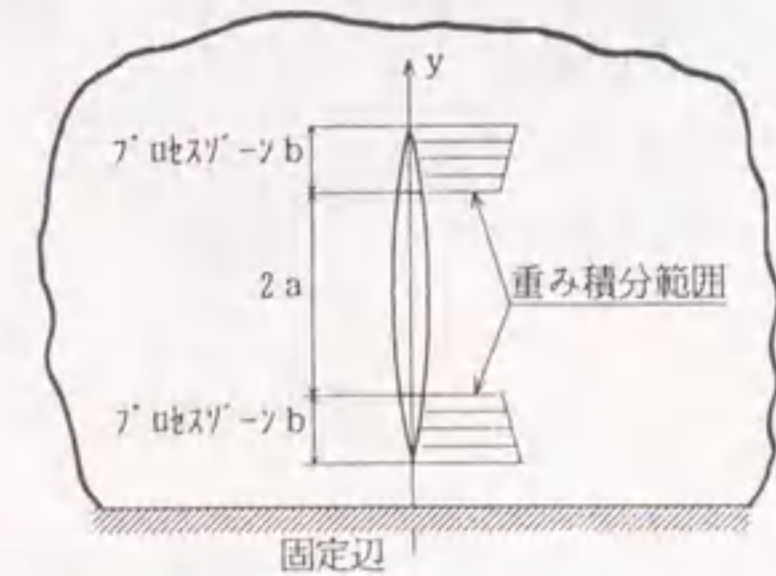


図-5.8 有限化された直線状クラックモデル

d) 直線状クラックを有する無限板が一様引張力を受けている問題の解は、著者等の有限化手法により次のように表される。ここで、重み関数 ρ は前述のとおり図-5.5 に示す重み関数であり、 ζ も同じ値である。

$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi \quad (5-17)$$

$$\phi = \frac{\sigma_0 \zeta}{6} \left[\{z^2 + (a+b)^2\}^{3/2} - \{z^2 + a^2\}^{3/2} \right] \frac{t^{-a+b}}{a}$$

$$\phi' = \frac{-\sigma_0 \zeta}{2} \left[\frac{1}{3} (z^2 + t^2)^{3/2} - z^2 \sqrt{z^2 + t^2} \right] \frac{t^{-a+b}}{a}$$

e) 直線状クラックを有する無限板が一様引張り応力を受けている問題の $y = -\ell$ における変位 u_0 を打消す曲面の解は、著者等の有限化手法により次のように表される。

$$\nabla^2 \nabla^2 W_3 = 0$$

$$W_3 = \bar{z}\phi + \phi \quad (5-18)$$

$$\phi = -\frac{\sigma_0 \zeta}{4} \left[\frac{(\kappa+1)}{3\kappa} \{t^2 + (z+i\ell)^2\}^{3/2} - \frac{2z(z+i\ell)}{\kappa} \sqrt{t^2 + (z+i\ell)^2} \right] \frac{t^{-a+b}}{a}$$

$$\phi' = -\frac{\sigma_0 \zeta}{4} \left[\frac{(\kappa+1)}{\kappa} (z+i\ell) \sqrt{t^2 + (z+i\ell)^2} - \frac{(4z+i2\ell)}{\kappa} \sqrt{t^2 + (z+i\ell)^2} - \frac{2z(z+i\ell)^2}{\kappa \sqrt{t^2 + (z+i\ell)^2}} \right] \frac{t^{-a+b}}{a}$$

$$\phi' = -\kappa\phi - z\phi'$$

以上の方法により、固定辺近傍に直線状クラックが存在する場合の応力関数を導くことができる。また、半無限（片側）クラックおよび逆対称開口形状（8の字）クラックについても、同様にして有限化された基本関数および変位 u_0 を打ち消す曲面を表現できる。よって、半無限（片側）クラックおよび逆対称開口形状（8の字）クラックについては、結果のみ以下に示す。

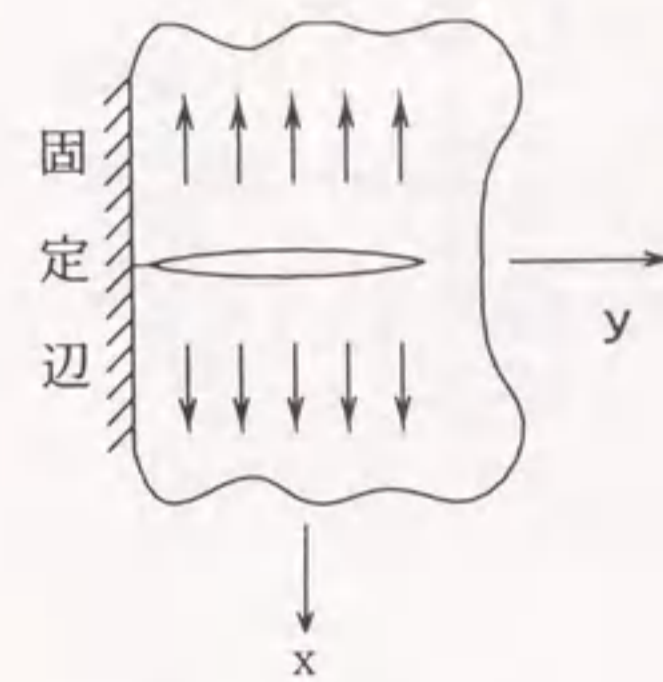
[2] 固定辺に直角に半無限（片側）クラックが存在する解（図-5.9参照）

a) 基本関数

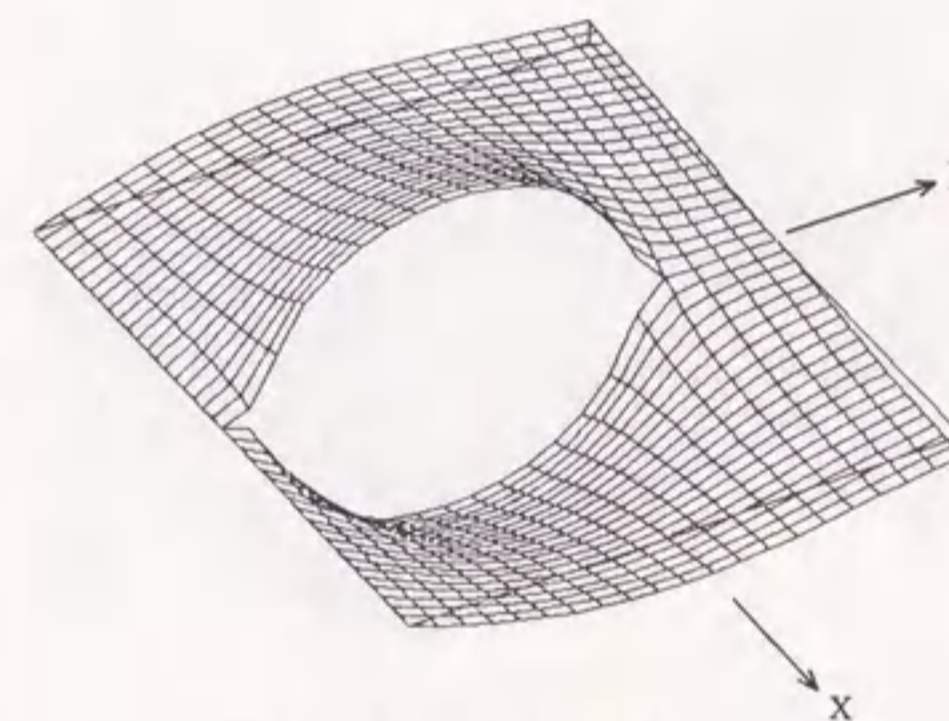
$$\nabla^2 \nabla^2 W_1 = 0$$

$$W_1 = \bar{z}\phi + \phi \quad (5-19)$$

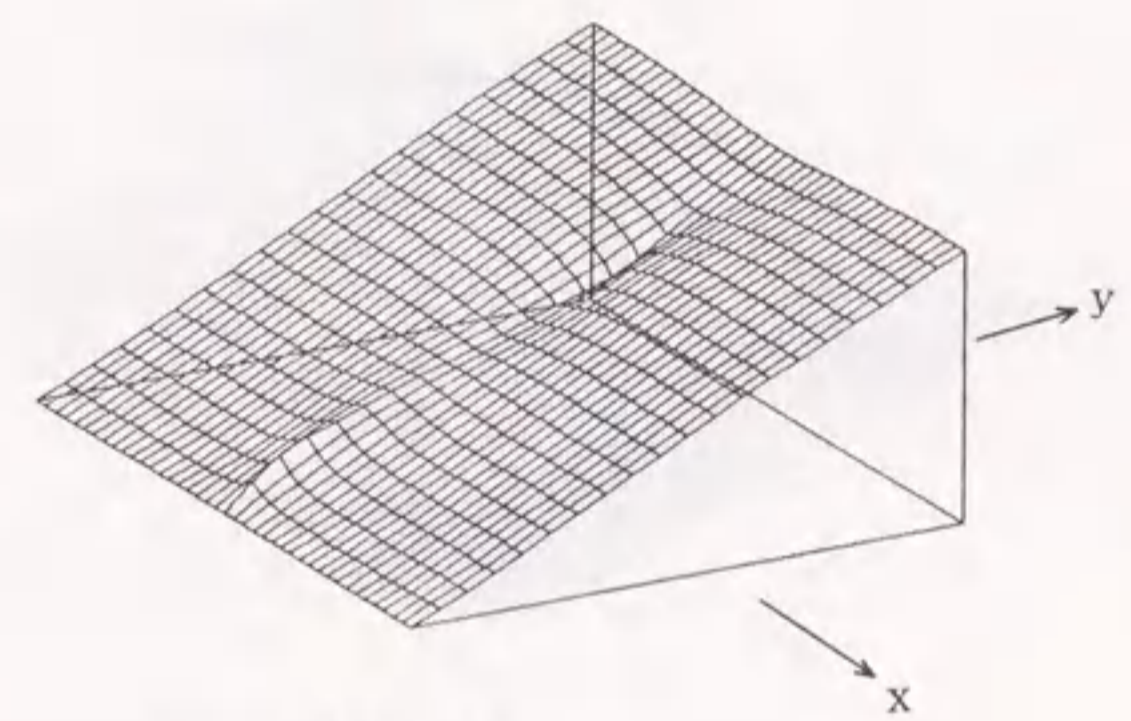
$$\phi = \zeta e^{i3\pi/4} \left[\frac{i2}{3} t(z-i t)^{3/2} + \frac{4}{15} (z-i t)^{5/2} \right] \frac{t^{-a+b}}{a}$$



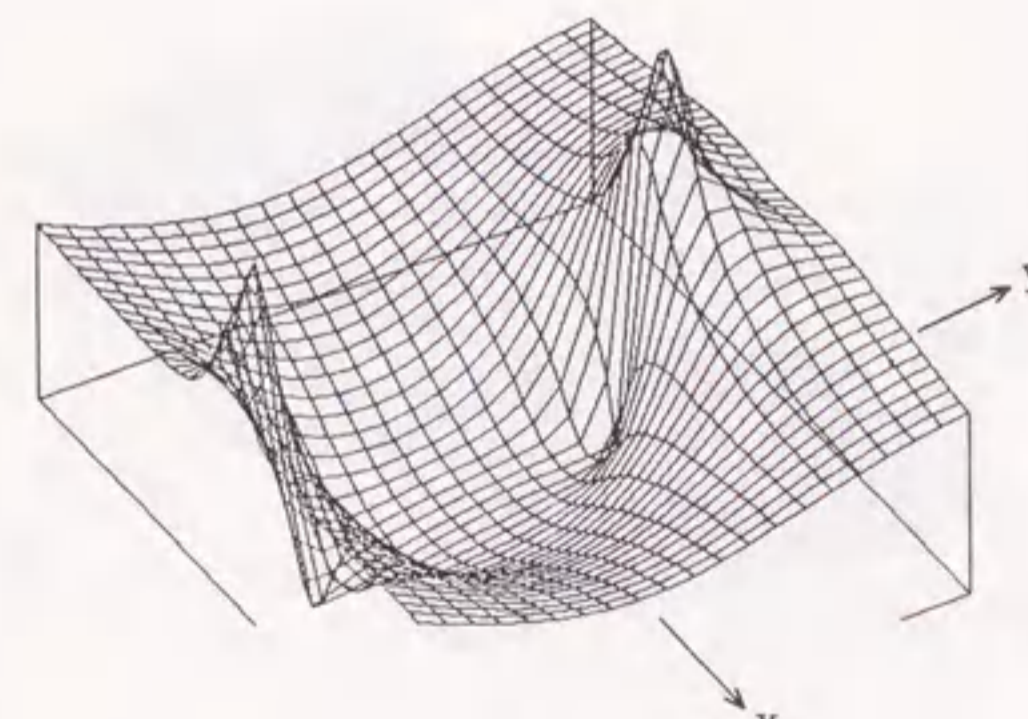
$E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{cm}$
 $b = 0.3 \text{cm}$
 $\ell = 2.6 \text{cm}$
 領域
 $|x| < 2 \text{cm}$
 $-1.4 \text{cm} < y < 2 \text{cm}$



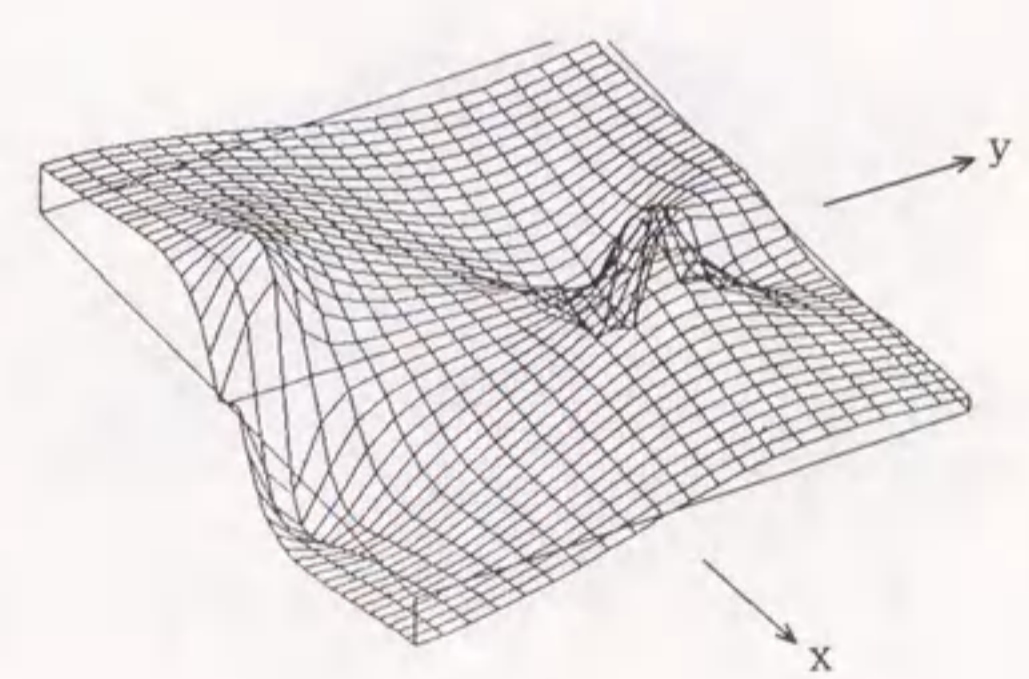
(a) 変位 U



(b) 変位 V

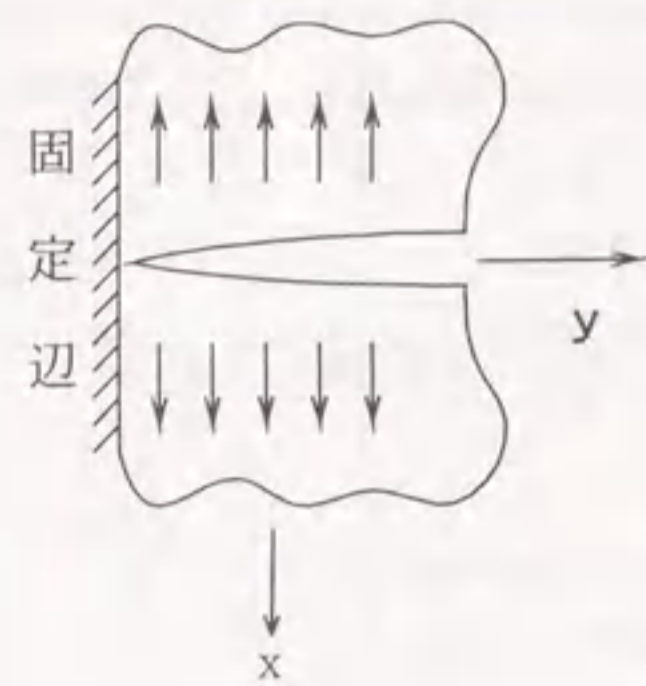


(c) 応力 σ_x

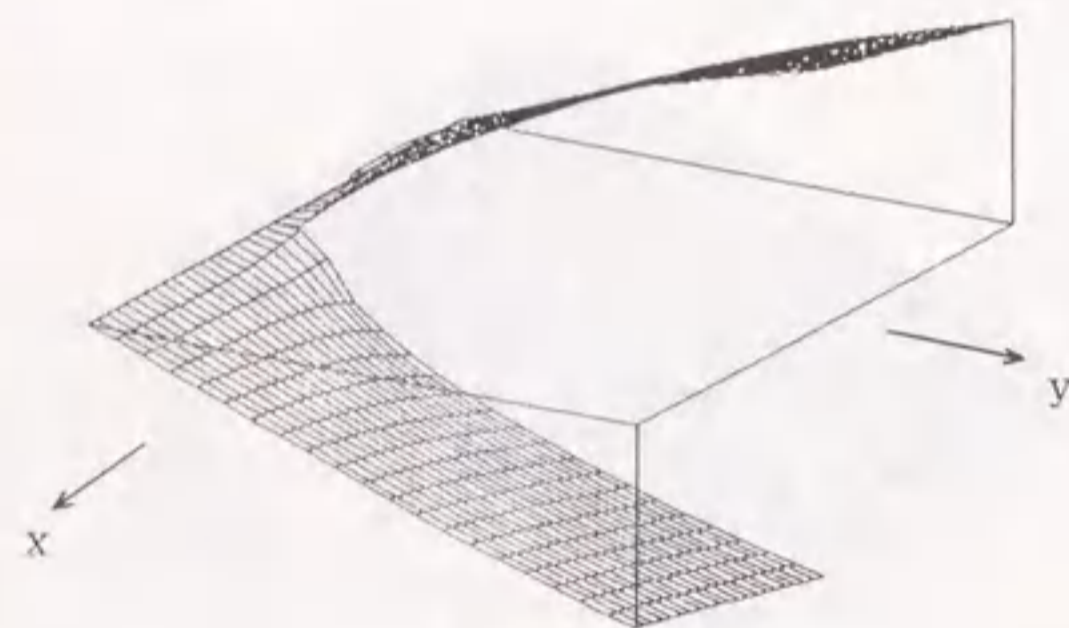


(d) 応力 τ_{xy}

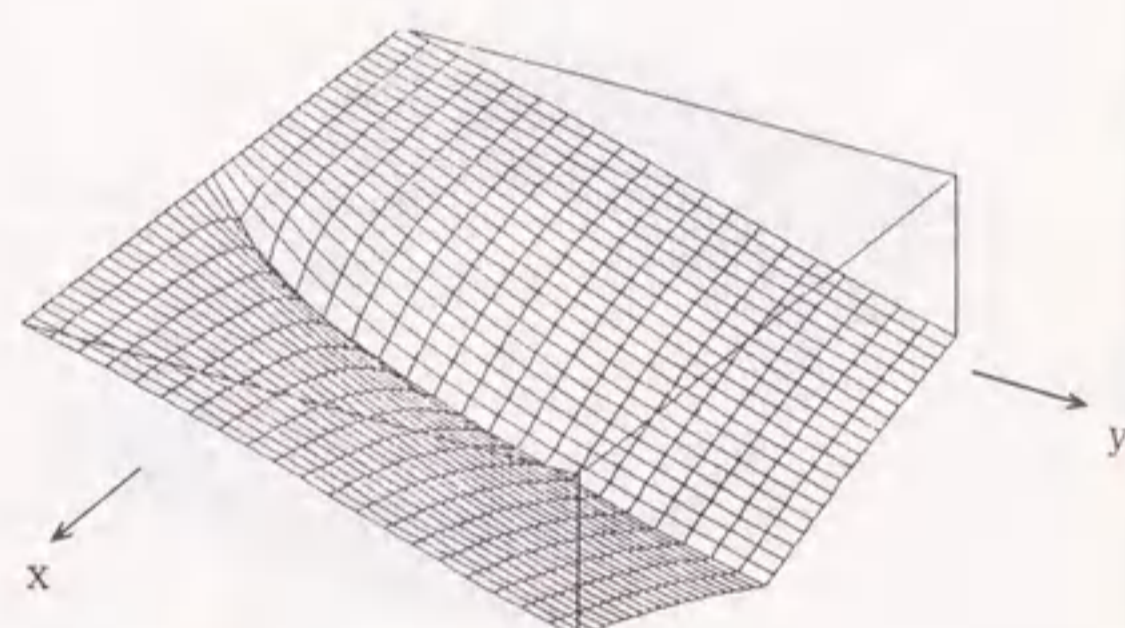
図-5.9 固定辺に直角に直線状クラックが存在する解



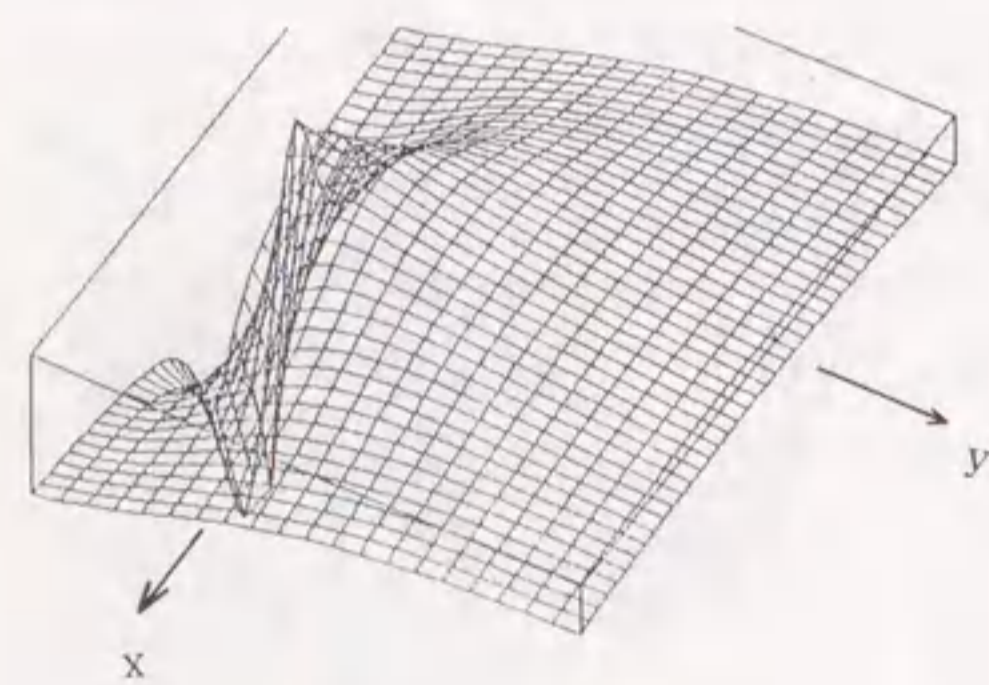
$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 領域
 $|x| < 2 \text{ cm}$
 $-1.4 \text{ cm} < y < 2 \text{ cm}$



