

講座

地盤工学における逆解析

5. 逆解析における事前情報とモデルの選択 (その2)

本城 勇介 (ほんじょう ゆうすけ)
 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

- 5.1 はじめに
- 5.2 最尤法におけるモデル選択
- 5.3 ベイズ法におけるモデル選択
 - 5.3.1 事前情報導入の必要性
 - 5.3.2 事前情報導入の問題点と赤池ベイズ情報量基準 (ABIC)
 - 5.3.3 例題

この節では ABIC を用いて行った、事前分布とモデルの選択の例を二つの例題を通じて示す。

例題—5.4

先に例題—5.3で示したジオトモグラフィの問題が ABIC の利用により、どの様に解決されるかをまず示す(17)。図—5.5に示す四つのパターンに分布した材料特性を、図—5.6に示す2方向からの投射により推定する問題を考える。この問題の観測方程式は、先に(3)式に示したものである。

この問題では事前情報を、次に示すような平滑化フィルターの形で与える。すなわち、近接するセルはより近い物性値を持つと考えられるので、次式のような制約を加えることにより、推定値の安定化を計るのである。

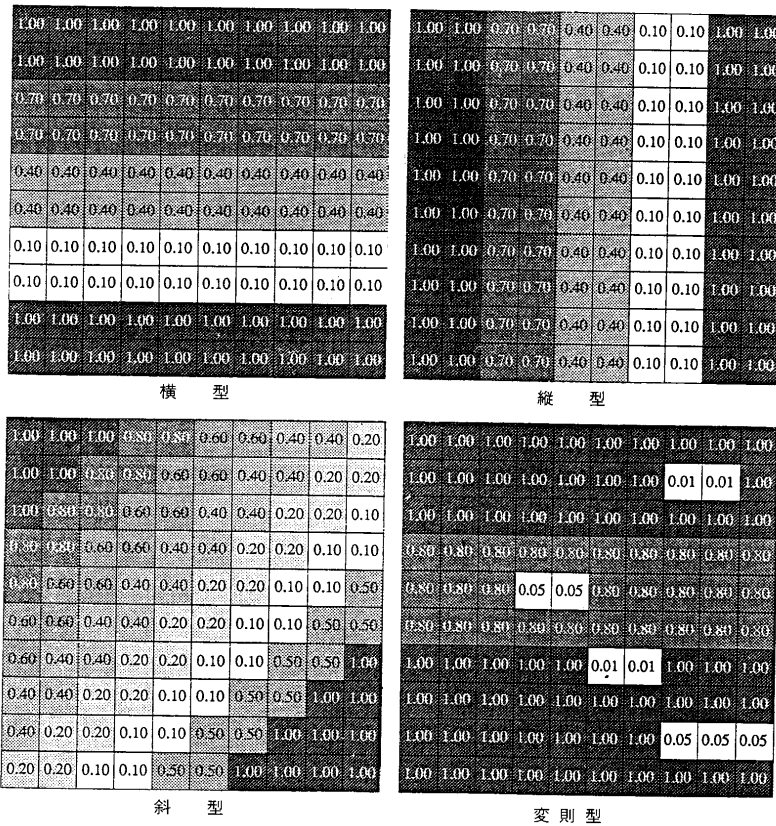
$$x_{ij} = \beta_v(x_{i+1j} + x_{i-1j}) + \beta_h(x_{ij+1} + x_{ij-1}) + \delta_{ij} \dots (9)$$

ここに、

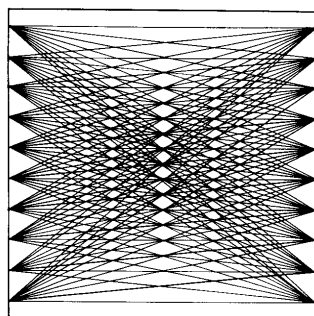
$$\beta_h + \beta_v = 0.5, \beta_h > 0, \beta_v > 0$$

