

杭の水平地盤反力係数逆解析における各適切化手法の比較

Comparison of Several Regularization Procedures in Inverse Analysis of Horizontal Subgrade Reaction Coefficient of Piles

本城勇介*・酒向一也**・菊池喜昭***

Yusuke HONJO, Kazuya SAKO and Yosiaki KIKUCHI

*正会員 Ph.D. 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒 501-1193 岐阜市柳戸 1-1)

**正会員 美濃加茂市役所建設部 都市計画課 (〒 505-8606 美濃加茂市太田町 3431-1)

***正会員 運輸省港湾技術研究所 土質部 基礎工研究室 室長 (〒 239 横須賀市長瀬 3-1-1)

Most of the inverse problems encountered in geotechnical inverse analysis are illposed, thus some type of regularization procedure need to be applied. In this presentation, several regularization procedures are compared through a simple problem, a laterally loaded pile (2.4m long) in homogeneous sand in a laboratory pit. The regularization procedures employed are the minimum norm solution based on the singular value decomposition, Kitagawa's solution, L curve method and the extended Bayesian method (EBM) with ABIC (Akaike Bayesian Information Criterion). The obtained solutions are compared with the maximum likelihood solution (ML), and characteristic of each type of solution is discussed. Furthermore, the observation noise of different levels are applied to the original data to see the change of solutions for each method. The EMB showed superiority to other types of regularization procedure in a sense it automatically accomplished the best matching between the observation data and the prior information.

Key Words : *Inverse analysis, regularization procedure, singular value decomposition, L curve method, ABIC, extended Bayesian method, pile foundation, horizontally loaded pile, subgrade reaction coefficient*

1. 序論

1.1 研究の目的

最近、性能設計の導入や限界状態設計法の普及により、杭基礎の設計において変形や破壊の予測精度への要求がますます高まってきている。本研究では、菊池・高橋・鈴木(1992)¹⁾によって運輸省港湾技術研究所で行われた、杭の横方向からの載荷試験結果を用いて、逆解析により、地盤反力係数を推定する。最終的な目的は、逆解析により、より精度の高い地盤反力係数の推定することで、水平荷重を受ける杭の変位予測精度を高めることである。このため本研究では、実験土槽内で行われた、精密な菊池らの実験データの解析をいろいろな手法で行うことにより、地盤反力係数の逆解析の問題点を明確にするとともに、この問題点にもっともふさわしい逆解析手法を探し、次のシリーズの研究として予定されている、多くの杭水平載荷試験結果の逆解析のための予備的考察を行うことである。

1.2 研究の手順

研究の手順は、次の通りである。

1. 杭の解析プログラムは、Smith と Griffiths (1989)²⁾ を基に作成した、有限要素法による弾性支承上の梁解析プログラムである。そしてこれに港研方式による地盤反力係数を修正したものを、導入した。

2. 本研究では、推定しようとするパラメータは2つである。これらのパラメータより構成される平面に、評価関数のコンター図を描くことで、逆解析の問題点を視覚的に捕らえられるようにし、解の性質について考察した。その焦点は、問題の不適切性にある。
3. 逆解析の問題点を明らかにした上で、解を安定的に求める適切化の方法について検討した。ここではその方法として、特異値分解法に基づく最小ノルム解、北川の方法、拡張ベイズ法、L字曲線法を試みた。
4. 最後に、総合的な考察を行い、杭の水平地盤反力係数を推定する時、用いるべき逆解析の適切化法について考察した。

2. 実験データの概要

本研究では、実測データとして運輸省港湾技術研究所の菊池・高橋・鈴木(1992)¹⁾の行った、繰返し水平載荷下での杭の挙動において得られた結果を用いて逆解析を行った。

実験は、運輸省港湾技術研究所基礎工研究室内の大型土槽 (6m × 3m × 3m) を用いて行われた。採用したデータは、菊池ら(1992)の実験の整理番号 case 2 のものである。杭は、抗張力鋼板 (SHY685, 降伏点

$\sigma_{sy} = 70[\text{kgf}/\text{mm}^2]$ の板状で、長さ：250[cm]、厚さ：8.4[mm] 幅：20[cm] であり、 $EI : 3.00 \times 10^6[\text{kgfcm}^2]$ $EZ' : 6.30 \times 10^6[\text{kgfcm}^2]$ である。ここに、 EI は杭の曲げ剛性、 EZ' は杭の曲げモーメント換算係数である。

使用した土は、千葉県富津市浅間山から採取した砂 (2mm のふるい通過) である。この砂により、層厚 2.25[m] の地盤を土層内に作成し、杭の根入れ長を 2.1[m] とした。杭は、地上に 40[cm] 突き出しており、25[cm] の高さでワイヤーにより水平方向に載荷した。載荷は、最大計画荷重を杭の最終的な挙動が確認できるまで繰り返しかけた。約 20[kgf] の重錘を所定の荷重に見合う個数載せることで行った。

測定項目は、水平荷重を変化させた時間、荷重、載荷点の杭変位、杭頭変位、地表面での杭の変位、そして杭の曲げひずみである。曲げひずみは、杭にひずみゲージを 26 点に取り付け、ひずみを計測し、そのひずみに曲げモーメント換算係数 EZ' を乗じることで、各点の曲げモーメントを求めている。

菊池ら (1992) は、今回の実験結果には、杭頭荷重と杭頭変位の関係から港研方式の S 型地盤と仮定するのがよく合い、曲げモーメント分布、地盤反力分布についても港研方式の S 型地盤とする仮定と計算近似結果が比較的好く合うとしている。さらに菊池らは杭頭変位に基づいて、 $K_s = 0.010 [\text{kgf}/\text{cm}^3.5]$ を推定している。本論文では、この値は経験に富んだ技術者が総合的に判断して選択した地盤反力係数値であると考え、これを事前平均値として逆解析で用いている。