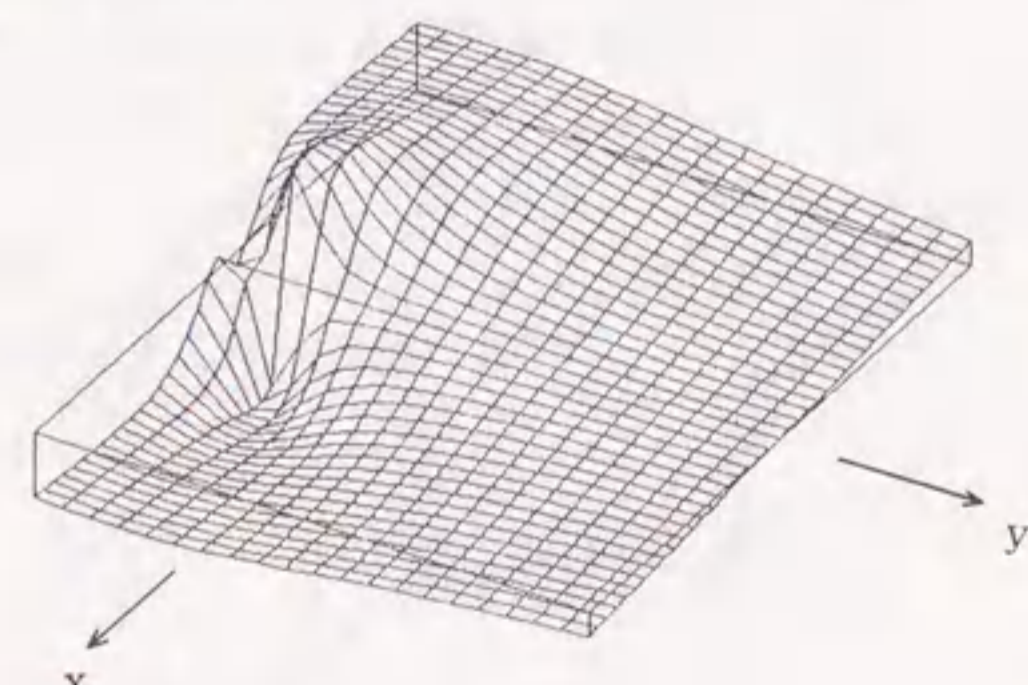
(a) 変位 U



(b) 変位 V

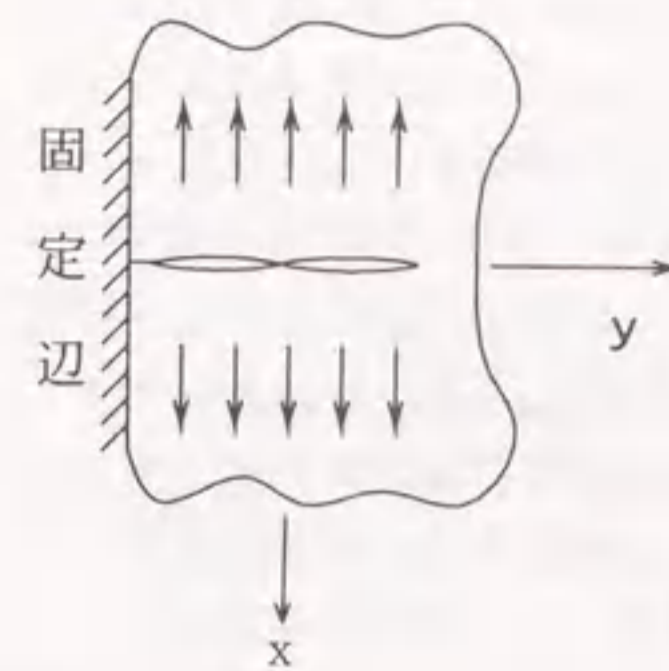


(c) 応力 σ_x

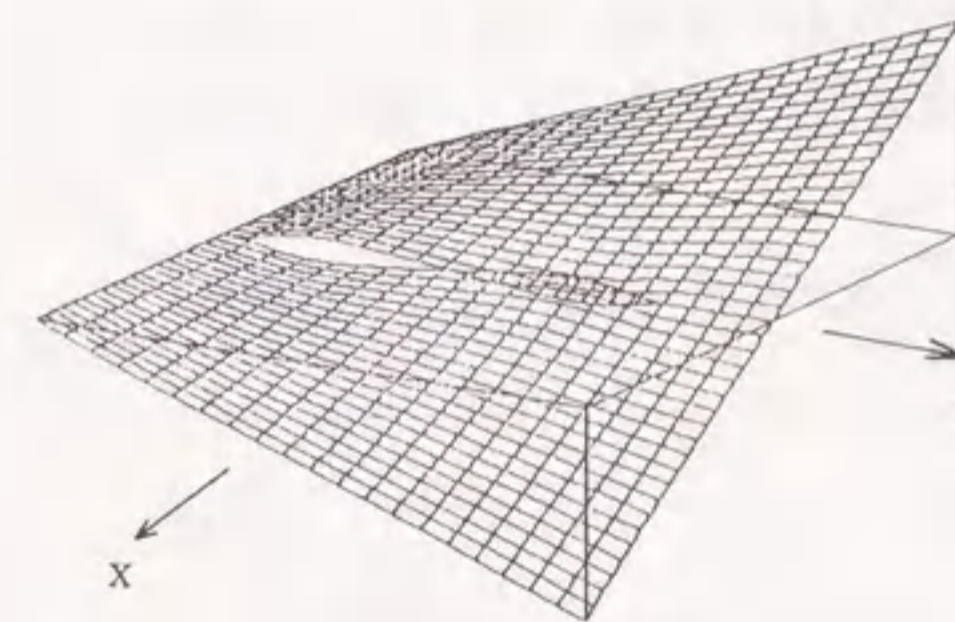


(d) 応力 τ_{xy}

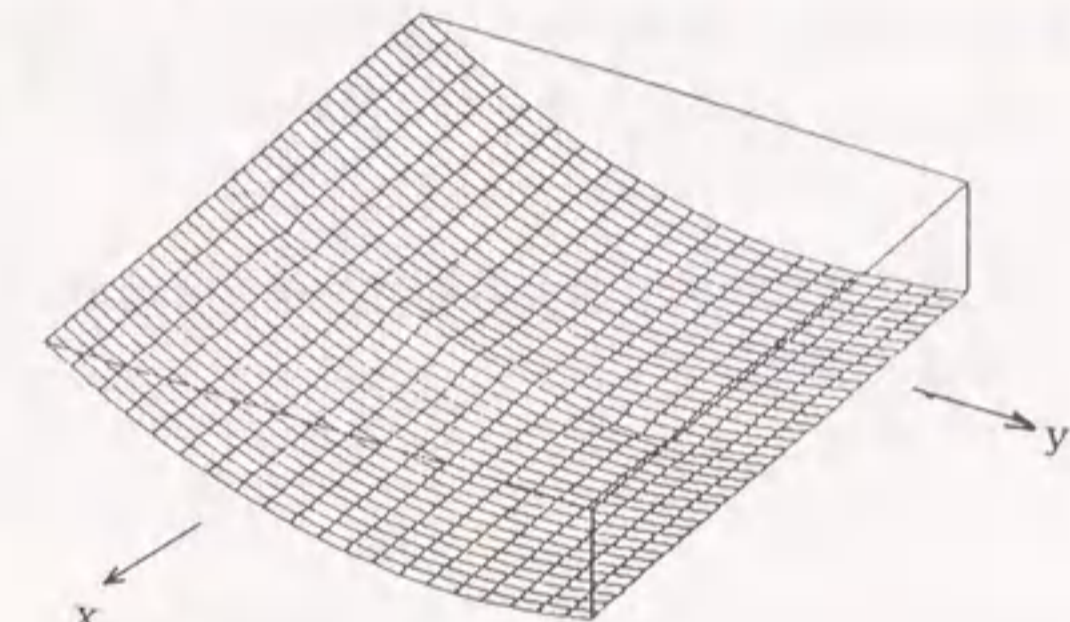
図-5.10 固定辺に直角に半無限(片側)クラックが存在する解



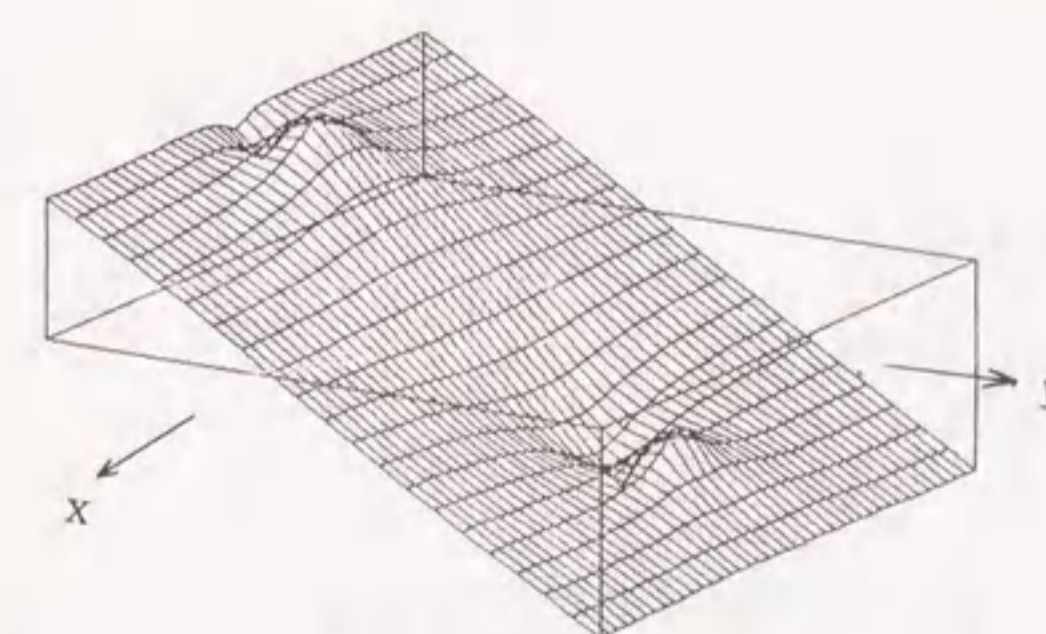
$E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1 \text{ cm}$
 $b = 0.3 \text{ cm}$
 $\ell = 2.6 \text{ cm}$
 領域
 $|x| < 2 \text{ cm}$
 $-1.4 \text{ cm} < y < 2 \text{ cm}$



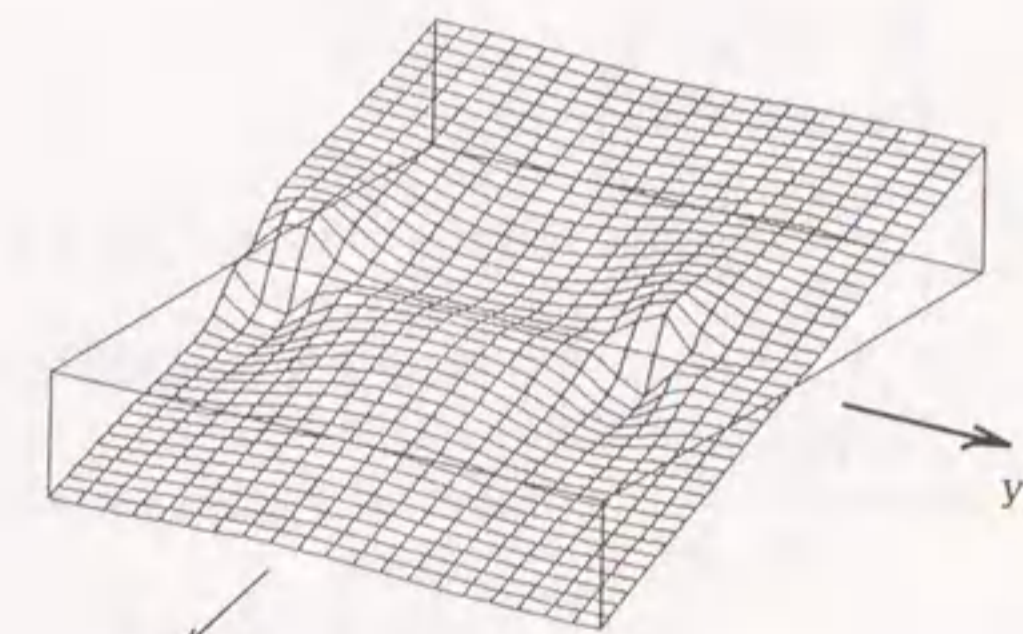
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力 σ_x



(d) 応力 τ_{xy}

図-5.11 固定辺に直角に逆対称開口形状(8の字)クラックが存在する

$$\begin{aligned} \phi' &= \zeta e^{i3\pi/4} \left[i t \sqrt{z-i t} + \frac{2}{3} (z-i t)^{3/2} \right]_a^{t=a+b} \\ \phi' &= -\phi + z\phi' \\ \text{b) 変位 } u_0 \text{ を打ち消す曲面} \\ \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z}\phi + \phi \end{aligned} \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{-\zeta}{2\kappa} \left[(\kappa+1) e^{-i3\pi/4} \left\{ \frac{i2}{3} t(z+i\ell+i t)^{3/2} + \frac{4}{15} (z+i\ell+i t)^{5/2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 e^{-i3\pi/4} z \left\{ i t \sqrt{z+i\ell+i t} - \frac{2}{3} (z+i\ell+i t)^{3/2} \right\} \right]_a^{t=a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{-\zeta}{2\kappa} \left[(\kappa-1) e^{-i3\pi/4} \left\{ -i t (z+i\ell+i t)^{1/2} + \frac{2}{3} (z+i\ell+i t)^{3/2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i3\pi/4} z \left\{ \frac{i t}{\sqrt{z+i\ell+i t}} - 2\sqrt{z+i\ell+i t} \right\} \right]_a^{t=a+b} \end{aligned}$$

$$\phi' = -\kappa\phi - z\phi'$$

[3] 固定辺に直角に逆対称開口形状 (8の字) クラックが存在する解 (図-5.11参照)

$$\begin{aligned} \text{a) 基本関数} \\ \nabla^2 \nabla^2 W_1 &= 0 \\ W_1 &= \bar{z}\phi + \phi \end{aligned} \quad (5-21)$$

$$\phi = i\zeta \left[\frac{z}{3} (z^2+t^2)^{3/2} \right]_a^{t=a+b}$$

$$\phi' = i\zeta \left[\frac{1}{3} (z^2+t^2)^{3/2} + z^2 \sqrt{z^2+t^2} \right]_a^{t=a+b}$$

$$\phi' = z\phi' - \phi$$

$$\begin{aligned} \text{b) 変位 } u_0 \text{ を打ち消す曲面} \\ \nabla^2 \nabla^2 W_3 &= 0 \\ W_3 &= \bar{z}\phi + \phi \end{aligned} \quad (5-22)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{i\zeta}{2\kappa} \left[\frac{1}{3} \{ (\kappa-1)z + (\kappa+1)i\ell \} \{ (z+i\ell)^2 + t^2 \}^{3/2} \right. \\ &\quad \left. - 2z(z+i\ell)^2 \sqrt{(z+i\ell)^2 + t^2} \right]_a^{t=a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{i\zeta}{2\kappa} \left[\frac{1}{3} \{ (\kappa-1)z + \{ (z+i\ell)^2 + t^2 \}^{3/2} \right. \\ &\quad \left. + \{ (\kappa-7)z + (\kappa-1)i\ell \} \sqrt{(z+i\ell)^2 + t^2} (z+i\ell) - \frac{2z(z+i\ell)^3}{\sqrt{(z+i\ell)^2 + t^2}} \right]_a^{t=a+b} \end{aligned}$$

$$\phi' = -\kappa\phi - z\phi'$$

5.3 まとめ

本研究で導いた「半無限板の自由辺近傍に円孔やクラックが存在する場合の応力関数」は、自由辺の条件 $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ を満足するが開口部の応力は $\sigma_r \neq 0$ あるいは $\sigma_x \neq 0$ であって開口としての条件は完全なものではない。しかし、この開口部の残存応力 σ_r , σ_x を開口用の内圧として弾性体の破壊問題へ拡張することによって興味深い問題を論じ得るものとなる。

クラック軸線に直角方向の固定辺がクラック近傍に存在する場合の応力関数も導いたが、クラックの開口は有限長さで対称形のもの、逆対称 (8の字) 形状のもの、および一方向に無限長さの開口等広く開口形状の関数形状の関数を設定し得るのでこれらの応力関数の活用範囲は大きいと思われる。コンクリートの打継目、コンクリートの底板と側壁の継目、あるいは岩盤上へ打設されたコンクリートのひび割れ問題等が想定される。

これらの応力関数によるクラック開口部の応力の残存値は重ね合せの未定係数法で0へ近づけることになる。しかしプロセスゾーン部の応力集中の形状や特性は極めて精度良く求めることができる点が有限要素等と比較して優れている点である。

参考文献

- 1) 栖原秀郎・藤井康寿・中川建治：くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案，土木学会論文集，No. 528/VI-29, 1995.
- 2) 栖原秀郎・長谷川豊・藤井康寿・中川建治・服部育男：半地下トンネルにおける誘発目地の設計法に関する一考察，構造工学論文集，Vol. 42A, 1996.

