

土質材料の材料非線形不規則振動における確率密度関数の適用

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2022-06-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 清水, 英良 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12099/5825

土質材料の材料非線形不規則振動 における確率密度関数の適用

清水 英 良

農業造構学研究室

(1984年 7 月31日受理)

Application of Probability Density Function to Nonlinear Soil Materials Subjected to Random Vibration

Hideyoshi SHIMIZU

Laboratory of Construction Engineering for Irrigation, Drainage and Reclamation

(Received July 31, 1984)

SUMMARY

This study presents the response analysis of random vibration to nonlinear soil materials employing the probability density function (PDF) derived from Fokker-Planck Equation. The PDF can express various nonlinearities using only one parameter 'a'.

The author compared this PDF with Gaussian and Rayleigh distributions, and performed χ^2 -test on actual observed seismic data to examine fitness.

The results proved that this proposed model is superior to the Gaussian and Rayleigh ones which have been used to date.

Res. Bull. Fac. Agr. Gifu Univ. (49) : 315-323, 1984.

要 約

本論文は土質材料の材料非線形不規則振動応答に、Fokker-Planck 方程式より導かれる確率密度関数を用いて種々の重要な統計量を求めたものである。すなわち、これらの理論式は一つのパラメータ a で表現し得、 a の値を変化させて種々の非線形性の度合を規定できるところに特徴がある。筆者はこの曲線群を、変位確率密度関数についてはガウス分布と、ピーク分布関数についてはレイリー分布関数と比較・検討した。さらに、実際の動的変位記録に対しての適合性を検討する為 χ^2 検定を行った。その結果は、従来用いられているガウス分布・レイリー分布モデルより本論文で提案しているモデルの方が、上述のデータに対しては優れていることが判明した。

諸 言

地震動は再現性に乏しく、その発生・伝播のメカニズムは多くの因子によって左右される。すなわち地震動を時間の確定関数としてとらえることは不可能であり、確率過程として取り扱わねばならない。

非線形ランダム応答を理論的に評価する方法としては次の 3 解析法が挙げられる。

i) 摂動法

ii) 等価線形化法

iii) Fokker-Planck 方程式の解

i) の摂動法は、非線形解をべき級数として表わすものであり非線形性が小さい場合に有効な解法である¹⁾。ii) の等価線形化法は名前の通り非線形運動方程式を等価な線形運動方程式に置換して求める方法であるが、破壊を論ずるような大入力における応答には疑問があると言われている^{2~4)}。iii) の Fokker-Planck 方程式の解は、この方程式を満足する確率密度関数を求め、これより変位、速度応答に関する主要な統計量を得る解法である^{5,6)}。

本論文は上記iii)の Fokker-Planck 方程式を土質材料の材料非線形問題に適用し、確率密度関数を求めたものである。さらに構造系の破壊を論じる際に重要であるピーク分布をも合わせて求め、それらがパラメータ a で表わしうることを示した。また、この確率密度関数・ピーク確率密度を用いて、実際の地震記録の検定を行った。

理 論

1 自由度非線形履歴系の定常応答は、次式の Fokker-Planck 方程式を満足する⁶⁾。

$$\dot{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [p \cdot f(x, \dot{x})] - \pi W \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

但し、 $p = p(x, \dot{x})$: 応答変位 x , 速度 $\dot{x}$ の結合確率密度関数 $f(x, \dot{x})$: 復元力関数 W : ガウスホワイトノイズの定スペクトル密度

今、復元力関数として剛性力に双曲線型を適用する^{7,8)}と、 $f(x, \dot{x})$ は次式のようにになる。

$$f(x, \dot{x}) = \beta \dot{x} + g(x) = \beta \dot{x} + \frac{\omega_0^2 x}{1 + |x|/x_0} \quad \dots\dots\dots(2)$$

