講　座

地盤工学における逆解析

5. 逆解析における事前情報とモデルの選択（その1）

本　城　勇　介（ほんじょう　ゆうすけ）
岐阜大学助教授　工学部土木工学科

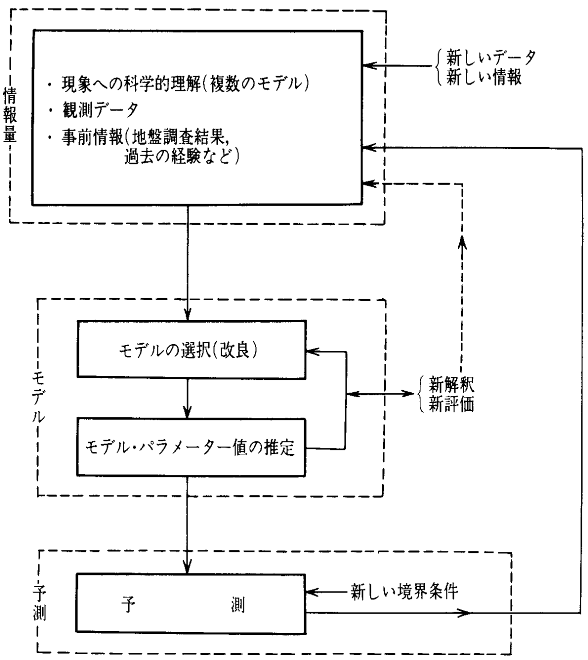
5.1 はじめに

3章と4章では逆解析におけるパラメーター推定の問題を解説してきた。逆解析とは，設定されたモデルのパラメーター値を推定する事と同義であると理解されている読者も多いかもしれないが，それは逆問題の重要な部分の一つであるものの，そのすべてではない。

本章で意味する逆解析の手順を概念的に示したのが図―5.1である。逆解析ではまず，今解析しようとしている対象構造物についての科学的な現象理解を持っていることが前提である。それは，現象の本質を単純化した幾つかの基本的なモデルという形で表現されているのが普通である。これに加えて，挙動観測データと，直接的な観測データ以外のいろいろな情報（例えば事前の地盤調査結果や，過去の類似構造物についての経験等）が存在している。

次に対象構造物を解析するためのモデルを設定し，その上でこのモデルのパラメーター値を先に3章と4章で解説してきた種々の手法で推定し，この中でモデルの選択，改良等も行うことになる。このプロセスでデータの示している現象の新しい解釈，評価に気付き，現象のより深い解明につながって行くことも多い。

最後に，将来に考えられる現在とは異なる境界条件下での，当該構造物の挙動を予測する。なお，以上の全体が循環的なプロセスであることに注意を要する。



図―5.1　逆解析の手順と概念

以上のように逆解析をとらえたとき，図―5.1にも示すように，「情報量」，「モデル」，「予測」という三つのキーワードにより，問題を説明すると便利である（ここで「情報量」とは，入手可能な情報の質と量両方を含む）。本章の前半部分の結論は，3.2節で説明された最尤法をベースとした逆解析における適切なモデルの選択に関する問題で，次のように要約することができる。「情報量」が大きいとき，より複雑な「モデル」を選択することができ，したがって，より精度の高い「予測」をすることができる。一方，「情報量」が小さいとき，簡便な「モデル」しか選択することはできず，したがって「予測」の精度も限定されたものとなる。すなわち「情報量」に応じて，「予測」のために最適な「モデル」が存在すると考えられ，これを選択する枠組みを提供するのが赤池により提案されてきた，情報量統計学であり，そこで確立されたAIC（赤池の情報量規準）である。