第6章 実際例との比較検討(1)
 —くさび貫入工法(KNBB工法)
 への適用—

6.1 概要

現在、発破を使わない岩掘削工法が数多く開発され実施されている。くさび貫入による岩掘削工法もその一つであり、工事に伴う振動・騒音問題や重要構造物の基礎岩盤のゆるみ問題等に対応した工法として、近年よく使用されている。

本章では、前章で示した自由辺近傍のクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数を用いてくさび貫入工法(KNBB工法)の打撃ピッチの決定方法等の設計方法について一提案を行い試験工事によってその整合性を検討した結果を報告する。

岩盤掘削の最も経済的で一般的な方法は発破工法であるが、岩盤の種類、風化の程度、岩質、亀裂・節理の程度等により機械掘削も一般的に行われている。また、工事に伴う振動・騒音問題や重要構造物基礎岩盤のゆるみ問題等々に対応した掘削工法の数々が提案実施されている。岩盤掘削工法は、次のように分類¹⁾される。

- 1) 発破工法
 - a) 標準爆破
 - b) コントロールブラスティング
- 2) 機械掘削工法
 - a) 切削によるもの
 - b) ブレードによるもの
 - c) くさび貫入によるもの
 - d) リッパーによるもの
 - e) 機械的打撃によるもの
- 3) その他の工法
 - a) 静的破碎剤
 - b) ウォータージェット
 - c) 電磁波照射
 - d) 高温岩石溶融
 - e) その他

本章では、2).c) くさび貫入による機械掘削工法についての設計法に対して、一提案を行った。

当工法については既に、宮地等により工法の開発に係わる研究²⁾とくさび貫入による亀裂進展のメカニズムについて2次元および3次元有限要素法解析^{3) 4)}、およびアクリル板を使用した破壊実験による検証⁵⁾が行われている。

本研究は、宮地等の研究とは別角度より、当工法の打撃ピッチ(孔間隔および抵抗線長)について着目し、実績に基づく経験的な決定方法の検証と同時に著者等が提案しているクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数^{6) 7) 8)}を用いた打撃ピッチの決定方法について提案を行い、試験工事によってその整合性を確かめた。

6.2 くさび貫入による岩盤掘削システム⁹⁾

(1) 割岩システムの概要

くさび貫入による岩盤掘削工法は、日本古来の石工たちの用いた「セットウ」と「セリ矢」の技法をそのまま生かして機械化したもので、あらかじめ作成した円孔中にくさび(パワーウェッジ)と2本のカウンターウェッジをセットし打撃により自由面方向に強制変位を生じさせ岩盤を破碎する工法である。図-6.1に破碎原理、図-6.2に施工方法、図-6.3に施工フロー、図-6.4に施工パターン図、図-6.5にくさびの詳細図を示す。

(2) 打撃ピッチ等の従来の決定方法

従来は、削孔間隔および抵抗線長等(図-6.4参照)の寸法を、施工実績に基づく標準的な打撃ピッチ(抵抗線長 α ×削孔間隔 β)と岩質および弾性波速度の関係を示す表-6.1を参考にして、試験施工により決定している。

表-6.1 標準的な打撃ピッチ

岩区分	弾性波速度 v_p	打撃ピッチ($\alpha \times \beta$)
中硬岩	2.5~4.5km/s	1.5m×2.0m
硬岩1	3.5~4.8km/s	1.5m×1.8m
硬岩2	>4.2km/s	1.3m×1.5m

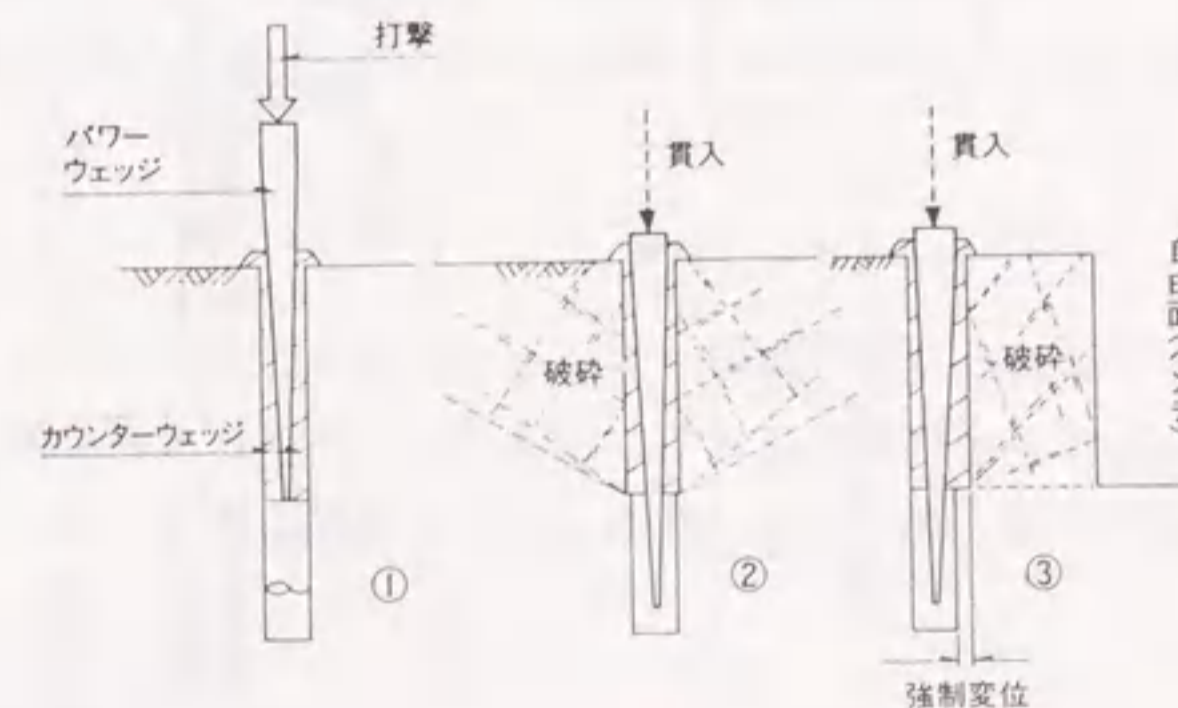


図-6.1 破碎原理

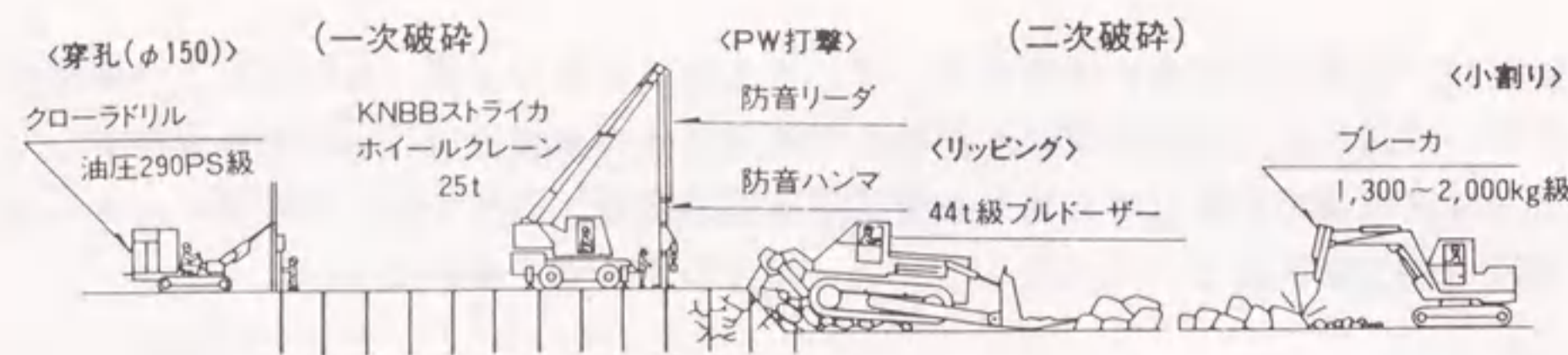


図-6.2 施工方法

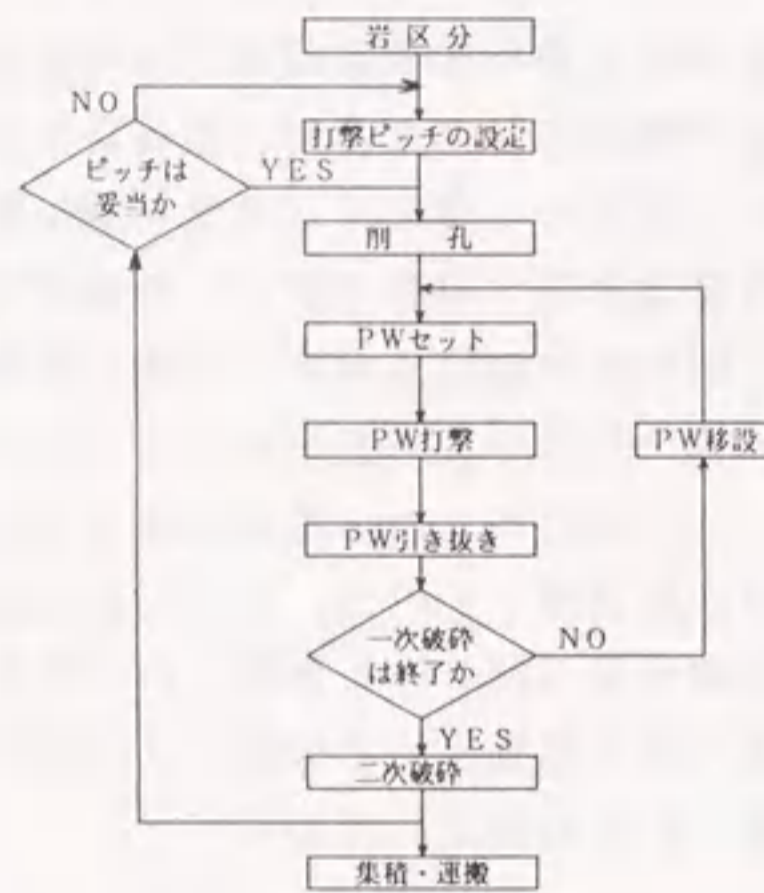
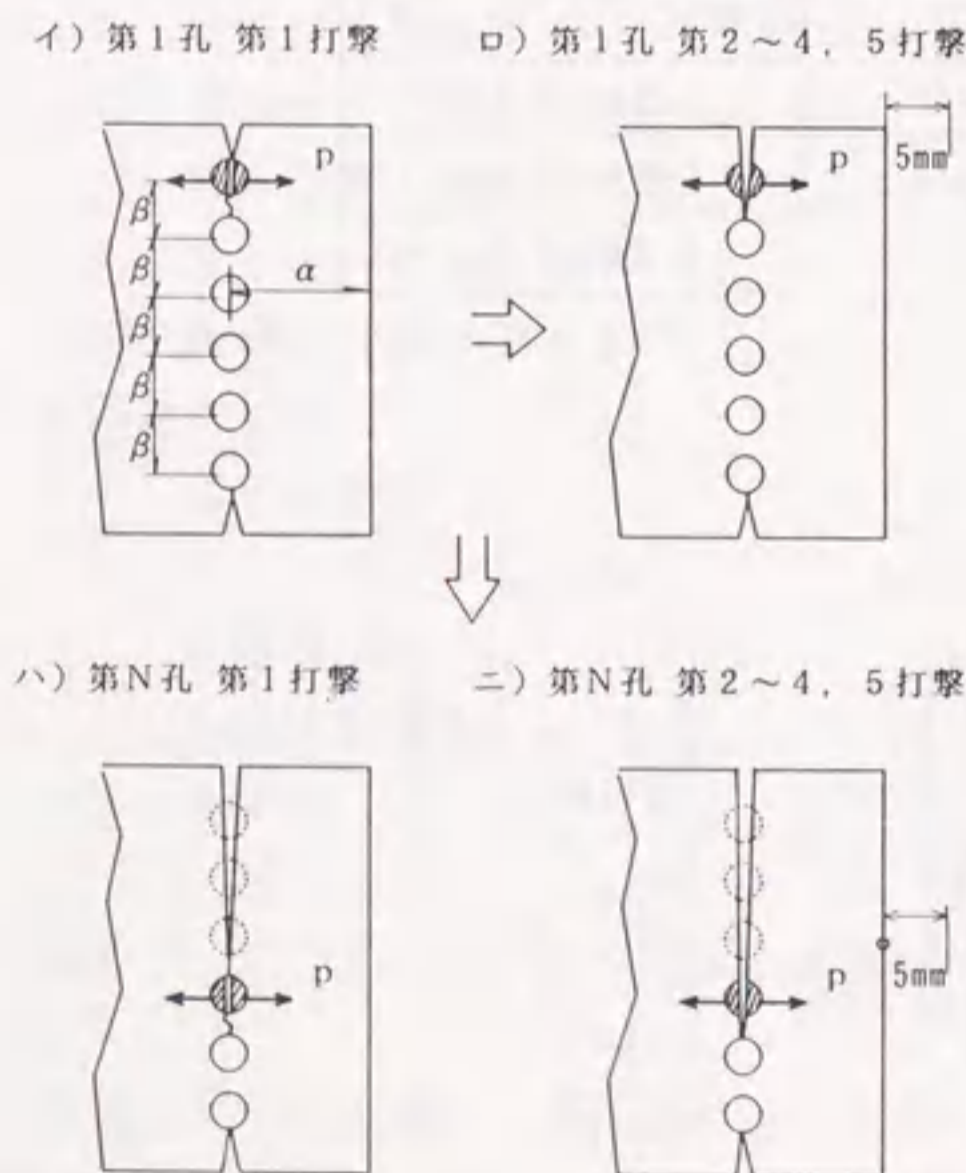


図-6.3 施工フロー



凡例 α: 抵抗線長 β: 削孔間隔

図-6.4 施工パターン

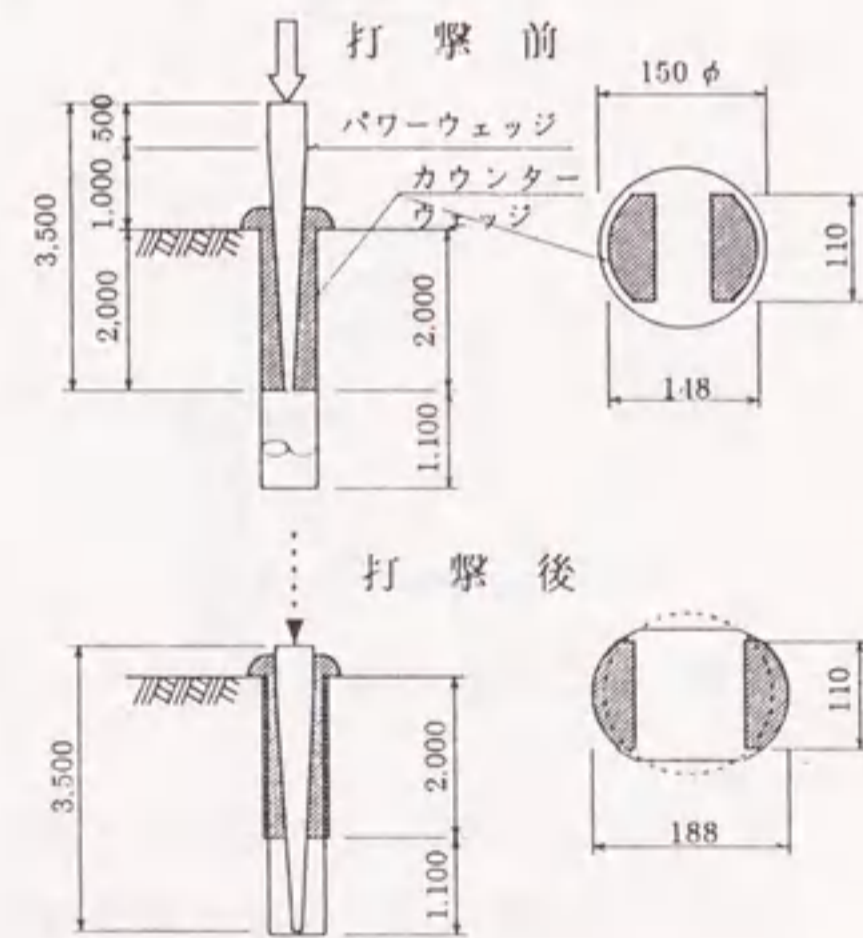


図-6.5 くさび詳細図

6.3 解析手法

(1) 解析モデル

図-6.1の施工パターン図に示すように、第1孔より順次施工するが各孔ともに第1打撃において自由面と平行にしかも次孔までクラックを進展させ、第2打撃以降においてはこの削工孔を通じてクラックに強制開口変位を起こさせつつ、自由面を外側方向へ変位させる。標準的な1打撃当たりの変位量は過去の実績で約5mmで、この場合の施工能率およびくさびの損耗率ともに最も優れていることが知られており、4~5回の打撃で計20mmの変位を起こさせるようにする。よって本研究では、前述の施工パターンにおける直接岩盤の強制開口変位に寄与する第2打撃以降のパターンを図-6.6のようにモデル化する。

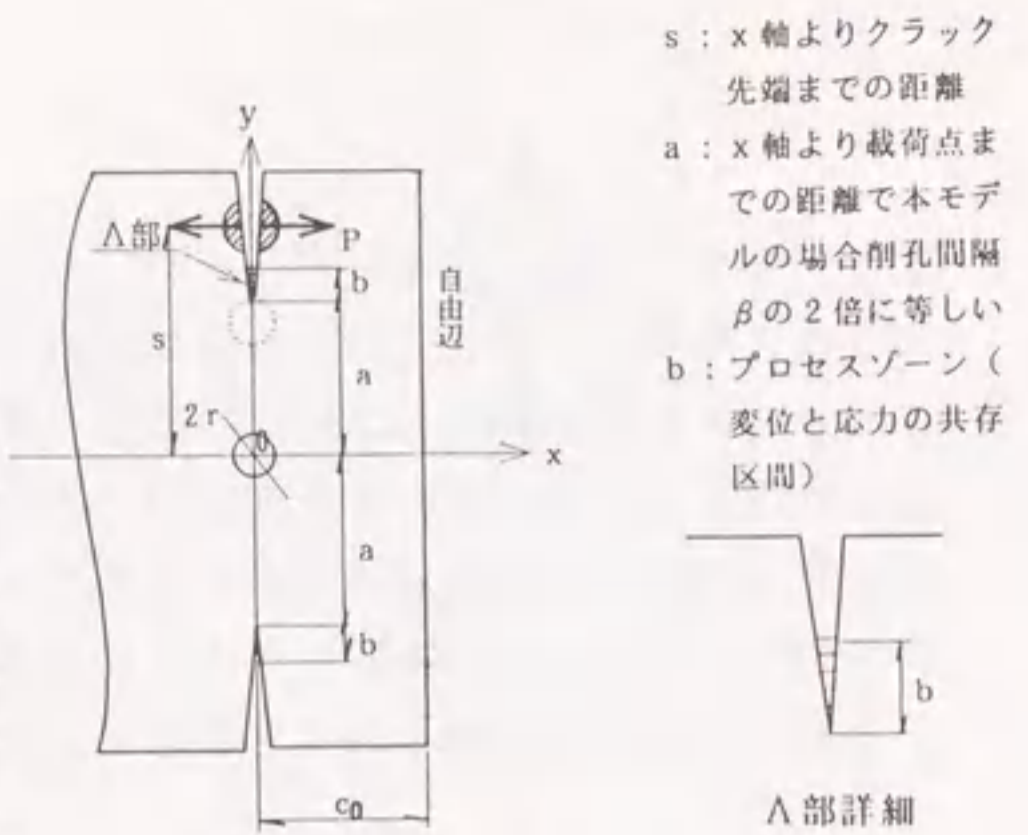


図-6.6 解析モデル図

(2) 自由面近傍の空隙に内圧を受ける半無限板の応力関数の構成法

著者は、前章において自由面近傍のクラックあるいは円孔に集中荷重等を受ける半無限板の応力関数を構成する方法を示した。以下その方法について再掲する。(図-6.7参照)

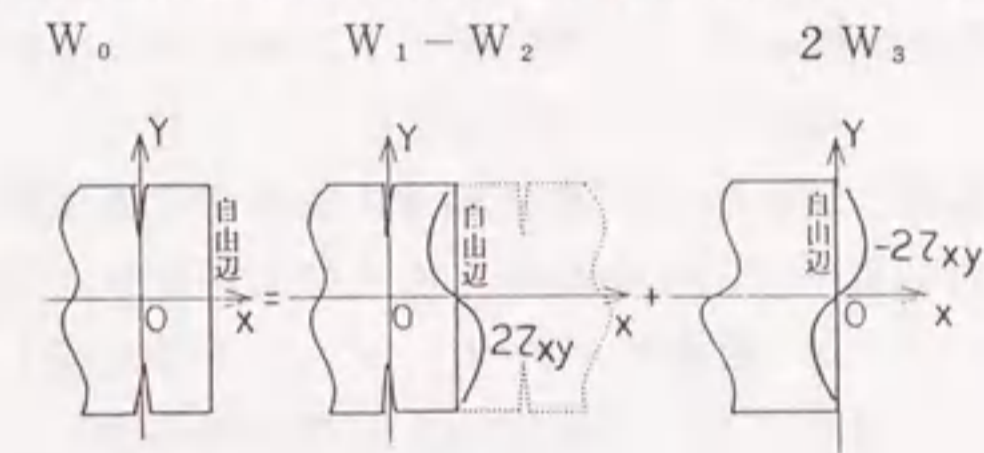


図-6.7 自由面の構成法

自由面近傍のクラックあるいは円孔を構成する応力関数 W_0 は、次のように表わされる。

$$W_0 = W_1 - W_2 + 2W_3 \quad (6-1)$$

W_0 : 自由面近傍のクラックあるいは円孔を構成する応力関数

W_1 : 無限板内に含まれるクラックあるいは円孔の開口のみを構成する基本応力関数

c_0 : y軸(クラック中心線もしくは、円孔の中心位置)から自由面までの距離(抵抗線長 α と等しい)

W_2 : W_1 をx軸方向に $+2c_0$ シフトした曲面(よって、 $-W_2$ は $x=c_0$ 軸を回転軸として W_1 を反転した曲面を表す。)

τ_{xy0} : W_1 および W_2 による $x=c_0$ におけるせん断応力 τ_{xy}

W_3 : W_1 および W_2 によって $x=c_0$ に生じるせん断応力を打消す曲面(y軸上で $\tau_{xy} = -\tau_{xy0}$, $\sigma_x|_{x=0} \equiv 0$ となる曲面)