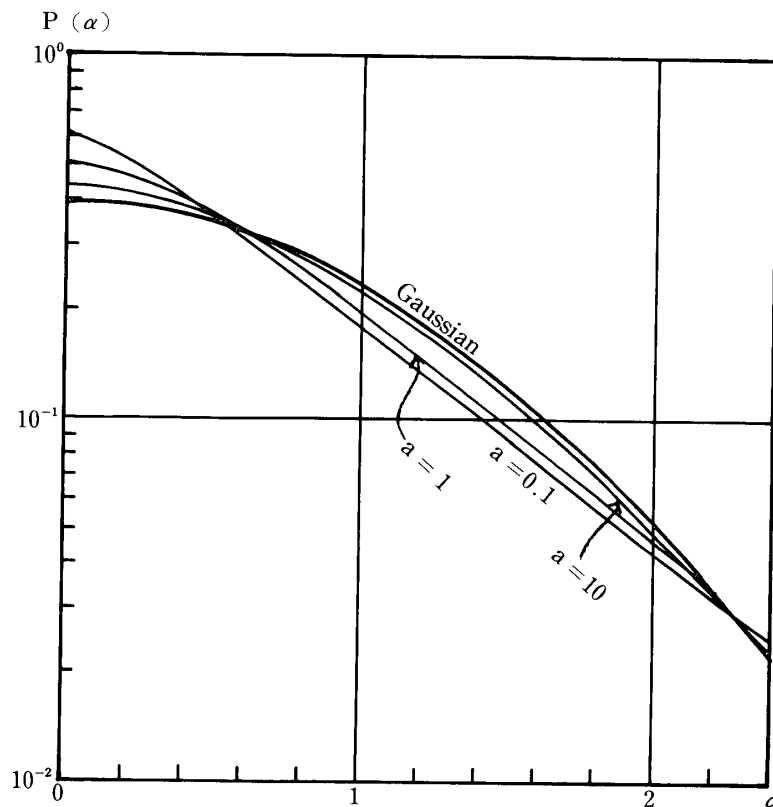


Fig. 1. The normalized first-order density function of the response displacement, for various values of a

但し, $x_o = H\gamma_r$: H : 構造系の高さ γ_r : 標準ひずみ ω_o : 固有円振動数 β : 減衰比

(2) 式を (1) 式に代入し, 結合変位確率密度関数 $P(x, \dot{x})$ について解くと

$$p(x_r, \dot{x}_r) = C(1 + X_r)^a \exp[-ax_r - \dot{x}_r^2 / 2\sigma_{x_r}^2] \dots\dots\dots(3)$$

但し, $x_r = |x|/x_o$ $\sigma_{x_r}^2 = \pi W / \beta \dot{x}_o^2$ $a = \omega_o^2 / \sigma_{x_r}^2$ C : 正規化定数

となる。これより変位確率密度関数 $P(X_r)$ は次式のようにになる。

$$p(x_r) = C_r(1 + x_r)^a \exp[-ax_r] \dots\dots\dots(4)$$

但し, $C_r = a^{a+1} e^{-a} / 2\Gamma(a+1, a)$: $\Gamma(a+1, a) = \int_a^\infty t^{(a+1)-1} e^{-t} dt$; 不完全ガンマ関数

Fig. 1 にパラメータ $a = 0.1, 1, 10$ の場合の確率密度曲線を示す。また, 比較のためガウス分布の密度曲線をもプロットした(そのため $\alpha = x_r / \sigma_{x_r}$ の変数変換を行っている)。図より, a の値が大きくなるにつれ確率密度曲線はガウス分布に近づいていくことがわかる。また, $\alpha = 0$ 上の値すなわち変位がゼロ軸を通る確率は, いずれの場合もガウス過程より大きい。このことは非線形性が顕著になるにつれ, 応答の調和波的性格が薄らいでゆくためと思われる。

○ピーク確率密度

構造応答の高い基準のピーク分布計算には, 次の Powell の提案式を用いる⁹⁾。

$$p(x_i) = - \left(\frac{d}{dx_i} \int_0^\infty x_r p(x_i, \dot{x}_r) dx_r \right) / \int_0^\infty \dot{x}_r p(0, x_r) d\dot{x}_r \dots\dots\dots(5)$$

