

拡張ベイズ法による広域地下水解析モデルの 逆解析：定常データに基付く場合

本城勇介¹・福井宏行²・小川正二³

¹正会員 Ph.D. 岐阜大学助教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1)

²正会員 工修 鹿島建設株式会社 東京支店 (〒107 東京都港区元赤坂1-3-8)

³正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

赤池のベイズ情報量規準 (ABIC) に基付く拡張ベイズ法により、新潟県六日町周辺の広域地下水モデルを逆解析により構築した。この解析では、観測データは地下水が定常状態にある場合のものをを用いた。この種の逆解析で問題となる不適切性を、事前情報を導入し、観測データと事前情報の最適な相対的な重み付けをABICにより的確に行うことができることを示した。また、逆解析のもう一つの重要な問題である、最適モデルの選択あるいはモデル・パラメーター数の限定の問題も、ABICを用いることにより同時に解決された。これらの点を大規模な実データに基づいて示した点が、本研究の最も大きな成果である。

Key Words: groundwater, inverse analysis, statistical analysis, Akaike Bayesian Information Criterion, finite element method, extended Bayesian method

1. まえがき

地下水の浸透流解析モデルの逆解析によるパラメーター推定や、モデルの同定の問題については、計算機等の著しい性能の向上や、その現実的な必要性により、既に多くの研究が発表されている。わが国においても、大西と井尻¹⁾、青木と嘉門²⁾、本城と森嶋³⁾、河野ら⁴⁾、奥野と鈴木⁵⁾、奥野ら⁶⁾、長谷川ら⁷⁾など多くの研究が発表されている。さらに最近では、Sun⁸⁾によるこの問題に関する成書も出版されている。そればかりでなく逆解析は、学際的にいろいろな分野で活発な研究が行われており、体系的な図書もいくつか出版されている^{9),10),11)}。

このような中で、逆解析で最も重要な問題点のひとつとして、不適切性の問題が指摘されている。例えば先に示したSunは、その著書⁸⁾の結論の冒頭で、地下水逆解析の最も重要な問題は、不適切性 (ill-posedness) の克服であると述べている。不適切性とはSunによれば⁸⁾、次のように説明することが出来る。逆解析の定式化が線形の場合、問題は最終的に一つの連立方程式を解くことに帰着する：

$$y = X\theta + \epsilon \quad (1)$$

ここに、 y は観測値ベクトル、 X は与えられた観測行列、 θ は推定しようとしているモデル・パラメーター、 ϵ は誤差である。通常の逆解析では、観測値の数は、推定しようとするパラメーターの数よりも多く、典型的には最小二乗法により解が求められる：

$$\begin{aligned} \min. J(\theta) &= \epsilon^T \epsilon \\ &= (y - X\theta)^T (y - X\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

この式は、解析的に解くことができ：

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (3)$$

このとき逆行列を求めようとする行列 $X^T X$ の \det が 0、あるいは 0 に近い状態のとき、この逆行列の計算は不可能となり、解を求めることが出来なくなるし、またたとえ解が求まったとしても、観測誤差の影響を極端に受ける結果となる。このような状態を一般に不適切性と言う。なお、重回帰分析では同様の現象を (重) 共線性と呼ぶ。

不適切性の程度を計る最も一般的な指標は、条件数 (conditional number) であり、これは行列 $X^T X$ を固有値分解し、その最大固有値と最小固有値の比の平方根を取ったものである。条件数が高いほど不適切性は大きい。

不適切性を解決するためには、一般に式(2)の評価関数の性質を改良し適切化するための代替的な評価関数が用いられる^{9),10)}：

$$\min. J(\theta) = (y - X\theta)^T (y - X\theta) + d^2 (\theta - \theta^*)^T (\theta - \theta^*) \quad (4)$$

ここに、 θ^* はモデルパラメーターに関する主観的な初期設定値、 d は適切化パラメーターと呼ばれる、観測情報と適切化項の調整パラメーターである。式(4)は統計学的に解釈することも可能で、この場合 θ^* は事前平均値であり、 $d = 1$ の場合は、問題がベイズ統計学により定式化されていると解釈される。さらに d が1でないときは、この定式化は拡張ベイズ法と呼ばれることがある。

この適切化の過程での最大の問題点は、調整パラメーター d をどのように決定して行くかと言う問題である。著者の一人は、この問題に赤池の提案している情報量規準ABIC(Akaike Bayesian Information Criterion)を用いることを提案し、既に地盤工学におけるいくつかの問題についてこの方法の適用を試みている^{12),13),14),15)}。本研究の第一の目的は、この方法を大規模な広域地下水の問題に適用し、その有効性を示すことである。

不適切性の問題とも密接に関係する、逆解析におけるもう一つの問題は、解析モデルの選択の問題（あるいは、パラメーター数の限定(parameterization)の問題)である⁹⁾。一般に重回帰分析などの統計的な方法では、モデルの複雑化(モデルパラメーター数の増加)による、モデルのデータへの当てはまりの良さと、個々のモデルパラメーターの推定信頼性の間にトレードオフの関係があることは広く知られている。逆解析においても事情は全く同様であり、より高品質で大量の観測データが得られている場合は、より複雑なモデルが選ばれるべきであるし、その逆であれば、むしろより単純なモデルの方が信頼性の高い予測を可能にする。

赤池の情報量統計学は、本来上記のようなトレードオフ関係の存在する統計解析を行うとき、より予測信頼性の高いモデルの選択を行うことを目指したものであり、赤池の情報量規準AICは、そのような観点から提案されたものである^{16),17)}。この事実は、ABICについても完全に当てはまり、この規準はモデル選択においても極めて有効である。すなわち、本研究の第二の目的は、このモデル選択におけるABICの有効性を、実際の広域地下水観測データに基づく逆解析において示すことである。