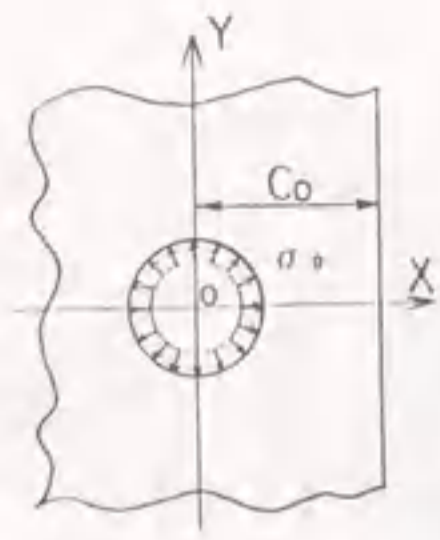


図-6.8 円孔モデル

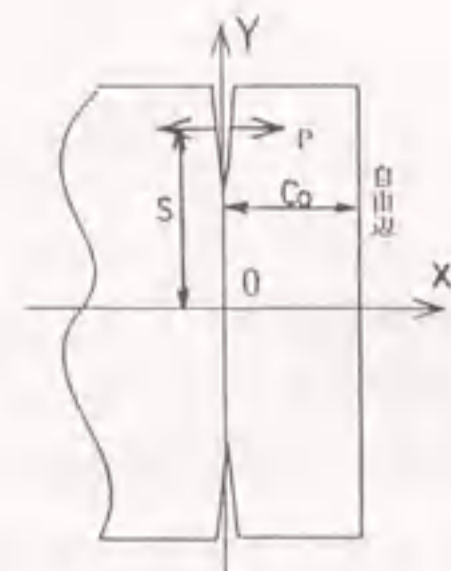


図-6.9 両側クラックモデル

$$\rho(t, a, b) = 2t/b \cdot (2a+b) = \zeta t$$

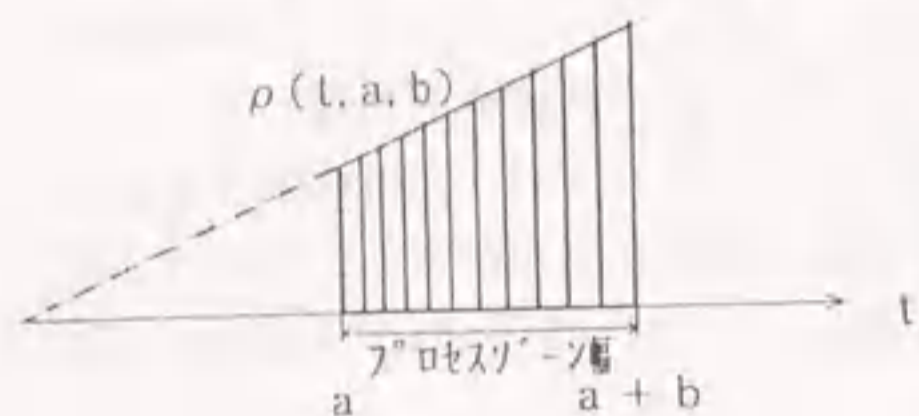


図-6.10 重み関数 \$\rho\$

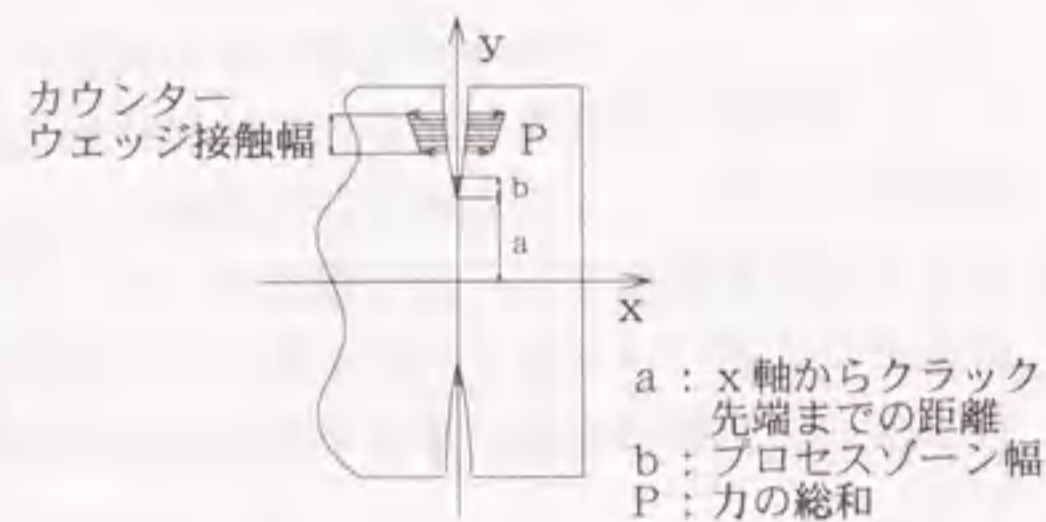


図-6.11 有限化された両側クラックモデル

すなわち、自由面を有する半無限板の開口を表現する応力関数を構成するには、まず無限板中のクラックあるいは円孔を表す基本曲面 W_1 に $x = c_0$ 軸を対称軸として W_1 を反転した解 ($-W_2$) を重ね合わせる。ここで、 $x = c_0$ 軸上の σ_x は 0、 τ_{xy} は $2\tau_{xy0}$ となる。

ただし、 τ_{xy0} は W_1 および W_2 の $x = c_0$ 軸上のせん断応力である。次に、このせん断応力に対し半無限板の自由面に $-\tau_{xy0}$ が作用したものである W_3 (せん断応力打消し曲面) を重ね合わせると、 $x = c_0$ 軸上で $\sigma_x = 0$ 、 $\tau_{xy} = 0$ を実現し自由面を構成できるのである。ここで、 W_3 を重ねて自由面を実現させると円孔やクラック部分における応力解放の条件 ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ 、あるいは $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$) が乱される。あたかも内圧 (σ_r, σ_θ) を受けたようになるが、この応力分布は緩やかなものであるからくさびによって作用させられた内圧 (あるいは開口用外力) とみなして逆活用するのである。

著者は、既に種々の問題について重み積分法により自由辺近傍のクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数を導いた。今回使用する応力関数は、自由辺近傍に両側クラックを有する半無限板が $y = s$ で集中力 P を受けている問題の解で式(5-11) および式(5-12) で表されるものと、自由辺近傍に円孔を持つ解で式(5-2) および式(5-3) で表されるものであり、重み積分に使用する重み関数 ρ は、図-6.10 に示す形状を持ち、定義域を $(a, a+b)$ 、すなわちプロセスゾーン幅として総面積が 1 になるように基準化されたものである。これは、最も積分計算に都合がよい形を採用したものである。

なお、この重み関数を用いて積分し応力を有限化するという操作は、あたかも作用する集中荷重による応力分布を分布荷重による応力分布に置き換えたような意味合いを持っている (図-6.10, 6.11 参照)。具体的には、プロセスゾーン幅とカウンターウェッジ接触幅で重み積分を行い応力を有限化する。

6.4 力学的諸係数および設定条件の決定

岩盤の種類と力学的諸特性との関係については、種々の研究がなされているが、必ずしも精度の高いものではない。力学的諸係数の設定は最も重要かつ難しい問題である。

しかし、当工法の特徴として、力学的諸係数の設定においてその精度にばらつきがあったとしても、打撃力、打撃回数というファクターに相当の自由度があり、支障なく施工ができるという利点がある。また、1シリーズの施工後には、削孔ピッチの変更も可能である。もちろん、打撃回数は、くさびの寿命に大きく影響するし削孔ピッチは、作業能力に大きく影響するので、力学的諸係数の設定の精度の向上が重要であるということはいままでもないことである。

よって、著者の所属する会社における当工法の経験により、これらの力学的諸係数の設定は、当工法の自由度の許容範囲を勘案して次のように設定する。

以下に、設定のプロセスと設定値について述べる。

岩盤は、岩質、不連続面の存在、ゆるみの程度等により異なった力学的特性を示す。この様な観点から岩盤を分類¹⁾すると、

- 1) 岩盤がかなりの硬さを持っていて、不連続面は存在するが著しくなく、ゆるみもほとんどないため、岩石とほとんど大差のない力学的特性を示す岩盤
- 2) 岩石がかなりの硬さを有し、不連続面が存在し、ゆるみがあるために岩石の力学的特性とはかなり異なった力学的特性を示す岩盤
- 3) 岩石の固結度はかなり低く、不連続面は存在しないか存在してもゆるみが少なく、岩石とほとんど大差のない力学的特性を示す岩盤
- 4) 岩石の固結度はかなり低く、不連続面は存在しゆるみも存在するために、不連続面の影響もかなり強くあらわれている岩盤

に大別される。

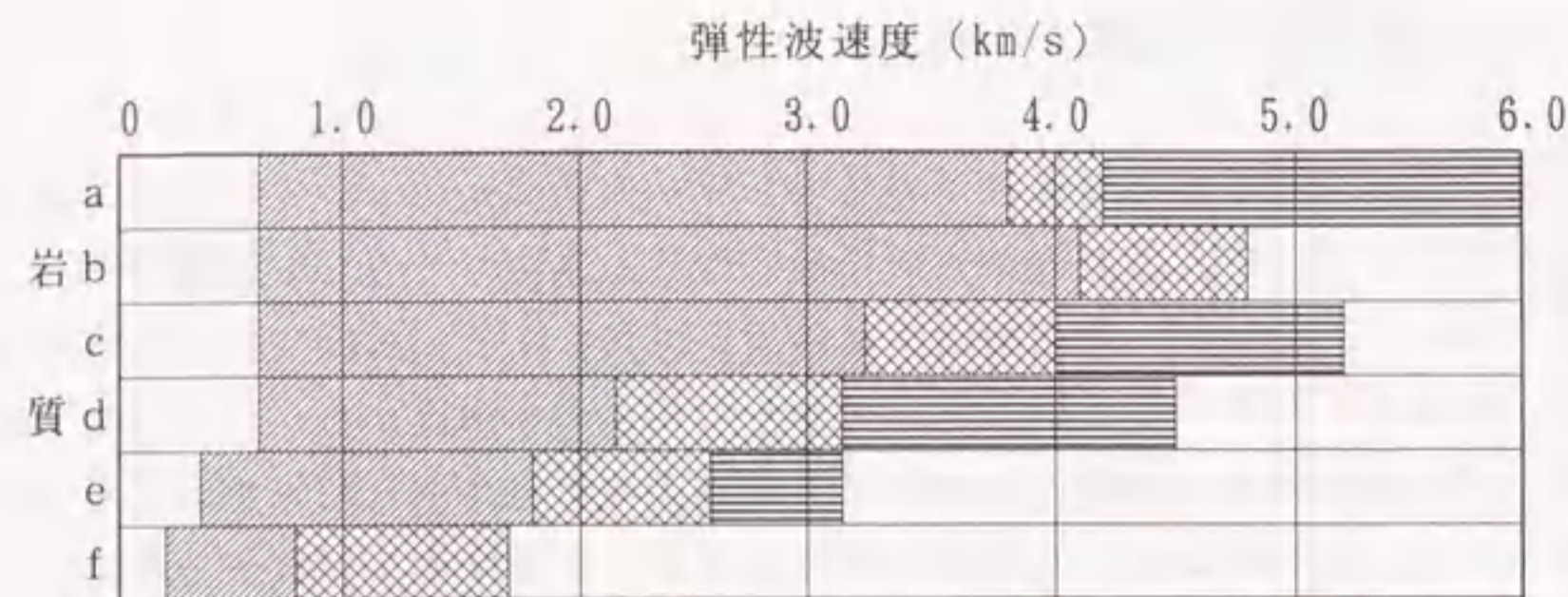
くさび貫入による岩盤掘削工法の対象岩盤は、1) と 2) を対象としており 2) でも 1) 寄りのものを対象としている。その理由は、3) と 4) および 2) の多くは、リッピング工法等による、経済的で施工性のよい工法があるからである。

リッピング工法と当工法との施工区分を明確に分けることは難しい問題であるが、一つの目安として、岩盤の弾性波速度との関係から区分することができよう。

岩盤の種類と弾性波速度との関係を図-6.12に、リッピング工法と弾性波速度との関係を図-6.13に示す。また当工法と弾性波速度との関係は、前掲の表-6.1 のとおりである。これらの資料よりリッピング工法と当工法との施工区分は、 $v_p = 2.5 \text{ km/s}$ から 3.0 km/s であり、岩盤の種類と弾性波速度との関係より当工法の通常の適用範囲は、 $v_p = 3.0 \text{ km/s}$ (あるいは 2.5 km/s) ~ 5.0 km/s であると考えられる。それは、 $v_p = 5.0 \text{ km/s}$ 以上の岩盤は、通常地中深くに存在しあるいは、基礎岩盤として十分な機能を持ちそれ以上の掘削を必要としない等々の理由によるからである。以上の観点から対象岩盤は弾性体としての性質が強いものとして考え、表-6.1 に示した岩区分と弾性波速度との関係を考慮し、各岩質に対する弾性波速度を表-6.2 のように設定する。

表-6.2 岩質と弾性波速度

岩種	弾性波速度
中硬岩	3.5 km/s
硬岩1	4.0 km/s
硬岩2	4.5 km/s



凡例
 ■ : 亀裂非常に多い ▨ : 亀裂多い ▤ : 新鮮
 a : 古・中生層(砂岩, チャート等), 変成岩(結晶片岩, ホルンフェルス等)
 b : 剥離の著しい変成岩等 c : 火成岩(流紋岩, 安山岩等)
 d : 古第3紀層~新第3紀層 e : 新第3紀層~洪積層 f : 沖積層~洪積層

図-6.12 岩盤の種類と弾性波速度¹¹⁾



凡例
 ■ : リッパ°-可能 □ : リッパ°-限界 ▤ : リッパ°-不可能

図-6.13 リッピング工法と弾性波速度¹²⁾

表-6.3 弾性係数採用値 E

岩種	弾性波速度 v_p	弾性係数採用値 E
	3.0 km/s	250,000 kgf/cm ²
(中硬岩)	3.5	262,500
(硬岩1)	4.0	275,000
(硬岩2)	4.5	287,500
	5.0	300,000

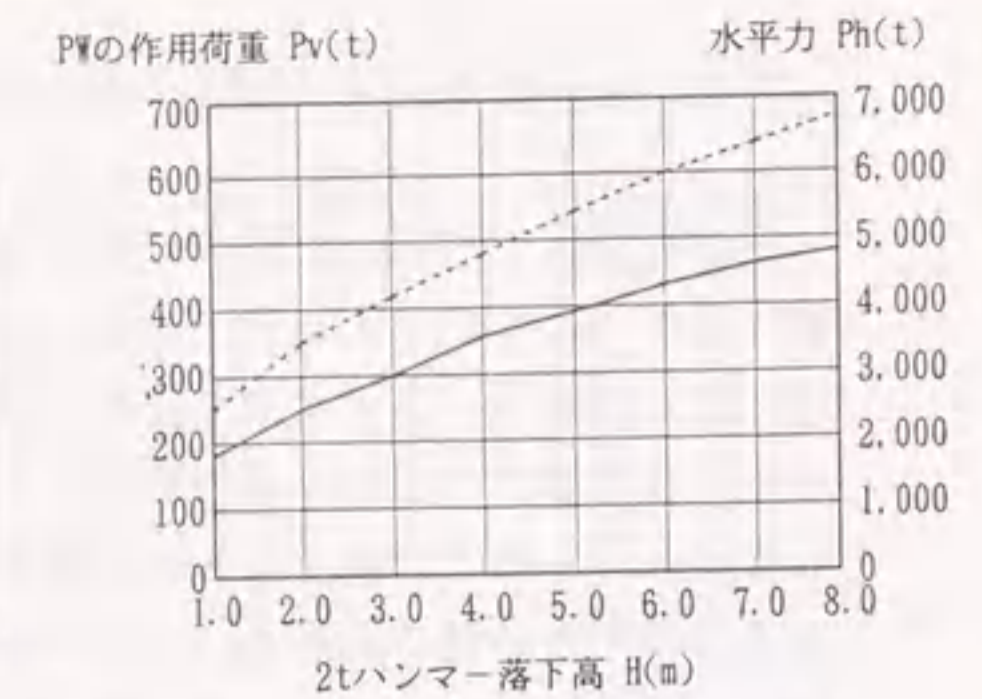


図-6.14 ハンマーの落下高Hと水平力P

なお、動弾性係数と弾性波速度との関係は、

$$E_v = \frac{\rho}{g} v_p^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \quad (6-2)$$

と表される。

また、当工法の岩破碎機構より、弾性係数としてとり得る値は、静弾性係数よりは動弾性係数に近い値であると推定できるので仮に動弾性係数の75%とする。

ここで、式(6-2)においてポアソン比 $\nu=0.2$ 、密度 $\rho=2.5 \text{ t/m}^3$ とし、対象岩種の中央値となる硬岩1 ($v_p=4.0 \text{ km/s}$) の場合の弾性係数を、 $0.75 \times E_v$ とすると $E_v=275,000 \text{ kgf/cm}^2$ となり、その他の弾性波速度 v_p に対する弾性係数採用値 E を表-6.3 のように仮定する。

次にハンマーの落下高 H と水平力 P との関係¹³⁾ は、図-6.14 の通りである。

前述の通り当工法の標準的な一打撃(ハンマーの落下高 $H=6 \text{ m}$) 当たりの自由面方向への標準的な(効率的な)変位量は、過去の施工実績より約 5 mm であり、この場合の施工能率および、くさびの損耗率ともに最も優れていることが経験的に知られており、前述の標準的な打撃ピッチもこのような観点から算定されている。

ここで、図-6.14よりハンマーの落下高 $H=6.0 \text{ m}$ の場合の水平力は、 $P=4,300 \text{ t}$ となる。なおこの値はカウンターウェッジ長さ 2 m (くさび接触部延長) 当たりの水平力を表しているため、単位長さ、すなわちカウンターウェッジ長さ 1 m 当たりの水平力は、 $p=2,150 \text{ t}$ となる。この水平力は、カウンターウェッジ(接触幅 110 mm) を介して岩盤に伝わることになる。したがって、カウンターウェッジ長さ 1 m 当たりの接触面積は、 $0.11 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 0.11 \text{ m}^2$ なのでハンマーの落下高 $H=6.0 \text{ m}$ によってカウンターウェッジを介して岩盤に伝わる水平圧力は、 $2,150 \div 0.11 = 19,545 \text{ tf/m}^2$ とする。

以上の力学的諸係数および設定条件のもとで前述の解析モデルによる岩盤変位量および発生応力の検証を行う。

6.5 解析結果および従来の方法との比較検討

本研究では3次元の岩盤の力学問題を2次元問題へモデル化しているので、厳密な数値に基づいた推定は不可能である。しかし、本研究における応力関数は、「クラック先端にプロセスゾーンを設けて応力と開口変位の勾配を有限で滑らかなものとしている」という従来のクラックの応力関数に比べ極めて現実的な特性を有している。

したがって、施工実績もしくは試験施工における打撃による自由辺上の変位と解析用の2次元モデルの対照点の変位とがほぼ一致するようにプロセスゾーンの長さbを推定する。(弾性係数E, カウンターウェッジ接触幅B, 作用外力p等は確定値である。)

次に、打撃ピッチ(抵抗線長および削孔間隔)の比率を変えることによって、応力集中の大きさがどのような比率で変化するかという応力あるいは変位それぞれの相対的な比率を検討する。しかる後に解析モデルで得られた変位や応力集中の比率を実際の施工現場の打撃ピッチの決定に準用するのであれば、効果的な推定を得ることが可能であろうと思われる。

したがって、応力関数の計算例として、ハンマーの第2打撃相当開口外力によって解析モデル(図-6.5)の自由辺の着目点の変位が約5mm(通常の施工実績)となるようなプロセスゾーンを逆推定(プロセスゾーン長 $b=55\text{mm}$)して、それによる計算結果を示す。すなわち、前節で設定した力学的諸係数を使用して、中硬岩、硬岩1、硬岩2の代表例として以下の3種類について解析したものを図-6.16~図-6.21に示す。

自由面方向の変位量の比較検討位置は、1打撃前の削工孔の延長上で図-6.15にその位置を示す。

以上の結果において最大変位量、自由面の変位量、クラック先端の応力 σ_x は、表-6.4のようになる。

これらの結果より、従来の方法すなわち表-6.1に示す中硬岩、硬岩1、硬岩2の岩種に対し標準的な打撃力および打撃ピッチで施工した場合、自由面方向変位が約5mm程度となるという経験的な結果と整合した結果となっている。さらに本解析結果よりクラック先端の応力 σ_x は、 $1,000\text{kg/cm}^2$ を越え次孔までクラックを発生させるのに十分であるといえる。また、硬い岩盤ほどクラック先端の応力集中は大きいことがわかる。

ここで表された、クラック先端の応力集中は次打撃削工孔の直前あるいは、次打撃削工孔を越えて発生したクラック先端の応力集中を表している。

表-6.4 解析結果

岩種	最大変位量	自由面の変位量	クラック先端の応力 σ_x
中硬岩	9.0mm	5.2mm	1.029kgf/cm ²
硬岩1	8.3	5.1	1.089
硬岩2	7.8	5.0	1.202

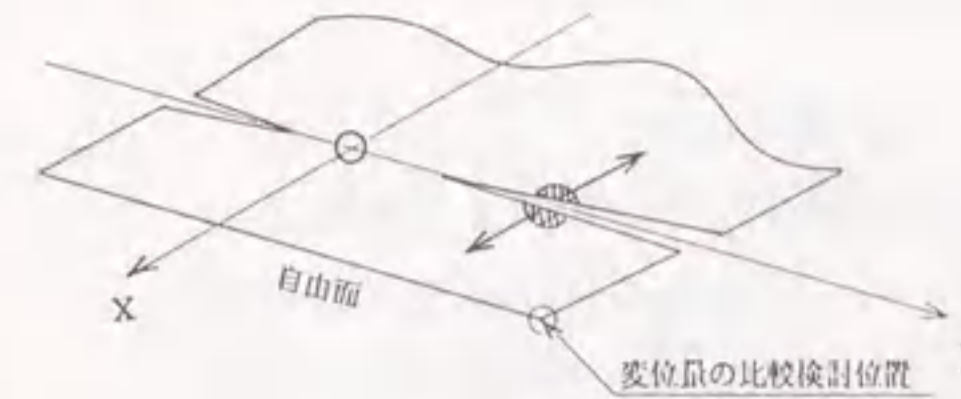


図-6.15 解析モデル図(変位量の比較検討位置)

