



# 岐阜大学機関リポジトリ

Gifu University Institutional Repository

非線形剛性・非線形減衰を有する系の応答確率密度関数の推定

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2022-06-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 清水, 英良 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12099/5862">http://hdl.handle.net/20.500.12099/5862</a>

非線形剛性・非線形減衰を有する系の  
応答確率密度関数の推定

清水 英 良

農業造構学研究室  
(1985年7月31日受理)

Estimation of Response Probability Density Function to  
Nonlinear Stiffness and Damping Materials

Hideyoshi SHIMIZU

*Laboratory of Construction Engineering  
for Irrigation, Drainage and Reclamation  
(Received July 31, 1985)*

SUMMARY

This study presents an analysis of random vibration response to nonlinear soil materials employing the probability density function derived from Fokker-Planck Equation, as a continuation of the previous report.

The previous study used restoring force which forms nonlinear stiffness and linear damping. The present study uses nonlinear damping which is dependent on energy  $E$ . One can obtain the probability density function of the response displacement and velocity and the various response statistics for various values of  $\alpha$ .

The results proved that the response displacement doesn't fit a linear solution even with small inputs, and the greater the external force is, the more asymptotic to Gaussian the response velocity is.

Res. Bull. Fac. Agr. Gifu Univ. (50) : 381—389, 1985.

要 約

本論文は、前論文に引き続き、土質材料の材料非線形不規則応答に、Fokker-Planck 方程式より導かれる確率密度関数を用いて、速度・変位応答を論じるものである。

前論文では、非線形剛性・線形減衰型の復元力関数を用いて解析したが、本論文は、非線形剛性力と、エネルギー $E$ の関数である非線形減衰を有する復元力関数を用いて、応答変位・速度確率密度関数・その他統計量を求めたものである。この結果、応答変位は小入力の場合に於ても線形応答にはならず、大入力になるにつれ、非線形剛性・線形減衰型に漸近してゆくことが明らかになった。

緒 言

地震応答解析を行うにあたり、最も重要なことは、地震入力そのものであることは言を待たない。しかし、現実問題として、地震は再現性に乏しく、二度と同じ地震は生起し得ない。故に、地震動を時間の確定関数としてとらえ得ることは不可能であり、不規則確率過程として取り扱わねばならない。

上述の問題により、地震入力を、言ってみれば何の特徴もないような形に仮定して解析することが考え

られる。すなわち、地震パルスは、個々の時間に独立に到着するものとし、周波数特性は何もないホワイトノイズであると仮定することにより問題は達成される。

以上の仮定のもとで、非線形ランダム応答は、Fokker-Planck 方程式より導かれる変位・速度確率密度関数を用いて議論することができる。前論文<sup>2)</sup>は、材料の非線形性を変位項に限って議論しているが、本論文は、変位項のみならず速度項の非線形性をも考慮している。これより得られる応答を、従来用いられているガウス型、レイリー型の応答分布と比較・検討を行った。

理 論

1 自由度非線形履歴系の運動方程式は、以下の形に書ける。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + ch(E) \frac{dx}{dt} + kf(x) = F(t) \dots\dots\dots(1)$$

但し、m：質量 c：終局減衰力

h(E)：エネルギー E の単調増加関数

k：初期バネ定数 f(x)：変位 x の関数

F(t)：時間 t における外力

今、無次元時間： $\tau = \omega_0 t$  ( $\omega_0$ ：系の固有振動数[ $= \sqrt{k/m}$ ]) を導入し、 $c = m\omega_0\beta$  に注目すると ( $\beta$ ：終局減衰定数)、(1)式は以下のようになる。