本研究で直接研究の対象としている新潟県南魚沼地区

は、全国的にも地盤沈下の著しい地域であり、特に六日町市街地では沈下が著しい。種々の観測結果から当地域の地盤沈下は、主に消雪用地下水の過剰揚水による地下水位の低下に帰因すると考えられており、この問題の解決には地下水の挙動の把握は極めて重要な課題であると考えられる。本研究では、上記のような地下水逆解析の問題点を解決するために開発されてきたABICに基づく拡張ベイズ法に基づく逆解析手法により、この地域の地下水挙動予測に用いることのできる、地下水の帯水層モデルの透水量係数の分布を推定することを目的としている。なお本研究では、非降雪時の水頭分布がほぼ定常であることに注目し、逆解析にはこの定常データを用いた。

2. 問題の定式化

この章では地下水解析モデルの、拡張ベイズ法を用いた逆解析の定式化を示す。ここでは定常データの解析を行うので、定常解析の物理モデルについての定式化を示す。これを非定常の場合に拡張することは容易である¹⁹⁾。

まずはじめに定式化の基本となる、基本モデルについて述べる。そして、与えられた適切化パラメーター値 d の基での、ベイズ推定法による透水量係数ベクトル値の推定方法について説明する。最後に、適切化パラメーター値 d 及び最適モデルを選択する規準として用いるABICを導く。

(1) 基本モデル

本研究では、基本モデルを物理モデル、観測モデル、事前情報モデルの3つから構成した。物理モデルは、地下水浸透流解析の数値モデルである。観測モデルは、数値モデルと実測値の差を記述するモデルであり、その差は誤差ベクトル ϵ として、記述される。事前情報モデルは、事前情報を与える事前分布を記述したモデルである。

物理モデル：有限要素法により定式化された二次元平面定常浸透流問題は、次のように表示される：

$$K(\theta) h = f \quad (5)$$

ここに K は透水量行列であり、透水量係数ベクトル θ (m 次元) の関数である。 h は節点水頭ベクトル、 f は流量ベクトルである。

観測モデル：各観測点の観測値は、次のように与えられる：

$$h^* = h(\theta) + \epsilon \quad (6)$$

ここに、 h^* は観測点における観測値ベクトル (n 次元)、 $h(\theta)$ はこれに対応する各観測点における透水量

係数ベクトルを θ としたときの計算水頭値ベクトル (n 次元) である。 ε は誤差ベクトルであり n 次元の多変量正規分布 $N(0, V_\varepsilon)$ に従う。

事前情報モデル: 推定しようとする透水量ベクトル θ は、次式で表されるような事前情報を持つとする:

$$\theta = \theta^* + \delta \quad (7)$$

ここに、 θ^* は透水量係数ベクトルの事前平均ベクトル、 δ は事前平均の不確実性を表す確率変数ベクトルで多変量正規分布 $N(0, V_\delta)$ に従う。

(2) パラメーターのベーズ推定

θ のベーズ推定を行うために、この事後分布を導く。式(6)によるデータ分布は、次の多変量正規分布となる:

$$g(h|\theta, V_h) = (2\pi)^{-n/2} |V_h|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(h(\theta) - h^*)^T V_h^{-1} (h(\theta) - h^*)\right\} \quad (8)$$

一方、式(7)で与えられた事前分布は、次のような多変量正規分布となる:

$$f(\theta|\theta^*, d^2 V_\theta) = (2\pi)^{-m/2} |d^2 V_\theta|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T (d^2 V_\theta^{-1}) (\theta - \theta^*)\right\} \quad (9)$$

従って、 θ の事後分布はベーズの定理により:

$$\begin{aligned} w(\theta|h^*, V_h, d^2 V_\theta) &\propto g(h|\theta, V_h) f(\theta|\theta^*, d^2 V_\theta) \\ &= (2\pi)^{-(n+m)/2} d^{-m} |V_h|^{-1/2} |V_\theta|^{-1/2} \exp\left\{-(h(\theta) - h^*)^T V_h^{-1} (h(\theta) - h^*) \right. \\ &\quad \left. - (\theta - \theta^*)^T (d^2 V_\theta^{-1}) (\theta - \theta^*)\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

θ のベーズ推定量は、式(10)を最大化することにより得られるから、最大化に関係のない定数項を省略すると、次に示す関数を最小化することになる:

$$\begin{aligned} \min J(\theta|d) \\ = \min. (h(\theta) - h^*)^T V_h^{-1} (h(\theta) - h^*) \\ + d^2 (\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) \end{aligned} \quad (11)$$

これは、先に示した式(4)であり、逆解析の適切化の統計的な意味が、事前情報の利用によるベーズ推定であることを示している。

(3) ABICによるdの最適値の決定

赤池のベーズ情報量規準 (ABIC) の導出や、その情報論的な意味については赤池の論文^{18),19)}を参照されたい。また詳しい式の誘導については、本城¹⁷⁾を参照されたい。

ABICは、次式によりあたえられる:

$$\begin{aligned} ABIC(d) &= -2 \ln \left\{ \int g(h|\theta, V_h) f(\theta|\theta^*, d^2 V_\theta) d\theta \right\} \\ &\quad + 2(\text{number of hyperparameters}) \end{aligned} \quad (12)$$

この場合関数 g が θ に関して線形であれば第一項の積分を解析的に行うことができ、ABICは簡単に求まる¹⁷⁾。しかし、この問題では g は、 θ に対して非線形であるので、この積分を行うために θ をそのベーズ推定値の回りでテーラー展開し、その二項目までを取ることで線形化した上で積分を行った。結果として得られるABICは次のように与えられた:

$$\begin{aligned} ABIC(d) &= m \ln(2\pi) + m \ln(J(\hat{\theta})/m) \\ &\quad - \ln |d^2 V_\theta^{-1}| - \ln |V_h^{-1}| + \ln |S^T V_h^{-1} S + d^2 V_\theta^{-1}| \\ &\quad + 2(\text{number of hyperparameter}) \end{aligned} \quad (13)$$