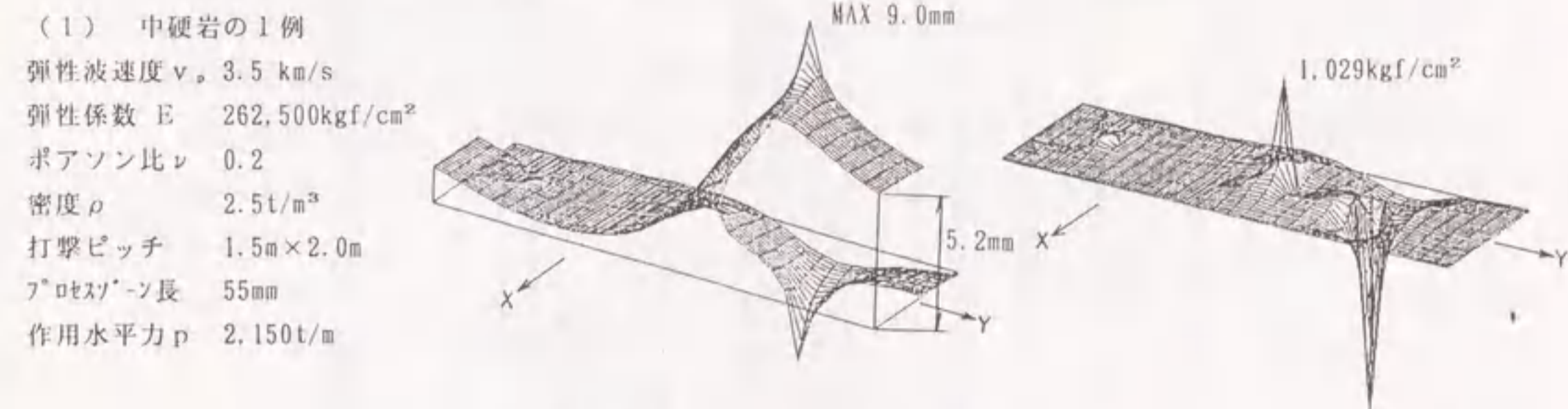


図-6.16 変位図U(x方向変位) 図-6.17 応力図 σ_x (x方向応力)

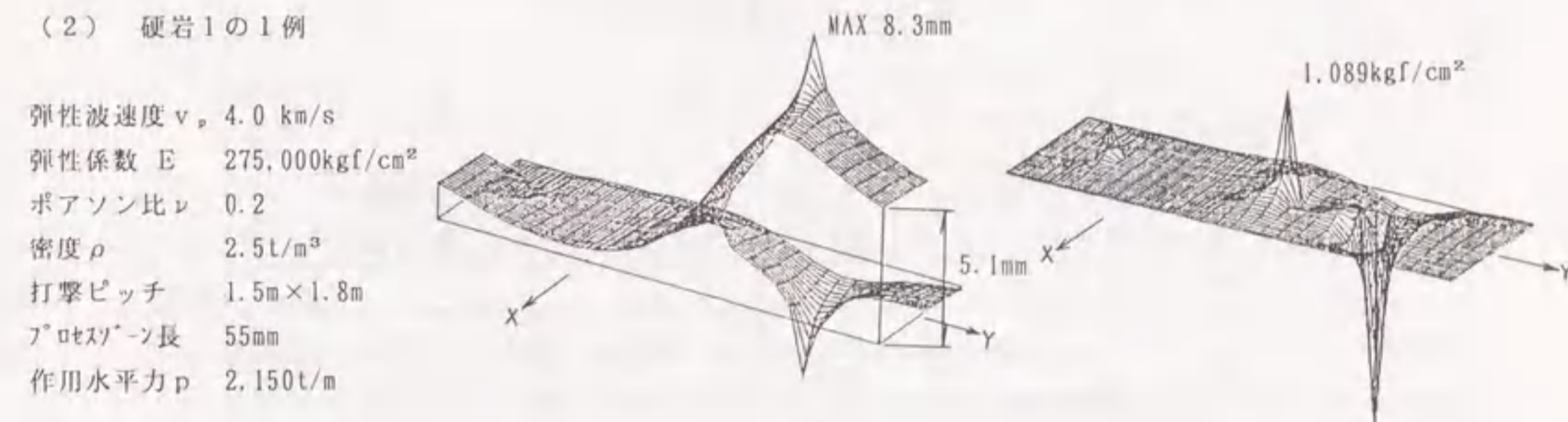


図-6.18 変位図U(x方向変位) 図-6.19 応力図 σ_x (x方向応力)

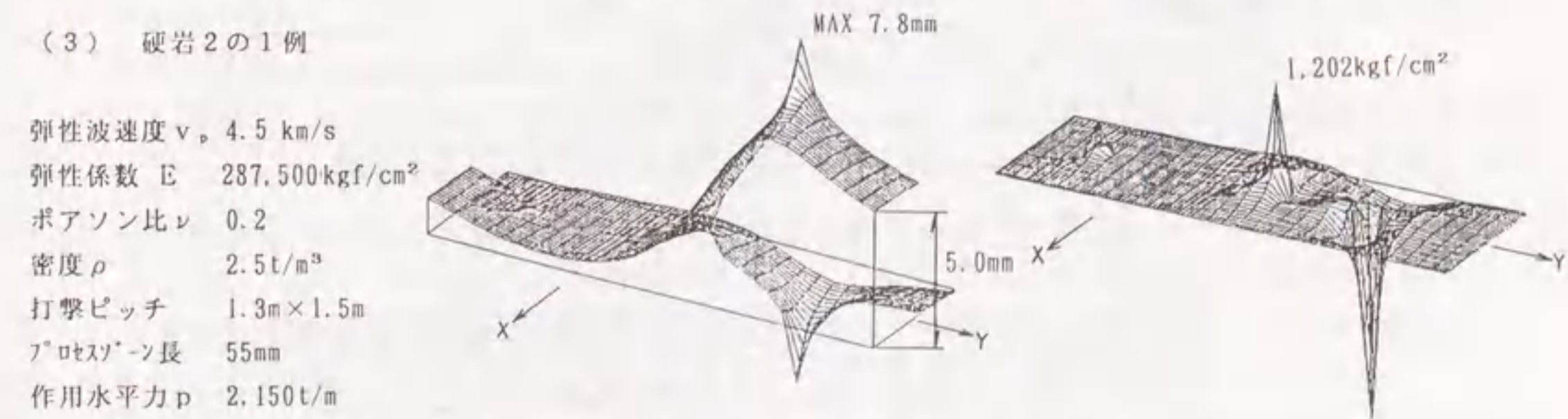


図-6.20 変位図U(x方向変位) 図-6.21 応力図 σ_x (x方向応力)

表-6.5 弾性波速度と打撃ピッチ

岩種	弾性波速度 v_p (km/s)	弾性係数採用値 E(kgf/cm ²)	打撃ピッチ	
			抵抗線長 α (m)	削孔間隔 β (m)
中硬岩	3.0	250,000	1.70	2.00
	3.1	252,500	1.70	2.00
	3.2	255,000	1.65	2.00
	3.3	257,500	1.60	2.00
	3.4	260,000	1.55	2.00
	3.5	262,500	1.50	2.00
	3.6	265,000	1.50	1.95
	3.7	267,500	1.50	1.90
	3.8	270,000	1.50	1.85
硬岩1	3.9	272,500	1.50	1.80
	4.0	275,000	1.50	1.80
	4.1	277,500	1.50	1.70
	4.2	280,000	1.40	1.70
硬岩2	4.3	282,500	1.40	1.60
	4.4	285,000	1.40	1.50
	4.5	287,500	1.30	1.50
	4.6	290,000	1.30	1.50
	4.7	292,500	1.30	1.45
	4.8	295,000	1.30	1.45
	4.9	297,000	1.25	1.40
	5.0	300,000	1.20	1.40

表-6.6 試験施工諸元

項目	施工諸元	備考
岩盤の種類	頁岩	
" 弾性波速度	4.2km/s	実測値
" 弾性係数	280,000 kgf/cm ²	推定値
" ポアソン比	0.2	"
" 密度	2.5t/m ³	"
プロセッソ長	55mm	"
ベンチ高	2m	
削孔径	150mmφ	
打撃ピッチ	1.5m	
抵抗線長	1.4m, 1.5m	
ハンマー落下高(m)	表-6.7参照	
変位計測位置	図-6.22,23参照	
測定項目	x, y方向の絶対変位量	測点1~6

表-6.7 各施工時におけるハンマー落下高(m)

打撃(回目)	1	2	3	4	打撃(回目)	1	2	3	4
A孔施工時	4	6			E孔施工時	4	8	8	5
B孔 "	4	6			F孔 "	4	8		
C孔 "	4	6	4		G孔 "	4	8	5	
D孔 "	4	6			H孔 "	4	8		

6.6 設計法に関する一提案

前述の当工法の標準的な一打撃(ハンマーの落下高 $H=6m$)当たりの自由面方向への標準的な(効率的な)変位量は、5mmであり、この場合の施工能率および、くさびの損耗率ともに最も優れていることに着目し、6.3に述べた解析手法により各弾性波速度を持つ岩盤に対応する打撃ピッチを求めると表-6.5の通りとなる。

上記の打撃ピッチおよび落下高で施工すれば、4~5回の打撃で自由面方向へ約20mm強制変位させることができる。もし実施工で不可能の場合でも、落下高を大きくしたり打撃回数を増やすことによって対応できる。

以上の結果より、著者等が提案しているクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数を用いることによって、打撃ピッチの決定法について理論的に裏付けられたと考えられる。

6.7 試験工事との比較検討

(1) 試験施工内容

試験施工は、当工法で実際に施工している豊橋市および同土地開発公社発注の中学校造成工事の一部を借りて行った。施工配置図を図-6.22に示す。また、施工諸元を、表-6.6に示す。

(2) 試験工事結果

試験工事結果全体を表-6.3に示す。本試験結果は、大きくつぎの3つのグループに分けられる。

- 1) 著者等の提案した方法に正確に当てはまるもの(B, C, F, Gの第2打撃目)
 - 2) 著者等の提案した方法に正確にはあてはまらないものの準じた扱いができるもの。(A, D, E, Hの第2打撃目, C, E, Gの第3打撃, Eの第4打撃目)
 - 3) 著者等の提案した方法があてはまらないもの(A~Hの第1打撃目)
- ここで1)のグループは、前述のように著者等の提案した方法に正確にあてはまるモデルでこれらについてのX軸方向変位を取り出すと表-9のようになる。

例えば、B孔施工時の第2打撃目についていえば、表-2よりハンマー落下高は6mである。その時のx, y方向の変位(図-6.23に示す変位計測位置a点およびb点での変位でこの場合a点は測点1, b点は測点2を表す。)は、表-6.3よりそれぞれ測点1(a点)で5mm, 測点2(b点)で2mmである。これらの変位は累積絶対変位量であるから、B孔施工時第1打撃までの変位量(測点1で1mm, 測点2で0mm)を差引くと本打撃によるx方向の変位量は、表-6.4に示すように測点1で4mm, 測点2で2mmとなる。

2)については、複数回の打撃や施工端部で前回施工の影響によって岩盤がゆるみ弾性係数値やクラックの形状が正確には著者等の提案したモデルに正確にはあてはまらないものの1打撃当たりの自由面方向の変位量(図-6.23に示す変位測定位置a, b部)は平均6.4mmであり簡便的には当モデルを使用することが可能であると考えられる。

表-6.8 試験工事結果

第1列 (A~D施工)										
累計打撃回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
打撃位置	A	A	B	B	C	C	C	D	D	
打撃回数(順番)	1	2	1	2	1	2	3	1	2	
変位	x方向	測点1	0	1	1	5	9	9	9	11
		測点2	0	0	0	2	1	8	21	25
		測点3	0	0	0	0	3	9	16	21
	y方向	測点1	0	0	-12	-12	-10	-10	-10	-10
		測点2	0	0	-1	0	-5	-11	-15	-15
		測点3	0	-2	0	2	3	6	-5	-5

第2列 (E~H施工)												
累計打撃回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
打撃位置	E	E	E	E	F	F	G	G	G	H	H	
打撃回数(順番)	1	2	3	4	1	2	1	2	3	1	2	
変位	x方向	測点4	0	5	10	16	20	31	35	40	37	35
		測点5	1	3	9	10	15	21	21	27	30	32
		測点6	2	0	3	3	4	5	5	10	15	24
	y方向	測点4	0	0	0	6	10	-1	-1	-3	0	-2
		測点5	0	2	-2	-5	-5	-6	-6	-5	-6	-4
		測点6	0	0	-1	-1	-2	-3	-2	-5	-6	-2

凡例

■ : 著者等の提案した方法に正確に当てはまるモデル(表-9に抜粋)

表-6.9 第2打撃目のX軸方向変位(B, C, F, G施工)

打撃位置	B	C	平均	理論値(著者等による解析結果)
打撃順位(順番)	2	2		
落下高(m)	6	6	6	
抵抗線長(m)	1.4	1.4	1.4	
x変位(mm)	a点(測点1)	(測点2)	5.5	5.8
	b点(測点2)	(測点3)		
平均	4	7	4	4.1

打撃位置	F	G	平均	理論値(著者等による解析結果)
打撃順位(順番)	2	2		
落下高(m)	8	8	8	
抵抗線長(m)	1.5	1.5	1.5	
x変位(mm)	a点(測点1)	(測点2)	8.5	6.4
	b点(測点2)	(測点3)		
平均	11	6	5	4.5

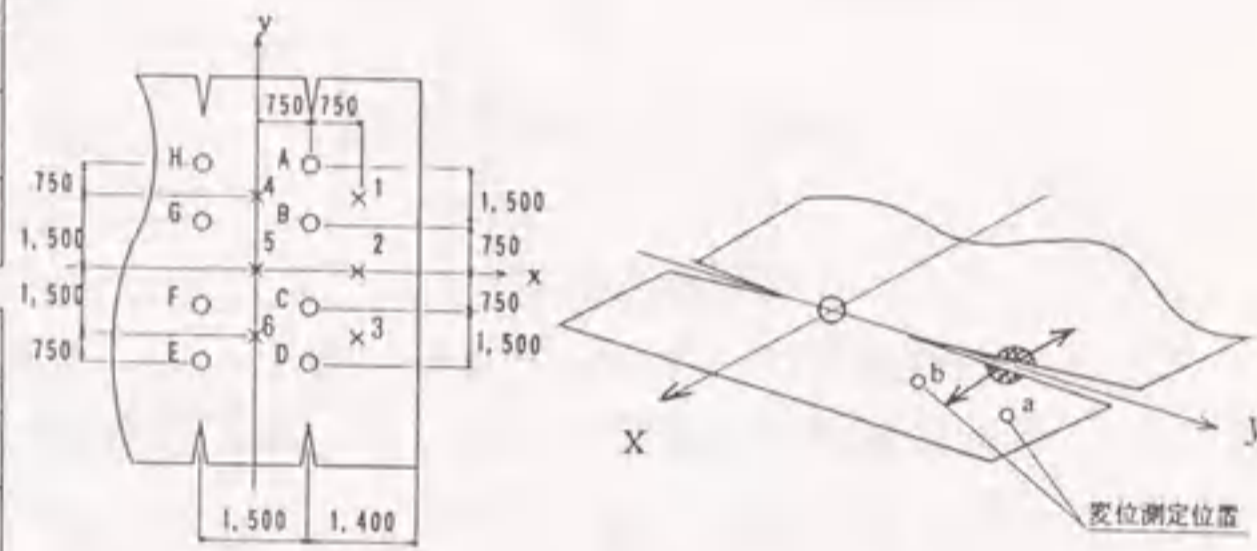


図-6.22 施工配置図

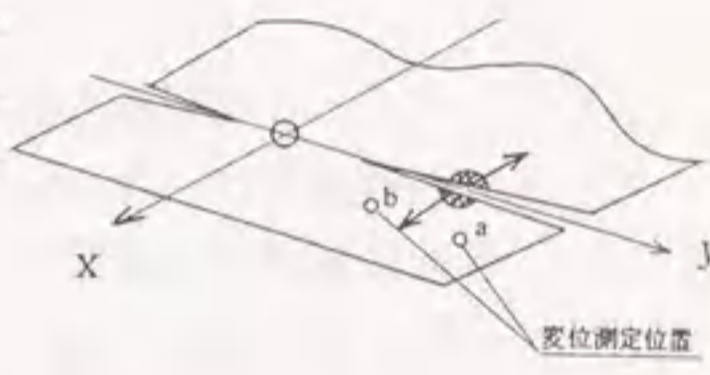


図-6.23 変位測定位置図

第1列 (A~D施工) ハンマ-落下高 H=6m

弾性波速度 v_p 4.2 km/s
 弾性係数 E 280,000 kgf/cm²
 ポアソン比 ν 0.2
 密度 ρ 2.5 t/m³
 打撃ピッチ 1.4m x 1.5m
 フロント長 55mm
 作用水平力 p 2.150 t/m

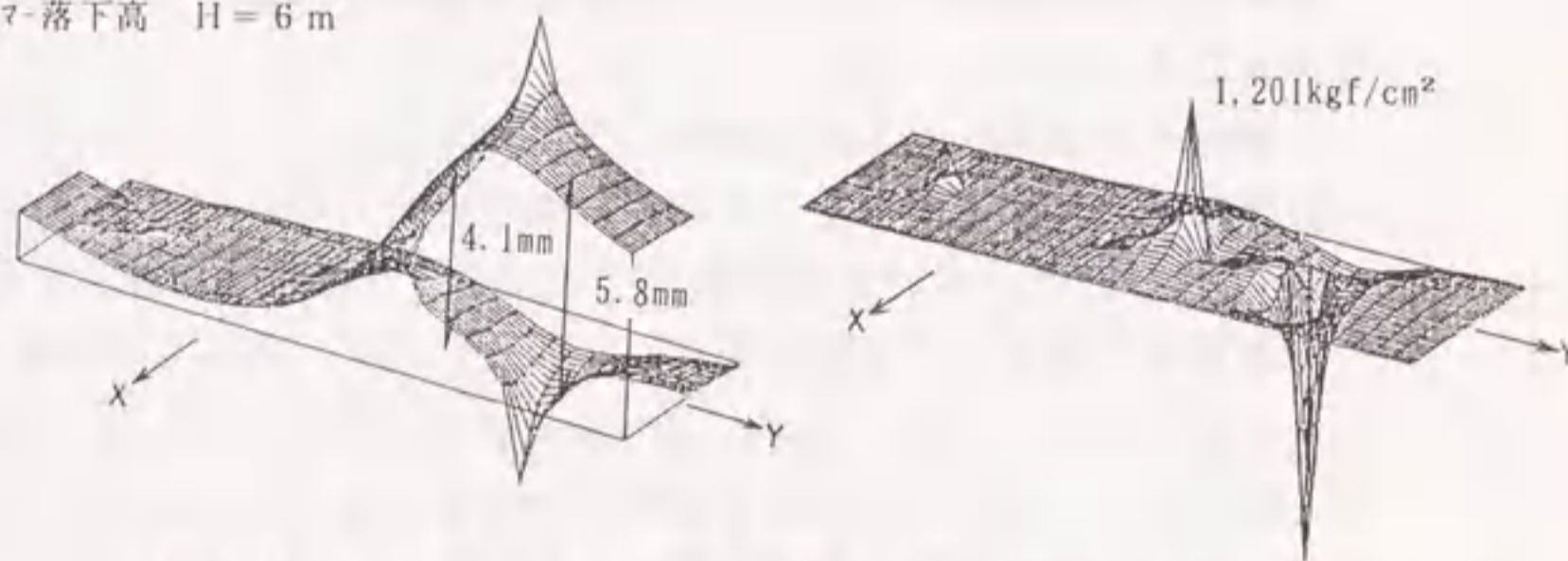


図-6.24 変位図(x方向変位) 図-6.25 応力図 σ_x (x方向応力)

第2列 (E~H施工) ハンマ-落下高 H=8m

弾性波速度 v_p 4.2 km/s
 弾性係数 E 280,000 kgf/cm²
 ポアソン比 ν 0.2
 密度 ρ 2.5 t/m³
 打撃ピッチ 1.5m x 1.5m
 フロント長 55mm
 作用水平力 p 2.450 t/m