3. 逆問題の解法

地盤工学における逆問題において、解を得ることが困難な場合が多い。これは一般に観測データが、これらの求めようとするモデル・パラメータの数に比べ、不足していることが多いこと、また観測データのほとんどの場合、観測データにある種の偏りが存在するためである。これは逆問題では不適切性、またはデータの共線性という (大谷他, 1997; 本城, 1995)^{3),4)}。

本章では、この不適切性を解決するために提案されている、幾つかの代表的な解法についてまとめる。なお、一般の非線形の逆問題を統一的に説明する理論は、現在のところ存在しない。ここで議論するのはすべて、線形の逆問題である。非線形については、3.4 で議論をする。

3.1 一般逆行列と特異値分解

(1) 一般逆行列

線形の離散型逆解析問題は、 n 行 m 列の行列方程式として定式化されるので、この性質について考察する^{6),7)}。

$$y = X\theta \quad (1)$$

ここに、 y : 観測ベクトル (n 次元縦ベクトル)、 X : 観測行列 (n 行 m 列)、 θ : 未知パラメータベクトル (m 次元縦ベクトル) である。

この行列方程式の解の性質について、最も一般的に論じることの出来るのは一般逆行列の理論である。次の 4 つの性質の満たす行列 (m 行 n 列) を、行列 X の (ムーアペンローズの) 一般逆行列といい、 X^- で表す。

$$\begin{aligned} (XX^-)^T &= XX^- \\ (X^-X)^T &= X^-X \\ XX^-X &= X \\ X^-X^- &= X^- \end{aligned} \quad (2)$$

一般逆行列の理論を用いると、行列方程式 $y = X\theta$ の解の性質について、系統的に理解できる。その要約を図-1 と図-2 に示す。

まず、等式 $XX^-y = y$ が成り立つか否かで、解の存在を調べることが出来る。解が存在すれば、行列方程式は適合、そうでなければ不適合という。

行列方程式が適合と判断された場合、その解は $\theta_0 = X^-y + (I_m - X^-X)\alpha$ より得られる。ここに、 I_m は m 次の単位行列、 α は m 次元任意定数ベクトルである。

更に $I_m - X^-X = 0$ である場合、行列方程式は唯一解を持つ。(図-2(a)) この時、行列 X が正方行列であれば、正則行列なので、 $X^- = X^{-1}$ である。一方、 $I_m - X^-X \neq 0$ である場合、解は不定となり、任意の m 次元定数ベクトル α に応じて無数の解が存在する。この時特に、 $\theta_0 = X^-y$ は、無数の解の中で原点からの最小のノルムを持つ解である、ノルム最小解を与える (図-2(b))。

行列方程式が不適合と判断された場合は、最小二乗解という近似解を与える。この時の $\theta_0 = X^-y$ は、最小二乗解を与える (図-2(c))。最小二乗解が不定となる場合、 $\theta_0 = X^-y$ は、その中でノルム最小解となる (図-2(d))。

このように一般逆行列の理論は、行列方程式の解の一般理論を与え、線形方程式の逆行列においては極めて有用である。現実の逆解析問題では、推定する観測方程式数 n が、パラメータ数 m より多く、最小二乗解を扱うことが多い。しかしこの時でも観測行列 X の性質が悪く、最小二乗解がほとんど不安定となる場合が多い。

一般逆行列の理論に従えば、逆解析問題の不適切性とは解が不定、またはこの状況に近い場合に生ずる問題であるといえる。即ち、図-2(b) や (d) の状況に近い状況にある時、不適切性が発生し、この場合解が唯一でなかったり、観測値の微小な変化で、解が大きく変動したりといったことが起こる。しかし、観測行列や観測値には数値として与えられるので、それらの性質を判断することは、容易ではない。観測行列の性質を判断するのに最も有用な方法の一は、特異値分解法である。

(2) 特異値分解

$n \times m$ の行列 X は、次の様に特異値分解される。

$$X = U\Lambda V^T \quad (3)$$

ここに、 U は、 $n \times n$ 行列、 V は、 $m \times m$ 行列で、それぞれの行列の列ベクトル u_i と v_i は各々正規直交系の関係にあるので、

$$U^T U = I_n \quad V^T V = I_m \quad (4)$$

である。

行列 X の有効なランクが p であるとする ($p \leq \min(n, m)$)。このとき、特異値行列 Λ は、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

実際の数値計算では、特異値分解を行なっても特異値が 0 になることはない。相対的に大きな値を持つ特異値に対して、小さな値の特異値を 0 と見做し、0 でない λ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) に対応する u_i, v_i より $n \times p$ 行列、 $m \times p$ 行列を作り、対応する p 個の特異値を対角要素に入れた $p \times p$ 行列を Λ_p とすると、

$$X \simeq U_p \Lambda_p V_p^T \quad (6)$$

更に、

$$X_p^- = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T \quad (7)$$

よって、

$$\hat{\theta} = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T y \quad (8)$$

となる。式 (8) より、 $\hat{\theta}$ を直接計算する行列 $V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T$ は、ムーア・ペンローズの一般逆行列といい、式 (7) は前節で述べた一般逆行列の一つの表現である。式 (7) が一般逆行列であることは、この式が式 (3) の 4 つの条件を満たすことを示すことにより、簡単に証明できる。