$$\delta_{ij} \sim i.i.d. N(0, \sigma_\delta^2) \dots (10)$$

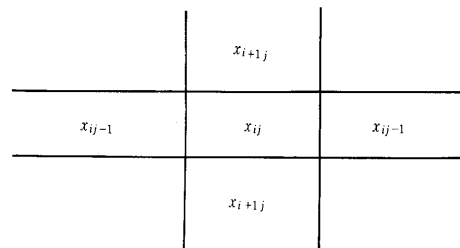
これは図—5.7に示すように、あるセルの物性値はそれを囲む四つのセルの物性値の平均値に等しいと言う制約を示している。 β_v と β_h は、この平均を取るときに異方性を考慮するための重みで、物性値の相関性の高い方向に大きな重みが付くように操作することができる。また δ_{ij} はこの平滑化フィルターの強度を調整するための確率変数で、その平均は0、分散は σ_δ^2 の正規分布で与えられる。このフィルターを与えられた観測データとのかね合いで、どの程度強く作用させるかが問題となる。すなわち、 α は σ_δ^2 と観測方程式の誤差分散 σ_e^2 との比によって与えられ、この決定が問題となる。さらに



図—5.5 例題—5.4 真の地盤特性値分布



図—5.6 例題—5.4 投影測線図



$$x_{ij} = \beta_v(x_{i-1j} + x_{i+1j}) + \beta_h(x_{ij-1} + x_{ij+1}) + \delta_{ij}$$

図—5.7 例題—5.4 平滑化フィルターの概念図

講 座

β_v と β_h は、それらの値の組み合わせにより異なるモデルを与えることになるので、この最適の値を決定することにより、最適のモデルが選択されなければならない。

(10)式に示したモデルより、事前分布は x に関する多変量正規分布として書くことができ、これを付録に示すように計算することにより、ABIC を求めることができる(詳細は Honjo and Kashiwagi¹⁷⁾ 参照)。

結果は図-5.8に示されている。この例題は、実データではないので、真値が知られている。そこでこの真値と推定値の間の隔たりを計算することができ、それら2者の差の絶対値の和をL1で、二乗値の和をL2で示し、各 α と β_v (あるいは β_h) の組み合わせに対してABICと

ともに表示してある。したがって、L1やL2が最も減少する α と β_v (あるいは β_h) の組み合わせが、最良のモデルで最適の事前分布(平滑化フィルター)強度を持った場合であり、このときにABICも最小値を示せば、ABICは最適のモデルと事前情報を選ぶ規準として適当であると言える。言うまでもないことであるが、真値の知られていない実際のデータの場合は、ABICは計算できるが、L1やL2は計算できない。

図-5.8(a)は、図-5.6の「Row Pattern (横型)」の場合であり、このときABICの最小値は計算された組み合わせの中では、 $\alpha=11.0$ と $\beta_v=0.01$ (あるいは $\beta_h=0.49$) の場合に得られた。このときL1やL2もほぼ最小値を与えており、ABICがこれらの事前情報とモデルの選択において有効であることを示している。なお、もし事前情報が与えられない場合、この問題では逆行列を求めることができず、解を得ることができないことは、例題-5.3でも述べたとおりである。

図-5.8(b)は、「Column Pattern (縦型)」の場合であり、このときは物性値の分布の特性のため計測値ではいつも5層の性質が平均化された測定値しか得ることができず、平滑化フィルターを用いても解を得ることはできない。このような場合ABICは、単調関数となり、最小値を持たない場合が多いと言われている。

図-5.8(c)と(d)では、それぞれ「Diagonal Pattern (斜型)」と「Anomalous Pattern (変則型)」の場合についての計算結果を示した。それぞれでABICに基づいて決定される最適な α と β_v (あるいは β_h) の組み合わせは、22.0と0.40 (あるいは0.10)、また0.5と0.20 (あるいは0.30)であり、最小のL1やL2もだいたいこれらと似た点で与えられる。

図-5.9にこのような方法で推定された物性分布を示した。ここで示した問題は、事前情報(この場合は平滑化フィルターとして表れる)を考慮することなしには解を求めることのできない問題であった。ABICが、最適な事前分布とモデルの選択において極めて有効であることがわかる。