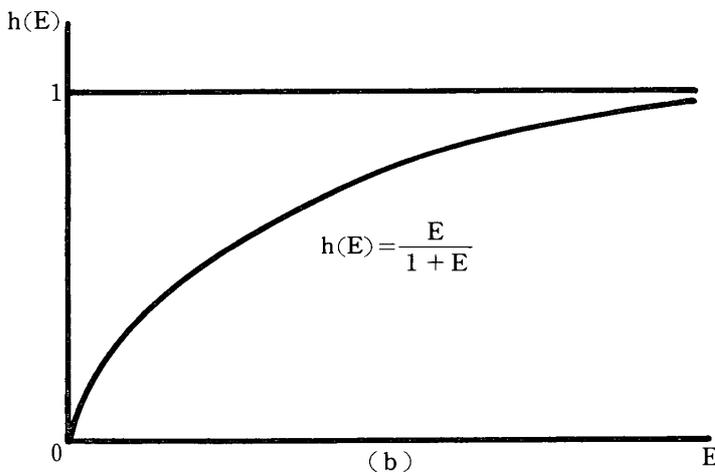
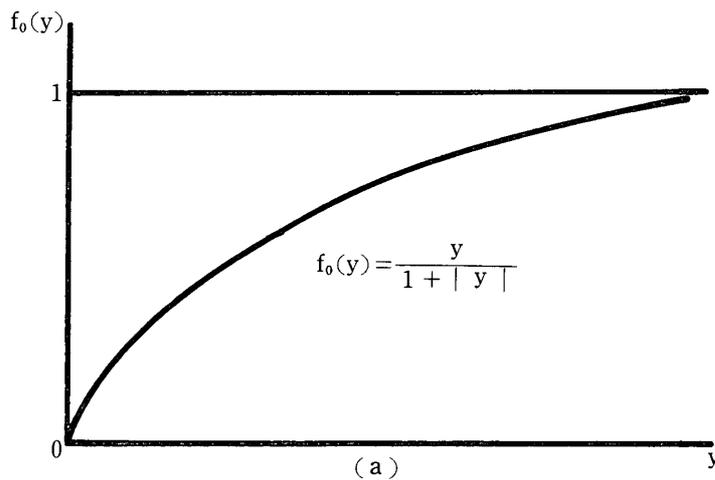


Fig. 1. Hyperbolic curves

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta h(E) \frac{dx}{d\tau} + f(x) = \frac{F(\tau)}{m\omega_0^2} \dots(1)$$

ここで、正規化変位： $y = x/x_r$  を導入すると、最終的に正準化された運動方程式は(2)式のようになる。

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \beta h(E) \frac{dy}{d\tau} + f_0(y) = n(\tau) \dots\dots(2)$$

ここに、 $f_0(y) = f(y)/x_r$

$$n(\tau) = F(\tau)/mx_r\omega_0^2$$

今、非線形変位項  $f_0(y)$  と非線形減衰項  $h(E)$  に双曲線型を適用すると、Fig. 1. (a), (b) のようになる。

Fig. 1 (a), (b) より、非線形変位項  $f_0(y)$  は、Hardin の提案した式<sup>3)</sup>を正準化したものと全く同一であるが、非線形減衰項は、Hardin 型はせん断ひずみ(ゆえに変位)の双曲線型であるのに対し、エネルギー E の双曲線型になっている<sup>4)</sup>。これは、減衰力そのものが系の消費エネルギーと密接に関連している事実を考えれば、Hardin 型より妥当なものであるといえよう。

○ 変位・速度確率密度

(2)式の運動方程式より、入力ガウスホワイトノイズの場合の定常応答は、以下の Fokker-Planck 方程式を満足する。

$$\dot{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} [p \cdot g(y, \dot{y})] - \pi W \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

但し、 $p = p(y, \dot{y})$  : 応答変位  $y$ , 速度  $\dot{y}$  の結合確率密度関数  $g(y, \dot{y})$  : (3)式の変位・速度項  $W$  : ガウスホワイトノイズの定スペクトル密度