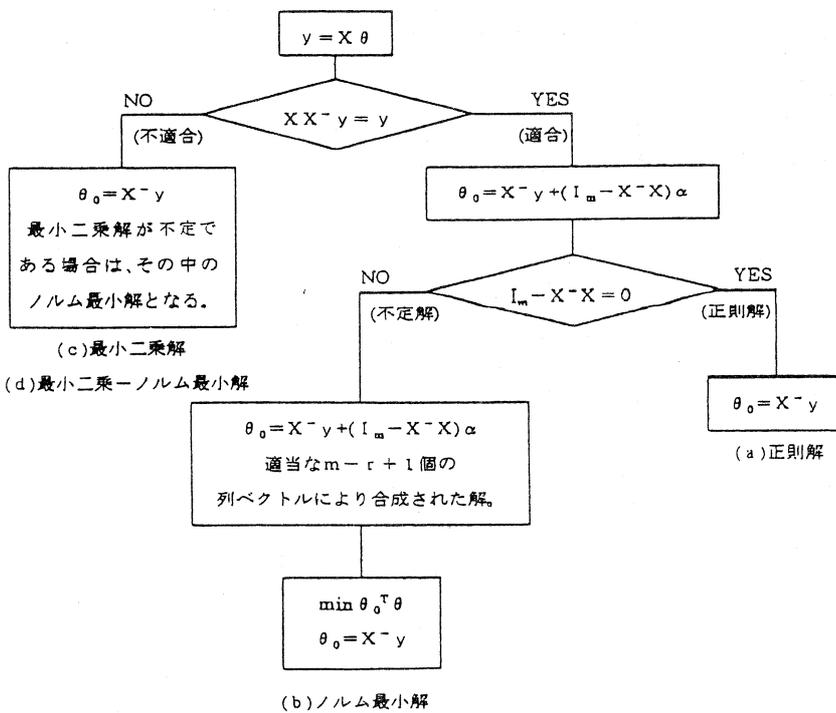


図-1 $y = X\theta$ の解の性質分類のためのフローチャート

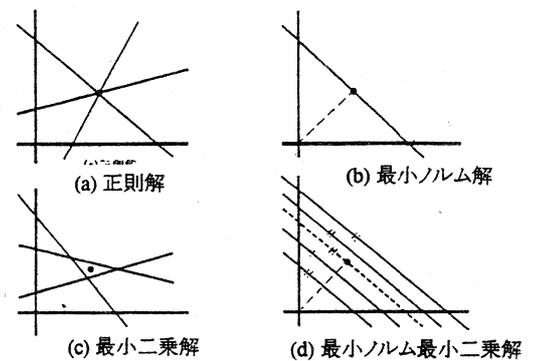


図-2 各種解の概念図

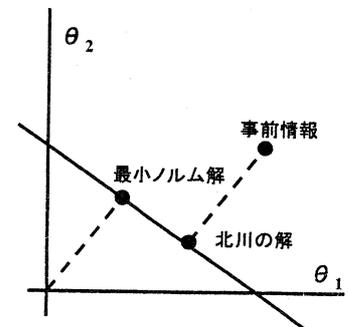


図-3 最小ノルム解と北川の解

(3) 最小ノルム解と北川の方法

前節で、特異値分解によって不適切な観測行列を適切化し、パラメータを推定する方法の大筋について述べたが、この方法を用いて具体的な解を求める方法の内、ここでは最小ノルム解と北川の方法 (Bui, 1994)⁸⁾を取り上げる。両方法とも、一般逆行列の求め方は同じであり、次の通りである。

STEP1: X の特異値分解を行う。

STEP2: 計算された特異値のうち、有意と考えられる大きいほうから p 番目までの特異値を選び、これらだけよりなる特異値行列 Λ_p を作る。

STEP3: Λ_p に基づく一般逆行列 X_p^- を求める。

最小ノルム解と北川の方法は、この先の解法が異なる。

最小ノルム解 (minimum norm solution): 最小ノルム解 θ_{mn} は、以下のように与えられる：

STEP4_{mn}:

$$\theta_{mn} = X_p^- y \quad (9)$$

最小ノルム解を θ の 2 次元空間で概念的に示したのが図-3 である。最小ノルム解は、許容される解の内でも原点に近い θ の組み合わせを取る。

北川の方法 (Kitagawa's method): 北川は、 θ について事前情報 θ^* が与えられている場合、許容される解の内、 θ^* に最も近い (ノルム最小) 解を取ることを提案した。この解は、座標の平行移動を考えることにより、次のように求められる：

STEP4_k:

$$\theta_k = X_p^- y + (I_m - X_p^- X) \theta^* \quad (10)$$

天谷・原・青木 (1997)⁹⁾ は、北川の方法と類似の方法で、平面画像から人体の立体的動きを再現する方法を提案している。北川の方法の概念図を、図-3 に示した。

3.2 拡張ベイズ法

不適切性を克服するための一つの方法として、事前情報の導入がある。これを定式化するのが、ベイズ統計学に準拠したベイズ法である。先の特異値分解に基づく最小ノルム解や北川の方法が、情報から雑音を省くことにより解の適切化を図っていたとすれば、ベイズ法は雑音を圧倒するような事前情報を導入することにより、解の適切化を図る方法であるといえる。

ところで、データのみを客観的な材料と考え、データのみを解析の対象と考える伝統的統計学と、事前分布を事象に対する主観的な確信の度合いとし、データは事前分布を更新していく材料であると考えるベイズ統計学

の間には、歴史的対立がある。前者は、統計学はデータの上に立脚し、データを解析する科学であると主張し、後者は、我々が対象について持っている知識は、現在与えられたデータに限らず、経験など多くの情報の総体であるから、経験などの情報も統計解析に持ち込むべきだと主張してきた。

逆解析の分野でも、事前情報についての議論がある。逆解析の場合、個々のパラメータのおおよその値がわかかっていて、その値を事前情報として用いるとしても、その確信の度合い (具体的には、 θ の事前分散・共分散行列 V_θ) を観測データ分布の分散・共分散行列 V_ϵ の大きさと兼ね合いで、どのように決定したらよいかという問題である。事前分布と観測データは全く異種の情報で、相対的な重み付けを合理的に行うことは、非常に難しい。

地下水の逆解析で多くの実績を上げている Newman は、早くも 1973 年、この問題を認識し、彼が、「拡張ベイズ法」と名づけた、次のような評価関数を提案した (本城, 1995)⁴⁾。

$$J_3(\theta) = (y - X\theta)^T V_\epsilon^{-1} (y - X\theta) + \lambda^2 (\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) \quad (11)$$

λ^2 は、正のスカラ値で、この値で 2 つの情報 (事前分布と観測データ) の重みを調整するパラメータである。

本城 (1995)⁴⁾ は、 λ^2 の大きさを赤池ベイズ情報量規準 (ABIC) で決定することを提案している。そしてその ABIC の式は次のようになる。

$$ABIC = -2 \int f(y|\theta) p(\theta|\lambda) d\theta + 2 \dim(\lambda^2) \quad (12)$$