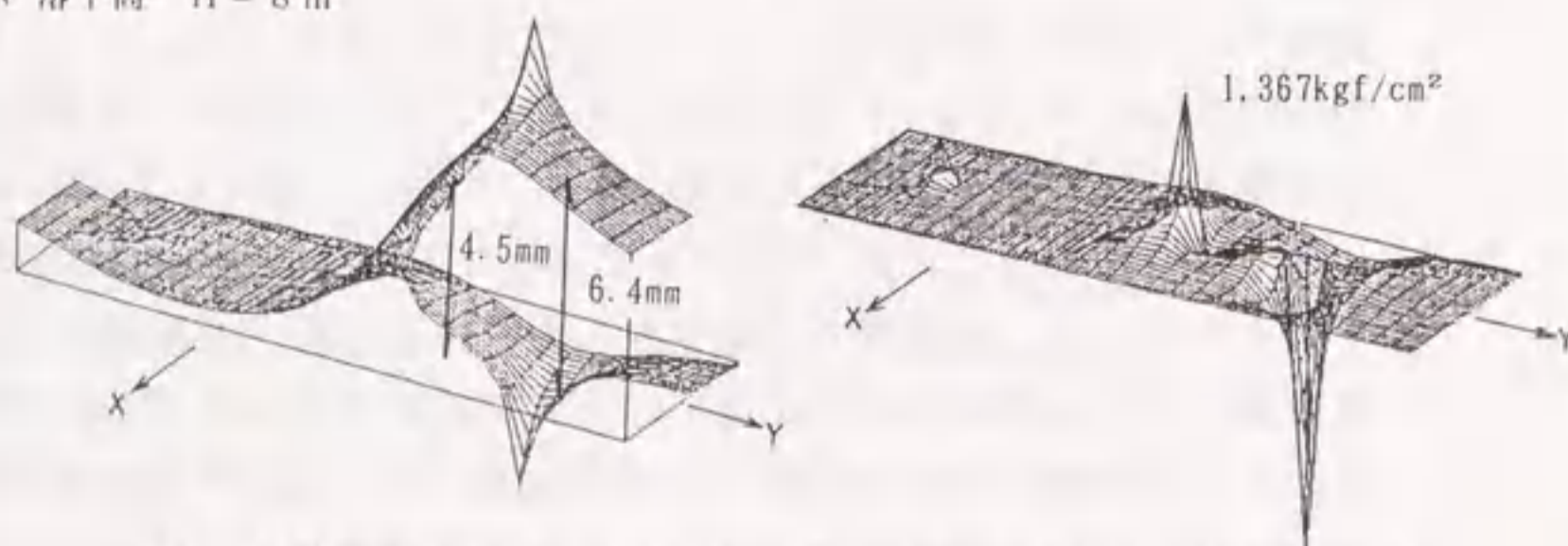


図-6.26 変位図(x方向変位) 図-6.27 応力図 σ_x (x方向応力)

3)については、1打撃目で次打撃削工孔までクラックを進展させる意味あいの打撃なので自由面方向への変位がほとんどなく著者等の提案するモデルには当てはまらなると考えられる。

(3) 理論解析との比較

試験施工条件に対する解析結果を図-6.24~図-6.27に示す。変位についてはハンマ-落下高 $H=6m$ および $H=8m$ とともに平均値に対しては表-6.9に示すようにかなりの精度で近似しうることがわかる。また、応力集中についても次孔までのクラックを発生させるに十分であることがわかる。

6.8 まとめ

岩盤掘削の実施工において岩盤を評価するファクターとして、最も一般的なものは弾性波速度であろう。本章ではこのファクターに注目し、弾性波速度より弾性係数を決定し、著者等が従来より提案している有限な応力集中を構成する応力関数を用いて、打撃ピッチの決定法に対する一提案を行った。

本理論により求めた打撃ピッチおよび自由面方向への変位量は、従来の打撃ピッチの決定法および試験施工結果と共によい精度で近似できており、本来3次元の岩盤の力学問題を2次元にモデル化しているとはいえ十分実施工に反映できるものと考えられる。

また逆解析の結果、当岩盤(頁岩、 $v_p=4.2\text{km/s}$)のプロセスゾーンの長さについては、数cm程度(今回の採用値は、 $b=55\text{mm}$)であることも判明した。このように実測と解析の結果が良い一致を示したことの大きな要因は、無限大の応力という非現実的な事項を省きプロセスゾーン相当部分を構成して岩盤のクラック先端部の不確定領域を逆推定する手段を導入したことによると思われる。プロセスゾーン領域の長さの逆推定は、自由面上の水平変位が3次元の実測値と2次元の解析値とを一致するようにしている。これによって3次元問題を2次元問題に換算して、打撃ピッチ(抵抗線長 α x 削孔間隔 β)は実験と解析モデル間で相似法則を用いているだけであるから力や変位のデータが予想以上に望ましい一致を見たのであろうと推察される。

今後、著者等の導いたこの関数を用いて静的破碎剤工法の破壊機構の解析等への応用が可能である。

参 考 文 献

- 1)土木学会編：ダムの岩盤掘削，pp27-58，土木学会，1992.
- 2)宮地明彦，生木泰秀，中川浩二，古川浩平：打撃くさび式岩盤掘削工法の開発，第19回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp466-470，1987.
- 3)宮地明彦，高橋一博，谷口健男，中川浩二：くさびによる岩盤破碎の機構に関する研究，第20回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp121-125，1988.
- 4)宮地明彦，高橋一博，末次剛，谷口健男，：くさびによる岩盤破碎の機構に関する研究(その2)，第21回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp201-205，1989.
- 5)末次剛，谷口健男，宮地明彦：3次元でのき裂進展挙動の数値シュミレーション，構造工学における数値解析シンポジウム論文集第15巻，pp491-496，1991.
- 6)段樹金・児嶋弘行・中川建治：亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数，土木学会論文集，No.374/I-6，pp.399-407，1986.
- 7)村瀬安彦・中川建治：円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析，土木学会論文集，No.483/I-26，pp41-49，1994.
- 8)栖原秀郎・中川建治：亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数，土木学会論文集，No.501/I-29，pp.65-74，1994.
- 9)KNBB協会編：KNBB工法ハンドブック，1994.
- 10)飯田隆一：土木工学における岩盤力学概説，pp.6，靖国社，1978.
- 11)飯田隆一：土木工学における岩盤力学概説，pp.68，靖国社，1978.
- 12)土木学会編：ダムの岩盤掘削，pp103，土木学会，1992.
- 13)KNBB協会編：KNBB工法技術資料，pp14，1984.

第7章 実際例との比較検討(2)

— 誘発目地工法への適用 —

7.1 概要

トンネルに限らず底板コンクリートを打設して，硬化後に側壁を打設すると底板で拘束されているために側壁にひびわれが生じる。このひびわれ対策の1つとして，誘発目地が施工されるが，本研究は誘発目地の開口量や応力分布を実施工の計測値と各パラメータを仮定した解析値によって検討し，誘発目地の設計法に関する一考察を行った。

理論解として，第5章で導いた『固定辺を持つ半無限版が固定辺に直角にひびわれを含んでいる場合の応力関数でひびわれ先端の応力集中が有限なもの』を活用している。

近年のコンクリート構造物の大型化の傾向に伴ってマスコンクリートに生じる温度応力と温度ひびわれの問題がクローズアップされている。高速道路の半地下トンネル構造においても，かねてからこのマスコンクリートの温度ひびわれ対策が問題となっている。最近ではその対策として，誘発目地工法が採用されることが多い。しかしその形状やピッチについては，種々の方法が提案実施されているがまだ設計法が確立されていないのが現状である。

本研究の理論の特徴は，次のような応力状態を解析し得る応力関数を準備したことである。直線状の固定辺(半地下トンネルの底板部相当部分)を持つ半無限弾性平板の内部に，固定辺に直角方向に亀裂(誘発目地のひびわれ)が生じている板を対象とする。この亀裂先端には無限大の応力集中を避けるためにプロセスゾーン相当部分が構成されていて有限で滑らかな応力分布と開口が生じる(著者等の従来の研究の特性)ような応力関数を導いた。

これらの理論の検証として実施工の半地下トンネルの誘発目地の計測値を活用し，目地間隔の合理的な設定法を模索した。

7.2 誘発目地工法¹⁾

一般には，マッシブな壁状の構造物等に発生する温度ひびわれを材料やその配合上の対策等により制御することは難しいが，その対策工法として前述の誘発目地工法がある。この工法は，構造物の長手方向に一定間隔で断面減少部分を設け，その部分にひびわれを誘発して，その他の部分のひびわれ発生を防止あるいは制御するとともに当該のひびわれ誘発箇所での事後処理を容易にするものである。予定箇所にひびわれを確実に誘発するには，誘発箇所での断面減少を20%以上とする必要がある。ひびわれ誘発目地の間隔は，4～5m程度を目安とするが，この間隔は構造物の寸法，鉄筋量，打込み温度，打込み方法等に大きく影響されるのでこれらを考慮して決める。また，ひびわれ誘発後ひびわれ誘発部からの漏水，鉄筋の腐食等を防止する場合には，適切な補修を行う。誘発目地の例およびその補修方法を図-7.1および図-7.2に示す。

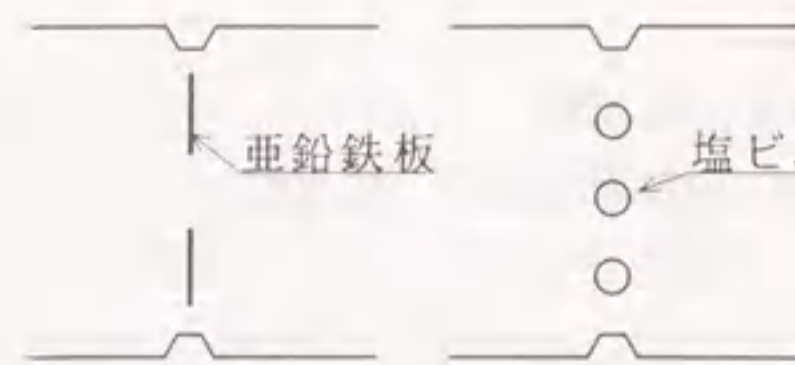


図-7.1 誘発目地の例

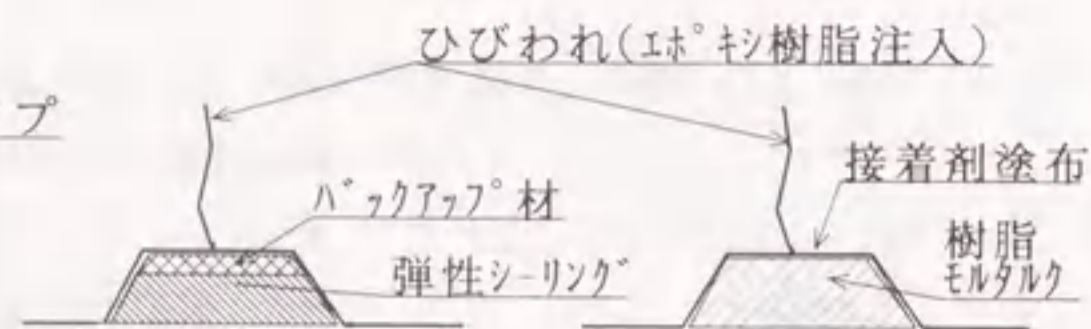


図-7.2 誘発目地の補修方法

7.3 従来の設計法

誘発目地工法の設計法（目地間隔の決定法）については、現状においては明確な算定方法はまだ確立されてはいないが、一般的に行われている方法として、次のような方法²⁾がある。

- (1) 類似構造物に発生したひびわれ間隔に基づいて、その平均間隔の1～1.5倍とする方法
- (2) 類似構造物の施工例を参考に決める方法
- (3) 温度ひびわれ指数による方法

ここでは、(3) 温度ひびわれ指数による方法について簡単に説明する。

- 1) 構造形式、断面、材料、配合、施工法等を仮定する。
- 2) 上記仮定に基づいて温度予測計算を行う。
- 3) 上記の条件に基づき温度応力解析を行う。
- 4) 上記の温度応力解析により、温度ひびわれ指数を求める。

5) 求めた温度ひびわれ指数が所定の値（例えば1.5）となるように、L（スパン長）/H（高さ）のLを変えながら計算を繰り返しスパン長L（誘発目地間隔）を決定する。

なお、温度応力解析の方法には、ACIの方法に代表される簡易法と有限要素法、差分法等の精算法がある。

ACIの方法による応力の算定方法（外部拘束による応力 σ_t ）は、つぎのとおりである。

$$\sigma_t = K \cdot E_s \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (7-1)$$

ここに、 σ_t ：外部拘束による応力 (kgf/cm²)

K：拘束度

E_s ：有効弾性係数 (kgf/cm²)

α ：線膨張係数 (1/°C)

ΔT ：コンクリート壁体に生ずる温度変化 (°C)

また、温度ひびわれ指数 $I_{cr}(t)$ は、つぎのように表される。

$$I_{cr}(t) = f_t(t) / \sigma_t(t) \quad (7-2)$$

ここに、 $\sigma_t(t)$ ：材令t日における温度応力の最大値 (kgf/cm²)

$f_t(t)$ ：材令t日におけるコンクリートの引張強度 (kgf/cm²)

以上が従来の方法である。

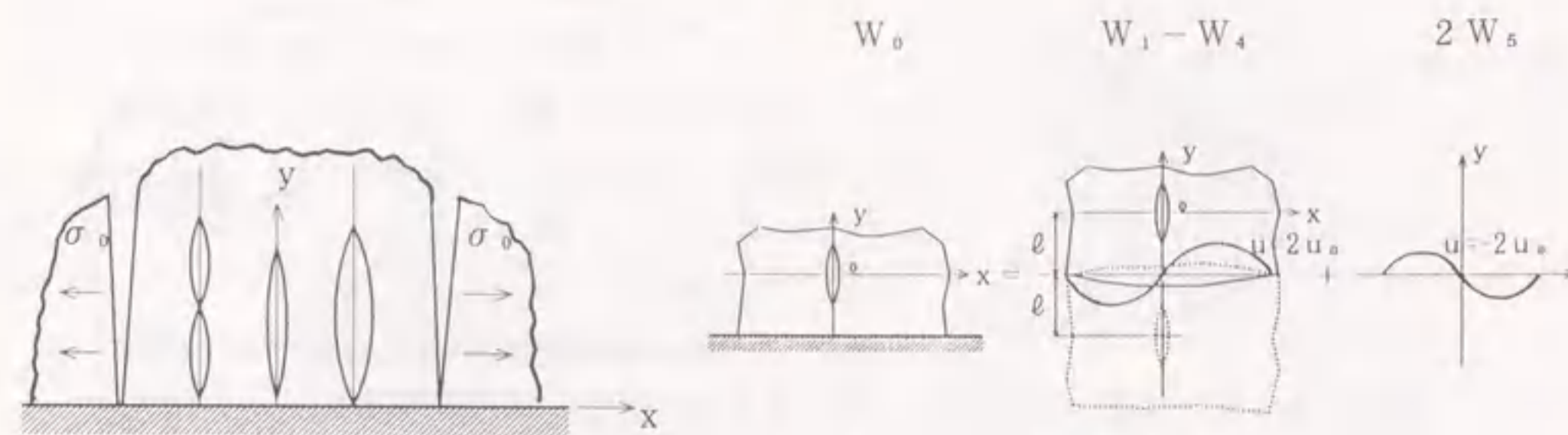


図-7.3 解析モデル

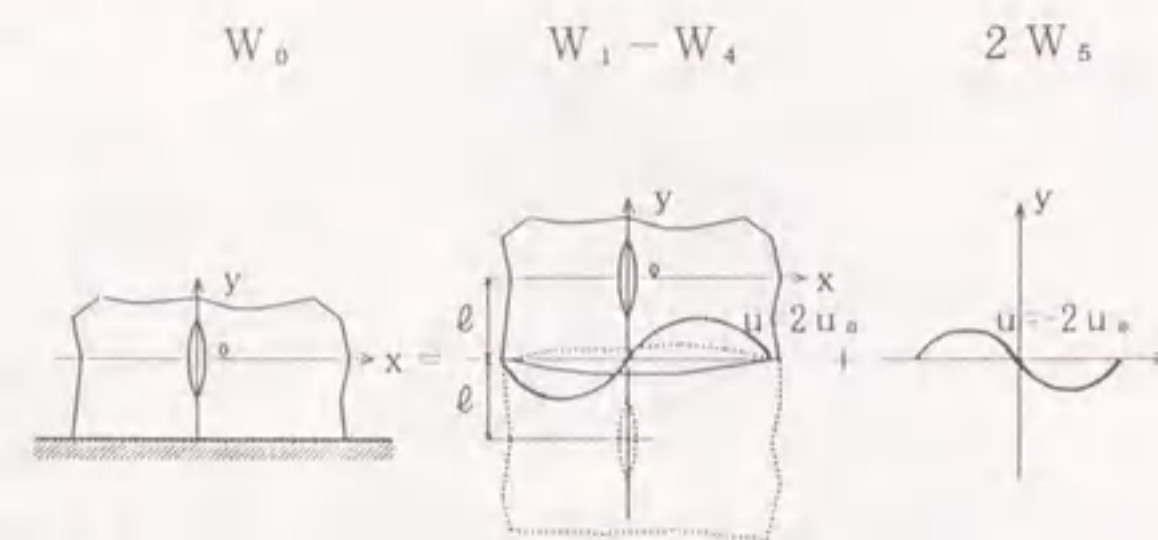


図-7.4 固定辺の構成法

7.4 解析手法

著者等の解析手法も、7.3. 従来の設計法で述べた1)～3)までは同じである。すなわち、構造、材料、施工法等の条件を設定し、それに基づいて所定の位置で発生する温度応力を何らかの方法（例えば、ACIの方法、有限要素法あるいは類似の計測データ等）で求める。次に、以下の方法で構造物全体の応力分布と設定した位置での誘発目地の開口量（ひびわれ幅）を算定し、構造物の重要度、耐用年数、用途等を勘案して目地間隔を決定するものである。

(1) 解析モデル

解析モデルを図-7.3に示す。本解析は、図示のように半無限（片側）クラック、直線状対称開口クラック、逆対称開口形状（8の字）クラックが固定辺周辺に直角の方向をもって存在する場合の解析が可能である。実際の解析では、これら数種のクラックでサイズの異なるものをいくつか重ね合わせて目地を実現させるのである。

ここで、半無限（片側）クラックは伸縮目地（施工目地）を、直線状対称開口クラック、逆対称開口形状（8の字）クラック、は誘発目地を表現するために用いる。特に、逆対称開口形状（8の字）クラックは亀裂変位計で計測した場合の誘発目地部の間隔の減少すなわち、めり込みを表現することができる。

(2) 固定辺近傍のクラックにx軸方向に一樣引張り応力が作用する場合の半無限板の応力関数の構成法

著者は、第5章において固定辺近傍のクラックの応力関数を構成する方法を示した。以下その方法について再掲する。（図-5.7参照）

$$W_0 = W_1 - W_4 + 2W_5 \quad (7-3)$$

W_0 ：固定辺近傍のクラックを構成する応力関数

W_1 ：無限板内に含まれるクラックの開口のみを構成する基本応力関数

W_4 ： W_1 を点 $x=0, y=-l$ を回転中心として $x-y$ 平面内で回転した曲面

W_5 ： W_1 および W_4 による $y=-l$ における変位 u_0 を打消す曲面

l ：x軸（クラックの中心位置）から固定辺までの距離

u_0 ： W_1 および W_4 による $y=-l$ における変位 u 。

$$\rho(t, a, b) = 2t/b \cdot (2a+b) = \zeta t$$

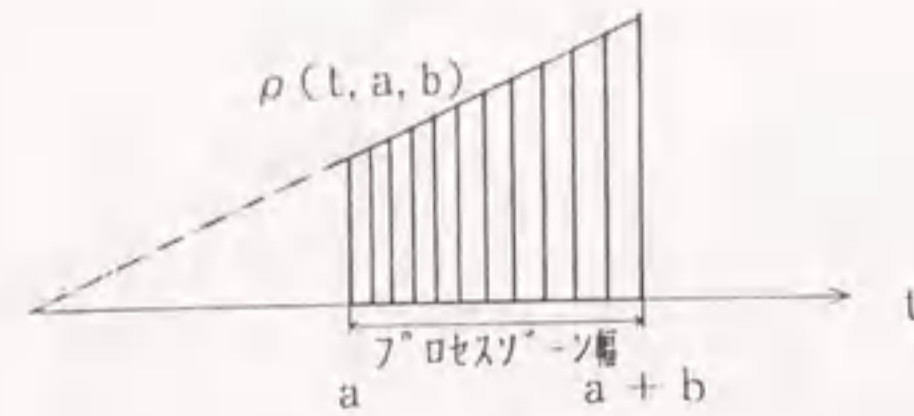


図-7.5 重み関数 ρ の形状

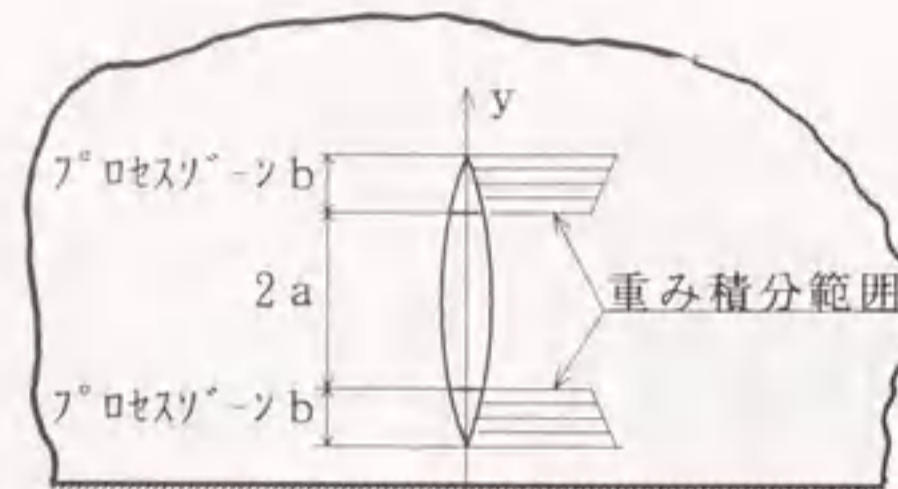
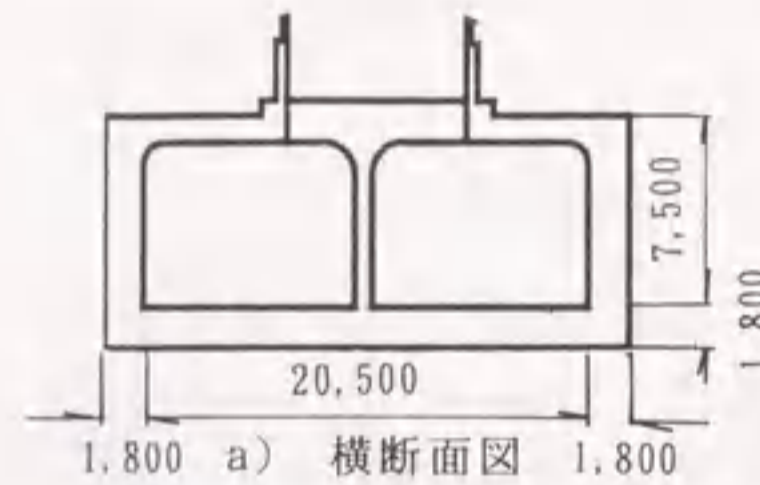
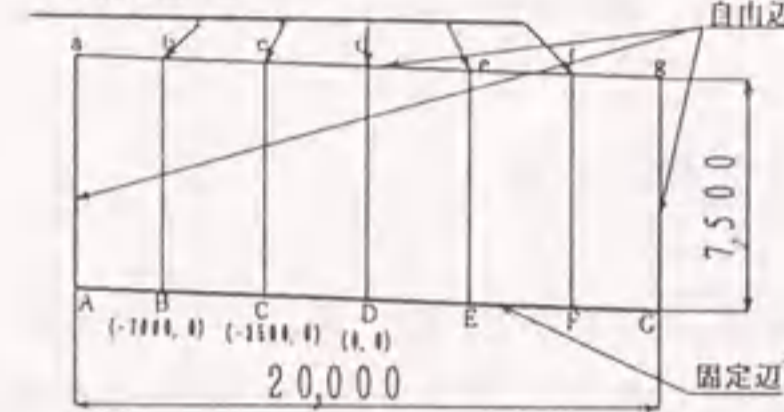


