

# 杭基礎の鉛直荷重～変位特性の評価法入門

## 7. 杭基礎の設計における不確実性の評価法 (その1)

本城 勇介 (ほんじょう ゆうすけ)  
岐阜大学工学部土木工学科

鈴木 誠 (すずき まこと)  
清水建設(株)和泉研究室

### 7.1 はじめに

杭基礎の設計においては、限られた地盤調査や土質試験結果に基づいて、鉛直支持力を精度良く推定することが実際に要求される。一般に杭の鉛直支持力を推定するには、地盤調査から求められた  $N$  値や土質試験より求められる粘着力や内部摩擦角などの強度定数から計算する方法と、直接に載荷試験から求める方法の2種類がある。前者は地盤物性値の評価だけでなく、そこから鉛直支持力を推定するモデルの不確実性を考慮する必要がある。一方、後者では、載荷試験で求められる極限支持力は一つのサンプルであるため、対象現場全体の杭の平均的な支持力に対して過大評価であったり、過小評価であったりする可能性がある。そのため、そのまま評価規準(設計支持力)とするには危険すぎるので、なにかしらの割り引きが必要となってくる。このような杭設計における不確実性を、確率論や統計学を用いて定量的に評価し、設計値を設定することが考えられてきた。

本章の目的は、杭鉛直支持力の設計値の設定について、地盤調査や土質試験からの地盤物性値を介する方法と直接に載荷試験から求める方法に関して、現在提案されていることを整理し紹介することである。特に、紹介するに当たっては、直感的理解の容易さと、すぐ実際の問題に役立つように、基礎的な内容を説明するように心掛けた。しかし、確率論と統計学の基本的な事項については、その方面の図書<sup>1)</sup>を参照していただきたい。また、地盤工学における不確実性の分類や性質については、文献2)を参照されたい。

以下、7.2節では、地盤調査や土質試験から地盤物性値を求め、それをを用いて鉛直支持力の設計値を設定するときに重要となる地盤物性値の不確実性のモデル化に焦点を当てる。特に、空間的な相関特性と移動平均の概念について詳しく説明する。また、7.3節では、杭の設計上重要であると考えられる、杭の載荷試験の個数による鉛直支持力の信頼性評価を考慮した設計値の問題を取り上げる。

### 7.2 地盤調査や土質試験結果に基づく杭鉛直支持力の設計値

杭の鉛直支持力に関する地盤物性値は、土のせん断強度である粘着力や内部摩擦角などとして扱われている。

これらの地盤物性値は、空間的にばらつきをもっているので、確率的なモデル化を行う必要がある。極限先端支持力  $R_{pu}$  などはある位置(杭先端位置)の値であり、極限周面摩擦力  $R_{su}$  は杭長に沿って積分された値である。このような性質を考え、地盤物性値を空間的な相関特性を有する確率場と仮定する。ここでは、確率場とそれを記述するための統計量推定方法を説明する。実用上重要なのは、これらの1点における値ではなく、ある長さ、面積や体積についての平均値であるという立場から、その移動平均確率場(Moving average random field)の考え方を紹介する。さらに、確率場の記述の要である自己相関関数の推定方法についての注意を述べる。

#### 7.2.1 確率場とそれを記述する統計量

地震力や風荷重は、時間とともに連続的に変化する量である。また、地盤の物性値は同一地層内では連続的に変化すると考えられる。このような問題では、対象となる確率変数は時間や空間の関数となり、 $Z(t)$  また  $Z(x_1, x_2, x_3)$  等と表される。時間的な問題では確率過程、空間的な問題では確率場と呼ぶことが多い。先にも述べたようにここでは、これらを一括して確率場と呼ぶ。

確率場において、不確実性を記述するために用いるのは通常2次までの統計量である。すなわち、次の平均値関数、分散関数、自己相関関数の三つの関数により記述される:

$$\text{平均値関数: } \mu_Z(x_1, x_2, x_3)$$

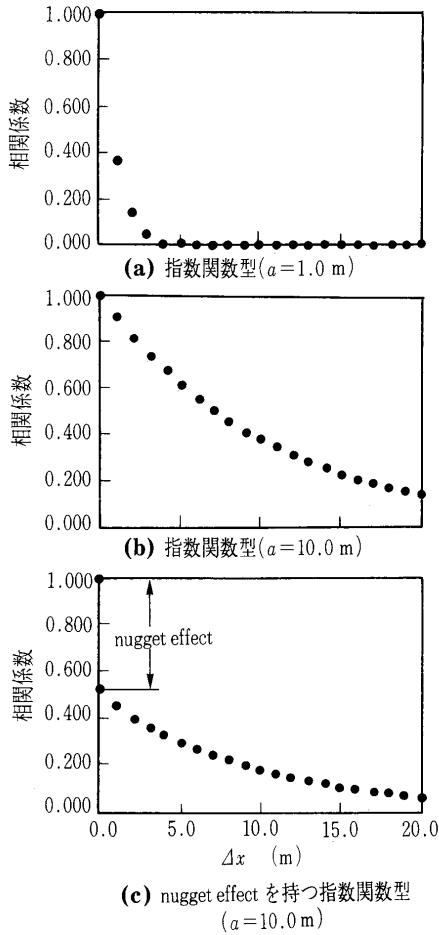
$$\text{分散関数: } \sigma_Z(x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{自己相関関数: } \rho_Z(x_1, x_1'; x_2, x_2'; x_3, x_3')$$