(3)式の解は、以下のようになる。

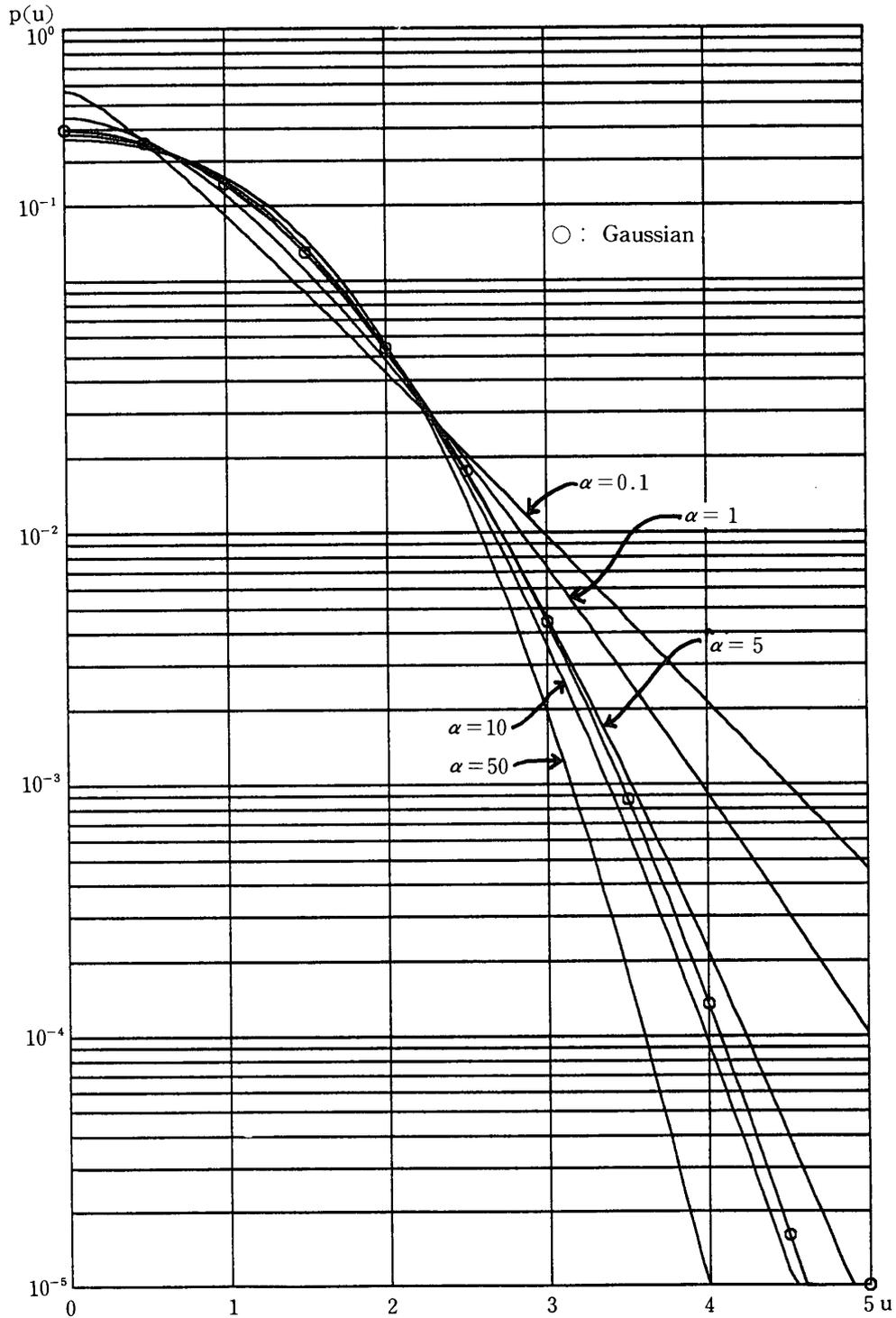


Fig. 2. The normalized first-order density function of the response displacement, for various values of  $\alpha$

$$p(y, \dot{y}) = C_\alpha \exp \left[ -\alpha \int_0^E h(v) dv \right] \dots\dots\dots(4)$$

ここに,  $C_\alpha$  : 正規化定数  $E = \dot{y}^2/2 + \int_0^y f_0(u) du$   
 $\alpha = \beta/\pi W$