上式の結合確率密度関数に (3) 式を代入し演算を施して次式が得られる。

$$p(x_i) = c_i x_i (1 + x_i)^{a-1} \exp[-ax_i] \dots\dots\dots(6)$$

但し, $c_i = a^{a+1} e^{-a} / \{\Gamma(a+1, a) - a\Gamma(a, a)\}$

前項と同様に, $x_i / \sigma_{x_i} = \eta$ とし, $a = 0.1, 1, 10$ の場合とレイリー分布の密度曲線を Fig. 2 に示す。この図から $a = 10$ と非線形性の小さい場合でもレイリー分布形とはかなりの差が認められる。これは, Fig. 1 の

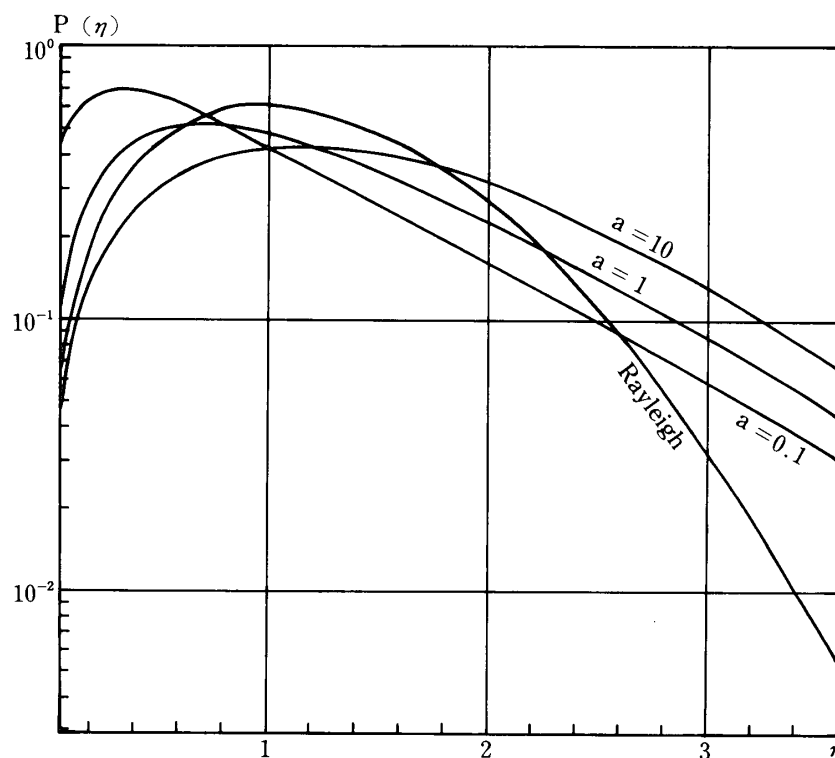


Fig. 2. The normalized first-order density function of the peak displacement for various values of a

確率密度曲線間の若干の相違が最大値応答に関しては非常に大きく反映されることを意味している。

●統計量

(4)式より, 変位 x_r の分散は

$$\sigma_{xr}^2 = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\Gamma(a+3, a)}{\Gamma(a+1, a)} - 2a \frac{\Gamma(a+2, a)}{\Gamma(a+1, a)} + a^2 \right\} \dots\dots\dots(7)$$

となり, ピーク値 x_i の平均 μ_{xi} 分散 σ_{xi} は (6) 式を用いて, それぞれ以下のようになる。

$$\mu_{xi} = \frac{\Gamma(a+2, a) - 2a\Gamma(a+1, a) + a^2\Gamma(a, a)}{a \{ \Gamma(a+1, a) - a\Gamma(a, a) \}}$$

$$\sigma_{xi}^2 = \frac{\Gamma(a+3, a) - 3a\Gamma(a+2, a) + 3a^2\Gamma(a+1, a) - a^3\Gamma(a, a)}{a^2 \{ \Gamma(a+1, a) - a\Gamma(a, a) \}} - \mu_{xi}^2 \dots\dots\dots(8)$$

Table. 1 に a の各値に応じた平均, 偏差値を表し, プロットしたものを Fig. 3 に示す。この図で興味深

Table 1. The response statistics derived from eq. (7), (8), for various values of a

a	0.1	0.5	1	2	10
σ_{xr}	15.0	3.52	2.00	1.18	0.40
μ_{xi}	12.3	3.31	2.00	1.25	0.47
σ_{xi}	10.7	2.51	1.41	0.83	0.28