ここで、自己相関関数とは2地点間の相関係数を表現したものである。平均値関数と、分散関数とその座標によらず一定値をとり、さらに自己相関関数が座標間の相対的な位置(距離)にのみ依存し、その絶対座標によらないとき、そのような確率場を(弱)定常であると言う。ほとんどの実際問題では、この定常性が仮定されている。

一次元で考えると自己相関関数は、 $x$  と  $x' = x + \Delta x$  の差  $\Delta x$  の絶対値の関数として表され、一般に  $|\Delta x|$  の増加とともに減少する。例えば、これを指数関数  $\exp[-|\Delta x|/a]$  で表し、この定数  $a$  を自己相関距離と呼ぶ。図-7.1(a)と(b)に、自己相関距離が比較的長い場合と短い場合の自己相関関数を示し、図-7.2(a)と(b)に平均と分散が等しいが、異なる自己相関距離を持った二つの確率場のシミュレーション結果を示した。自

講座



図一7.1 自己相関関数の例

自己相関距離が  $a=1.0$  m と小さくなると隣接した場所での変動が大きく、逆に  $a=10.0$  m と大きくなると隣接した場所での変動が小さくなるという挙動の違いは一目瞭然である。

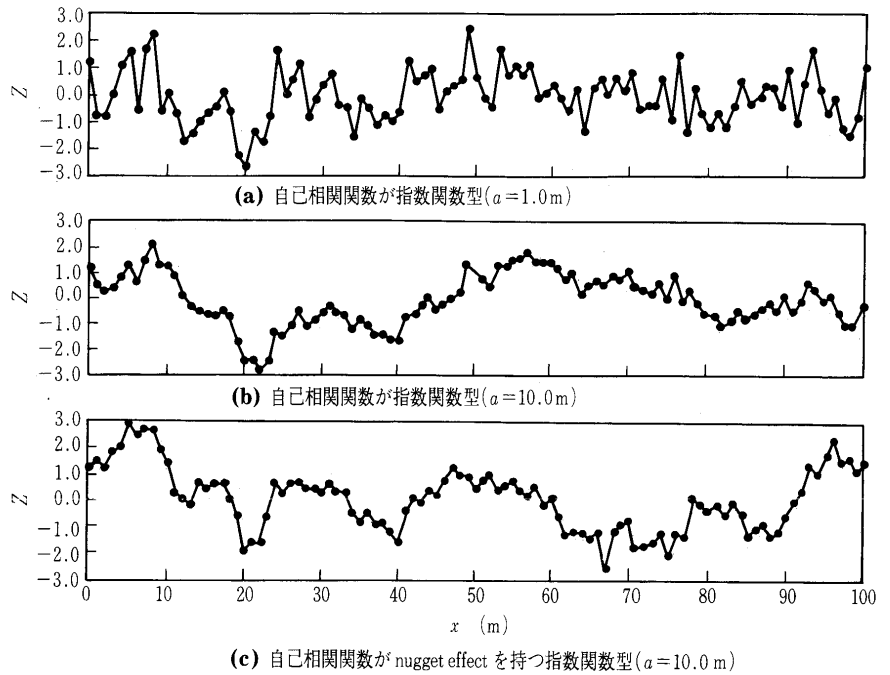
自己相関関数を地盤工学に应用する際のもう一つの重要な点は、nugget effect (金塊効果) の影響である。nugget effect とは、確率場が比較的長い自己相関距離を持つ成分と、ホワイトノイズのようなきわめて短周期 (いかなるゼロでない  $\Delta x$  に対しても、自己相関関数  $\rho_z(\Delta x)=0$  の成分を併せ持つときに現れる自己相関関数の原点における不連続性を言う。図一7.1(c)と図一7.2(c)に、先の図と同様に、自己相関関数と、そのシミュレーション例を示した。この自己相関関数を式(7.1)に示す。

$$\rho_z(\Delta x) = \begin{cases} 0.5 \exp[-\Delta x/10.0] & (\Delta x > 0.0) \\ 1.0 & (\Delta x = 0.0) \end{cases} \dots\dots\dots (7.1)$$