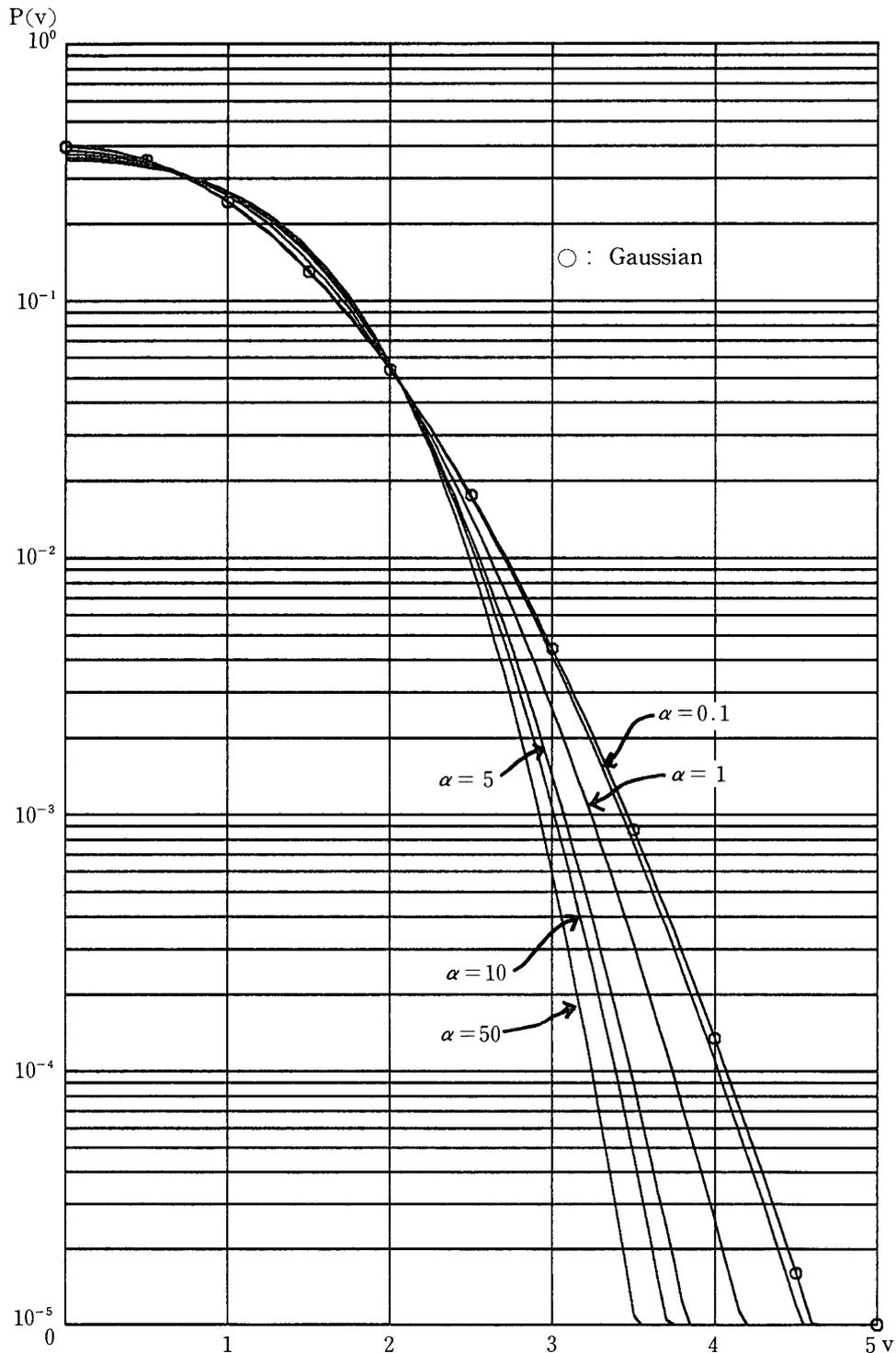


Fig. 3. The normalized first-order density function of the response velocity, for various values of  $\alpha$

前述の双曲線式を(4)に適用すると、(5)式ようになる。

$$p(y, \dot{y}) = C_\alpha (1 + |y|)^\alpha \left\{ 1 + |y| - \log(1 + |y|) + \frac{\dot{y}^2}{2} \right\}^\alpha \cdot \exp \left[ -\alpha \left( |y| + \frac{\dot{y}^2}{2} \right) \right] \dots\dots\dots(5)$$

正規化定数  $C_\alpha$  は  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(y, \dot{y}) dy d\dot{y} = 1$  より得られる。明らかに上式はパラメータ  $\alpha$  の関数であり、 $\alpha$  が自然数でない限り解析的表現は不可能である。

(5)式より変位・速度確率密度関数は、以下の形になる

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y, \dot{y}) d\dot{y} = 2 C_\alpha \int_0^{\infty} (1 + |y|)^\alpha \left\{ 1 + |y| - \log(1 + |y|) + \frac{\dot{y}^2}{2} \right\}^\alpha e^{-\alpha(|y| + \dot{y}^2/2)} d\dot{y} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} C_\alpha (1 + |y|)^\alpha e^{-\alpha|y|} I_\nu(y) \dots\dots\dots(6)$$

$$p(\dot{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y, \dot{y}) dy = \frac{2}{\alpha} C_\alpha e^{-\alpha\dot{y}^2/2} I_u(\dot{y}) \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $p(y)$ ：変位確率密度関数  
 $p(\dot{y})$ ：速度確率密度関数

Table. 1. The deviation values for the response displacement and velocity, for various values of  $\alpha$

$\alpha$	0.1	1	5	10	50
$\sigma_y$	15.7	2.62	1.10	0.81	0.45
$\sigma_{\dot{y}}$	3.25	1.21	0.69	0.55	0.35
$\sigma_G$	3.16	1	0.45	0.32	0.14