ABIC は、最適な λ の選択及び、いろいろな異なった統計モデルの選択の問題に、用いることができる。

3.3 L 字曲線法

Hansen (1992)¹⁰⁾ は、 λ^2 を変化させて評価関数 J_3 の最小化を行ない、その結果得られた式 (11) の第 1 項 $(y - X\theta)^T V_\epsilon^{-1} (y - X\theta)$ と第 2 項 $(\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*)$ を、それぞれを縦横軸とした平面にプロットしたとき、それが L 字形をした曲線を描き、その角点を最適解として選ぶことを提案した。この方法についても考察する。

3.4 非線形問題の取扱い

これまでは線形の場合について話を進めてきたが、現実問題では非線形問題を扱うことがほとんどであり、本研究の扱う問題もこれになる。非線形問題の観測方程式は一般に、

$$y = f(\theta) + \epsilon \quad (13)$$

ここに、 y : 観測ベクトル (n次元) , $f(\theta)$: 物理モデル式ベクトル (n次元) , θ : モデルパラメータベクトル (m次元) , ϵ : 誤差ベクトル (n次元) ($N(0, V_\epsilon)$ に従う) である。

この時、最小2乗法 (最尤法) , 拡張ベイズ法の θ を推定するための評価関数は、各々次のようになる。

$$J_1 = (y - f(\theta))^T V_\epsilon^{-1} (y - f(\theta)) \quad (14)$$

$$J_3 = (y - f(\theta))^T V_\epsilon^{-1} (y - f(\theta)) + \lambda^2 (\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) \quad (15)$$

非線形の問題においても観測データの量や質に問題があれば、線形の場合と同じく逆問題は不適切となり、上記の評価関数の解が不安定となるなどの問題を生じる。

評価関数の最小化を行って求めた θ の推定値を $\hat{\theta}$ とすると $f(\theta)$ をこの解の周りでテーラー展開し、その第二項までを取って線形化する。この時、感度行列 X は次のようになる。

$$X = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_m} \end{bmatrix}_{\theta=\hat{\theta}} \quad (16)$$

非線形問題においてこの感度行列は、線形観測方程式の観測行列と同様に考えて評価を行っていくのが普通 (というよりは、これ以外に他の代替的な方法がないのが現状) であり、本研究もこの方法を用いている。

感度行列を用いると、非線形観測行列方程式は、次の様に線形化される。今、 $\tilde{\theta}$ を最適解近傍の点とすると、 $y \simeq f(\tilde{\theta}) + X(\theta - \tilde{\theta})$ 。従って、 $y - f(\tilde{\theta}) \simeq X(\theta - \tilde{\theta})$ 。ここで、 $\delta y = y - f(\tilde{\theta})$, $\delta \theta = \theta - \tilde{\theta}$ とおくと、

$$\delta y \simeq X \delta \theta \quad (17)$$

式(17)は、 $\tilde{\theta}$ を一応の解とした時、その残差により、 $\tilde{\theta}$ を改良するための調整値 $\delta \theta$ を求めるために用いることのできる方程式である。この方程式に特異値分解を適用し、最小ノルム解や北川の解を求めることができる。

4. 解析結果と考察

4.1 2パラメータモデルの設置

本研究では、菊池ら(1992)¹⁾の行った実験結果に基づき、地盤反力係数を推定する。ところで、久保(1964)⁵⁾によって提案された港研方式の特徴の地盤反力係数は、次式により与えられる。

$$k_h = \frac{1}{2} K_s \cdot x \cdot y^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

ここに、 K_s : 港研方式S型地盤の地盤反力係数 [$kgf/cm^{3.5}$] , x : 深度方向の変位 [cm] , y : 水平方向の変位 [cm]。この式は、地盤反力が y の0.5乗に比例して発揮されるとしている点に特徴がある。しかし本研究では、この0.5乗も推定すべきパラメータとし、次式により地盤反力係数を表現する。

$$k_h = \alpha \cdot K_s \cdot x \cdot y^{\alpha-1} \quad (19)$$

この時、このモデルのパラメータは K_s と α の2つが存在する。2パラメータモデルでは、これを2軸とする平面に、目的関数のコンター、各種解法により与えられた解をプロットすることができ、問題の不適切性も視覚的に捕らえることができるなどの利点がある。

本研究では、精度のきわめて高い菊池らの行った実験データを、2つのケースについて解析している。1つは、この実験データをそのまま使って逆解析を行うやり方であり(4.2節)、もう1つは、この実験データにいくらかの誤差を意図的に付加し、その値を観測データとして用いて解析を行っている。(4.3節)

菊池らは、実験結果の杭頭変位に基づき、港研方式S型地盤における係数 K_s と α の値として、 $K_s = 0.010[kgf/cm^{3.5}]$ と $\alpha = 0.500$ を求めている。本研究では整理の都合上、この値に杭幅20[cm]を掛けた値を $k_s = 20 \times K_s$ として用いている。従って菊池らの求めた値は、 $k_s = 0.200[kgf/cm^{2.5}]$ 、 $\alpha = 0.500$ である。元々の港研方式の地盤反力係数を求めるときの定数 K_s と、これに杭幅20 cm を乗じた k_s は、この論文では区別されているので、特に注意されたい。

本研究では、この菊池らにより設定された値を、経験豊富な技術者が、総合的な判断により設置したと考え、北川の方法、拡張ベイズ法においては、これを事前平均値としている。

4.2 解析結果

(1) 最小2乗法 (最尤法) による解

最小2乗法の評価関数 J_1 (式(14))のコンターを、係数 k_s とパラメータ α を2軸と示した(図-4)。最小2乗法の解(最小二乗解)は、 $k_s = 0.069[kgf/cm^{2.5}]$ 、 $\alpha = 0.619$ であった。