例題-5.5
この例題では、簡単な杭の変位モデルを考え、このモデルのパラメー

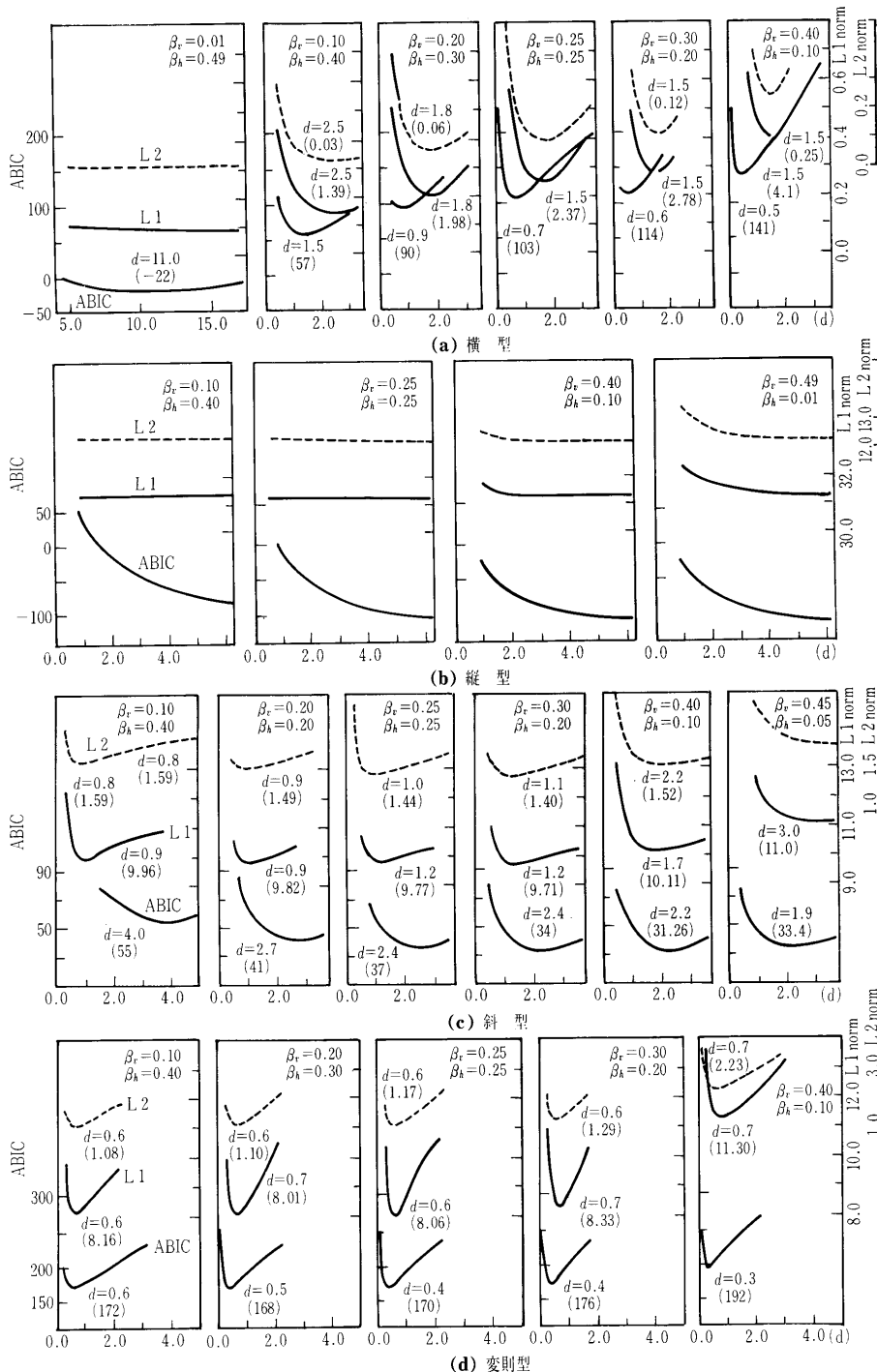
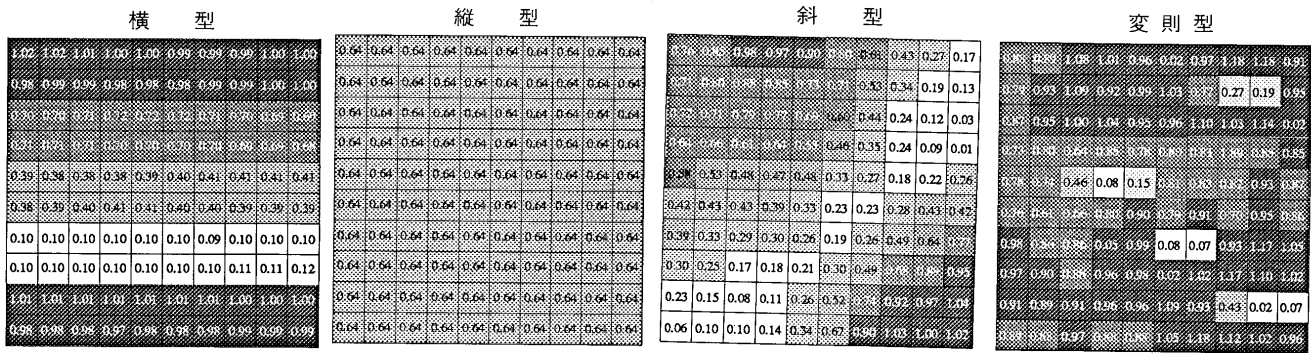
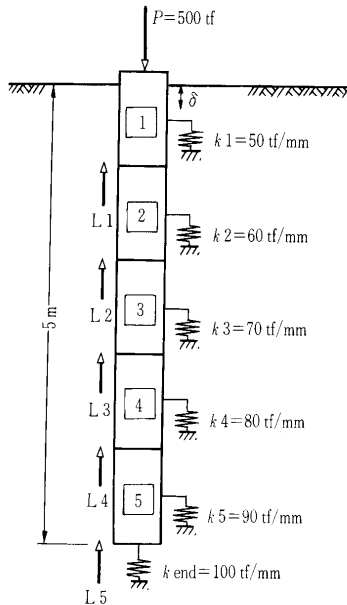