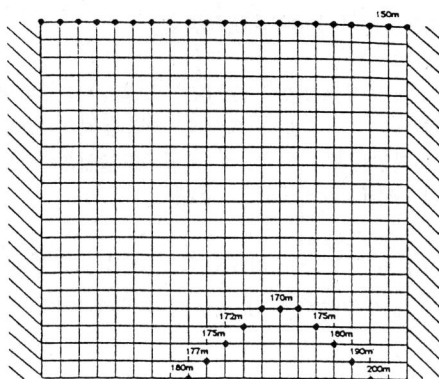
ここに $n \times m$ 行列 S は次のように与えられる:

$$S = \left\{ \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta^T} \right\}_{\theta=\hat{\theta}} \quad (14)$$

ここに、分母 θ に付いている転置 T は、行列 S の行では θ が変化し、列では h が変化し、結果的に $n \times m$ 行列を、生成することを示している。

式(13)のABICにより、観測データと事前情報の相対的な重みを示す超パラメーター d の決定、また最適モデルや事前情報の選択を行う。すなわち最小のABICを与えるこれらの組み合わせを求める。

なおここで、 V_h 、 V_θ と d^2 の関係について、説明しておく。ベーズ的立場で言えば V_h は、観測誤差の分散・共分散行列であり、 $d^2 V_\theta$ は事前分布の分散・共分散行列を表す。ほとんどの場合観測値は、独立で分散 σ_ε^2 一定と仮定するので、 V_h は対角要素に σ_ε^2 、それ以外は0の行列となる。事前分布の分散・共分散行列については、事前分布で与えるパラメーター値の間の相対的な分散や共分散に違いがあり、これを仮定に取り入れた場合は、その相対的な大きさを V_θ に入れておくことができるが、これらが一律な分散値を持ち、また独立であると仮定され場合は、最終的に事前分布の分散値 σ_θ^2 は、 σ_ε^2 との相対的な大きさを d^2 により調整されてし

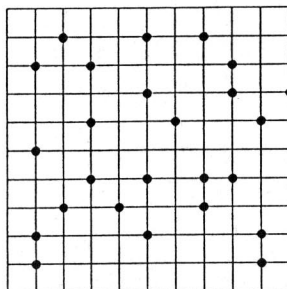


● 水頭一定境界 (a)境界条件
— 不透水境界

6000	4000	4000	4200	4200	4200	4000	8000	8000	4000	3440	2250	2250	2250	2150	3440	3200	3200	3600	3600
6000	7000	7000	4000	4000	4000	8000	7000	3500	4000	2150	2250	2250	3440	3440	3200	3800	3770	3040	3040
12000	12000	8000	7000	7000	7800	7000	3500	4000	400	430	2250	3800	4300	4000	4000	3040	3040	1750	1750
20000	20000	12000	6000	6400	3500	3500	400	400	225	480	2250	4300	3440	3200	3040	1900	1750	1750	1750
20000	20000	19000	12500	3000	3500	2000	400	200	250	500	4800	4500	3440	2000	1900	1900	1750	1050	1050
15000	15000	20000	18000	24000	3500	4000	4000	500	290	600	5000	4800	3440	2000	1900	1140	1140	1140	1140
10000	15000	16000	20000	30000	35000	20000	5000	5000	520	520	5000	5000	3840	2000	2000	1200	1140	1140	1140
8000	10000	20000	24000	30000	35000	40000	50000	5200	520	520	5200	5000	4000	2250	2250	2000	1200	1200	1200
12000	12000	23000	30000	36000	48000	48000	50000	5200	520	520	5200	4000	4000	2500	2250	2250	2250	2250	2250
12000	18000	19000	50000	42000	48000	40000	50000	5200	5300	530	5200	5000	4000	4000	4000	2500	2250	2250	2250
12000	16000	24000	32000	42000	48000	40000	50000	5200	5300	530	2800	5200	5200	5200	5000	4000	4000	4000	4000
12000	15000	24000	28000	35000	48000	45000	5000	5200	5300	5300	2650	2800	4160	4160	4160	5200	5200	5200	5200
15000	18000	18000	28000	40000	51600	48000	5000	5200	5300	4240	2650	2650	2650	4160	4160	4160	4160	4160	4160
18000	18000	24000	32000	32000	43000	48000	50000	52000	52000	5300	5300	2650	2650	2650	2650	2650	2650	2650	2650
18000	24000	24000	34400	34400	45000	50000	50000	55000	55000	5500	2750	2750	2750	2650	2650	2650	2650	2650	2650
18000	18000	25800	27000	36000	38400	40000	52000	5500	5500	4400	2750	2750	2750	2650	2650	2650	2650	2650	2650
17200	17200	27000	27000	28800	30000	40000	20800	5500	5800	4840	2900	4400	2750	2750	2750	1590	1590	1590	1590
17200	18000	19200	19200	30000	20000	20800	11000	5500	4840	4840	4840	4840	2750	2750	2750	1650	1650	1650	1650
18000	18000	19200	20000	20000	10400	10400	5500	5800	4840	6000	5800	4840	2750	2750	2750	1650	1650	1100	1100
18000	18000	19200	20000	10000	10400	11000	5800	4800	4800	6000	6000	5800	4840	2750	1650	1650	1100	1100	1100

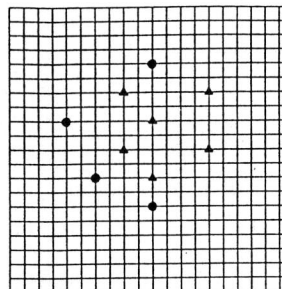
(b)透水量係数分布

図-1 疑似的な帯水層モデル



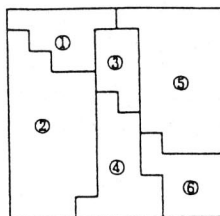
● 観測井戸 (25本)

図-2 観測井戸分布

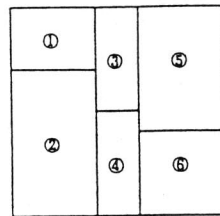


● 揚水井戸1 揚水量 5,000(m³/ds)
▲ 揚水井戸2 揚水量 10,000(m³/ds)