コンター図はかなり偏平な形をしており、評価関数 J_1 は、 k_s の最適解に対しては、きわめて敏感であるが、 α に関しては鈍感であることがわかる。これは、港研方式が α を0.5に固定していることを、正当化していると考えられる。

なお、ここで断っておきたいのだが、以上のような結果を見て、杭の挙動予測精度は k_s の値に支配され、従って α は、ある範囲に入っていれば(例えば、 $\alpha = 0.5$ としておけば)どのような値を取ってもかまわないと判断し、これ以上逆解析を続けても無駄であるし、解析の必要も無いと判断することは、この問題に関しては間

違えてはいない。しかし、別の状況においては2つのパラメータを、これと同様な条件で決定する必要がある場合がある。(例えば、2つの層にまたがって根入れされた杭の、それぞれの土層の k_s の値を求めるような場合が、これに当たる。)本研究の問題意識はそのような場合の解の求め方にむしろ興味があり、この問題を本例題を通じて考察することに狙いがある。

このコンテキストで、推定しようとしている2つのパラメータに関する評価関数のコンター図をプロットするときの、各パラメータの値のスケーリングについて議論しておきたい。正規確率変数としてこれらのパラメータを捕らえたとき(実際問題では、正規性を仮定せざるを得ない。値を対数変換して、変換値が正規分布すると言った仮定は、もちろん許される。)、そのもっともふさわしいスケーリングの方法は、それぞれのパラメータをそれらの平均値と標準偏差により標準化してから、この平面にコンター図を描くべきであることに議論の余地はない。すなわち、 $\{(パラメータ値)-(平均値)\} / (標準偏差)$ で計算した値で、プロットを行なうのである。

しかし、実際には解析以前に、それぞれのパラメータがどの程度の平均値や標準偏差を持っているかを事前に知ることは、きわめて難しい。平均値は、経験的に設定可能な場合でも、標準偏差は、経験的にそのパラメータが取る範囲、そのモデルに関する感度などに影響されるので、これを決定する決まった方法は現在存在しない。せいぜい、パラメータの常識的に取ると考えられる範囲で、適当に標準偏差を仮定すると言うことになると思われる。この研究では、それぞれのパラメータの事

前平均値の3分の1程度から数倍程度の範囲で、コンター図をプロットした。

スケーリングの問題は、特異値分解を行なったときの特異値の値とも関係するので、厄介な問題である。本研究の目的は、ある程度の不適切性が認められる問題における適切化を対象とし、それを視覚的に捕らえ、説明できる例題を提示することをひとつの大きな目的としている。常識的なパラメータの値の範囲で、そのような不適切性が、幸いにも表れた格好の例題となった。以下の議論で、スケーリングの問題には、これ以上立ち入らない。

(2) 特異値分解法による解

次に前節の方法により求めた感度行列を特異値分解し、3.3で説明した方法により一般逆行列を求める。これを得る際に、ノイズと思われる相対的に小さい値の特異値を削除し、一般逆行列 X_p^{-1} の作成を行わなければならない。本研究では、パラメータ数は2つなので、特異値も2つ求められる。このとき求められた特異値とその固有ベクトルは、次の通りである。

まず、特異値は、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2.03 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 6.13 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

次に、これに対応する固有ベクトルは、

$$U = \begin{bmatrix} -0.99 & -0.10 \\ -0.10 & 0.99 \end{bmatrix} \quad (21)$$

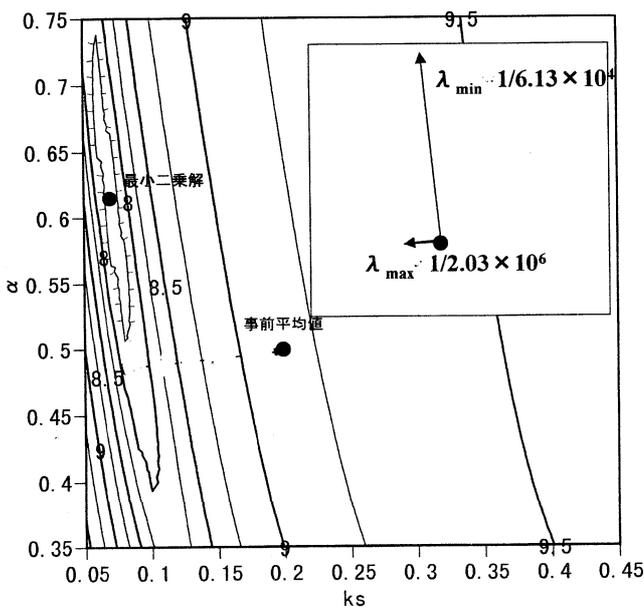


図-4 最小二乗法の評価関数コンター図と固有ベクトル

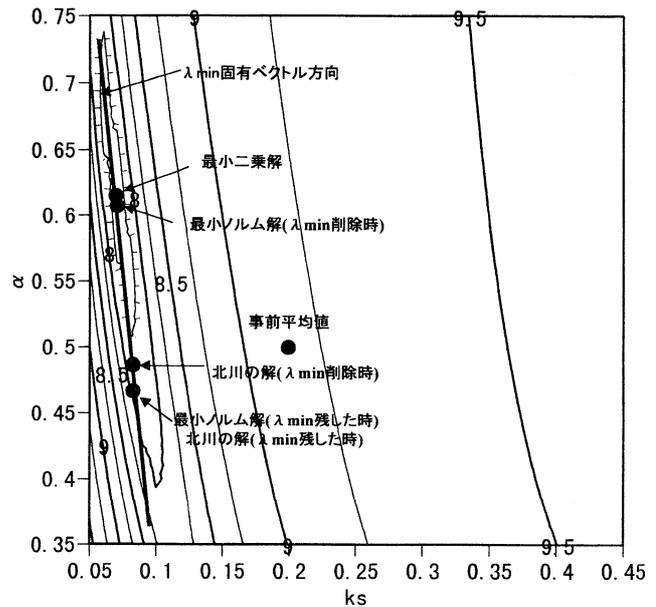


図-5 最小ノルム解と北川の解

特異値と固有ベクトルの値に注意してみると、大きい特異値に対応している固有ベクトルは、ほぼ k_s 軸に平行しており、また小さい特異値に対応している固有ベクトルは、 α 軸に平行である。これは、図-4のコンター図に見たように、評価関数 J_1 が、 k_s の変化には敏感なのに対し、 α の変化には鈍感であることと1対1に対応している。換言すると、 k_s の値は精度良く推定されるが、 α の推定された値は、計測の少しの誤差によっても変動し、その値の正確な推定は困難である。