図-5.8 例題-5.4 解析結果一覧



図—5.9 例題—5.4 最適推定結果



図—5.10 例題—5.5 杭モデルと真のパラメーター値

ター値の推定に ABIC を用い、その有効性を紹介する¹⁸⁾。

このモデルでは図—5.10 に示すように、杭は五つの同じ大きさの要素に分けられ、それぞれの要素は個別に地盤にばねにより接続されている。また杭の先端も別のばねがあり地盤と接続されている。杭は剛体と仮定されており、したがって杭頭変位 δ は、すべての要素の鉛直変位でもある。今、杭頭に鉛直荷重 P が作用しているとき、各要素の境界で作用している軸力を L_i とすると、次のような釣合い式を立てることができる。

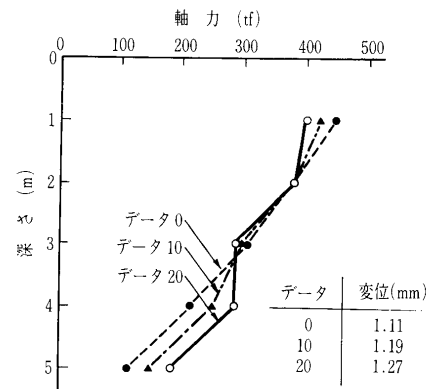
表—5.3 例題—5.5 各モデルで採用されたパラメーターの事前平均値

	事前情報 1 (P1)	事前情報 2 (P2)	事前情報 3 (P3)
モデル 2 (M2) (x_1, x_2)	80, 120	75, 75	150, 150
モデル 3 (M3) (x_1, x_2, x_3, x_4)	50, 80, 120	75, 75, 75	150, 150, 150
モデル 4 (M4) (x_1, x_2, x_3, x_4)	50, 70, 90, 120	75, 75, 75, 75	150, 150, 150, 150

$$\begin{aligned}
 L_1 + k_1 \delta &= P \\
 L_2 + k_1 \delta + k_2 \delta &= P \\
 L_3 + k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta &= P \\
 L_4 + k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta + k_4 \delta &= P \quad \dots (11) \\
 L_5 + k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta + k_4 \delta + k_5 \delta &= P \\
 k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta + k_4 \delta + k_5 \delta + k_{end} \delta &= P
 \end{aligned}$$