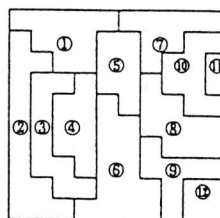
図-3 揚水井戸分布



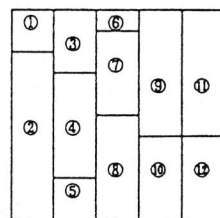
(a)モデル-1



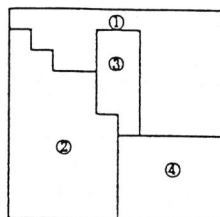
(b)モデル-2



(c)モデル-3



(d)モデル-4



(e)モデル5

図-4 モデル選択のための代替的なモデル

まうので、 V_θ の初期値としては単位行列を与えておけばよい。このとき $d^2 = \sigma_\epsilon^2 / \sigma_\theta^2$ である。本解析では、 V_θ として、事前平均値に0.1を乗じた値の2乗値を対角項に入れ、事前情報の変動係数が一定であることを仮定した。なお、多数の超パラメータを導入し、いくつかの異なる事前分布の分散を独立に推定することも可能である。

ところで実際には、 σ_ϵ^2 は最終的に残差二乗和から推定される^{15),17)}。従って、実際の計算では、 V_h に単位行列、 V_θ 上記のような値を初期値として与え、全ての最適化を終了し、パラメータ値の推定が終わった後、 σ_ϵ^2 を推定し、観測値の分散共分散行列を求め、さらに d^2 の最終値から事前分布の分散共分散行列を決定し、必要ならばベ-

ズ定理より、事後分布の分散・共分散行列を推定パラメータの分散・共分散行列として求ると言う手順をとる。

3. 疑似的なデータによる解析方法の検証

本章では、先に提案した方法の有効性を、疑似的に設定した地下水帯水層モデルより作成したデータにより検証する。

(1) 問題の設定

図-1に、設定した疑似的な地下水帯水層モデルを示した。透水量係数は、地域全体で連続的に変化し、一部

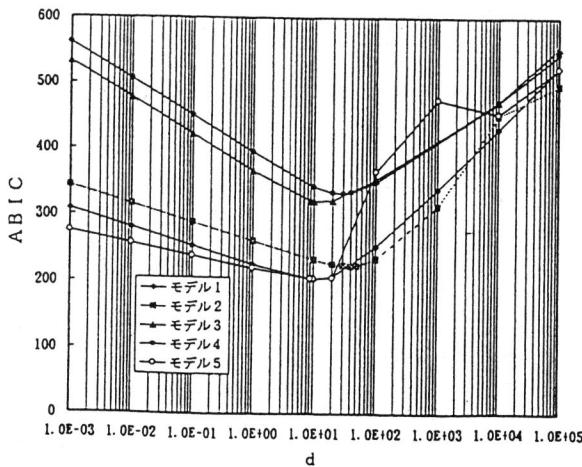


図-5 疑似モデルにおけるABICとdの関係

に不連続的に変化しているところがある（すなわち、図-4、モデル1、ゾーン3の部分の透水量係数は周辺部に比べ1オーダー低い値になっている）。境界条件は上方と下方の一部を水頭一定境界とし、両側面を不透水境界としている。また、このモデルでは地下水は下方から上方へと流れる。観測データは、上記の境界条件下において、図-2に示す10本の揚水井戸より図に示すような量の揚水を行ったときの、図-3に示される各観測井戸における定常水頭を有限要素法により求め用いた。図-4にモデル選択（あるいはパラメーター数の限定）のために設定した代替的なモデルのゾーニングを示した。モデル1、2は、6ゾーンモデル、モデル3、4は、12ゾーンモデル、モデル5は4ゾーンモデルである。モデル1、3、5は、真の透水量係数分布を比較的忠実にゾーニングしたモデルであり、モデル2、4は、モデル1、3をそれぞれ幾何学的に単純化したモデルである。特にモデル1のゾーン3に当たる部分は、透水量係数が非連続的に小さい部分であり、モデル1と2および3と4を比較することにより、このような部分のゾーニングが、解析結果に与える影響を見ようとしている。

(2) 解析結果と考察

図-5に解析の結果得られた、ABICとdの関係を各モデルについてプロットした。また表-1には、各モデルにおける各ゾーンの透水量係数の事前平均値と推定値を示した。

それぞれのモデルにおいて、ABICを最小にするdが存在しており、適切化パラメーターdの決定が行われている。モデル5で、ABICとdの関係が他のモデルに比べなめらかでないのは、評価関数の非線形性のため最適

表-1 各ゾーンの透水量係数推定値（単位：m²/day）

		モデル-1		モデル-2	
d		1.0E+01		4.0E+01	
ABIC		203.531		223.563	
RSS		16.740		59.327	
	事前平均値	推定値	事前平均値	推定値	
Zone 1	4500	4503	15000	14790	
Zone 2	30000	29950	25000	23848	
Zone 3	500	500	1000	997	
Zone 4	5000	5042	5000	4971	
Zone 5	4000	4054	3000	2957	
Zone 6	2000	2085	2000	1914	

		モデル-3		モデル-4	
d		1.0E+01		3.0E+01	
ABIC		321.209		333.102	
RSS		11.761		35.753	
	事前平均値	推定値	事前平均値	推定値	
Zone 1	8000	7637	9000	8984	
Zone 2	25000	24998	25000	24964	
Zone 3	35000	35752	6000	5984	
Zone 4	50000	50265	50000	49902	
Zone 5	500	497	15000	15006	
Zone 6	5000	5626	3500	3499	
Zone 7	3500	3542	500	499	
Zone 8	4000	3989	5000	4993	
Zone 9	3000	3151	4000	3982	
Zone 10	2000	2011	3000	2981	
Zone 11	1500	1585	2500	2492	
Zone 12	1000	1001	2000	1975	

		モデル-5	
d		1.0E+01	
ABIC		203.808	
RSS		91.572	
	事前平均値	推定値	
Zone 1	5000	19699	
Zone 2	30000	23232	
Zone 3	500	778	
Zone 4	4000	7779	