図-7.6 有限化された直線状クラックモデル
誘発目地



a) 横断面図



b) 縦断面図

図-7.7 半地下トンネル解析モデル

すなわち、固定辺を有する半無限板の開口を表現する応力関数を構成するには、まず無限板中のクラックを表す基本曲面 W_1 に $y = -l$ 軸が対称軸となるように W_1 を反転した解 (W_4) を正負反対にして重ね合わせる。ここで、 $y = -l$ 軸軸上の v は 0、 u は $2u_0$ となる。ただし、 u_0 は W_1 および W_4 の $y = -l$ 軸上の x 方向変位である。次に、 $y = -l$ 線上の変位が $u = -2u_0$ 、 $v = 0$ となるような半無限板 ($y \geq -l$ 有効領域) の解 W_5 (u_0 打消し曲面) を重ね合わせると、 $y = -l$ 軸上で $u = 0$ 、 $v = 0$ を実現し固定辺を構成できるのである。ただしこれらを重ね合わせて固定辺を実現させるとクラック部分における応力解放の条件が多少乱されるがこれらについてはクラック開口長さやプロセスゾーンの長さの異なるものをいくつか重ねて選点法によってクラック部分で重ね合わせた最終状態の応力が 0 となるよう調整する。

なお、今回の重み積分に使用する重み関数 ρ は図-7.5 に示す形状を持ち、定義域を $(a, a+b)$ として総面積が 1 になるように基準化されたものである。これは、最も積分計算に都合がよい形を採用したものである。ここで、この重み関数を用いて積分し応力を有限化するという事は、あたかも作用する集中荷重による応力分布を分布荷重による応力分布に置き換えたような意味合いを持っている。(図-7.5, 7-6) 具体的には、プロセスゾーン幅で重み積分を行い応力を有限化する。

7.5 力学的諸係数および設定条件の決定

誘発目地工法の設計法について、従来の方法と著者等の方法との比較検討に当たり図-7.7 に示す構造形式をもつ半地下トンネルをモデルとする。これらの解析に用いる力学的諸係数および設定条件は、次の通りである。

なお、これら諸係数は材令とともに変化するので、実際には経時的な検討が必要であ

るが、本文では計算手法を問題としているので、コンクリートの材令 28 日の場合を例に諸係数を設定した。諸係数の設定に当たって細かい計算は省略するが、ひびわれ制御指針³⁾ および計測結果⁴⁾ の例に基づいて算出した。

コンクリートの有効弾性係数 $E_s = 2.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

ポアソン比 $\nu = 0.167$

設計基準強度 $\sigma_{ck} = 240 \text{ kgf/cm}^2$

引張り強度 $f_t(28) = 24 \text{ kgf/cm}^2$

温度変化 $\Delta T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$

線膨張係数 $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

クラック発生地点の拘束度 $K = 0.55$ ($h/H = 0.1$)

7.6 従来の方法と著者等の方法との比較検討

前項で設定した力学諸係数に基づき従来の方法と著者等の方法で行った解析結果を次に示す。

(1) 従来の方法

ACI の方法では構造物の L (スパン長) / H (高さ) が 1 以上についてしか規定していない。よって、 $H = 7.5\text{m}$ なので $L = 7.5\text{m}$ (取り得る最小値) とすると、式(7-1)、(7-2)より

$$\begin{aligned} \sigma_t &= K \cdot E_s \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0.55 \times 2.0 \times 10^5 \times 10^{-5} \times 25 \\ &= 27.5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (L/H = 0.1 \text{ 付近}) \end{aligned}$$

$$I_{cr}(t) = f_t(t) / \sigma_t(t) = 24 / 27.5 = 0.87$$

となる。よって、仮にひびわれが発生しないといわれているひびわれ指数 1.5 を確保しようとした場合 ACI の方法では L/H が 1 以上についてしか規定していないので正確には算出できないが、拘束度 K が L/H に反比例するとすれば、誘発目地間隔 L は 4.35m となる。

(2) 著者等の方法

著者等の方法による誘発目地間隔 3.5m、4.0m、5.0m の 3 種類についての解析結果 (変位図および応力図) を図-7.8~7.13 に示す。なお、発生応力 σ_t については、ACI の方法では、算出できないので今回は計測結果⁴⁾ の例 (側壁の中央部分 $L/H = 0.5$ で 10 kg/cm^2 を参考とした) の値を無限遠方の一様引張り応力として用いて解析を行った。以上の結果より、当然のことであるが誘発目地本数が増えれば誘発目地開口量 (ひびわれ幅) 小さくなる。また、これらひびわれ幅は、0.1mm~0.3mm の値となっている。構造物の重要度、耐用年数、用途等を勘案して目地間隔を決定し、これらの中から選定すればよい。応力については、固定辺周辺の特に各誘発目地の中間で発生している値は $12 \text{ kgf/cm}^2 \sim 20 \text{ kgf/cm}^2$ であり、引張り強度 (24 kgf/cm^2) との関係よりひびわれ指数を計算して、所定の値を満足するものを選定すればよい。仮に許容ひびわれ幅を 0.2mm、必要ひびわれ指数を 1.5 とすると、誘発目地間隔は 4.0m が選定される。これらの計算を経時的に繰り返し行い、最終的に誘発目地間隔を決定する方法が考えられよう。