この式より容易に、与えられた P に対する δ と L_i ($i=1, \dots, 5$) を求めることができる。

各ばねには図—5.10 で示しているようなばねを割り当て、今杭頭に $P=500\text{tf}$ の荷重が作用したときの変位および軸力分布を求めた。これを用いて逆解析を行う。ただしデータは、計算された真値をそのまま用いる場合 (データ 0)、計算値の約 10% の大きさのノイズを加えた場合 (データ 10)、同じく 20% のノイズを加えた場合 (データ 20) を用意した。これらの杭頭変位および軸力分布を図—5.11 に示した。



図—5.11 例題—5.5 計測された杭頭変位と軸力分布

推定のために用意したモデルは 3 種類とした。それらは導入されたパラメーターの数により「M2」, 「M3」および「M4」と呼ぶことにする。それぞれのモデルのパラメーターの割付け方は図—5.12 に示されている。

事前分散・共分散行列には単位行列で与え、それぞれの事前平均値は、真値に比較的近い値を与えるものを「P1」、真値に比較的近い一様な値を与えるものを「P2」、および真値からかなり離れた一様な値を与えるものを「P3」とした。それぞれのモデルについての事前平均値を表—5.3 に示してある。

(11) 式で示したモデルは、以下のように整理すると線形の観測方程式として取り扱うことができる：

講座

表—5.4 例題—5.5 各ケースの最小 ABIC 値とそのときの α

(a) データ 0

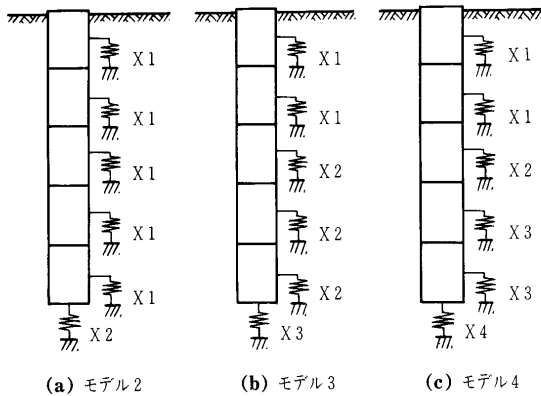
モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC
M2-P1	1.0	47.50	M3-P1	1.0	39.47	M4-P1	10.0	33.70
M2-P2	0.1	49.90	M3-P2	0.1	41.21	M4-P2	0.01	39.70
M2-P3	0.1	51.10	M3-P3	0.01	46.20	M4-P3	0.001	47.30

(b) データ 10

モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC
M2-P1	0.1	45.90	M3-P1	10.0	44.60	M4-P1	10.0	47.60
M2-P2	0.1	47.50	M3-P2	0.1	49.90	M4-P2	0.1	51.80
M2-P3	0.01	48.20	M3-P3	0.01	53.30	M4-P3	0.1	56.90

(c) データ 20

モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC	モデル-事前情報	α	ABIC
M2-P1	1.0	53.30	M3-P1	10.0	54.10	M4-P1	1.0	55.70
M2-P2	0.1	54.50	M3-P2	0.1	57.79	M4-P2	1.0	58.20
M2-P3	0.1	55.00	M3-P3	0.1	59.20	M4-P3	1.0	60.90



図—5.12 例題—5.5 代替的な杭モデル

$$z = Hx + e$$

ここに、

$$H = \begin{bmatrix} 100000 \\ 110000 \\ 111000 \\ 111100 \\ 111110 \\ 111111 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} (P-L_1)/\delta \\ (P-L_2)/\delta \\ (P-L_3)/\delta \\ (P-L_4)/\delta \\ (P-L_5)/\delta \\ P/\delta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

なおパラメーター x は、それぞれのモデルについて次のようになる：

- Model 1 : $x = (x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_{end})^T$
- Model 2 : $x = (x_1, x_1, x_2, x_2, x_2, x_{end})^T$
- Model 3 : $x = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_{end})^T$

なお、実際の観測行列 H は、パラメーターの数によりモデルごとに計算を始める前に横方向に圧縮しておく必要がある。

(12) 式の観測方程式を事前分布とベイズの定理により結合することにより、ベイズ法を用いた逆解析が可能と

なることは 3.3 節で述べたとおりである。

計算された観測値にそれぞれ 0, 10 および 20 % のノイズを加えたデータ (先に定義したデータ 0, 10 および 20) に基づいた解析結果を表—5.4(a) から (c) に示した。この表は、それぞれのデータについて、それぞれのモデルと事前平均値の組合わせで、最小の ABIC を与えたものについて、その ABIC の値と、そのときの α の値を抜き出してまとめたものである。それぞれのデータについて ABIC を最小にする、最適なモデルと事前情報の組合わせ、およびその推定パラメーター値は以下のようになる：