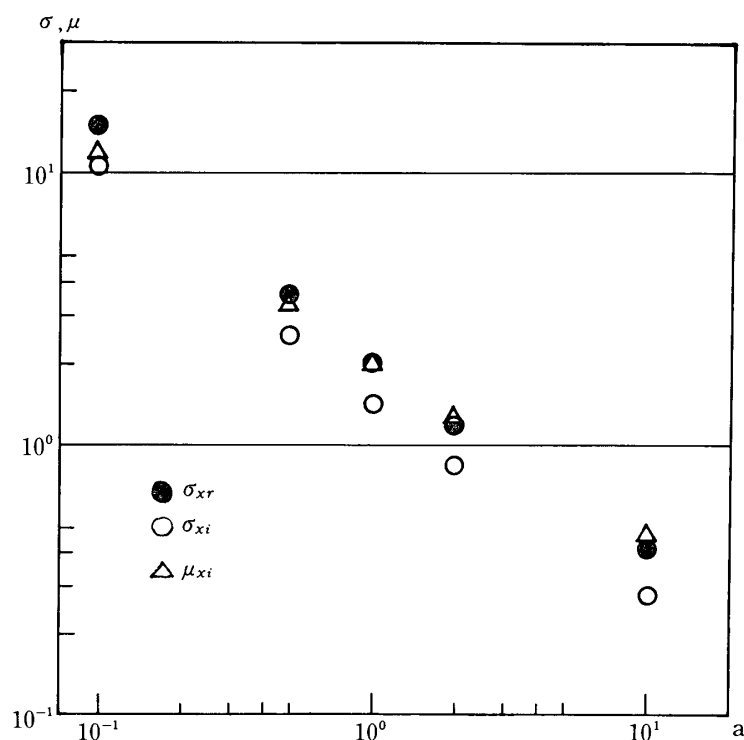


Fig. 3. The response statistics from eq. (7), (8), for various values of a

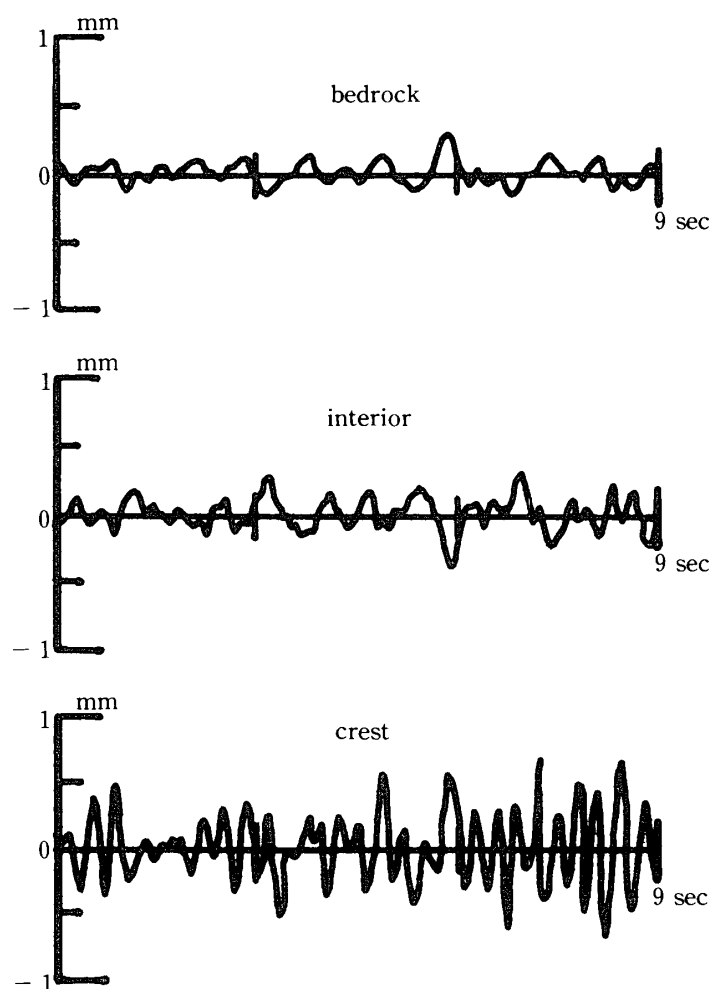


Fig. 4. Observed seismic displacement data (horizontal)