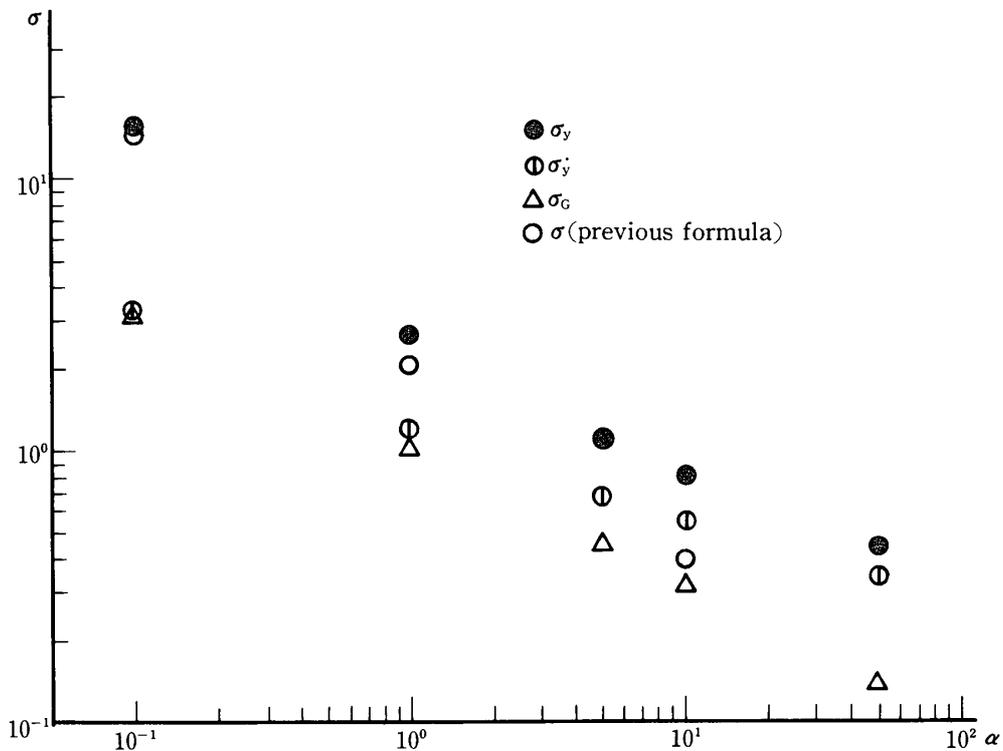


Fig. 4. The deviation values  $\sigma$  for the response displacement and velocity, for various values of  $\alpha$