この時、小さい方の特異値を削除せず、一般逆行列を作成し求めた解と、削除して求めた解を図-5に各々示す。これらの解を、前者を線型近似最小2乗解、後者を最小ノルム解と呼ぶ。また、この節では特に最小2乗解を、非線形最小2乗解と呼ぶことにより、線型近似最小2乗解とは異なるものであることを強調する。

この場合条件数は33.2であり、データの共線性は大きいといえないが、最小ノルム解を見ると、 λ_{min} を考慮するか否かによって、線型近似最小2乗解とは大きく異なることがわかる。ここで興味深いのは、最小ノルム解は先に求めた非線形最小2乗解と変わらないことである。非線形逆問題における最小ノルム解の計算では、非線形最小2乗解で観測方程式を線形化しているので、非線形最小2乗解が安定したものであれば（すなわち、展開した非線形最小2乗解近傍で評価関数により形成される曲面が、2次曲面と一致していれば）、線形近似最小2乗解と非線形最小2乗解は一致すべきである。 λ_{min} を入れて得られた線型近似最小2乗解は、線形化近似の影響を受けているといえる。あるいは、この程度の変動をする不安定な解といってもよい。

一方、北川の方法は小さい特異値を削除した結果得られる不定解の中で、最も事前情報に近い解を選ぶ。この

場合、 λ_{min} を削除することにより不定解は非線形最小2乗解を通る λ_{min} に対応する固有ベクトル $(-0.10, 0.99)$ 方向の直線上にある。北川の解は、この直線上の事前情報の最も近い解となる（図-5参照）。北川の方法では、 λ_{min} が含まれていてもその影響により、解はほとんど影響されず、非常に安定している。

以上より、特異値分解で小さい特異値の削除を行うという作業は、非常に重大な意味があることがわかる。本例題では、パラメータは2つと非常に簡単な例である。これが、多くのパラメータを考慮した時には、このような視覚的な判断は不可能であるが、小さい特異値を削除することにより安定した解を得るロジックは、全く同様である。

(3) 拡張ベイズ法の解

評価関数 J_3 （式(15)）を用い、パラメータ λ^2 を ABIC を最小化することにより求めた。その結果、ABIC を最小化するのは、 $\lambda^2 = 1.0 \times 10^7$ であり、このときのパラメータの値は $k_s = 0.070 [kgf/cm^{2.5}]$ と、 $\alpha = 0.608$ であった。

図-6には、 λ^2 各々の値について得られた解を、最小2乗法（最尤法）の評価関数によって作成したコンター図上に、プロットしたものである。これによると、 λ^2 が小さい間は、解は最小2乗法にほぼ一致するが、 λ^2 を徐々に大きくしていくと解は、先に示した最小の特異値に対応する固有ベクトル $(-0.10, 0.99)$ の方向に動き始め、それから大きく曲線を描いて、最終的に事前平均値に至る。

このような解の挙動は、非線形関数の最適化手法として有名なマルカート法の解の収束への軌跡と酷似している。それは、拡張ベイズ法の λ^2 による評価関数の調整が、マルカート法の収束安定化のための評価関数の

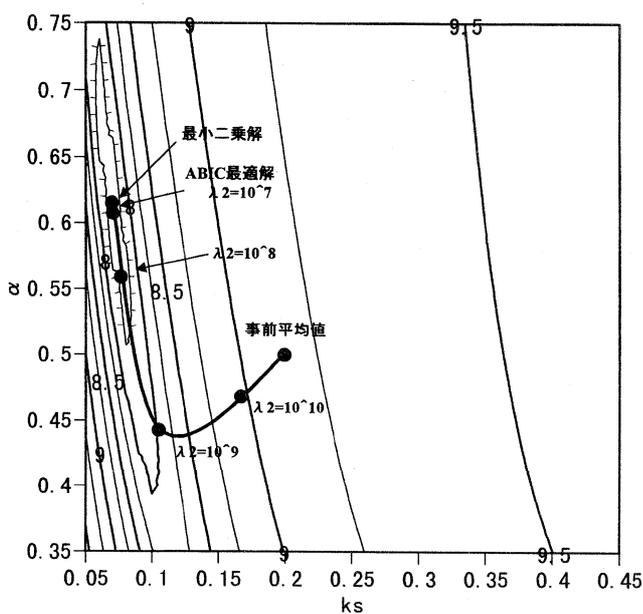


図-6 λ^2 に応じた拡張ベイズ解の変化

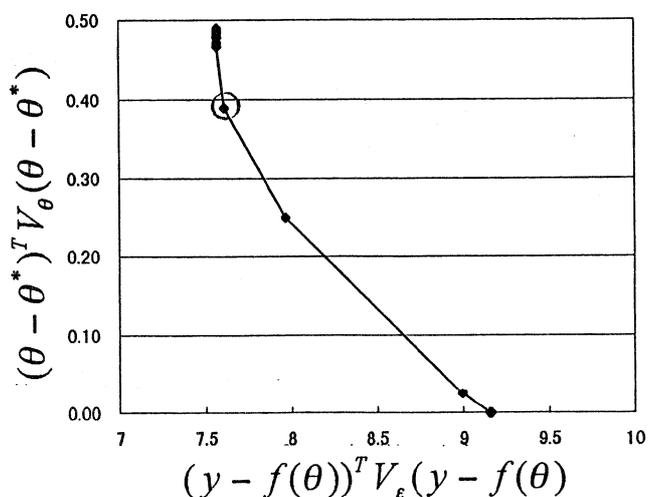


図-7 L字法による解の選択

変形と全く等価であるためである。マルカート法では、 λ^2 が大きい間は急降下方向へ、 λ^2 小さくなるに従い、最小固有値に対応する固有ベクトルの方向へ解の収束方向が変わっていくことを示すことができる(中川・小柳,1983)⁷⁾。