本章の後半では，3.3節で解説されたベーズ法による逆解析の問題が，トピックである。ここではまず地盤工学における逆解析では，多くの場合最尤法による定式化では解を得るのが難しいことを述べる。これは，一般的に観測データが求めようとするモデル・パラメーターの数に比べ不足している場合が多いこと，また観測データに多くの場合ある種の偏りが存在するためである。この問題は，逆解析の不適切性（ill-posedness, ill-conditioned）あるいはデータの共線性の問題と言われ，逆解析を成功させる上で最も重要な問題の一つであるが，対処が非常に難しいことで知られている。

この問題の克服のためには，解の安定化をはかるために事前情報の利用が不可欠であり，ここにベーズ法による逆解析の必要性がある。しかし，ここで出会う大きな問題は，観測データと事前情報が異なる種類の情報であり，一般的なベーズ法で行われるように単純にこの2種類の情報を重ね合わせるだけでは，有効な逆解析を行うことができないということである。情報量統計学では，最尤法でモデル選択の方法を導いたのと同様の概念を，ベーズ法における事前分布の選択の問題に適用することを提案しており，この手法を逆解析にも適用することができる。このように事前分布と観測データ分布の相対的な重要度を調整する方法は，拡張ベーズ法と呼ばれることがある。さらに，最尤法の場合と同様に，異なるモデル間での最適なモデル選択の問題にも，この手法は用いることができる。本章後半では以上のような点を，簡単な例題も交えながら解説する。

最後に，逆解析においてモデル選択が重要な問題であること，また不適切性（あるいは，共線性）がその有効

な実施のために不可避の問題であることは，一般的な認識であるが，その解決に情報量統計学が有効であると言う立場は著者のものであり，必ずしも一般的ではないことをお断りしておく。

5.2 最尤法におけるモデル選択

5.2.1　情報量とモデル選択

地盤工学で取り扱われる材料は，複雑な挙動を示す。材料の構成則に高い非線形性や履歴依存性があり，また幾何学的な非線形性を考慮しなければならない大変形問題も頻繁に存在する。そのうえ地盤は人工材料ではないので，顕著な不均質性がある。さらにこれを限られた地盤調査結果から特定することは，はなはだ困難であると考えられる。このような複雑な現象を対象とする地盤工学では，対象地盤の単純化された，しかし本質的な挙動をとらえ得るような「モデル」によりその挙動を記述し，地盤の将来の挙動予測に役立てている。換言すれば将来の対象地盤の挙動予測が，我々の最終的な目的であり，「モデル」はそのための手段である。なおここで「モデル」と言うとき，それは単に材料のモデル（例えば構成則）だけを指すのではなく，対象地盤の解析対象範囲や層区分の決定，さらに境界条件の選択など，挙動予測のためのモデル化のすべての側面を含むものとする。

このように「モデル」を考えるとき，これは複雑な対象地盤の挙動を記述し，与えられた「情報」を基に「予測」を行うために設けられた便宜的，人工的な装置であると理解される（**図—5.1**参照)。

このように3者の関係をとらえるとき，この3者の間に次のような常識的な関係が存在することは容易に理解されよう。すなわち，より正確で詳細な「予測」を行うためには，より複雑なモデルの導入が必要であり，それは結果的により大きな「情報量」を必要とする。逆に，大まかな「予測」しか要求されないときは，選択される「モデル」も簡便なものとなり，必要な「情報量」も小さい。**例題—5.1**は理解の助けとなると思われる。

例題—5.1a

岩盤上に堆積した密な砂質地盤上に，隣接する建築物のある敷地に，低層の建物を直接基礎を用いて建設する。このとき，1本のボーリングによりN値の深度方向の分布と砂質地盤層厚を確認し，砂質地盤を弾性体と仮定して，ヤング係数をN値より推定し，沈下計算を行い，隣接構造物への影響を考慮して基礎の設計を行う。

例題—5.1b

正規圧密粘土よりなる軟弱地盤上に，高さ4mの盛土を行う。隣接した構造物への影響を検討するため，数本のボーリングにより軟弱地盤層厚を調査するとともに，数個の試料を取り圧密試験や非排水三軸圧縮（$\overline{\mathrm{CU}}$試験）を行い，弾塑性モデルのパラメーター値等を求め，有限要素法により圧密・変形量を計算する。