化の過程で、局所的な極値に収束したためと考えられる。

それぞれのモデルの最小のABICを比較することにより、モデルの選択を行うことができる。この結果では、1、5、2、3、4の順に良いモデルであると判断された。ゾーン数6のモデル1は、ゾーン数4あるいは12のモデル5あるいは3よりも良いモデルと判断された分けである。これは与えられたデータでは、赤池の情報量規準の尺度で、この中間的な複雑さを持ったモデル1が、モデルのデータへの当てはまりの良さと、推定パラメーターの信頼性の間のトレードオフ関係を最適化するモデルであることを示している。

また、モデル1が2よりも、さらにモデル3が4よりも低いABICを与えたことより、この指標がゾーニングの拙劣を判断する上でも有効であることが分かる。

表-2に各モデルの最適解における条件数を示した。この問題は、推定しようとするモデルパラメーターに対して問題が非線形なので、先に式(3)のところで説明した線形問題の条件数を直接に定義することはできない。そこで、式(6)で与えた観測モデルを θ のベーズ推定量のところでテラー展開し、これにより条件数に当たるものを計算している。ここで言う条件数は、以下に示す行列の最大固有値と最小固有値の比の平方根である。

表-2 疑似データ各モデルの推定値付近の条件数

モデル	事前情報なしのときの条件数 (d=0)	事前情報を考慮したときの条件数 (d≠0)
1	29.3	29.2
2	62.9	62.9
3	117.8	117.8
4	289.4	289.4
5	11.7	11.7

$$S^T V_h^{-1} S + d^2 V_\theta^{-1} \quad (15)$$

ここに行列Sは、先に式(14)で与えたものである。この表-2を見ると、どのケースでも条件数は高々数100のオーダーであり、事前情報を考慮しなくても解は比較的安定していることがわかる。換言すると、どのケースにおいても事前情報を加えなくても解は安定しているとABICにより判断された結果となった。これは、事前情報を加え適切化を行わなければ、条件数が500から1000以上に達する次章に示す実データの解析と著しい対照を成している。

4. 六日町地域の地下水帯水層モデルの推定

(1) 地形・地質と地下水の状況

六日町盆地は信濃川の支流の一つ、魚野川の形成する谷部に位置し、最小幅2km(六日町市街地)、最大幅5kmで、南南西から北北東に細長く延びている(図-6)。盆地内には、魚野川に沿った氾濫原に左右両岸から流入する小河川の扇状地が並ぶ。盆地の西縁部に新発田-小出構造線の南方延長にあたる断層が伏在するため、西縁部は東縁部よりはるかに直線的である。また、西岸から流入する河川の方が東岸から流入するものに比べ、短く急峻である。

帯水層は谷全体に連続して発達しており、かん養は極めて潤沢で、あたかも谷筋全体を魚野川が流下している感がある。扇状地を含む多くの地域で厚い不圧帯水層が連続的に広がっている。一部帯水層上部に軟弱粘性土層が堆積し、被圧帯水層となっている部分もあるが、帯水層は盆地全体で連続した一層よりなるものとしてモデル化して良いと考えられる。

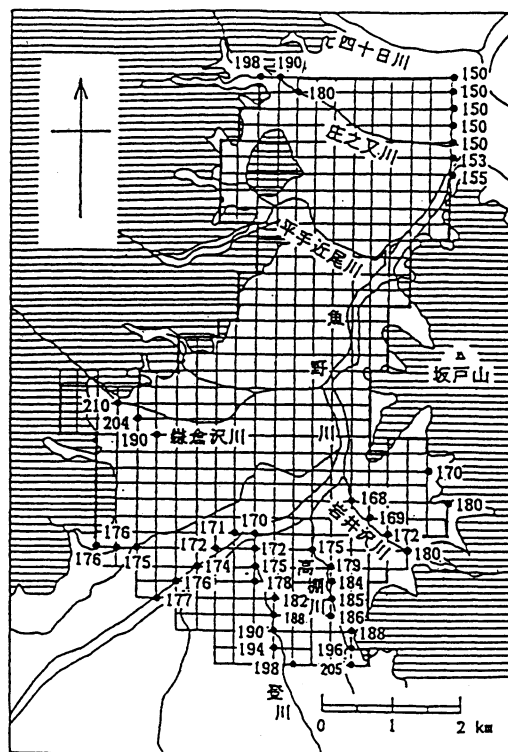


図-6 解析対象地域と境界条件

(注：水頭を与えていない境界はすべて不透水境界)

六日町市街をはじめとする市街部は、扇状地で狭められた扇間湿地あるいは沼地の上に発達している。このため市街部の下には厚さ10から40mの軟弱層があり、その下部の帯水層より揚水が行われ水頭が低下すると地盤沈下が生じる。

帯水層の透水係数は域内の約120本の井戸における揚水試験結果より調べられており、これによれば一般に山沿いの地区で小さく(10^{-5} から 10^{-6} m/s)、魚野川沿いの地域では大きい(10^{-3} から 10^{-4} m/s)。しかし例外的に六日町付近では魚野川左岸地域で 10^{-6} m/sの極めて低い透水係数をしめす地域がある。

本研究で用いた地下水位の観測データは、新潟県衛生公害研究所が中心となり、昭和61年から62年にかけて実施した調査のものをを用いた²⁰⁾²¹⁾²²⁾。連続的な地下水位の観測の行われた24本の観測井戸の結果を見ると、地下水位が変動するのは降雪時に消雪のための地下水揚水が行われる12月から3月までの時期で、それ以外の時期には、水頭はほぼ全域で安定した一定値を取って