(4) L字曲線法の解

図-7に、L字曲線を求めた。この場合この曲線は完全なL字型にはならないが、これは問題の不適切性(共線性)が弱いためと思われる。ABICの最小値を与える点は、第1項が大きく変化する一つ手前のものである。

L字曲線は、このコンター図のような特性を持つ解の性質を、上手く捕らえている。すなわち、観測データへの当てはまりをそれほど犠牲にしない範囲で、推定値をできるだけ事前平均に近づけようとしているわけである。その折衷の妥協点としてL字曲線の角点を選ぶと言うわけである。

(5) 各解における計算曲げモーメント

事前平均値と、逆解析により各々算出した解により計算した曲げモーメントを図-8に示す。ここで、点線は菊池らの実験により得られた実測値のモーメントを表す。

事前平均値での計算結果に比べ、逆解析によりそれぞれ求めた解での計算結果は、曲げモーメント最大点、そしてさらに下に現れる曲げモーメントゼロ点の位置がほとんど等しく、各々の逆解析の解の確からしさがわかる。

4.3 ノイズを付加した観測データの解析

(1) 数値実験の目的と方法

ここでは、菊池らの行った実験の観測値に意図的にノイズを付加させて前節と同じ逆解析を行い解を求めた結果を考察する。この目的は、ノイズの有無ないし大

小により、解がどのように変動するかを知ることにある。ノイズの含め方としては、菊池らの実験の実測値を、各々標準偏差0.10, 0.20, 0.30で発生させた正規乱数に1.0を加えたものと掛け合わせ、実測値を作り出した。

(2) 逆解析の解の変化

図-9に、各々の実測値を用いた上での最小二乗法によるコンター図と、そこに菊池らの値と、各方法で求めた逆解析の解を示した。

図-9から読みとれるように、(a)から(d)に向かうに連れ、つまりノイズを多く含むに連れて、コンター図は平滑化されていくのがよく分かる。しかし、コンターが平滑になってもその谷の出現位置は、ほとんど変わらない。

各々の解は、ノイズが大きくなるに従って、全体に谷沿いに α の値が小さくなる方向に移動しているのがわかる。最小2乗法により求めた解は、特異値分解法により求めた解に常に等しい値をとっている。拡張ベイズ法により求めた解は、最小2乗解に近いところから徐々に離れた。これは、コンター図の谷の平滑化に連れ、事前情報値の重みが増し、引っ張られていることによる。

一方北川の解は、ノイズがいくら大きくなっても、ほとんど動かない。これは、図-9の4つのコンター図より明らかのように、ノイズの添加は特異値に対応する固有ベクトルの方向をほとんど変化させないため、ノイズと判断される小さい特異値を除くことによって得られる、許容される解の空間の中で、最も事前平均値に近い解を与えるという、北川の解の性質による。なお、観測方程式が線形の場合は、観測値にノイズを加えても、特異値や固有ベクトル方向に変化はない。しかしこの問題では、観測方程式は非線形であり、非線形最小2乗解は、与えたノイズの大きさにより変化するため、線形