例題—5.1aは，対象としている地盤の性質上，精度の高い予測が必要とは考えられない場合で，必要とする情報量も小さく，採用されたモデルも簡便なものであるケースである。一方，**例題—5.1b**は，高い精度の予測が要求される場合であり，大きな情報量と，複雑な予測モデルを必要とする場合である。

以上のような地盤工学における常識的な考え方は，逆解析の場合にも全く同じように当てはまる。しかし，逆解析の性質上その表現は逆方向をとる。逆解析では次のように言うことができるであろう。

情報量が大きいとき，より複雑なモデルを選択することができ，したがってより精度の高い予測をすることができる。一方，情報量が小さいとき，簡便なモデルしか選択することはできず，したがって予測の精度も制限されたものとなる。これは一方では，情報量が小さいときは，いたずらに複雑なモデルを選択し逆解析を行ったとしても，信頼性の高いモデル・パラメーター値を推定することはできず，したがって予測の精度をかえって落としてしまうことを意味している。すなわち情報量に応じて，最適なモデルが存在するはずである。以上のような極めて常識的な発想に立ち統計学を体系付けているのが，赤池弘次らにより1970年代初頭より提案されてきた，「情報量統計学」である[1)~3)]。

5.2.2　AIC（赤池情報量規準）

数理統計学の目的は，「観測されたデータに基づいて，不確実な現象の特性を確率によって表現し，将来の観測値の確率分布を推定し，予測や制御に資する」ことにあると考えられる。この目的を果たすためには，「1）データの特性を表現する確率分布（統計モデル）を，現実に生じるさまざまな分析目的に応じて的確に構成すること，2）考え得るいくつかのモデルの良さを評価・比較しうる規準を提示すること。」が必要である（以上引用は坂元ほか[4)]）。従来の統計学では，特に2）の点を扱うのに仮説検定の考え方を用いてきた。重回帰分析の説明変数の取捨選択で，F検定が用いられる場合等が典型である。赤池らは，従来の統計学が特に想定される数多くのモデルの評価・比較にあまりにも無力であるとして，モデルの評価の基準として赤池情報量規準（AIC, Akaike Information Criterion）を提案し，この問題の解決を試みた。さらに赤池らは，重回帰分析，分散分析等の統計学で扱う典型的な問題を，モデル構成と情報量による評価という一貫した視点から再構成し，これを「情報量統計学」として世に問うたのである。

AICを**3**章で説明された最尤法に即した形で書くと次式のようになる。

$$\mathrm{AIC} = -2\times\text{最大対数尤度}+2\times\text{パラメーター数} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，最大対数尤度とは，**3.2**節(8)式で求められた最大尤度の自然対数をとった値であり，パラメーター数は，当該モデルに導入された推定を要するモデル・パラメーターの数である。

AICは，与えられたデータの基で，考え得る幾つかのモデルの真のモデルへの近さを測定する相対的な尺度であり，AICの小さいモデルほど好ましいと判断される。その導出は文献[1)~4)]に譲り，ここではAICの実際

的な意味について少し説明しておきたい。

(1)式の第1項は，尤度の定義式3.2節の(8)式からもわかるように，モデルのデータへの当てはまりの良さを表す。一般に，パラメーター数の多いモデルは自由度が高いので，モデルのデータへの当てはまりは改善され複雑なモデルほど第1項は小さくなる。

一方，第2項はモデルを複雑化し，パラメーター数を増すことに対するペナルティーとして働く。AICが小さいほど，与えられたデータに対し好ましいモデルと判定されるので，第1項によるデータのモデルへの当てはまりの良さが，第2項で評価されるモデルの複雑化に伴うペナルティーを越えてAIC全体を減少させない限り，それ以上のモデルの複雑化は行うべきでないと判定されることになる。このことは，理論構成にあたり，最小限の仮定を用いるべきであるという「ケチの原理（Principle of parsimony）」の一つの具体化であるとみなすことができる[1]。