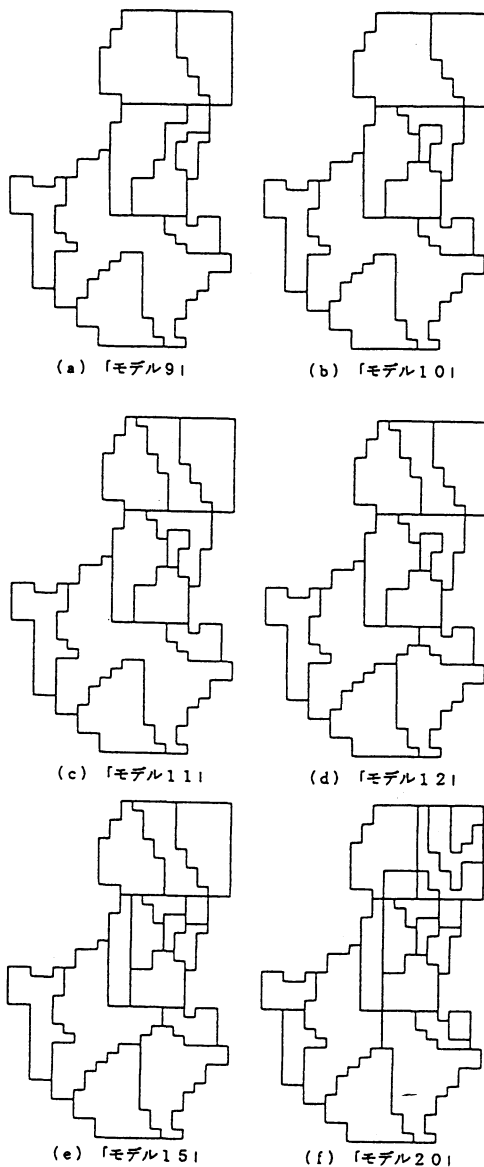


図-7 代替的なゾーン分割図

る。また水頭が変化するのは、六日町市街地付近など揚水井の集中した数地域に限られ、図-6に示す解析対象地域の縁部では、揚水時にもほとんど水頭は変化せず、一定値を保つことが確認されている。一方市街地の降雪時の水頭変化は激しく、一夜で20から30mの水頭降下が生じることも希ではない。また同調査では、非降雪時（昭和61年11月28日から12月8日）と、降雪時（昭和62年1月27から28日）の2回にわたり、地域内123本井戸につき一斉に静水位の測定が実施されている（以下に「一斉測水」と言う）。この調査では、各地域にお

表-3 モデル11の透水量係数の初期値及び推定値

ゾーン	透水量係数の事前 平均値(m ² /day)	推定された透水量 係数(m ² /day)
1	2 0 0	1 9 1
2	8 0 0	6 0 8
3	2 0 0	1 9 5
4	9 0 0	8 5 1
5	3 5 0 0 0	3 4 9 0 7
6	4 0 0	4 0 1
7	5 0 0 0	5 2 7 3
8	1 0	1 0
9	1 0 0	1 0 0
10	1 0 0	9 9
11	9 0 0 0	9 2 2 9

ける揚水量についても、降雪時と被降雪時両方について詳しく調べられている。

(2) 解析モデルとデータ

今回の逆解析に使用したプログラムは、本城と森嶋²³⁾で紹介されているプログラムであり、これにABIC等の計算を加えたものである。

解析対象区域は図-6に示す南北約8km、東西約5kmの範囲であり、ほぼ中央に六日町が位置している。解析においては1つの要素が東西278m、南北232mの長方形となるように離散化した。この有限要素法メッシュは、507節点、441要素より成る。なお、このメッシュ分割は、先に谷中ら²²⁾が実施したものと全く同じ分割にしている。

先にも述べたように、対象帯水層は部分的に被圧で、ほとんどの部分は厚い不圧帯水層（60m）であるが、本解析ではこれを二次元平面モデルにより近似し、透水量係数で評価した。

境界条件としては、基本的に東西の縁部は不透水とし、川が流入している部分に水頭一定境界を設けた。また南縁は基本的に水頭一定境界とし、北縁はこの付近で流線がほぼ東西に走っていることが観測されていることを考慮し、図-6に示すような境界条件を与えた。これら境界条件も、先に谷中らが行った解析と全く同様に設定している²²⁾。

本逆解析で用いた観測データは、先に述べた昭和61年11月28日から12月8日に行われた、非降雪時の一斉測水の結果を用いる。非降雪時に地下水水頭は年間を通じて一定しており、定常状態にあると考えられる。観測は解

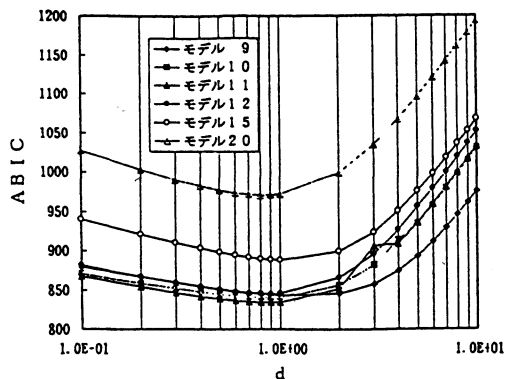


図-8 各モデルのABICとdの関係

析対象域全体の123カ所の井戸で行われており、逆解析には適したデータであると考えられる。これにより、先に示した有限要素法メッシュの節点、92カ所で観測値を与えることができる。

なお、推定した透水量分布に基づき降雪時の揚水による水頭変化を予測したが、このときは観測井で得られたデータと比較している。揚水量についても新潟県衛生公害研究所により、この有限要素メッシュごとに調査されている²⁰⁾。この結果に依れば非降雪時の揚水量は当該期間を通じて一定しており、この結果を本解析でも用いている。図-7にパラメーター推定のために設定した分割数の違う6つのゾーニングを示した。ゾーン分割数はそれぞれ9,10,11,12,15,20であり、モデル名もゾーン数に基づいている。ゾーン分割及びその透水量係数の事前平均値は、得られている地質・地形情報と揚水試験による透水係数分布情報を最大限に利用して設定した。設定した事前平均値を表-3に示した。

