別紙様式第１５号（論文内容の要旨及び論文審査の結果の要旨）

氏 名 （ 本 籍 ）	LUEY SOKEA（カンボジア王国）
学 位 の 種 類	博　士（工学）
学 位 授 与 番 号	甲第６２７号
学 位 授 与 日 付	令和４年３月２５日
専　　　攻	工学専攻
学 位 論 文 題 目	Analysis of asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations （摂動された半分線形常微分方程式の解の漸近形の解析）
学位論文審査委員	（主 査）教授　亀山　敦 （副 査）教授　宇佐美　広介　　准教授　近藤　信太郎

論 文 内 容 の 要 旨

Ordinary differential equations of the form

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' = \alpha(1 + b(t))\,|u|^{\alpha-1}u, \qquad ' = d/dt, \tag{1}$$

are considered. Here $u = u(t)$ is the unknown, and as the fundamental assumptions it is assumed that

- $\alpha > 0$ is a constant;
- $b(t)$ is a continuous function defined near $t = +\infty$.

When $\alpha=1$, equation (1) reduces to the linear equation $u'' = (1 + b(t))u$. So equation (1) can be regarded as a generalization of linear equations. In this sense equations of the form (1) are often called *half-linear equations*.

The main theme of this thesis is to find the asymptotic forms of every solution of equation (1) under various smallness conditions imposed on $b(t)$. It should be noted the following two known facts:

Fact 1. For the case of $\alpha=1$, every nontrivial solution u of equation (1) satisfies

$$u(t) \sim ce^{t} \quad \text{or} \quad u(t) \sim ce^{-t} \qquad \text{as} \quad t \to \infty, \qquad c = \text{constant} \neq 0 \tag{2}$$

if $b(t)$ satisfies some smallness conditions near $+\infty$.

Fact 2. If $b(t) \equiv 0$, that is, if equation (1) reduces to the equation with constant coefficients

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' = \alpha\,|u|^{\alpha-1}u, \tag{1_0}$$

every nontrivial solution u also satisfies (2). In fact, all solutions of equation (1_0) are explicitly given by ce^{t}, ce^{-t}, $cE(t + T)$, and $cF(t + T)$ with some constants c and T, where E and F are, respectively, the generalized hyperbolic sine function and the generalized hyperbolic cosine function. Since $E(t) \sim c_1e^{t}$, and $F(t) \sim c_2e^{t}$ as $t \to \infty$ for some constants c_1, $c_2 > 0$, we find that (2) holds for every solution u of (1_0).

From these observations, it has been conjectured that, every nontrivial solution u of equation (1) also satisfies (2) if $b(t)$ satisfies some smallness conditions near $+\infty$. Affirmative answers to this conjecture are given in this thesis.

In the first half of the thesis, the equation

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' = \alpha(1 \pm p(t))\,|u|^{\alpha-1}u, \tag{$1_\pm$}$$

which has a more restricted appearance than equation (1), is investigated. Here $p(t)$ is a nonnegative continuous function defined near $+\infty$. The first main result of the thesis is as follows:

Main Result A. Let further $\int^{\infty}p(t)dt < \infty$ *for* ($1_\pm$) *and* $1 - p(t) \geqq 0$ *for* (1_-). *Then this conjecture is true; that is, every nontrivial solution u of equation* ($1_\pm$) *satisfies* (2).

In the latter half equation (1) is investigated as it is. The second main result of the thesis is:

Main Result B. Let further $\int^{\infty}|b(t)|dt < \infty$ *and* $\lim_{t\to\infty}b(t) = 0$ *for* (1). *Then this conjecture is still true; that is, every nontrivial solution u of equation* (1) *satisfies* (2).

To prove Main Result A some comparison principles are used. On the other hand, to prove Main Result B, the generalized Riccati equation associated to equation (1) is used. By analyzing asymptotic behavior of solutions of this equation, Main Result B is proved

論文審査結果の要旨

本論文では半分線形常微分方程式(1)：$(|u'|^{\alpha-1}u')' = \alpha\,(1 + b(t))\,|u|^{\alpha-1}u$, $' = d/dt$, の解の漸近挙動，特に漸近形について論じている。

$\alpha=1$ の場合，方程式(1)は線形方程式となりその解の漸近挙動に関しては厖大な研究がある。しかし $\alpha\neq1$ の場合はそのような研究は殆どなされていない。その理由は

- $\alpha=1$ のときと異なり解の集合が線形空間にならない；
- $\alpha=1$ のときと異なり定数変化法（Duhamel の原理）が成立しない。

という困難さの存在であろう。そのため方程式(1)の解の漸近挙動の解明は手付かずのままであった。

著者はこの困難に挑み，$\alpha=1$ のときとは異なる手法で $\alpha=1$ のときとほぼ同様の結果が $\alpha\neq1$ であっても成立することを証明している。

本論文第１節では，問題提起・予想される結論・示唆的な具体例の提示・論文全体の概要，が与えられている。第２節では以降で用いられる予備的考察結果と補助的命題が与えられている。第３節・４節が本論文の主要部である。第３節では方程式(1)のやや特殊なタイプの方程式（摂動項が定符号）が扱われ，摂動項が十分小さいとき，任意の非自明解の漸近形は指数関数的増大関数か指数関数的減衰関数のいずれかであることが示されている。第４節では方程式 (1) そのものが扱われている。（仮定は第３節のそれとやや異なる。）やはり摂動項が十分小さいとき，任意の非自明解の漸近形は指数関数的増大関数か指数関数的減衰関数のいずれかであることが示されている。第５節は付録であり，方程式 (1) の特殊な場合（$b(t)\equiv0$）の解析的表示される解に関連する一般化双曲線関数の性質が紹介されている。

$\alpha\neq1$ のときには $\alpha=1$ のときの解析手法が一般には使えないので，第３節では比較原理が重要な解析手法として用いられている。一方，第４節では方程式(1)に付随する一般化 Riccati 方程式の解析結果が援用されている。いずれも $\alpha=1$ のときには取られていない手法であるが，一般的状況のときにはこれらが有効であることが示されている。

半分線形方程式(1)の主要項 $(|u'|^{\alpha-1}u')'$ のタイプの微分作用素は氷雪学や非ニュートン流体の理論に現れることが知られている。また，N 変数の未知関数 $u = u(x_1, x_2,\dots, x_N)$ に対する退化ラプラス作用素 $\mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2}u)$ は $1 < m \leqq N$ で u が球対称関数（$u = u(r)$, $r = |x|$）の場合，$(|u_r|^{m-2}u_r)_r$ に帰着できることが知られている。このようなことから(1)のタイプの常微分方程式の研究は基礎科学・基礎工学における重要なテーマと考えられる。数学的にも，既存手法以外の手法で（予想はできるものでありながら）未解決な問題に明快な解答を与えた本論文の価値は高く評価できる。

最終試験結果の要旨

第３節と第４節で与えられた研究成果はそれぞれ査読付き学術論文において公表されている。第３節の内容が発表論文[1]に，第４節の内容が発表論文[2]にまとめられている。

２０２２年２月４日に開催された公聴会における質疑応答などに基づき審査を行い，審査委員全員一致で最終試験に合格と判定した。

発表論文（論文名、著者、掲載誌名、巻号、ページ）

[1] Sokea Luey and Hiroyuki Usami, Asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations, Arch. Math. (Brno), 57 (2021), 27-39.

[2] Sokea Luey and Hiroyuki Usami, Application of generalized Riccati equations to analysis of asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations, Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations, 11 (2021), Nos. 3/4, 378—390.