AICの統計学的な側面をより明確に説明するため，以下に簡単な例題を挙げる。

例題—5.2（文献4）pp. 128～138）

図—5.2(a)に示しているのは，ある現象に関する11個の観測データzである。この観測値は，ただ一つの説明変数hについて観測され，今zをhの多項式としてモデル化しようとしている。この多項式の次数はまだ決定されておらず，導入されるパラメーターxの数Nに応じて，より高次元の複雑なモデルを選択することができる。このモデルは，

$$\mathrm{MODEL}(n): z=\sum_{i=0}^{N} x_i h^i \quad (n=1, \cdots N) \quad \cdots\cdots(2)$$

と書くことができる。

ところで先に示した観測データは，実は**図—5.2(b)**で示すように，あるhの二次多項式を用いてそれぞれのhの値に対応するzの値を計算し，これに平均0，分散0.01の正規乱数を加えて作成したものであった。すなわち，この二次多項式がこの場合本質的な現象を表し，乱数はこれに伴うノイズ（雑音）を表現している。

一方**図—5.2(c)**に，(2)式の多項式を用いて回帰モデルを作成した場合の結果を示している。多項式の次数が上がり，モデルに自由度が出るほど観測データと，モデルによる計算値との残差は減少し，一見モデルは改善されているように見える（**表—5.1**の残差分散も参照）。事実，この場合11個の観測データがあるので，多項式の次数を10まで上げれば，曲線はすべての観測値を通過し，残差を0にすることができる。しかし，モデルの本来の目的が予測であって，現在観測されているデータへの当てはまりの良さではないことを思い起こし，この結果を少し注意して眺めれば，このような高次のモデルは決して好ましいものではないことが理解できる。すなわち，高次のモデルでは予測値がノイズに影響されて必要以上に変動し，不安定である。

この場合のAICを計算すると，**表—5.1**にあるように次数2のときに最小値をとり，このデータに対しては用意したモデルの中では二次式が最も好ましいモデルと判断された。

表—5.1　例題—5.2の多項式モデルの残差分散とAIC

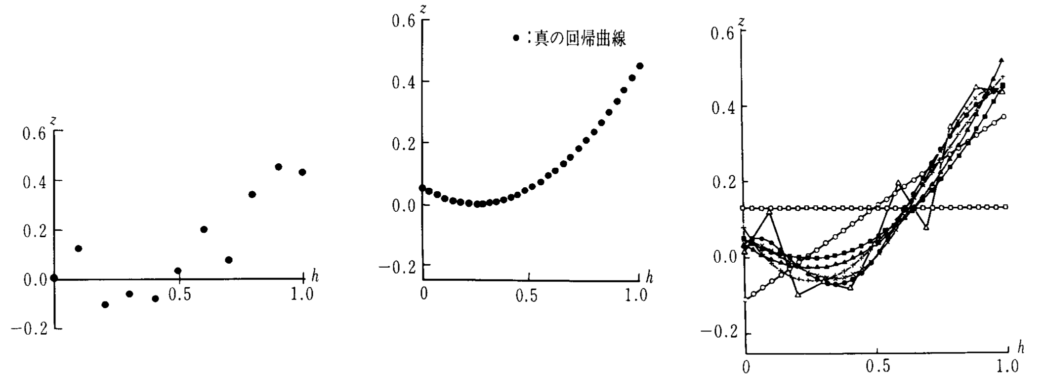
次数	自由パラメーター数	残差分散	AIC
0	2	0.03635	−1.24
1	3	0.01329	−10.31
2	4	0.00592	−17.21
3	5	0.00514	−16.76
4	6	0.00439	−16.51
5	7	0.00423	−14.91