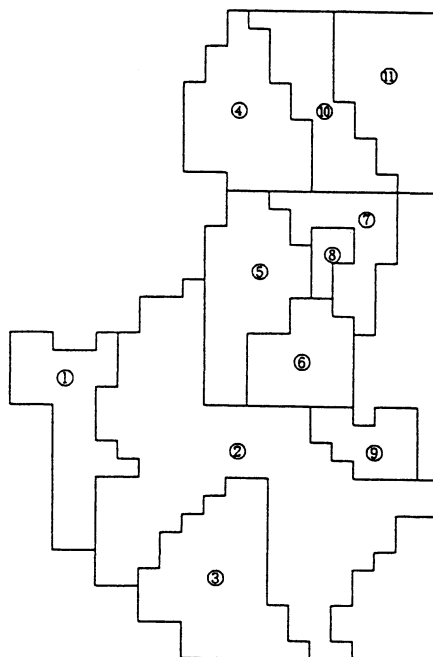
(3) 解析結果

図-8に各モデルにおける適切化パラメーターdとABICの関係を示した。全てのモデルにおいて事前情報と観測情報の相対的な重み付けを最適化するdが得られている。また各モデルの最小のABICで比較すると、最適モデルは11,10,9,12,15,20の順であった。すなわちモデル11が、与えられたデータの基では最も予測に適したモデルとして選択されたのである。

モデル11と10の違いは、モデル一番北西（左上）のゾーンを分割したか否かによる。この地域は、この解析の中で境界条件の設定に不確実な要素を持つ部分（この部分の地質、水頭の情報は少ない）で、このゾーンを細分割したモデル11が、より適切なモデルと判定された。また、モデル11と12の違いは、モデル11の南部で魚野川を跨いで東西に広がる大きなゾーンを、モデル12では魚野川で分割した点である。結果的にはデータへのモデルの当てはまりの良さをそれほど改良せず、モデル11が

表-4 各モデルの推定値近傍における条件数

モデル	事前情報なしの条件数 (d = 0)	事前情報を考慮した条件数 (d = 0)
9	9 2	9 1
1 0	8 8 4	2 9
1 1	5 8 4	5 6
1 2	9 0 5	1 2 8
1 5	1 9 3 0	4 3 0
2 0	1 3 0 8	2 4 2



	透水量係数 (ml/day)	貯留係数
Zone 1	190	2.5×10^{-2}
Zone 2	610	2.5×10^{-2}
Zone 3	200	2.5×10^{-2}
Zone 4	850	1.2×10^{-2}
Zone 5	35000	1.2×10^{-3}
Zone 6	400	4.5×10^{-3}
Zone 7	5300	6.0×10^{-3}
Zone 8	10	4.5×10^{-3}
Zone 9	100	2.5×10^{-2}
Zone 10	100	1.2×10^{-2}
Zone 11	9200	1.2×10^{-2}

図-9 推定された六日町地域の地下水帯水層モデル

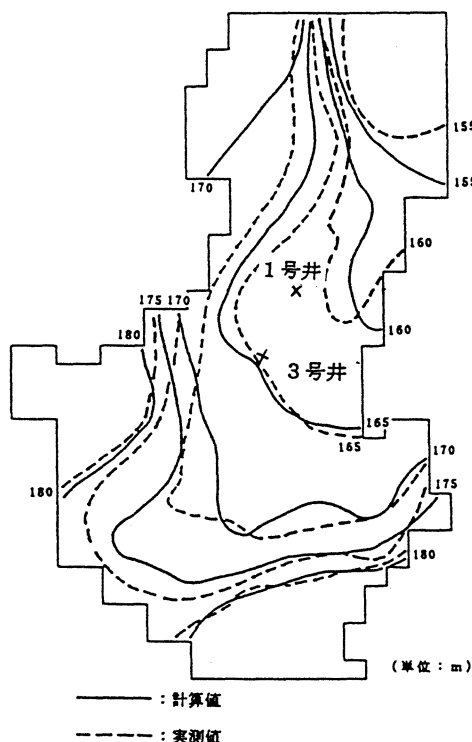


図-10 計算水位分布と実測水位分布の比較
(非降雪期、定常状態)

より適切であると判定された。

表-4に求められた最適解付近での事前情報なし、及び事前情報を考慮した場合の条件数を示した。まず今回の解析では、先に疑似データを用いた解析の場合と異なり、モデル9以外では、事前情報を考慮することにより条件数がかなり改良され、問題が適切化していることが分かる。最適と判定されたモデル11の条件数は56であり、適度に適切化されたと考えられる。図-9に今回の解析で最適と判定されたモデル11の各ゾーンの透水量係数の推定値を示した。図-10には、モデル11に基づいて計算された水頭分布と、この逆解析に用いた一斉測水結果を比較したものである。ほとんどの地域でかなり良い一致が得られているのが分かる。一番実測値と計算値が乖離しているのは、対象解析範囲の最北西部である。この部分は先に述べたように、境界条件の設定に不確実性があり、これがパラメーターの推定を困難にしていると考えられる。一方六日町付近の両者の一致はよく、このモデルの本来の目的である六日町地区での地下水管理のための予測を行うモデルとしては、適していると考えられる。

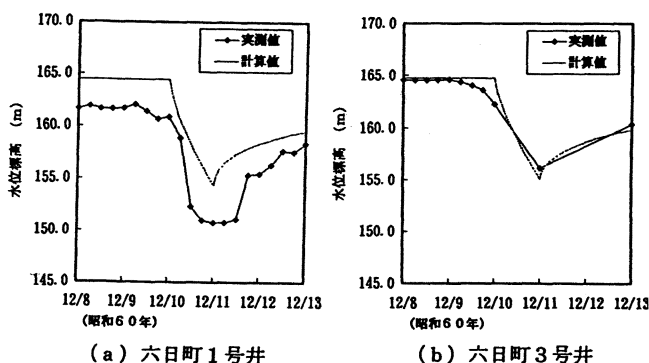


図-11 観測井戸における予測計算値と実測値の比較
(降雪時、非定常)

(4) 推定モデルによる予測

モデルの予測精度の試すために、降雪時の揚水による地下水水頭の変化を計算し、これを観測された水頭変化と比べてみた。各ゾーンの貯留係数は、定常浸透流の逆解析では求めることの出来ない値であるので、これについては揚水試験などの事前情報と、数回貯留係数を変更して計算を繰り返す試行錯誤により決定した。決定した値は、図-9の中の表に示した値である。計算に用いたのは昭和61年12月8日から13日の観測結果であり、予測結果を図-11に六日町市街地にある二つの井戸について示した。六日町1号井においては、初期水頭に若干のずれがあり、これが全体的に影響しているが、その他の点では予測はかなり正確であると言える。