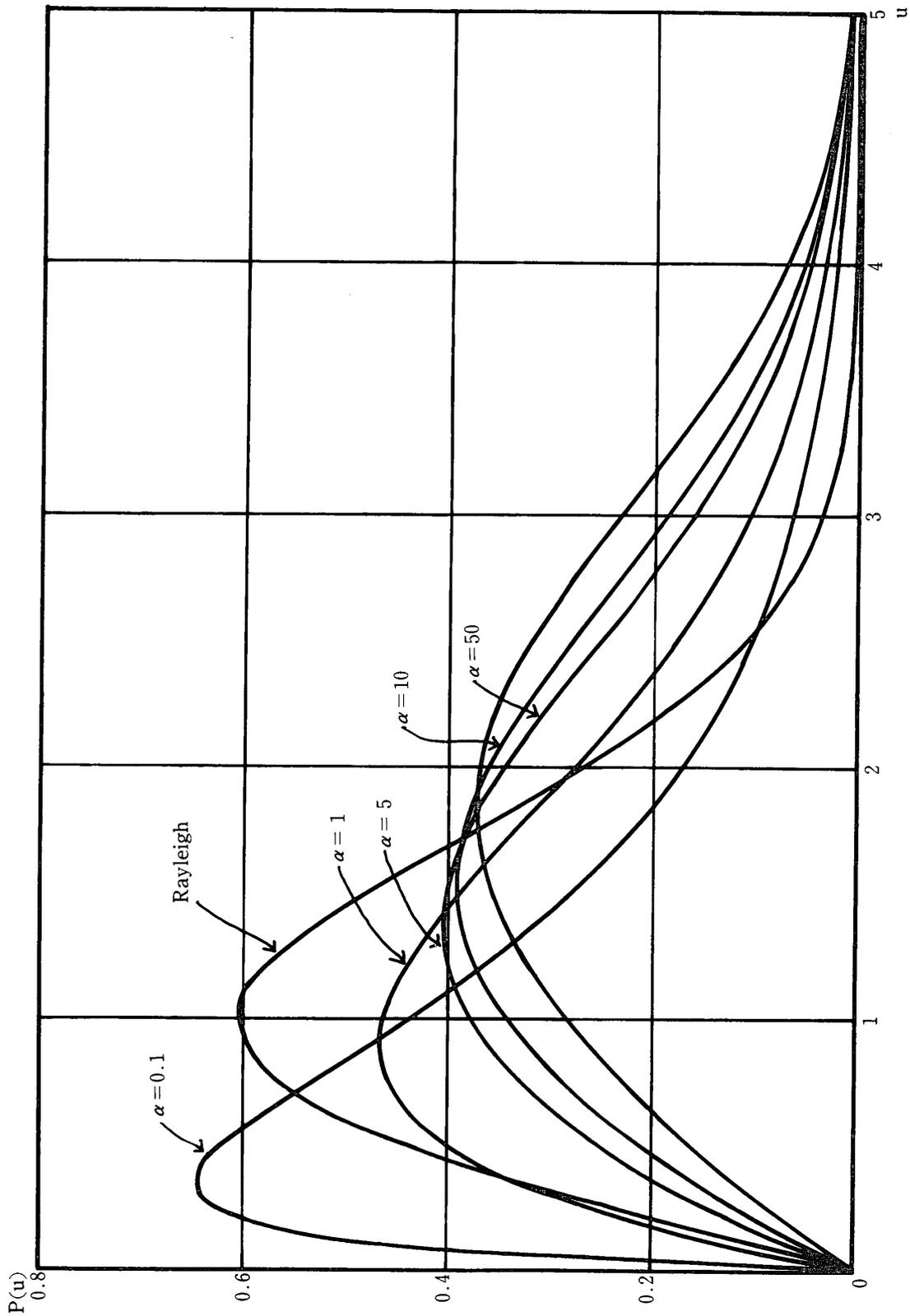


Fig. 5. The normalized first-order density function of the peak displacement, for various values of  $\alpha$

$$I_v(y) = \int_0^\infty \left\{ 1 + |y| - \log \left( 1 + |y| + \frac{v}{\alpha} \right) \right\}^\alpha e^{-v/\sqrt{v}} dv$$

$$I_u(\dot{y}) = \int_0^\infty \left( 1 + \frac{u}{\alpha} \right)^\alpha \left\{ 1 + \frac{u}{\alpha} - \log \left( 1 + \frac{u}{\alpha} \right) + \frac{\dot{y}^2}{2} \right\}^\alpha e^{-u} du$$

Fig. 2, Fig. 3 にそれぞれ変位確率密度曲線・速度確率密度曲線を種々の $\alpha$ について表した。比較の為、変位確率密度・速度確率密度曲線ともにガウス分布曲線をプロットし、また以下の変数変換を行っている。

$$p(u) = \sigma_y p(y), \quad p(v) = \sigma_{\dot{y}} p(\dot{y}) \quad \dots\dots\dots(8)$$

但し、 $u = y/\sigma_y$      $v = \dot{y}/\sigma_{\dot{y}}$

$\sigma_y, \sigma_{\dot{y}}$  : 応答変位・速度の偏差値

Fig. 2 より、 $\alpha$ が大なるにつれ、曲線の減衰性が顕著になっている。また、 $\alpha$ が入力の逆数であることを考慮すれば、 $\alpha=50$ の曲線は微小振動であることがわかるが、その場合においても、ガウス分布とは全然異なっていることがわかる（むしろ $\alpha=5\sim10$ の方と類似しているように見える）。Fig. 3 の分布状況は、 $\alpha$ が小なるにつれ、ガウス分布に漸近していることがわかる。これらのことより、変位応答は、速度応答の非線形性の影響を受けており、もはや微小振動であっても、線形と仮定することに矛盾が生じていることが理解できる。逆に入力が大なるにつれ、エネルギーEの速度項の影響が変位の非線形項より相対的に大きくなり、徐々に非線形剛性・線形減衰の形に漸近していくといえよう。

Table.1 に、種々の $\alpha$ の場合の応答変位・速度の偏差値 $\sigma_y, \sigma_{\dot{y}}$ を掲げる。合わせて、ガウス分布の偏差値 $\sigma_G$ も掲げている。Fig. 4 には、比較の為、非線形剛性・線形減衰型の応答変位の偏差値 $\sigma$ もプロットしている。Table. 1, Fig. 4 により、 $\alpha$ が小なるにつれ、 $\sigma_{\dot{y}} \rightarrow \sigma_G$ となっており、又、 $\sigma_y \rightarrow \sigma$ でもあり、上述の議論の正当性を裏づけている。又、いずれの場合においても、 $\sigma_y > \sigma > \sigma_G$ となっていることがわかる。このことは、系の応答をガウス過程と考えることの危険性を示唆しているといえよう。

○ ピーク確率密度

系の応答の高い基準のピーク分布は、次式が安全側の評価として Powell により提案されている<sup>5)</sup>。

$$p(x) = -\frac{d}{dx} \left( \int_0^\infty \dot{y} p(x, \dot{y}) d\dot{y} \right) / \int_0^\infty \dot{y} p(0, \dot{y}) d\dot{y} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここに  $x$  : ピーク変位