5.2.3　AICの逆解析への利用

以上述べてきたように，AICは逆解析においてもモデル選択を行う上で有効な道具になることが予想されるのであるが，その適用例は意外と少ない。地下水の解析問題で，CarreraとNeuman（カッレラとノイマン）[5]や大西と井尻[6]が，解析対象区域を幾つかの異なる透水量係数を持つゾーンに分け，AICを用いて最も好ましいゾーン分割を選択するのに用いた程度である。

この理由はおそらく，地盤工学における多くの逆解析では，最尤法を用いて解析すると解の安定性や唯一性に問題のある場合が多く，この種の問題の解決に追われてモデルの選択まで考慮する段階に達していないということが考えられる。事実，次節の「ベーズ法におけるモデル選択」の冒頭で述べるように，地盤工学の逆解析の問題では得られるデータの量や質が不十分で，何らかの事前情報により解の安定を計る必要のある場合がほとんどである。

事前情報を考慮する逆解析は，先に3章でも述べたようにベーズ法により定式化することができる。ベーズ法に対しても赤池らの提案している情報量統計学は有効であり，この場合はモデルの選択と同時に適切な事前分布の選択も大きな課題となってくるのである。



(a) 生データのプロット　(b) 真のモデル　(c) 各次元の多項式回帰モデルの回帰結果

図—5.2　例題—5.2 AICの説明

実は逆解析に情報量統計学が有効なのは，特にベーズ法により問題が定式化された場合であり，次にこの場合について述べることにする。

5.3 ベーズ法における事前情報とモデルの選択

5.3.1 事前情報導入の必要性

この節では，まず地盤工学における逆解析の多くの問題において，なぜ事前情報を導入し，ベーズ法により定式化を行う必要があるかを述べる。その説明のための例題として，ここでは弾性波ジオトモグラフィーの問題を取り上げることにする。この問題はほかの地盤工学の問題のように複雑な力学モデルを介した逆解析の問題ではないので，この講座の読者には例題として適切な問題ではないという印象を与えるかもしれないが，これから説明しようとする問題点を明確にするには極めて都合のよい例題なのである。

弾性波ジオトモグラフィーでは，**図—5.3(a)**に示すように，例えば2本のボーリング孔間で非常にたくさんの測線について最早到達時間を測定する。その上で**図—5.3(b)**のように対象地盤を多数のセルに区切り，それぞれのセルの地盤物性値（この場合は弾性波伝播速度の逆数）を，測定された値を最もうまく説明できるように調整することにより，地盤の物性値分布を推定するのである。

これを式で書くと次のようになる。まず，観測方程式は：

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Hx}+\boldsymbol{\varepsilon} \quad\cdots\cdots(3)$$

ここに，$\boldsymbol{z}$：測定値（最早到達時間）ベクトル

$\boldsymbol{x}$：物性値（伝播速度の逆数）ベクトル

$\boldsymbol{\varepsilon}$：誤差ベクトル

$\boldsymbol{H}$：観測行列。

観測行列の要素 H_{ij} は，第 i 測線の第 j セルについての切片の長さを示す（**図—5.3(b)**）。

3.2節で述べた最尤法の手続きに従い解を求めると，それは，次の関数を最小化することに帰着する：

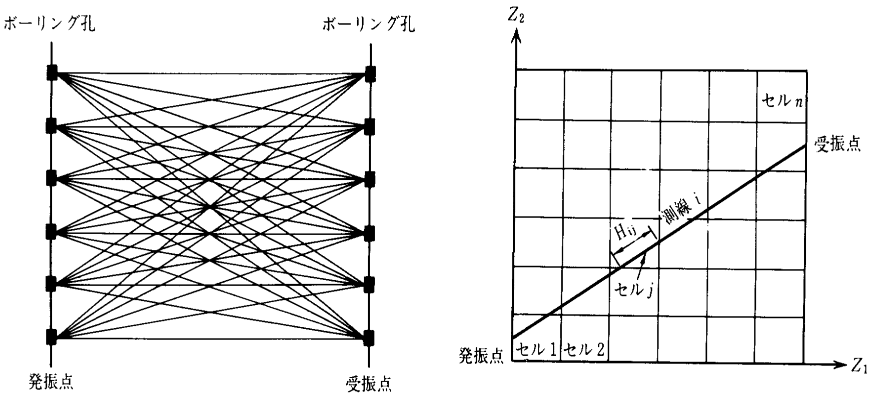
$$J_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Hx})^T\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Hx}) \quad\cdots\cdots(4)$$