5. 結論

本研究では、六日町周辺地域で得られた実際の地形・地質情報や、地下水に関する情報より、赤池のベース情報量規準 (ABIC) に基づいた拡張ベース法による逆解析により、この地域の地下水挙動を予測するために最適な地下水帯水層モデルを構築出来ることを示した。

ABICに基づいた拡張ベース法により観測データと事前情報の相対的な重み付けを適切に調整することができ、これにより逆解析で最も問題となる「不適切性」を克服することができる。さらに ABICは、最適なモデルや事前情報を選択する上でも極めて有効であることが、この例題を通じて理解されたと確信する。

今回の逆解析は、定常浸透流問題の場合に限られたが、降雪時のデータに基づく非定常浸透流問題でも同様の手法が応用でき、今後はこの手法を非定常解析に応用することにより、定常データと非定常データの持っている情報量の差異などを明らかにして行きたい。

謝辞：本研究は文部省統計数理研究所との共同研究（6-共研A-36）の成果の一部であることを明記し、御指導いただいた柏木宣久博士に深謝の意を表す。また解析に用いた貴重な資料を提供していただいた、新潟県衛生公害研究所、谷中隆明氏、大関正春氏、新潟県環境保険部、北島永一氏、（株）日さく、水谷宣明氏に感謝致します。さらに計算、データ整理等で支援頂いた、現長岡技術科学大学建設系大学院生橘川正男君にも謝意を表します。

参考文献

- 1) 大西有三, 井尻祐二: 不均質地盤における浸透流の逆問題解析手法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第376号/III-6, pp.121-130, 1986.
- 2) 青木一男, 嘉門雅史: 不均質地盤における帯水層定数の同定について, 土木学会論文集, 第382号/III-7, pp.91-99, 1987.
- 3) 本城勇介, 森嶋章: 地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定: 推定の不確実性とその予測への影響, 土木学会論文集, 第400号/III-10, pp.215-224, 1988.
- 4) 河野伊一郎, 西垣誠, 竹下祐二: 逆解析手法を用いた被圧帯水層における揚水試験結果の解析方法, 土質工学会論文報告集, Vol.29, No.2, pp.159-168, 1989.
- 5) 奥野哲夫, 鈴木誠: 不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法, 土木学会論文集, No.469/III-23, pp.93-102, 1993.
- 6) 奥野哲夫, 鈴木誠, 市川康明: 複数の揚水試験結果を用いた透水係数の空間分布推定と地下水流動の将来予測, 土木学会論文集, No.493/III-27, pp.165-174, 1994.
- 7) 長谷川高士, 村上章, 浜口俊雄: 拡張Kalmanフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III-29, pp.297-305, 1994.
- 8) Sun, N.Z.: Inverse Problems in Groundwater Modeling, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- 9) 田中博, 岡部政之, 鈴木貴: 岩波講座 応用数学 「逆問題」, 岩波書店, 1993.
- 10) 久保司朗, 逆問題, 計算力学とCADシリーズ10, 培風館, 1992.
- 11) ブイ, H.D.: 材料力学における逆問題, 青木繁他訳, 裳華房, 1994.
- 12) Honjo, Y and Kashiwagi, N.: On the optimum design of a smoothing filter for geophysical tomography, Soils and Foundations, Vol.31, No.1, pp.131-144, 1991.
- 13) Honjo, Y, Liu, W-T. and Sakajo, S.: Application of Akaike information criterion to geotechnical inverse analysis: the extended Bayesian method, Structural Safety, Vol.14, pp.5-29, 1994.
- 14) Honjo, Y, Liu, W-T. and Guha, S.: Inverse nanalysis of an embankment on soft clay by extended Bayesian method, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.18, pp.709-734, 1994.
- 15) 本城勇介: 逆解析における事前情報とモデルの選択, 講座「地盤工学における逆解析」, 土と基礎, Vol.43, No.7, pp.63-68 と No.8, pp.51-56, 1995
- 16) 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎: 情報量統計学, 共立出版, 1983.
- 17) 本城勇介: 地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定: 最適モデルの選択, 土質工学会講演集, No.24, pp.1647-1650, 1989.
- 18) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure with discussion, J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley and A.F.M. Smith (eds), Bayesian Statistics, Valencia University Press, pp.143-166, 185-203, 1980.
- 19) 赤池弘次: 事前情報の選択と応用, 「ベイズ統計学とその応用」(鈴木雪夫, 国友直人編), 東京大学出版会, pp.81-98, 1989.
- 20) 新潟県衛生公害研究所: 南魚沼地区地盤沈下機構解明調査報告書, 1988.
- 21) 谷中隆明, 永野多美雄, 山崎興樹, 水谷宣明: 新潟県六日町盆地の地下水流動, 地下水学会誌, Vol.31, No.3, pp.143-153, 1989.
- 22) 谷中隆明, 前川統一朗, 永野多美雄: 準三次元モデルによる新潟県六日町の地盤沈下予測, 地下水学会誌, Vol.31, No.3, pp.155-163.

(1995.5.1受付)

INVERSE ANALYSIS OF A REGIONAL GROUNDWATER FLOW MODEL BY EXTENDED BAYESIAN METHOD: IN CASE OF STEADY FLOW DATA

Yusuke HONJO, Hiroyuki FUKUI and Shoji OGAWA

A regional groundwater flow model of Muika-machi area in Niigata-ken, Japan, is built by an inverse analysis procedure so called the extended Bayesian method based on Akaike bayesian information criterion (ABIC). The groundwater observation data employed in the analysis is one at a steady state condition. It is illustrated through the analysis that ill-posedness which is very often encountered in this kind of inverse analysis can be overcome by introducing prior information whose relative weight to the observation data is appropriately adjusted by ABIC. The other important problem in the inverse analysis, which is model selection or parameterization problem, can also be simultaneously solved based on ABIC. The most important contribution of this paper is considered to demonstrate the effectiveness of the extended Bayesian method by analyzing actual large scale regional groundwater flow data.