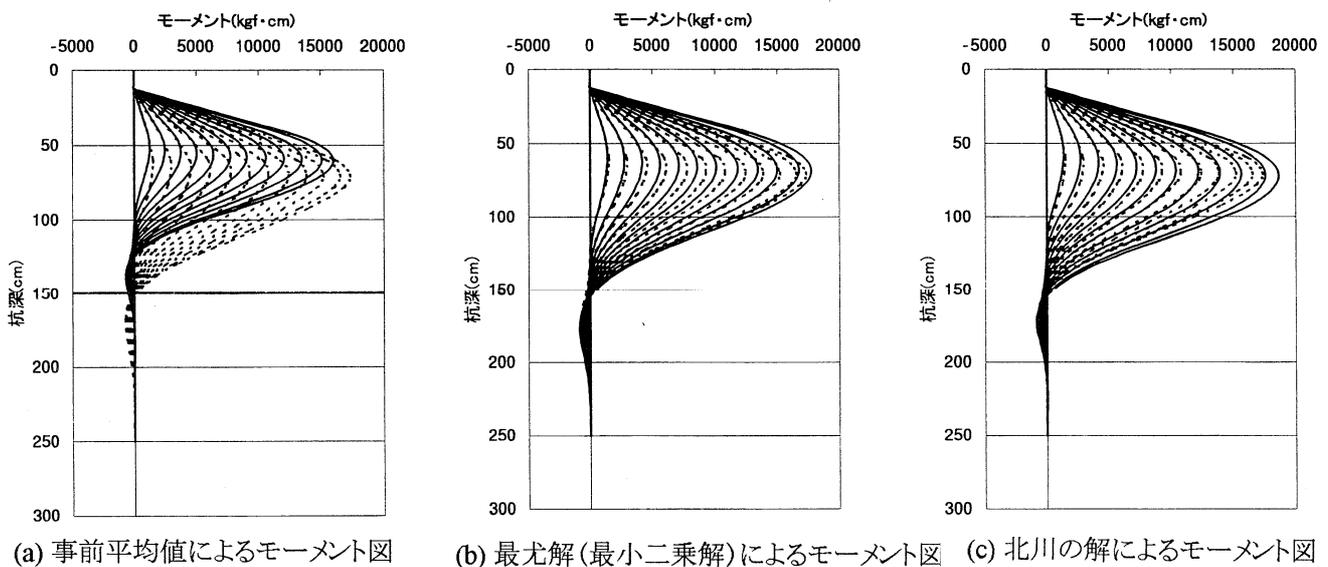


図-8 各解により予測されたモーメント図と実測モーメント図

化近似のためのテーラー展開の展開点が変化するので、観測行列は変化し、その結果特異値と固有ベクトル方向も若干変化することに、注意を要する。

5. 結論

以上、代表的な逆解析の5つの解法を試みてきたが、本研究で用いた菊池らの行った実験値においては、最小2乗解(最尤解)、特異値分解法による最小ノルム解、拡張ベイズ解、L字曲線法の解は、ほぼ等しい値に解が得られた。これは、もともとの観測データの精度の良さのためと考えられる。そしてこれらの解は、実測値にノイズを付加し、その割合を増加させた時、最小特異値に対応した固有ベクトルの方向に徐々に動き、拡張ベイズ解には、事前平均値へその値が引っ張られている方向に大きく動いた。また、北川の解については、本研究で試みた、いかなる場合でもほとんどその解は変わらなかった。その理由は、上述した通りである。

今回の試みは、非線形逆問題における最小2乗法の評価関数によってコンター図を描くことにより現れた、視覚的に捕えられた問題の不適切性(共線性)、そして各々の逆解析の適切化法による解の変化、またそのノイズの大きさとの関係など、逆解析の問題や、各々の解法の特徴を理解するには、良い例題になったと思われる。

参考文献

- 1) 菊池喜昭・高橋邦夫・鈴木操：繰り返し水平荷重下で大変形する砂地盤中の杭の挙動，港湾技術研究所報告 第31巻第4号 pp.33-66, 1992.
- 2) Smith, I.M. and Griffiths, D.V.: Programing the finite element method (2nd ed.), Wiley, 1989.
- 3) 大谷順他 11名：基礎理論ワーキンググループ報告，地盤工学における逆解析の適用と施工管理に関するシンポジウム発表論文集, pp.1-26, 地盤工学会, 1997.
- 4) 本城 勇介：逆解析における事前情報とモデルの選択(その1)及び(その2)，講座「地盤工学における逆解析」，土と基礎, Vol.43, No.7, pp63-68 及び No.8, pp51-54, 1995.
- 5) 久保浩一：杭の横抵抗の新しい計算法，港研報告第2巻，第3号, p.34, 1968.
- 6) 斎藤 正徳：特異値分解と最小二乗，物理探査 第36巻 第3号, pp36-48, 1983
- 7) 中川 徹，小柳 義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会, 1982
- 8) Bui, H.D. (青木 繁他訳)：材料力学における逆問題，裳華房, pp207-217, 1994
- 9) 天谷 賢治，原 祐二，青木 繁：逆解析手法による3次元人体運動の再構成，機会学会論文集(C編), Vol.63, No.608, pp129-133, 1997
- 10) Hansen, P.C.: Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, SIAM review, Vol.34, No.4, pp.561-580, 1992

(1999年4月23日 受付)

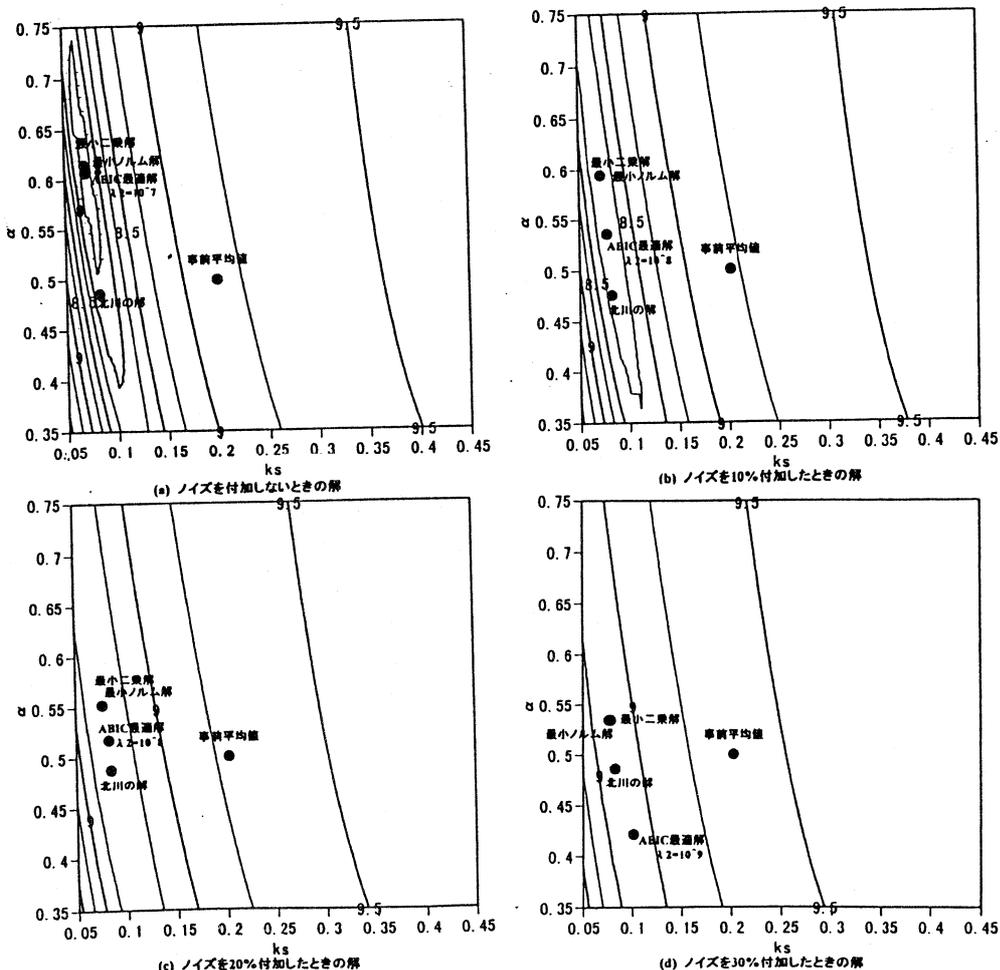


図-9 ノイズの付加による各解の変化