この解は，**3.2**節(4)式により解析的に求められ：

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \quad\cdots\cdots(5)$$

ここで行列 $\boldsymbol{R}$ は誤差 $\boldsymbol{\epsilon}$ の分散・共分散行列である。このようにして極めて簡単に観測データより物性値分布を推定することができる。

一見簡単そうに見えるこの方法も，実は落とし穴があ



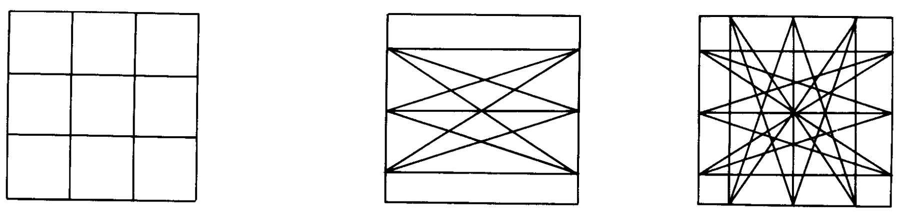
(a) 計測法概念図　　(b) 解析法概念図

図—5.3 ジオトモグラフィーの概念

表—5.2 **例題—5.3** ジオトモグラフィーの固有値分解結果

	$\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_2}$	$\sqrt{\lambda_3}$	$\sqrt{\lambda_4}$	$\sqrt{\lambda_5}$	$\sqrt{\lambda_6}$	$\sqrt{\lambda_7}$	$\sqrt{\lambda_8}$	$\sqrt{\lambda_9}$
2面	3.65	2.15	1.82	1.81	1.73	1.15	6.09×10^{-3}	4.63×10^{-3}	1.04×10^{-16}
4面	5.06	2.58	2.16	2.16	2.01	1.82	1.82	1.80	1.61

(a) セル分割図　　(b) 測線配置図(2方向および4方向)



2方向配置　　4方向配置

図—5.4 **例題—5.3**（ジオトモグラフィー）

る。(5)式の計算で，($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) 行列の逆行列を計算する必要が生じるが，これが観測データの性質により必ずしもうまく計算できるとは限らない。それは，この行列のランクが見かけの次元数（パラメーターの数と一致）より小さくなることにより生じる。このような ($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) 行列の性質を調べる最も一般的な方法は，この行列を固有値分解し，その最大の固有値と最小の固有値の比の平方根によって，その行列の性質の良さ（あるいは悪さ）を示す方法で，この比は条件数として知られている。言うまでもなく条件数が小さいほど行列の性質はよく，逆解析において安定した推定値が得られる。次にこの具体的な計算例を示そう。

例題—5.3

図—5.4(a)に示すように，9個のセルより成る地盤を考える。今これを**図—5.4(b)**に示すように，それぞれ2方向，4方向に計器を配置し，それぞれ図に示すような測線をとり，観測データが得られたとする。このときの ($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) 行列の固有値を計算すると，**表—5.2**のようになる。ここで行列 $\boldsymbol{R}$ は簡単のため単位行列であると仮定している。特に2方向にしか計器を配置できない場合の最小固有値は1.54×10^{-16}であり，これは固有値が実際はゼロであり（条件数は無限大であると言える），逆行列を求めることはできないことを意味している。