Table. 2. Standard variation values for observed seismic data (mm)

bedrock	interior	crest
0.079	0.116	0.249

いことは、変位 x_r の標準偏差 σ_{xr} の値が、ピーク平均 μ_{xi} に比べてほぼ同じかやや上まわっていることであり、このことから非線形応答は単一調和波の性格が弱いことが推定される。

応 用

前項で得られた変位確率密度、ピーク確率密度式を用いて、実際のフィルタイプダムの地震記録により得られる度数分布にどれ程適合しているかを一例として検定した。検定方法は χ^2 検定である。検定の対象としたデータは地震水平堤軸方向変位記録である ($\Delta t = 0.02$ 秒, データ数 $N = 450$), Fig. 4 に時刻歴を, Table. 2 に標準偏差値を示す。

○堤底変位記録の χ^2 検定

堤底水平変位記録を 0.02 mm 間隔でクラス分けし、ガウス分布モデルに対する χ^2 検定を行った〔自由度 $f (= k - 3) = 15$, k : クラス数〕。Fig. 5 にヒストグラムを, Table. 3 に検定の結果を示す。有意水準 $\alpha = 5\%$ に対して $\chi_{15, \alpha} = 25.00 > 20.27$ となり、堤底変位に関しては、ガウス分布は一応妥当なモデルとい