(9)式に(5)式を代入し、(10)式が求まる。

$$p(x) = \alpha x (1+x)^{\alpha-1} e^{-\alpha x} I_v(x) / I \quad \dots\dots\dots(10)$$

但し、 $I_v(x) = \int_0^\infty \left\{ x - \log(1+x) + \frac{v}{\alpha} \right\} \left\{ 1 + x - \log(1+x) + \frac{v}{\alpha} \right\}^{\alpha-1} e^{-v} dv$

$$I = \int_0^\infty \left( 1 + \frac{v}{\alpha} \right)^\alpha e^{-v} dv$$

前項と同様に、 $u = x/\sigma_x$  の変数変換を行い、プロットしたものを Fig. 5 に示す。参考の為レイリー分布もプロットしている。Table. 2 に、ピークの平均値 $\mu$ 、偏差値 $\sigma_x$ を掲げた(レイリー分布の平均値 $\mu_R$ 、偏差値 $\sigma_R$ も掲げている)。Fig. 6 は、ピーク平均値 $\mu$ の値の、Fig. 7 は、偏差値 $\sigma$ の種々の $\alpha$ についての図である。また、比較の為、非線形剛性・線形減衰型の $\mu, \sigma$ をもプロットしている。

Fig. 5 より、もはや入力が微小であっても、レイリー分布に漸近しないことがわかる。これは、Table. 2, Fig. 6・7 よりも明らかである。また、Fig. 6・7 の $\alpha=0.1$ の場合の平均値・偏差値が、非線形剛性・

Table. 2. The response statistics for the peak displacement, for various values of  $\alpha$

$\alpha$	0.1	1	5	10	50
$\mu$	13.2	2.70	1.25	0.95	0.55
$\mu_R$	3.96	1.25	0.56	0.40	0.18
$\sigma$	11.2	1.76	0.69	0.50	0.27
$\sigma_R$	3.16	1	0.45	0.32	0.14

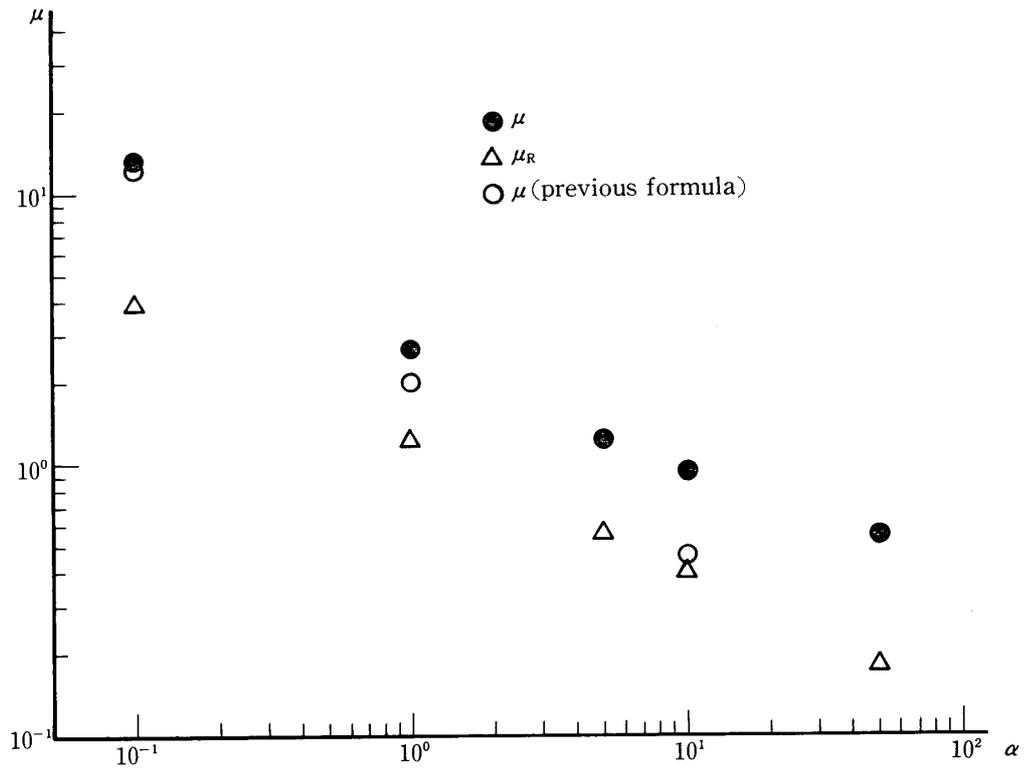


Fig. 6. The mean values  $\mu$  for the peak displacement, for various values of  $\alpha$