2方向にしか計器を配置できない場合の，パラメーター推定の困難の実際的な意味は，明らかであろう。それは，求められる計測値が常に横方向に並ぶセルの性質の総計であり，そのようなデータからだけでは，横方向に並ぶセルの性質を個々に分離し推定することはできないことを意味している。したがって4方向配置の場合は問題なく推定を行うことができ，固有値の桁数もそろっている。ちなみに，4方向の場合の条件数は5.4であり，極めて良好である。

($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) 行列の条件数が高い場合，例え計算上は逆行列を求めることができたとしても，計測値に誤差が含まれているとき，推定の信頼性が著しく低下することが知られている。実際，計測誤差のパラメーター推定時の推定誤差への拡大は，条件数に比例することが知られている（例えば，中川・小柳[7] pp. 60～61 参照)。

このような観測行列の性質が悪いために生じるパラメーター推定の困難は，統計学ではデータの共線性の問題として知られており，対処することは非常に難しい問題とされている（これは，逆解析で不適切性と言われる問題と全く同じである[8])。もちろん，共線性を改善するような新たなデータが追加されれば問題は解決される。これは，弾性波トモグラフィーの問題では，新たに異なる方向に計器を配置し観測を追加することを意味する。しかし，ジオトモグラフィーの例からも分かるように，データが共線性を持つのは経済性など何らかの理由で，そのような計測しか行うことができない場合がほとんどであると考えられるから，データを加える以外の対処法が必要となる。

データに共線性がある場合の種々の対処の方法は，チャヤタジー・プライス[9]等に詳しく述べられているが，何らかの意味で事前情報を用い解の安定化を計ることが最も一般的であり，ここにベーズ法の必要性がある。

事前情報を用いると共線性を避けることのできる理由は，先に**3.3**節で説明されたベーズ法の定式化を用いて，簡単に説明することができる。ベーズ法では**3.3**節(39)式で与えられる評価関数を最小化することにより $\boldsymbol{x}$ を推定することができる：

$$J_2=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}x)\} \quad\cdots\cdots(6)$$

この式の第1項が事前情報を表し，$\boldsymbol{x}$ が平均値 $\boldsymbol{x}$，分散・共分散行列 $\boldsymbol{M}$ の事前分布で与えられることが分かる。この式を最小にする $\boldsymbol{x}$ は，**3.3**節(42)と(43)式で与えられており，次のようになる：

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{M}^{-1}+\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{x}}) \quad\cdots\cdots(7)$$

この式から分かるようにベーズ法で逆行列を計算する必要のある行列は ($\boldsymbol{M}^{-1}+\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) であり，最尤法で逆行列を求めた ($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) と若干異なっている。すなわちベーズ法では最尤法で逆行列を求めた行列に $\boldsymbol{M}^{-1}$ を加えた後，逆行列を計算するのである。ところで $\boldsymbol{M}$ は，事前分布の分散・共分散行列であり，これは対角要素が大きい行列であり，この行列を加えることにより ($\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}$) の性質を改善し，逆行列の計算を安定化することができるのである。以上が事前情報を付加することにより，推定値が安定する数理的な理由である。しかしベーズ法を用いることにも種々の問題があるが，この点は次節の説明に譲る。

最後に，地盤工学の逆解析の問題では共線性（すなわち不適切性）が発生することが極めて一般的であることを指摘しておきたい。これは，地盤工学の問題では，構造物のスケール，地盤の不均質性の度合い，モデルの複雑さ等に比較して，計測の数が少なく，また限定された位置でしか計測が行えないこと，観測中の構造物への外乱が極めて単調で限定されたものである場合がほとんどである等多くの原因によっている。実際個々の問題で条件数を計算してみると，極めて大きな値になることが多い（例えば，Honjo ほか[10)~12)]等を参照)。本講座**9**章の「構造物基礎」では，実際の杭の載荷試験データの解析で，共線性の例が詳しく説明される。