データ 0 : M4-P1, (50.4, 70.4, 89.5, 118.9)

データ 10 : M3-P1, (52.6, 77.1, 119.6)

データ 20 : M2-P1, (48.9, 135.4)

なお、言うまでもないことであるが、この 3 種類のデータは全く異なる観測値であるから、例えば ABIC の値を上記の三つのケースについて互いに比較することは意味をなさない。

これらの結果より次のようなことが言える。

- (1) ノイズの小さいデータほど、複雑なモデルが選択された。逆に言うとデータのノイズが大きくなると、より単純なモデルの方が安定したパラメーター推定値を与えるので、予測には役立つと判断するという、ABIC の本質がよく表れている。
- (2) いずれの場合にも、的確な事前情報が与えられた場合に、最小の ABIC が得られた。これはそれぞれのデータで個々のモデルについて比べた場合にも成り立つ。すなわち ABIC はよりの的確な事前情報を判断する上で有用である。
- (3) 個々のモデルについてみると、的確な事前情報が与えられる場合の方が、大きな α の値を取っている。言い換えると、的確な事前情報の場合の方が推定に当たり、これに相対的に大きな重みを置く方がよいことを ABIC は自動的に調整する。
- (4) モデルの選択と事前分布の的確性の間には相互作用がある。例えばデータ 0 において、ABIC は事前情報 1 と 2 の場合モデル 4 を選択するが、事前情報 3 の場合はモデル 3 を選択する。すなわち事前分布がよりの確であれば、より複雑なモデルが選択される。同様のことは他のデータの場合にも言える。これらの例題より、ABIC はモデルの選択と、事前分布の選択において驚くほどの的確な挙動を示すことが理解できる。

5.4 おわりに

本章では、「情報量」、「モデル」および「予測」と言う三つのキーワードを用いて、逆解析におけるモデル選択の必要性を説明した。さらに赤池らが提唱している情報量統計学が、モデル選択では有用であることを述べた。一方、地盤工学の逆解析では、得られる観測データにいわゆるデータの共線性 (すなわち、不適切性) の問題が

あり、この問題解決のためには事前情報の導入が不可欠であることを述べ、さらにその導入に当たっては、観測データと事前情報と言う全く質の異なったデータの融合が問題であることを述べた。情報量統計学をベイズ法に適用するために考えられた ABIC (赤池ベイズ情報量規準) は、モデルと事前分布両方の選択において、極めて有力な道具であることを、主に例題を通じて示した。

なお、本章の内容の一部は、平成6年度科学研究費補助金、一般研究(C)「拡張ベイズ法による逆解析の基礎理論確立に関する研究」の成果を用いている。また、本章で述べた著者の研究成果の多くは、文部省数理統計研究所との長年の共同研究の成果である(平成6年度の課題番号は6-共研 A-36「地盤工学における逆解析への情報量統計学の応用」)。特に同研究所の柏木宣久博士の長年の御指導に、深謝の意を表したい。

付録 観測方程式が線形の場合の ABIC の誘導

AIC や ABIC の統計学的な理論背景を説明することは、本講座の範囲を超えるものであり、適当な参考文献を参照されたい^{1)-4), 11), 13), 16), 19)}。しかし、ABIC の具体的な形を、観測方程式が線形の場合について誘導しておくことは、読者にこの方法を利用していただく上で有用と考えられるので、ここに示しておく。

この場合、観測方程式は次のように与えられる：

$$z = Hx + \epsilon \dots\dots\dots (A.1)$$

このデータ分布は、次の多変量正規分布となる：

$$p(z|x, \sigma_\epsilon^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\sigma_\epsilon^2 R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-Hx)^T \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} R^{-1}(z-Hx)\right\} \dots\dots (A.2)$$

ここに $\sigma_\epsilon^2 R$ は観測方程式の誤差の分散・共分散行列である。あるいは、 σ_ϵ^2 は誤差分散で、 R は各観測値の誤差の相対的な重みであると考えてもよい。すべて観測値の誤差分散が σ_ϵ^2 に等しいとき、 R の対角要素はすべて1.0となり、 R は相関行列となる。