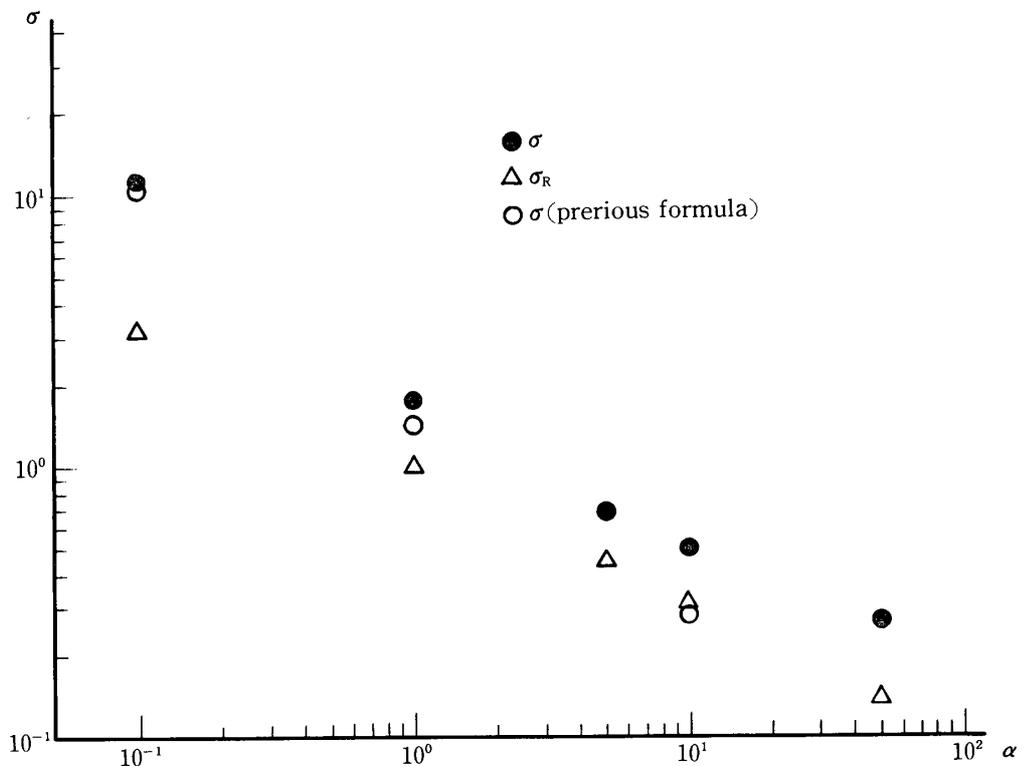


Fig. 7. The deviation values  $\sigma$  for the peak displacement, for various values of  $\alpha$

線形減衰型のそれぞれの値とほぼ等しいことも、前項の漸近性と同一である。

## 結 論

以上の結果より、以下のことが結論づけられる。

i) 土質材料の復元力関数に、非線形剛性・非線形減衰を表わす型を用いて、パラメータ $\alpha$ により、種々の応答変位・速度確率密度曲線を求めることができる。ここに、剛性力は変位依存型、減衰力はエネルギー依存型である。

ii) 変位と速度応答は、もはや独立でないので、入力が微小であっても、変位応答はガウス性を満たさない。逆に、入力が大なるにつれ、速度応答はガウス分布に漸近し、非線形剛性・線形減衰型に近づいてゆく。

iii) 変位応答・速度応答とも、偏差値はガウス分布より大である。これは、ピーク変位分布に、より顕著に表われる。

## 謝 辞

本研究の計算は、岐阜大学情報センターの FACOM-M 360 システムを使用した。センターの辻喜久夫、松田章技官に謝意を表す。また本研究の遂行にあたり、岐阜大学農学部仲野良紀教授、同嶋崎藤雄助教授、京都大学農学部長谷川高士教授には多大のご援助を頂いた。ここに深謝の意を表します。

## 文 献

- 1) Caughey, T.K.: Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation. J. Acoust. Soc. Am. **35** : 1683-1692, 1963.
- 2) 清水英良：土質材料の材料非線形不規則振動における確率密度関数の適用。岐阜農研報 (49) : 315-323, 1984.
- 3) Hardin, et al. : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equations and Curves. J. Soil Mech. Found. Div. (98) : 667-692, 1972.
- 4) Y. K. リン：“構造動力学の確率論的方法” 東京：培風館254-256, 1972.
- 5) Powell, A. : On the Fatigue Failure of Structures Due to Vibrations Excited by Random Pressure Fields, J. Acoust. Soc. Am. **30** : 1130, 1958.