5.3.2　事前情報導入の問題点と赤池ベーズ情報量規準（ABIC）

前節で，地盤工学の逆解析では多くの場合データの共線性（不適切性）が避けて通ることのできない問題であり，この問題を解決するためには何らかの意味で事前情報の導入が不可欠であること，さらに事前情報を考慮した逆解析はベーズ法を用いて定式化できることを述べた。

ところで最尤法に代表されるように，データのみを客観的な材料と考え，これをのみ解析の対象と考える伝統

的な統計学と，事前分布を事象に対する主観的な確信の度合いと考え，データはこれを更新して行く材料であると考えるベーズ統計学の間には，周知のように歴史的な対立がある。前者は，統計学はデータのみに立脚し，これを解析する科学であることを主張し，後者は我々が事象について持っている知識は，現在与えられたデータに限られたものではなく，経験など多くの情報の総体であるから，これをも統計解析に持ち込むべきであると主張してきた[13),14)]。

逆解析の分野でも，事前情報の構成を巡っては，議論がある[15)]。それは，逆解析の場合たとえ個々のパラメーター値についてそのおおよその値が分かっており，それを事前情報として用いるとしても，その確信の度合い（具体的には $\boldsymbol{x}$ の事前分散・共分散行列 $\boldsymbol{M}$ ）を観測データ分布の分散・共分散 $\boldsymbol{R}$ の大きさとのかね合いで，どのように決定したらよいかという問題である。容易に想像されるように，事前分布と観測データというのは全く異種の情報であり，その相対的な重み付けを合理的に行うことは非常に難しい。

地下水の逆解析で多くの実績を上げている Neuman は，早くも1979年にこの問題を認識し，彼が「拡張ベーズ法」と名付けた**3.3**節の(55)式により，逆解析を行うことを提案した[15)]：

$$J_3=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Hx})^T\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Hx})\} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

ここに $\boldsymbol{\alpha}$ は正のスカラー値で，この値により二つの情報の間の重み付けを調整するのである。Neuman らは，このスカラー値の導入を次のように説明している。

「この方法（拡張ベーズ法のこと）は，また事前統計量が実際の現場のデータから，あるいはほかの帯水層から類推されたものであれ，それらが決してそのまま直接に逆解析に用いることを正当化できるほど正確に決めることはできないという，憂鬱な事実を認識している。この理由のため，事前分散・共分散行列を完全に決定して解析に持ち込むことはせず，そのスカラー倍を用いることにするのである。」（Neuman and Yakowits[15)] より引用）

スカラー値 $\boldsymbol{\alpha}$ の決定方法について，このとき Neuman らは，cross-veridation 法を用いることを提案したが，当時の計算機の能力では実際に計算を行うことはできなかったので，計算例は示されなかった。後に Carrera と Neuman[5)] は，最尤法を拡張して(8)式を直接最小化することにより，$\boldsymbol{x}$ のベーズ推定値と $\boldsymbol{\alpha}$ を同時に推定する方法を提案しているが，この評価関数が有限の $\boldsymbol{\alpha}$ について最小値をとるという保証はなく，この方法は適当でないと思われる（Honjo ほか[11),12)] 参照）。

ところで，このスカラー量 $\boldsymbol{\alpha}$ を決定するのに赤池が提案している，ABIC（赤池ベーズ情報量規準）を用いることができる。ABIC の詳しい導出は文献に譲るが，それは全く AIC を導出したのと同じロジックを用いている。赤池は ABIC を導くことにより，事前分布の選択に客観的な根拠を与え，伝統的な統計学とベーズ統計学を統一的に扱うことの可能性を示唆している[13),16)]。また，ABIC は，幾つかの代替的なモデルが用意されている場合，それらの中から最適のものを選ぶための指標として，AIC と同様に用いることができる。付録には観測方程式が線形の場合の，ABIC の計算方法を示したので，参照されたい。

なお，拡張ベーズ法は，Tikhonov（チホノフ）の適切化法[8)] と類似しており，ABIC は適切化パラメーターの一決定法を提案していると考えることもできると思われる。

（次号に続く）