一方、 x に関する事前分布はその平均値を \bar{x} 、分散・共分散行列を $\sigma_s^2 M$ とする正規分布に従うとすると、

$$p(x|\sigma_s^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\sigma_s^2 M|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T \frac{1}{\sigma_s^2} M^{-1}(x-\bar{x})\right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに σ_s^2 は事前分散で、 M はパラメータ x の各要素間での誤差分散の相対的な誤差の重みである。 x のすべての要素の事前分散が等しいとき、 M の対角要素はすべて1.0となり、 M は相関行列となる。

ここでデータ分布と事前分布の相対的な重みを表すパラメータ α を定義することができる：

$$\alpha = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_s^2} \dots\dots\dots (A.4)$$

この式から分かるように、 α が小さいほど事前分布の分散は大きくなり、したがって推定におけるデータの重みが増すこ

とになる。

(A.2)式と(A.3)式より事後分布は次式に比例することがベイズ公式より明らかである(3.3節(32)式参照)：

$$p(x|\alpha, \sigma_\epsilon^2, z) \propto p(z|x, \sigma_\epsilon^2) p(x|\sigma_s^2/\alpha) = \frac{\alpha^n}{(2\pi\sigma_\epsilon^2)^{\frac{n+m}{2}} |R|^{-\frac{m}{2}} |M|^{-\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\{(z-Hx)^T R^{-1}(z-Hx) + \alpha(x-\bar{x})^T M^{-1}(x-\bar{x})\}\right] \dots\dots\dots (A.5)$$

したがって、この問題のベイズ推定量は次の評価関数を最小にする x として求められる。

$$J_s(x) = (z-Hx)^T R^{-1}(z-Hx) + \alpha(x-\bar{x})^T M^{-1}(x-\bar{x}) \dots\dots\dots (A.6)$$

この x のベイズ推定値を \hat{x} と表すことにする。

ABIC の形は基本的に本文中(1)式で示した、AIC と同じ形をしており、次のように定義される：

$$ABIC = -2(\text{最大対数尤度}) + 2(\text{超パラメーターの数}) \dots\dots\dots (A.7)$$

ただし、ここで最大対数尤度というのは、ベイズ公式の分母に当たる部分で、下に示すような積分の自然対数を取ったものである：

$$L(\sigma_\epsilon^2, \alpha|z) = \int p(z|x, \sigma_\epsilon^2) p(x|\sigma_s^2/\alpha) dx \dots\dots (A.8)$$

また、超パラメーターというのは、そのパラメータ値について事前分布が仮定され、したがってその推定がベイズ推定の対象になるようなパラメータ以外のパラメータのことで、この問題では σ_ϵ^2 と α のことである。ABIC を最小にするこれら超パラメーターの値が、これらの推定値である。

(A.8)式の積分は、次の形で与えられる^{16), 20)}。

$$L(\sigma_\epsilon^2, \alpha|z) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (\sigma_\epsilon^2)^{-\frac{m}{2}} |\alpha M^{-1}|^{\frac{1}{2}} |R^{-1}|^{\frac{1}{2}} |H^T R^{-1} H + \alpha M^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\{(z-H\hat{x})^T R^{-1}(z-H\hat{x}) + \alpha(\hat{x}-\bar{x})^T M^{-1}(\hat{x}-\bar{x})\}\right] \dots\dots\dots (A.9)$$

今、ABIC を用いて σ_ϵ^2 を推定しようとするとき、超パラメーターの数はこの場合2で固定しているため、結局上式を最大化する σ_ϵ^2 が、求めようとする σ_ϵ^2 で、これは(A.8)式の自然対数を取り、これを σ_ϵ^2 で微分して0と置くことにより容易に計算でき、次のようになる：

$$\bar{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{m}\{(z-H\hat{x})^T R^{-1}(z-H\hat{x}) + \alpha(\hat{x}-\bar{x})^T M^{-1}(\hat{x}-\bar{x})\} \dots\dots\dots (A.10)$$