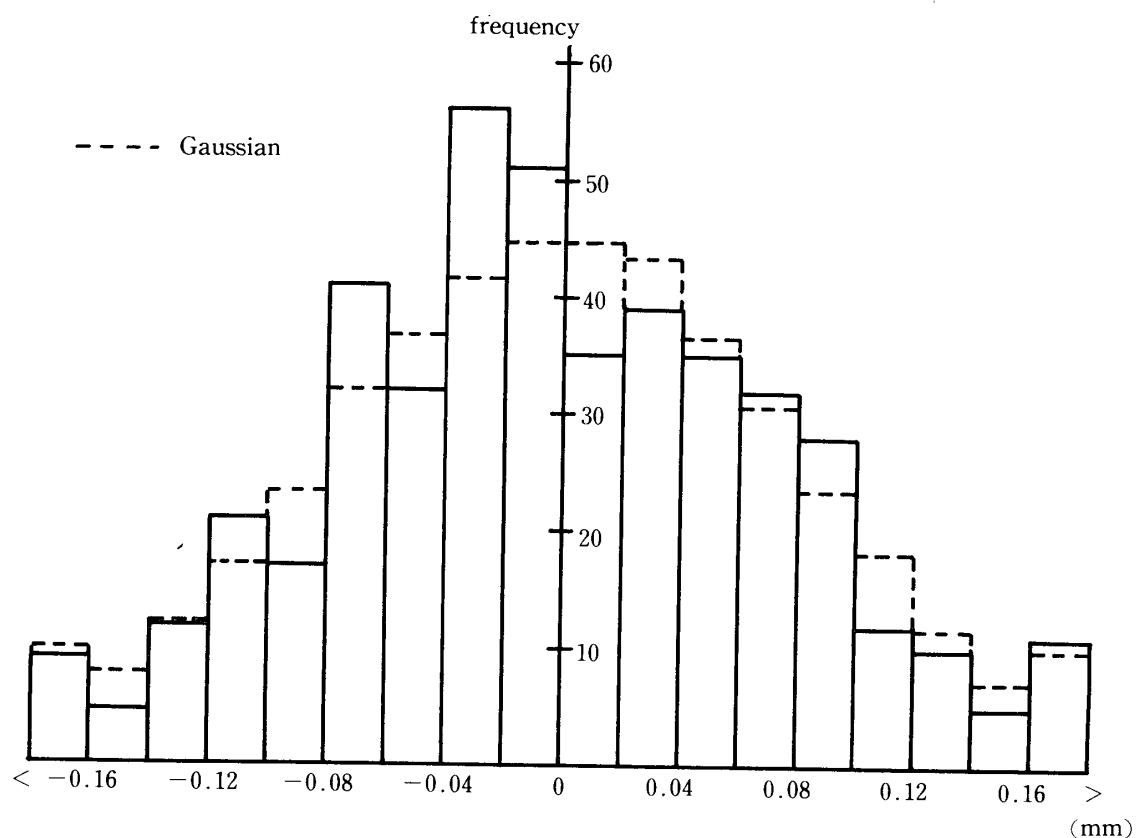


Fig. 5. Frequency distribution of the seismic displacement at bedrock

Table. 3. χ^2 test to the displacement at bedrock

section (mm)	Ob. freq. $\bar{O}_i$	Com. freq. N_i	$(\bar{O}_i - N_i)^2 / N_i$
< -0.16	9	9.90	0.08
-0.16 ~ -0.14	4	7.65	1.74
-0.14 ~ -0.12	12	12.15	0.00
-0.12 ~ -0.10	21	17.10	0.89
-0.10 ~ -0.08	17	23.40	1.75
-0.08 ~ -0.06	41	31.95	2.56
-0.06 ~ -0.04	32	36.90	0.65
-0.04 ~ -0.02	56	41.40	5.15
-0.02 ~ 0	51	44.55	0.93
0 ~ 0.02	35	44.55	2.05
0.02 ~ 0.04	39	43.20	0.41
0.04 ~ 0.06	35	36.45	0.06
0.06 ~ 0.08	32	30.60	0.06
0.08 ~ 0.10	28	23.40	0.90
0.10 ~ 0.12	12	18.00	2.00
0.12 ~ 0.14	10	11.70	0.25
0.14 ~ 0.16	5	7.20	0.67
> 0.16	11	9.90	0.12
Σ	450	450.00	20.27