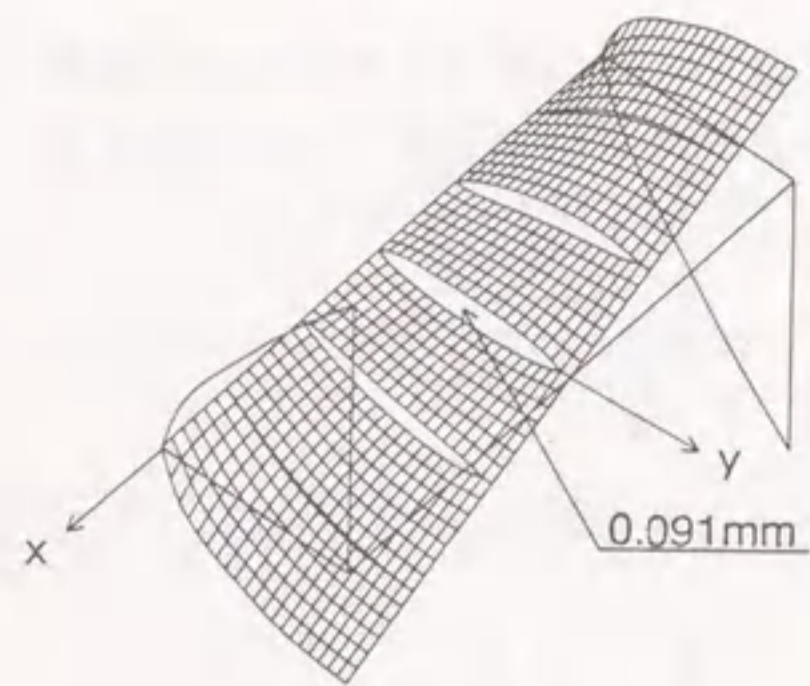


図-7.8 変位図 U

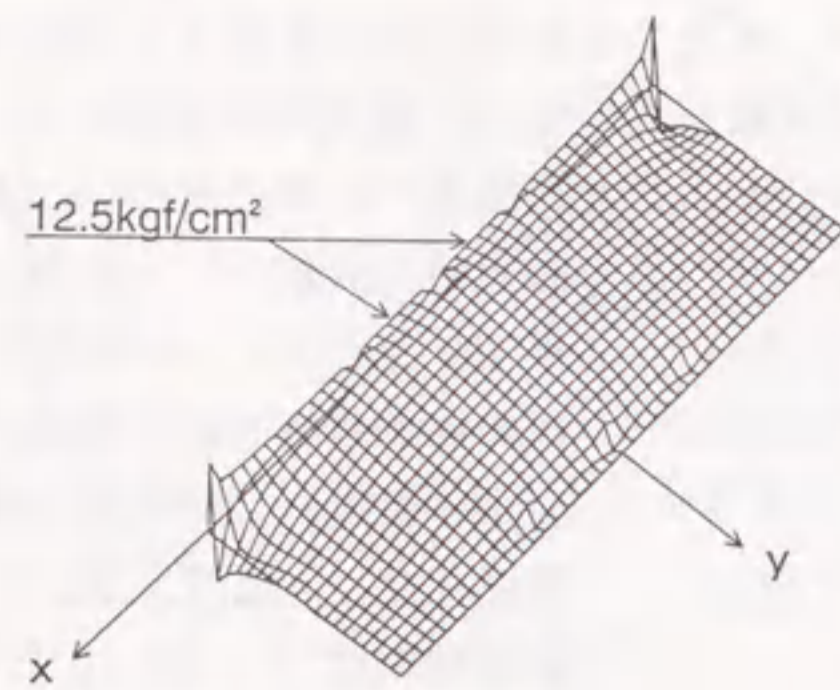


図-7.9 応力図 σ_x

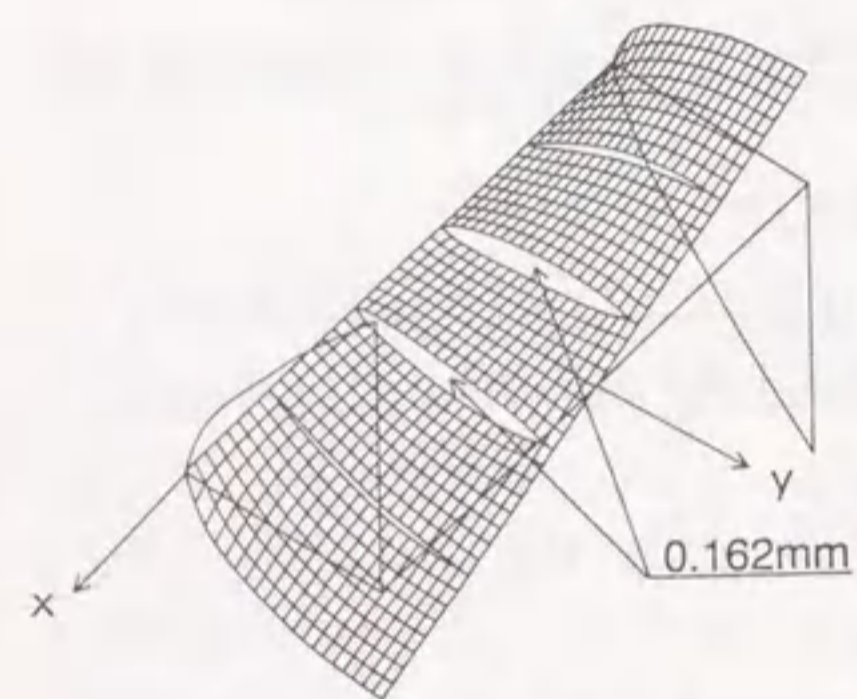


図-7.10 変位図 U

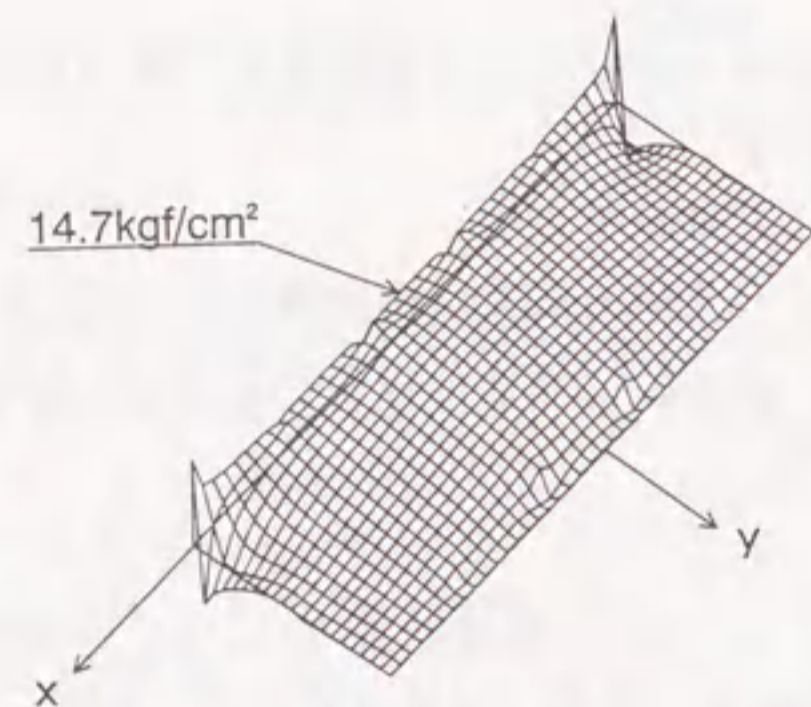


図-7.11 応力図 σ_x

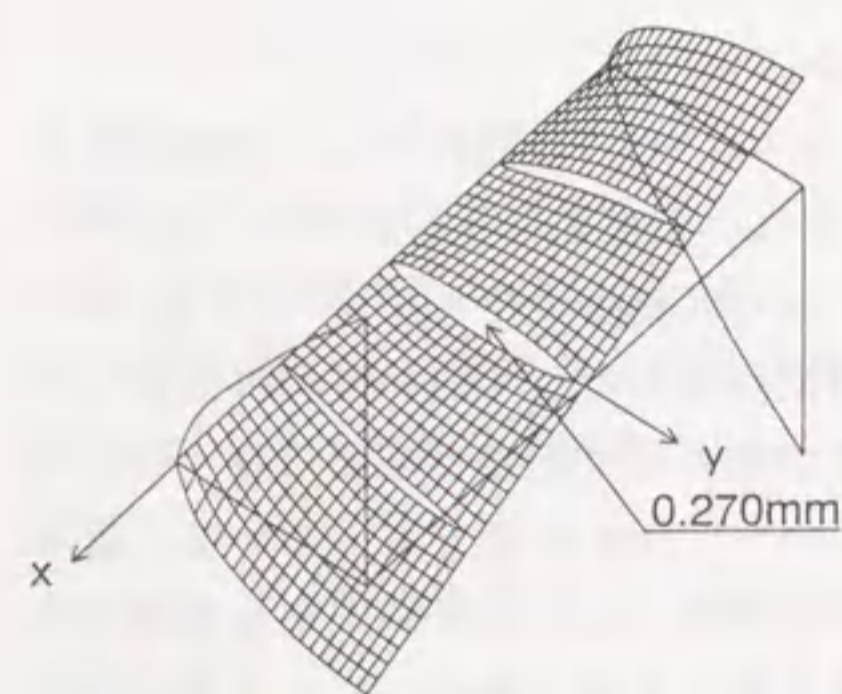


図-7.12 変位図 U

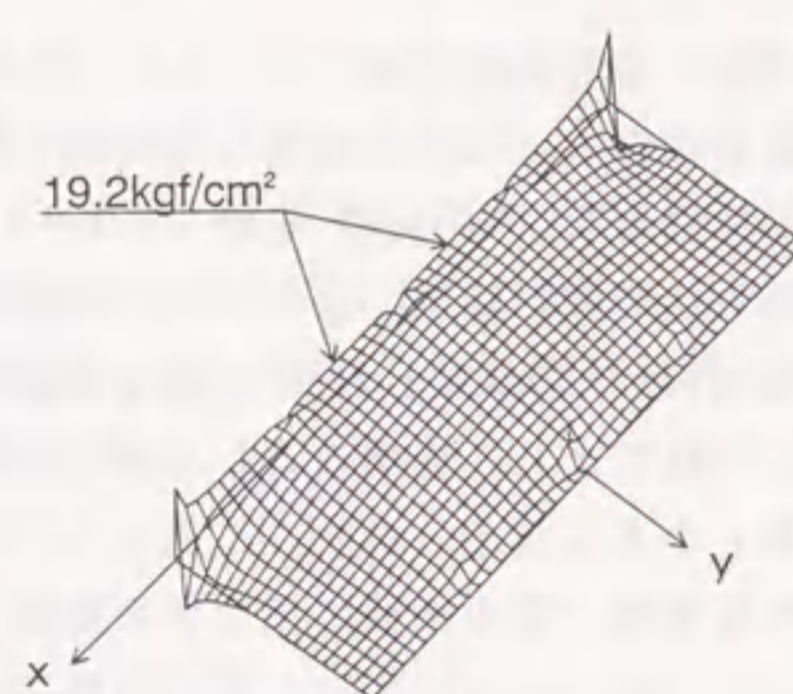


図-7.13 応力図 σ_x

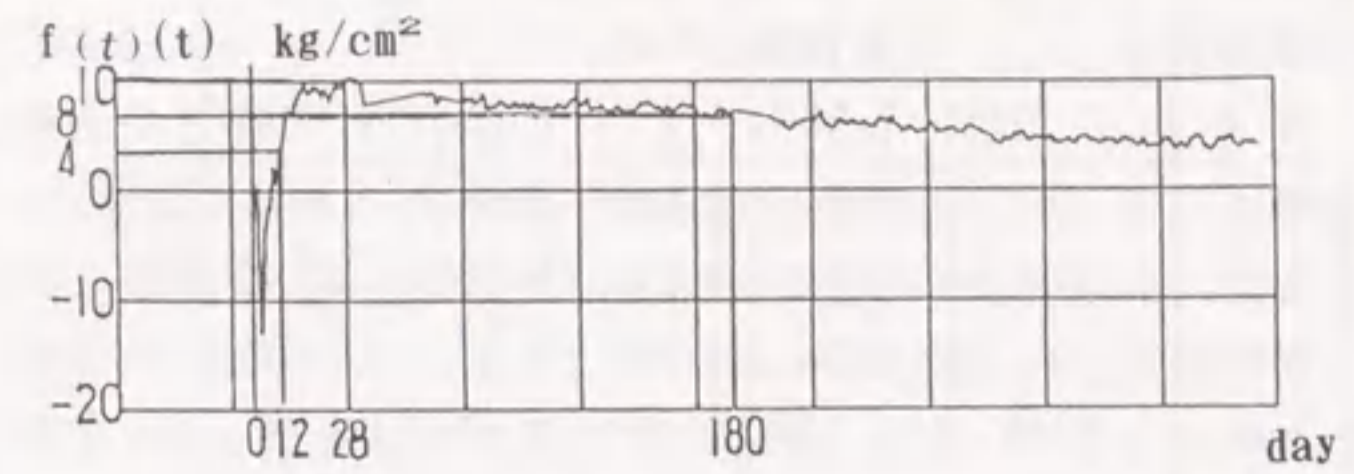


図-7.14 発生応力の経時変化

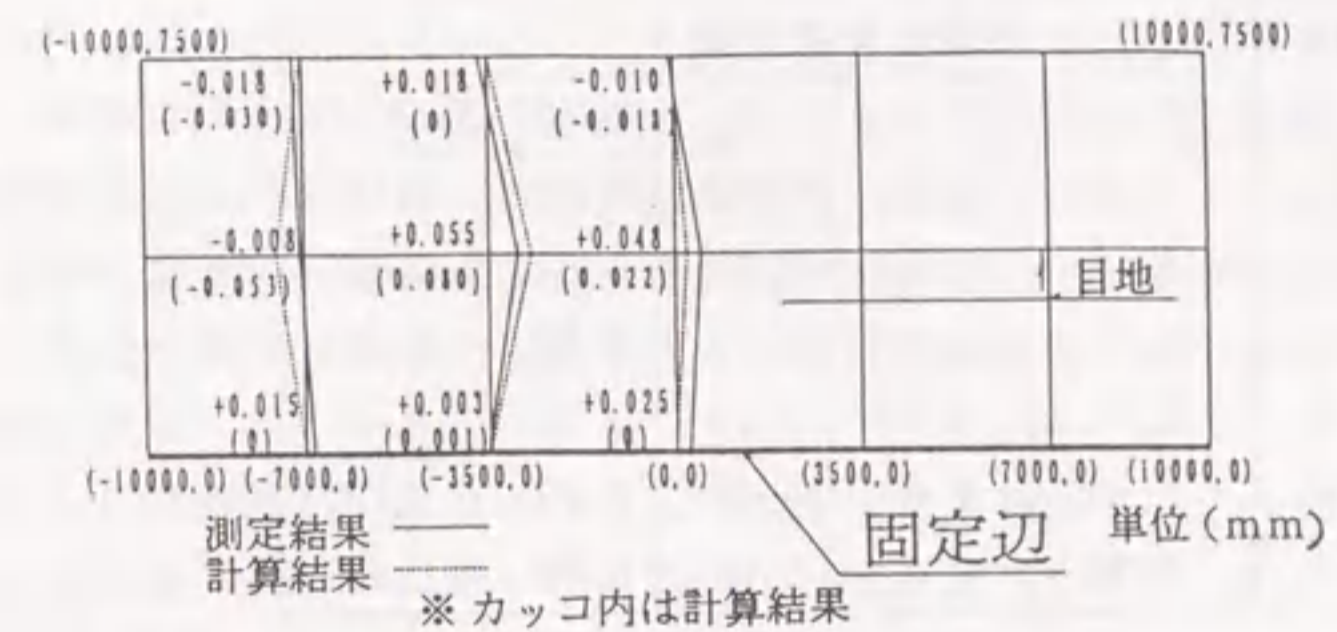


図-7.15 誘発目地の伸縮量調査結果

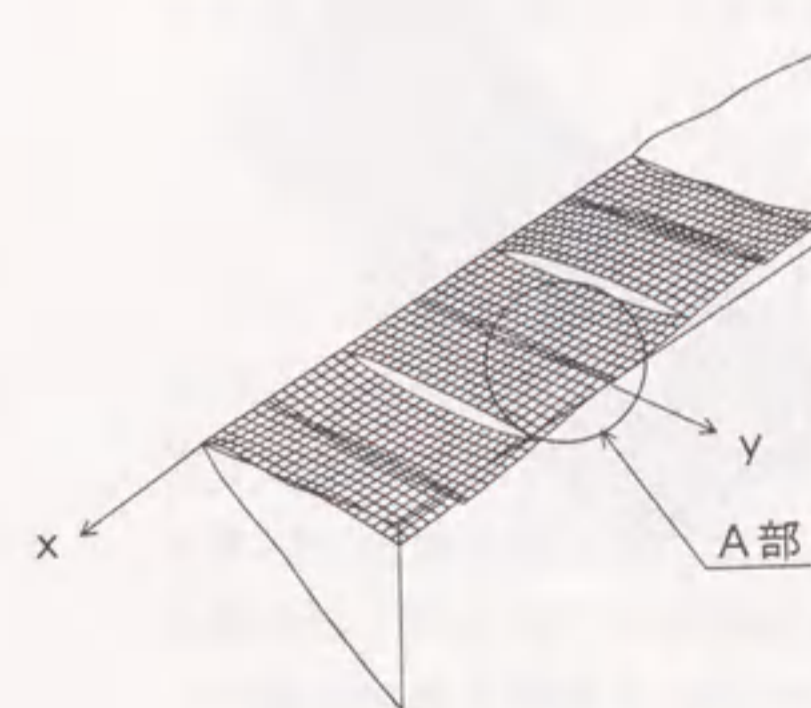


図-7.16 変位図 U

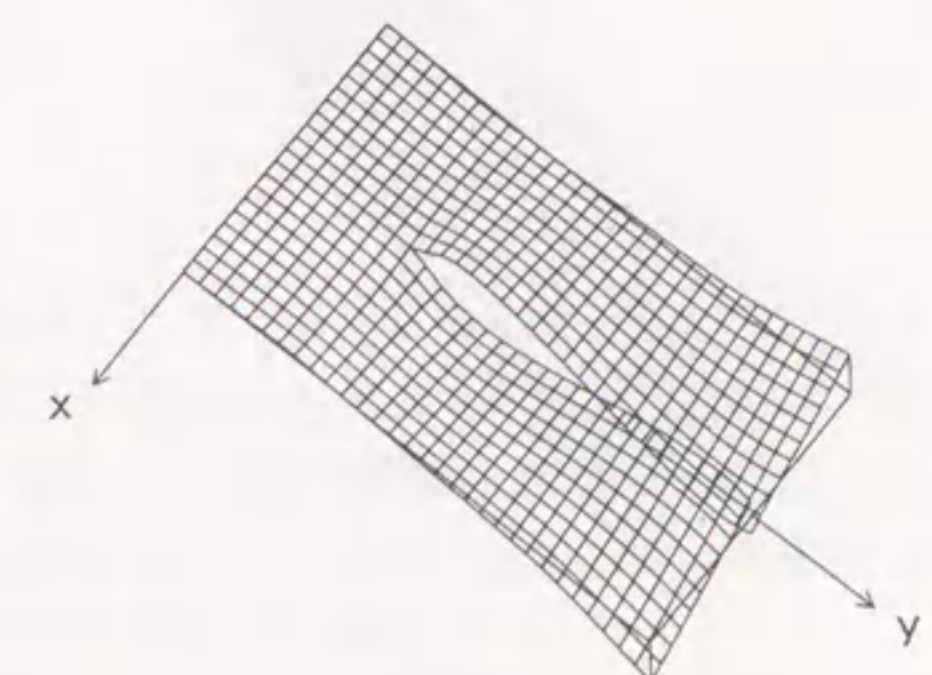


図-7.17 変位図 U (A部詳細)

表-7.1 誘発目地の開口量調査結果⁷⁾と解析結果

		打設後6ヶ月の目地開口量測定値 (mm)				
高さ	底板からの	誘発目地の位置				
		-7,000	-3,500	0	3,500	7,000
6 m		0	0.04	0.04	0.04	0
5 m		0	0.04	0.04	0.06	0
4 m		0	0.06	0.04	0.15	0.06
3 m		0.06	0.06	0.10	0.15	0.08
2 m		0.10	0.15	0.20	0.20	0.10
1 m		0.06	0.20	0.10	0.20	0.10

		目地開口量解析結果 (mm)				
高さ	底板からの	誘発目地の位置				
		-7,000	-3,500	0	3,500	7,000
6 m		0.01	0.05	0.07	0.05	0.01
5 m		0.01	0.07	0.09	0.07	0.01
4 m		0.01	0.08	0.10	0.08	0.01
3 m		0.01	0.08	0.10	0.08	0.01
2 m		0.01	0.07	0.09	0.07	0.01
1 m		0.01	0.06	0.07	0.06	0.01

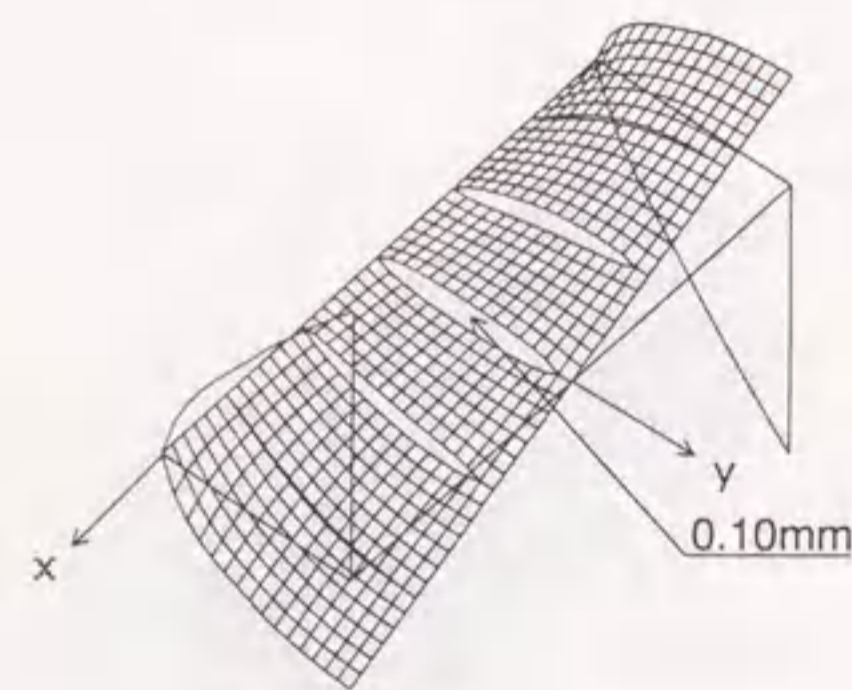


図-7.18 変位図 U

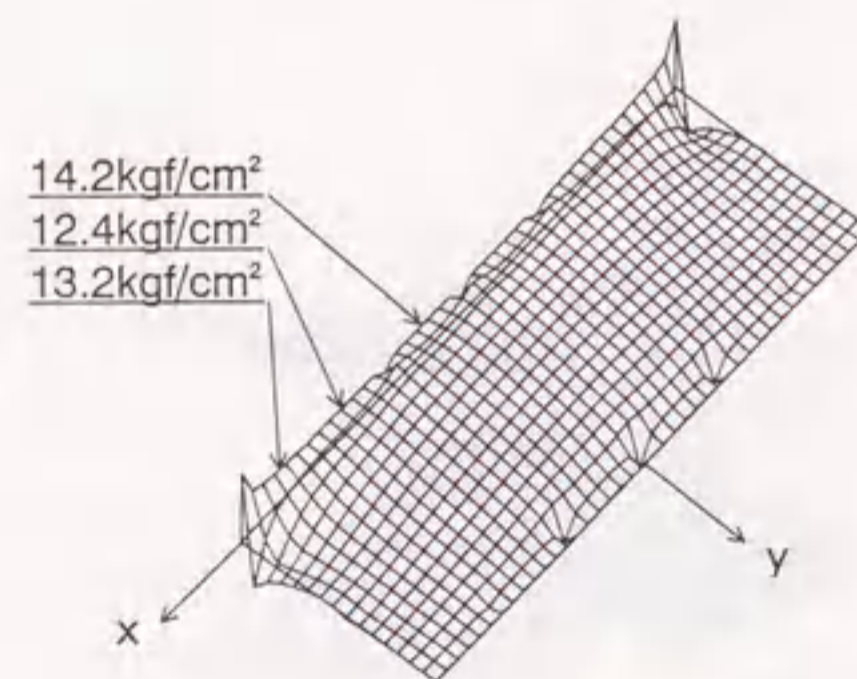


図-7.19 応力図 σ_x

7.7 実施工での計測結果との比較検討

国道302号 小幡改良工事と国道302号 猪高改良工事について計測結果^{4), 6)}と著者の方法による解析結果との整合性について検証する。なお、構造は図-7.3に示した解析モデルと同様である。

図-7.14および図-7.15に国道302号 小幡改良工事における半地下トンネル側壁部の発生応力の経時変化および12日後の誘発目地の亀裂変位計による伸縮量調査結果を示す。(変位計設置後2日)また、図-16および図-17に著者等の方法による変位uの解析結果を示す。変位については、半無限(片側)クラック、直線状対称開口クラック、逆対称開口形状(8の字)クラックを組み合わせた、重ねた合わせることで実際のクラックの開口形状を表現し得ることがわかる。特に、亀裂変位計による収縮側の値(めり込んだクラック)を逆対称開口形状(8の字)クラックによって表現し得た。しかし、目地開口形状特性は、よく近似できているものの変位量については、解析結果の方が大きめの値が出ている。これは、弾性解析の性質上コンクリートの若令期については、変位が大きめに出ることと、コンクリート打設後12日を経て型枠解体後に亀裂変位計を設置して計測は、計器設置後2日しか経っていないことによる。このため硬化後の型枠解体前後の時期のクラック開口量を見落としているのである。これらの状況を考慮に入れると著者等の方法は解析法としては充分現実に即したものとして合理的であると判定される。

表-7.1に国道302号 猪高改良工事における半地下トンネル側壁部の6ヶ月後の誘発目地の開口量(ひびわれ幅)調査結果⁶⁾と解析結果を示す。また、図-7.18および図-7.19に著者等の方法による変位および応力の解析結果を示す。誘発目地の開口量(ひびわれ幅)について、よく近似できていることがわかる。

以上の結果より、固定辺を持つ板の内部にプロセスゾーンを持ち有限な応力集中を構成する、クラック開口関数を活用することによって、実施工の計測値と同程度の開口量と応力値を導き得たと考えられる。

7.8 まとめ

近年、マスコンクリートの温度ひびわれ対策として、誘発目地工法が採用されることが増えつつあるが、いまだ設計法が確立されていないのが現状である。本研究は、従来著者等が提案している『ひびわれの先端で有限な応力集中を構成する応力関数^{6), 7)}』を用いて誘発目地工法における実施工の計測値と各パラメータを仮定した解析値によって検討し、解析例では計測結果とある程度整合した結果を得た。

誘発目地の開口量(ひびわれ幅)および開口形状については、ほぼ実際の形状を表現し得ることが分かった。応力についても、固定辺周辺のひびわれの発生が予測される位置付近の応力状態を表現し得ることが分かった。しかし、半地下トンネルに生じるひびわれ発生メカニズムやひびわれの進展に関する問題については、例えば型枠を外した時点では既に誘発目地部にひびわれは発生しており、どこに最初にひびわれが発生するか

を限定する事さえも難しい。今後、許容ひびわれ幅およびひびわれ指数をいくりにするのかと言った問題を含め研究を進めてゆく必要がある。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編 : コンクリート標準示方書 施工編, pp131~132, 1991.
- 2) 土木学会編 : コンクリートライブラリー第70号, pp227~229, 1991.
- 3) 日本コンクリート工学協会編: マスコンクリートのひびわれ制御指針, pp60~72, 1986.
- 4) 建設省中部地方建設局愛知国道工事事務所編: 302号小幡改良その2工事に伴う測定業務報告書(その1), pp51, pp63, 1994.
- 5) 勝木和男・桑田誠 : 平成元年度302号猪高改良その2工事報告書 マスコンクリートにおけるひびわれ誘発目地について, pp10, 1992.
- 6) 栖原秀郎・中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数に関する研究, 土木学会論文集, No. 501/ I-29, pp. 65-74, 1994.
- 7) 段樹金・児嶋弘行・中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No. 374/ I-6, pp. 399~407, 1986.

第 8 章 結 論

8. 1 本研究の成果

本研究の成果は、中川等のき裂先端で有限な応力集中とプロセスゾーンを構成し得る応力関数の一連の研究を基礎に一様弾性体中のクラックに関して、つぎの二点においてこれらをさらに発展させ一連の研究を系統化するとともに実際の施工法に応用したことである。

その一つは、有限な応力集中とプロセスゾーンを構成し得る応力関数を指数関数で定義し、従来活用されている引張り(モードI)やせん断(モードII)状態の解に加えて、解析例の少ないクラック近傍における温度勾配による応力分布相当のx軸が面内に曲げられるものとy軸が面内に曲げられるものまでも含めて総合的に表現し得る関数群を導いた。さらに、有限連続板(外側クラック)までも含めた開口関数4形式を一括構成する一般解の構成法を導き著者等の一連の研究の理論的、数学的意味をより明らかなものとしたことである。

もう一つは、従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の応用例として、自由辺および固定辺近傍のクラック解析手法を導いた。さらにくさび貫入工法(KNBB工法)と誘発目地工法に適用し、実施工等での計測結果と解析結果との整合性を確認したことである。

具体的には、1.2 本研究の特徴でも述べたようにつぎの6点である。

(1) クラックを有する等方等質無限板が、引張りあるいはせん断外力等を受ける問題に対し Westergaard の解を平滑化することにより、プロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いた。基本解 12 組を導き、これらを組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を構成し、開口変位についてもいろいろな形状を表現し得ることを示した。板の有限領域のみを対象にする場合はzの高次の解も活用できるのでさらに多くの基本解を導き得ることも示した。

(2) 無限板の中心クラックの解のみならず有限連続板(外側クラック)までも含めた開口関数の基本4形式(引張り、せん断、x軸曲げ、y軸曲げ)を一括構成することにより、直線上中心クラックの解 12 組の他に、さらに有限連続板の解析についても基本解 12 組を導いた。

(3) 従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の応用例(その1)として、自由辺近傍のクラックが内圧を受けて開口する場合等の応力関数を導いた。すなわち、種々のクラック等(中心クラック、両側クラック、円孔等)が存在する無限板のクラック近傍に自由辺を構成するような応力関数を導く方法について示した。

(4) 従来の開口関数(応力関数)を直接重み積分して応力を平滑化する解析法の応用例(その2)として、固定辺近傍のクラックを解析する応力関数を導いた。すなわち、種々のクラック等(中心クラック、片側クラック、逆対称開口形状(8の字)クラック等)が存在する無限板のクラック近傍に固定辺を構成するような応力関数を導く方法について示した。

(5) 現在、発破を使わない岩掘削工法が数多く開発され実施されている。くさび貫入による岩掘削工法もその一つであり、工事に伴う振動・騒音問題や重要構造物の基礎岩盤のゆるみ問題等に対応した工法として、近年よく使用されている。種々のクラックが存在する無限板のクラック近傍に自由辺を構成するような応力関数でクラック先端の応力集中が有限なものを用いて当工法の打撃ピッチの決定方法等の設計方法について一提案を行い試験工事によってその整合性を確かめた。

(6) トンネルに限らず底板コンクリートを打設して、硬化後に側壁を打設すると底板で拘束されているために側壁にひびわれを生じる。このひびわれ対策の1つとして、誘発目地が施工されるが、本研究は誘発目地の開口量や応力分布を実施工の計測値と各パラメータを仮定した解析値によって検討し、解析例では計測結果とある程度整合した結果を得た。今後パラメータを適切に推定する方法をさらに検討することによって誘発目地間隔の推定法として合理的な方法を導き得よう。なお、理論解として種々のクラックが存在する無限板のクラック近傍に固定辺を構成するような応力関数でクラック先端の応力集中が有限なものを活用した。

以上本研究の成果について述べてきたが、現在の破壊力学の研究の一つの柱として、き裂がどこに発生しどのように進展して行くかというき裂進展に関する研究がある。本研究の視点は、適用例で示したくさび貫入工法(KNBB工法)や誘発目地工法のような、き裂を指定した位置にしかも効率的に発生させる必要がある問題についての解析を行ったものであり今後の研究の一つの方向性を示唆できたと考えられる。

8.2 今後の課題

著者等の導いた、き裂先端で有限な応力集中とプロセスゾーンを構成し得る応力関数の最大の特徴は、基本解の組み合わせやプロセスゾーンの長さを変えることにより有限で滑らかな応力集中を構成し、しかもその応力と開口変位についていろいろな形状を表現できる自由度を持ち得る解であることである。この特徴を最大限に生かすためには、今後理論的にも実験的にもプロセスゾーンの決定方法に関する研究を進める必要がある。そのほか、エネルギー解放率からのアプローチや3次元問題への進展等も今後の課題である。また、実用面から注入工法等を念頭においた放射状クラック問題の解析等も今後の研究対象として興味深いものと考えられる。

謝 辞

本論文は、著者が平成5年4月に岐阜大学博士後期課程に入学後現在に至るまでの3年間の成果をまとめたものであり、諸先生、諸先輩をはじめ多くの方々の御指導と御援助の賜であると深く感謝しております。

本研究を実施するにあたり、岐阜大学中川建治教授には終始御指導御鞭撻をたまわり、心より感謝いたします。

また、本研究をまとめるにあたり、岐阜大学小柳洽教授、同六郷恵哲教授には貴重な御教示御助言をたまわりました。厚く御礼申し上げます。

さらに、華北水利水電学院段樹金教授、岐阜大学藤井康寿助手、そして大学院生長谷川豊氏、坂部泰寿氏をはじめ中川研究室のみなさまには、貴重な御助言たまわるばかりでなく、投稿論文作成、実験およびそのデータ整理等の御助力をたまわり心より感謝いたします。

私の勤務先である日本国土開発株式会社の方々にも多大な御支援をいただきました。なによりも、今回このような研究機会を与えてくださった故石上立夫会長、辻岡聡宏社長に厚く御礼申し上げます。

本研究を遂行するにあたり、西日本支社副支社長、名古屋支店長坪井修朔専務取締役には、終始暖かい御指導御援助をいただき心より感謝いたします。わたしの中川先生との出会いは、坪井専務と中川先生が同級生であるという好運がもたらしたものであります。

このように、本論文は多くの方々の御指導、御教示、御助言、御協力があって出来上がったものであります。重ねて厚く御礼申し上げます。

本論文に含まれる著者の発表論文ならびに参考論文

発表論文

- 1) 栖原秀郎・中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を構成する応力関数, 土木学会論文集, No. 501/ I -29, pp. 65-74, 1994.
- 2) 栖原秀郎・藤井康寿・中川建治 : くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案, 土木学会論文集, No. 528/VI-29, 1995.
- 3) 栖原秀郎・長谷川豊・藤井康寿・中川建治・服部育男 : 半地下トンネルにおける誘発目地の設計法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 42A, 1996.

参考論文

- 1) 栖原秀郎・中川建治 : クラックの開口関数 4 形式の一括構成法と有限連続板問題への応用 (土木学会論文集投稿中)
- 2) S. J. DUAN・H. SUHARA・K. FUJII・K. NAKAGAWA : CONSTRUCTION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS WITH FINITE STRESS CONCENTRATION AT THE CRACK TIP FOR PLANE PROBLEMS (Eng. Fract. Mech投稿中)