(A.10)式を(A.9)式に代入し、整理すると：

$$\ln L(\alpha|z) = -\frac{m}{2} \ln(2\pi) - \frac{m}{2} \ln(\bar{\sigma}_\epsilon^2) + \frac{1}{2} \ln|\alpha M^{-1}| + \frac{1}{2} \ln|R^{-1}| - \frac{1}{2} \ln|H^T R^{-1} H + \alpha M^{-1}| \dots\dots\dots (A.11)$$

これを、(A.7)式に代入すると、最終的に α の推定に用い

講 座

る ABIC を求めることができる：

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & m \ln(2\pi) + m \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) \\ & - \ln|\alpha \mathbf{M}^{-1}| - \ln|\mathbf{R}^{-1}| + \ln|\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}^{-1}| \\ & + 2(\text{超パラメーター数}) \\ & \dots\dots\dots (\text{A}\cdot 12) \end{aligned}$$

上の誘導では、超パラメーターの数が二つであるが、これを増加しても、誘導に問題はない。また、観測方程式が非線形になる場合は、これをベイズ推定値のところでもテラー展開の第2項までを取ることで線形化し、ABICを求めるための積分を行うのが一般的である。

参 考 文 献

- 1) 赤池弘次：情報量基準 AIC とは何か，数理科学，No. 153, pp. 5~11, 1976.
- 2) 赤池弘次：エントロピーとモデルの尤度，日本物理学会誌，Vol. 35, No. 7, pp. 608~614, 1980.
- 3) 赤池弘次：モデルによってデータを測る，数理科学，No. 213, pp. 7~10, 1981.
- 4) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学，共立出版，1983.
- 5) Carrera, J. and Neuman, S.P.: Estimation of aquifer parameters under transient and steady conditions 1, 2 & 3, Water Resources Research, Vol. 22, No. 2, pp. 199~242, 1986.
- 6) 大西有三・井尻裕二：不均質地盤における浸透流の逆解析手法に関する基礎的研究，土木学会論文集，No. 376/III-6, 1986.
- 7) 中川 徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982.
- 8) 久保司郎：逆問題，培風館，1992.
- 9) チャタジー，S・プライス，B：回帰分析の実際，(佐和隆光・加納 悟訳)，新曜社，1981.
- 10) Honjo, Y., Limanhadhi, B. and Liu, W. T. : Prediction of single pile settlement based on inverse analysis, Soils and Foundations, Vol. 33, No. 2, pp. 126~144, 1993.
- 11) Honjo, Y., Liu, W. T. and Sakajo, S. : Application of Akaike information criterion statistics to geotechnical inverse analysis: the extended Bayesian method, Structural Safety, Vol. 14, pp. 5~29, 1994.
- 12) Honjo, Y., Liu, W. T. and Guha, S. : Inverse analysis of an embankment on soft clay by extended Bayesian method, International journal for numerical and analytical method in geomechanics, Vol. 18, pp. 709~734, 1994.
- 13) 赤池弘次：事前分布の選択と応用，「ベイズ統計学とその応用」（鈴木雪夫・国友直人編），東京大学出版会，pp. 81~98.
- 14) Ang, A. H-S and Tang, W. H. : 土木・建築のための確率統計の基礎（伊藤 学・亀田弘行訳），丸善，1977.
- 15) Neuman, S.P. and Yakowitz, S.: A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1. theory, Water Resources Research, Vol. 15, No. 4, pp. 845~860, 1979.
- 16) Akaike, H. : Likelihood and Bayes procedure with discussion, J. M. Bernardo, M. N. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith (eds.), Bayesian Statistics, Valencia, University Press, pp. 143~166, 185~203, 1980.
- 17) Honjo, Y. and Kashiwagi, N.: On the optimum design of a smoothing filter for geophysical tomography, Soils and Foundations, Vol. 31, No. 1, pp. 131~144, 1991.
- 18) Honjo, Y. and Kudo, N.: Model selection and parameter estimation in geotechnical inverse analysis by extended Bayesian method, Proc. 7th Int. Conf. on Application of Statistic and Probability in Civil Engineering, Paris (in press), 1995.
- 19) 鈴木義一郎：先をよむ統計学—「情報量基準」とは何か—(ブルーボックス B-855)，講談社，1991.
- 20) 柏木宣久：圃場試験に於ける地力の推定，統計数理研究所彙報，Vol. 31, No. 1, pp. 1~10, 1981.