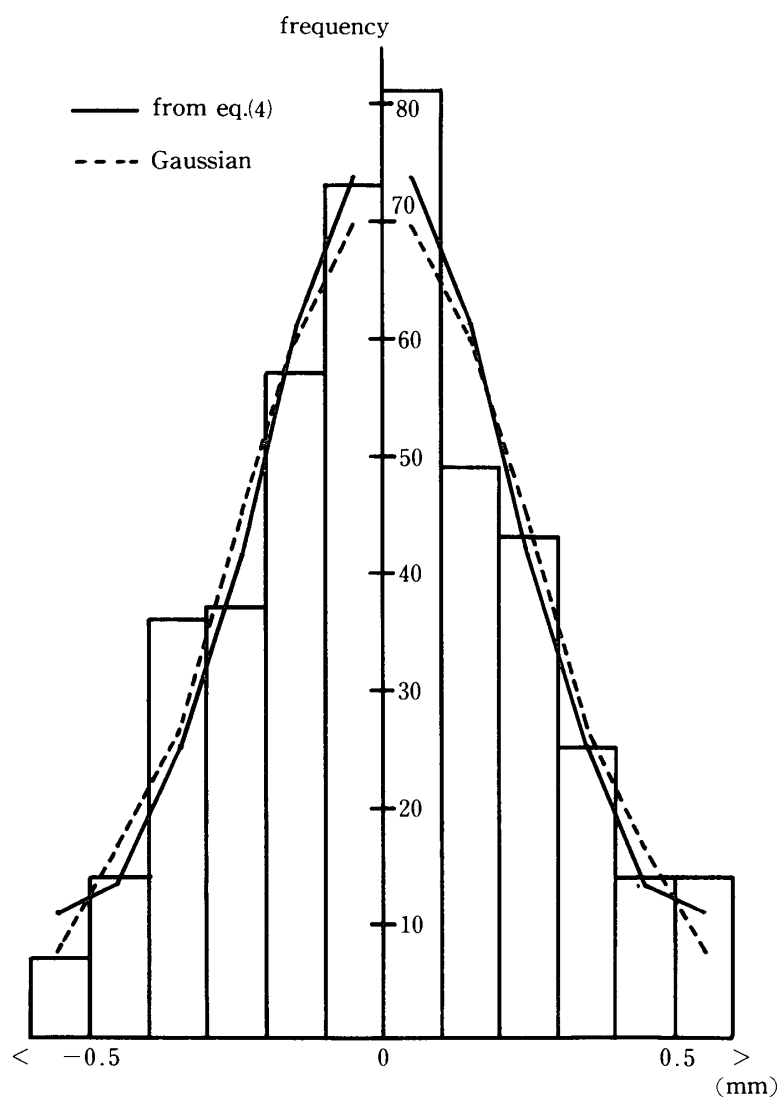


Fig. 6. Frequency distribution of the seismic displacement at crest

Table 4. χ^2 test to the displacement at crest

section (mm)	$\bar{O}i$	Ni	Si	$(\bar{O}i - Ni)^2 / Ni$	$(\bar{O}i - Si)^2 / Si$
< -0.5	7	7.65	10.75	0.06	1.31
-0.5 ~ -0.4	14	16.65	13.28	0.42	0.04
-0.4 ~ -0.3	36	26.55	25.06	3.36	4.78
-0.3 ~ -0.2	37	44.55	41.81	1.28	0.55
-0.2 ~ -0.1	57	59.85	60.41	0.14	0.19
-0.1 ~ 0	73	69.75	73.69	0.32	0.01
0 ~ 0.1	81	69.75	73.69	1.82	0.73
0.1 ~ 0.2	49	59.85	60.41	1.97	2.16
0.2 ~ 0.3	43	44.55	41.81	0.06	0.03
0.3 ~ 0.4	25	26.55	25.06	0.09	0.00
0.4 ~ 0.5	14	16.65	13.28	0.27	0.04
> 0.5	14	7.65	10.75	5.27	0.98
Σ	450	450.00	450.00	15.06	10.82

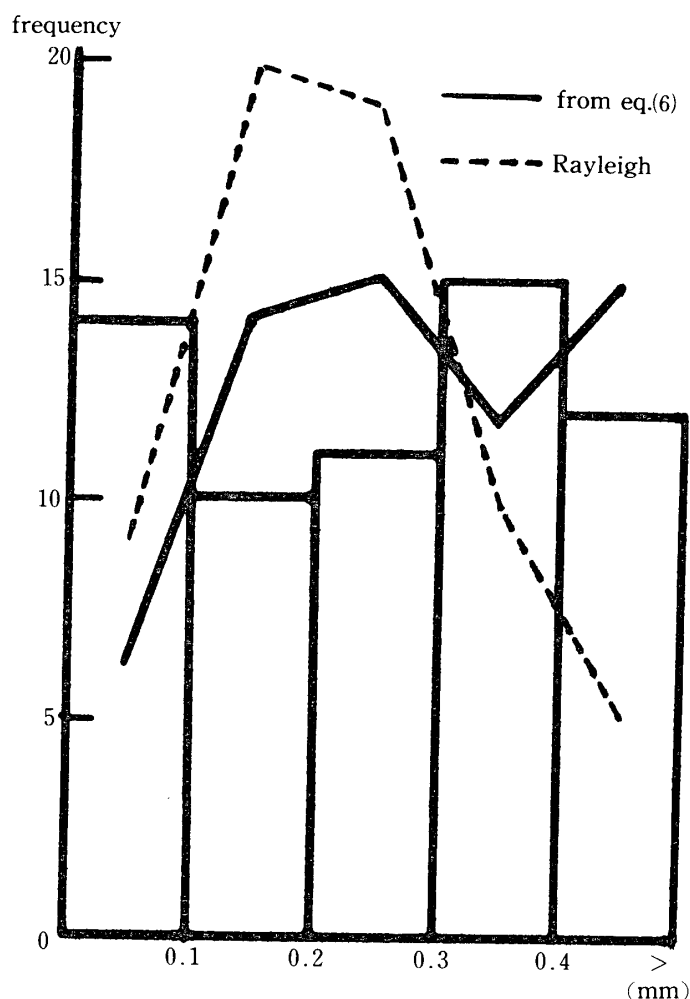


Fig. 7. Frequency distribution of the peak displacement at crest

える。

○天端水平変位確率密度曲線の推定

Table. 2 の天端偏差値と (7) 式より得られる σ_{xr} が等しくなるように置き, $a=22.5$ を得た。この値を (4) 式に代入して求められる変位密度関数を S と名づけ, χ^2 検定を行った。クラス間隔は, 等間隔幅の手法が用いられる場合は, 多くの場合標準偏差当り 2.5 個のクラス間隔で十分であるといわれている¹⁰⁾ ので, 0.1mm 間隔で 12 のクラスに分類した [$f=k-3=9$]。Fig. 6 にヒストグラムを, Table. 4 に検定の結果を示す。検定は, ガウス分布 (N_i) と仮定した場合と (4) 式の S_i に対して行った。前項と同様有意水準 5% で検定したところ, $\chi^2_{0.05}=16.92$ となり, Table. 4 よりガウス分布の場合 15.06, (4) 式の場合 10.82 と両モデルとも妥当ではあるが, (4) 式の S モデルの方がガウス分布モデルよりも優れていることが判明した。

○ピーク分布の検定

天端水平変位記録のピーク値については, 度数が 62 ケと少なく, χ^2 検定の 5% 有意水準は満たさなかった。Fig. 7 にピーク変位のヒストグラムを示す。図より, 検定を満たさなかったもう一つの理由として, 微少ピーク値 (0~0.1mm) の理論分布量が観測データと比較して極端に少ないことが挙げられる。これは, (5) 式の Powell の提案式が, ゼロ軸の横断数と, ピーク数とが同じであると仮定した安全側の式であるためであり, この小ピーク値を除外すれば, レイリー分布に比べて, 観測データとの適合度はまさって

Table 5. Mean and root mean square values from eq.(8) and observed peak data (mm)

	mean	r. m. s.
from eq.(8)	0.324	0.339
observed	0.267	0.295

いる。Table. 5 に、ピーク分布の統計量を示す。この値からも、理論値は安全側の値であることが理解できる。

結 論

以上の結果より、以下のことが結論づけられる。

i) 理論的に求められる変位確率密度関数・ピーク分布関数は、一つのパラメータ a で種々の非線形性を表現し得る。

ii) 変位確率密度関数の微少な相違が、ピーク分布においては非常に大きく反映される。このことは破壊問題を論じる際に重要な結果であると思われる。

iii) 実際のデータに対しての検定の結果は、(4) 式、(6) 式のモデルの方が、従来のガウス分布、レイリー分布モデルよりも適合度が優れている。また、(6) 式のモデルは安全側の値であることがデータより判明した。

以上、本論文において 1 自由度振動系モデルでの確率密度関数の適用を論じてきたが、この解法は上述の同定問題だけでなく、構造系の破壊問題にも適用できうる。その為には多自由度系への拡張を容易ならしめることが必要であろうと思われる。

謝 辞

本論文を遂行するにあたり、岐阜大学農学部仲野良紀教授、同嶋崎藤雄助教授、京都大学農学部長谷川高士教授には多大のご援助を頂いた。ここに深謝の意を表します。

文 献

- 1) Crandall, S. H. : The Spectrum of Random Vibration of a Nonlinear Oscillator. 11th Int. Congr. Appl. Mech., 1964.
- 2) Caughey, T. K. : Equivalent Linearization Techniques. J. Acoust. Soc. Am. 35 (11) : 1706-1711, 1963.
- 3) 清水英良：1 自由度履歴系の振動性状。岐阜農研報 (46) : 275-283, 1982.
- 4) 青山成康：Hardin 型履歴を有する振動系の等価線形パラメタ誘導およびその応用。農土京都支部. 37 : 26-27, 1980.
- 5) Caughey, T. K. : Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation. J. Acoust. Soc. Am. 35 : 1683-1692, 1963.
- 6) Y. K. リン：「構造動力学の確率論的方法」東京：培風館，1972.
- 7) Hardin, et al. : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equations and Curves. J. Soil Mech Found Div (98) : 667-692, 1972.
- 8) 沢田敏男・青山成康・清水英良：干拓提防の地震記録解析と地震応答解析，農土論集(82) : 65-71, 1979.
- 9) Powell, A. : On the Fatigue Failure of Structures Due to Vibrations Excited by Random Pressure Fields. J. Acoust. Soc. Am. 30 : 1130, 1958.
- 10) J. S. ペンダット・A. G. ピアソル：「ランダムデータの統計的処理」東京：培風館，1976.