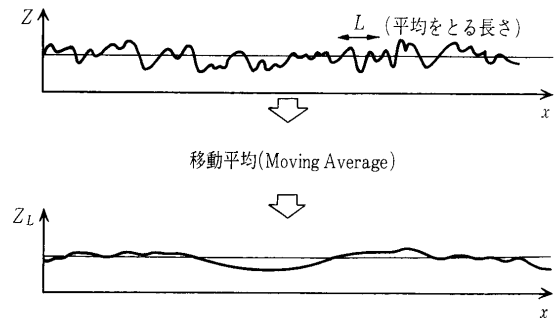
このような相関構造は、 $N$  値のデータ等でよく見られ、長周期成分は地盤物性値本来の相関関係を、短周期成分は試験の誤差を表していると考えることが多い。

7.2.2 移動平均確率場の分散の低減

地盤物性値の空間分布を確率場で表現すると、杭周面摩擦力などのようにある面積をもつばらつきが必要となり、確率場の平均値を扱うことになる。このような平均値の作る確率場を移動平均確率場と言う (図一7.3)。この方法の重要性は、次のような点にある。



図一7.2 一次元確率場のシミュレーション例



図一7.3 移動平均確率場の概念図

1. 地盤の支持力, 安定, 変形等で問題となるのは、地盤内のある1点における地盤の性質というよりは、ある面積や体積についての平均値である場合が多い。
2. 移動平均確率場は、ある分布に従う確率変数の平均を対象としているので、中心極限定理<sup>注1)</sup>により、正規確率場に近づくことが期待され、信頼性解析、閾値通過の問題<sup>注2)</sup>等の扱いが圧倒的に容易になると考えられる。

ここで、移動平均確率場の平均値は、元の確率場の値と同じであるが、その分散は場合によっては元の確率場に比べ著しく減少する。これは、信頼性解析等を行うとき相当大きな影響を結果に与える場合があるので、この点には注意が必要である。

移動平均確率場の地盤工学における重要性を早くから指摘し、その解析のための道具を用意したのは Vanmar-

注1) 厳密さを欠く表現であるが、多数の独立な確率変数の和の平均値をとると、もとの分布は何であってもサンプル数を無限大にすると、この平均値の分布は正規分布に収束するという定理である。  
 注2) 時系列の変動量が、ある限界値を、定められた期間内に超える確率を扱う問題である。

表-7.1 自己相関関数と変動のスケール<sup>3)</sup>

自己相関関数 $\rho_Z(L)$	変動のスケール $\delta_Z$
指数関数型: $\exp[- L /a]$	$2a$
ガウス関数型: $\exp[-(L/b)^2]$	$\sqrt{\pi} b$

cke (バンマーク)<sup>3),4)</sup>である。最近では、実務面でも限界状態設計法へ設計コードを移行させるため、キャリブレーション(擦り合せ)における信頼性解析等で応用されている<sup>5)</sup>。

移動平均は一次元の場合、座標  $x$  をその平均をとる長さ  $L$  の中心位置とすると、次のように定義される:

$$Z_L(x) = \frac{1}{L} \int_L Z(u) du \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

三次元の場合も、 $V=L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$  とすると、同様に次のように定義される:

$$Z_V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{V} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} Z(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

Vanmarcke は、このような移動平均の分散の値を次のように近似的に計算することを提案している<sup>注3)</sup>:

$$\text{一次元の場合: } \sigma_{Z_L}^2 = \sigma_Z^2 \Gamma_Z^2(L) \quad \dots\dots\dots (7.4)$$

$$\text{三次元の場合: } \sigma_{Z_V}^2 = \sigma_Z^2 \Gamma_{Z_1}^2(L_1) \Gamma_{Z_2}^2(L_2) \Gamma_{Z_3}^2(L_3) \quad \dots\dots (7.5)$$

ただし、ここに  $\Gamma_Z^2(L)$  は、分散関数 (Variance function) と呼ばれ、移動平均を計算する領域の大きさ  $L$  の増加に伴い、分散の減少の度合いを表す関数であり、次のように定義される。

$$\Gamma_Z^2(L) = \begin{cases} 1 & L \leq \delta_Z \\ \frac{\delta_Z}{L} & L \geq \delta_Z \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7.6)$$

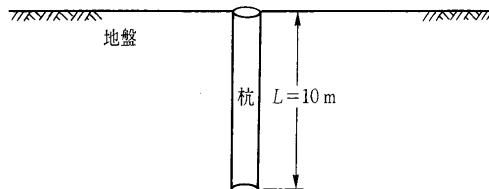
ここに、 $\delta_Z$  は、確率場  $Z$  に関する変動のスケール (Scale of fluctuation) と呼ばれる値で、自己相関距離より自己相関関数の形に応じて表-7.1のように求まる。移動平均場の分散が、なぜこのように近似されるかについては、付録 7.A を参照されたい。ここでは、この結果を用いて計算された移動平均確率場の分散の計算例を示す。

**例題 7.1** 均質な砂地盤中に打ち込まれた長さ  $L=10.0$  m の杭全体についての  $N$  値の平均値の分散を求めたい (図-7.4(a))。ただし、この砂地盤における  $N$  値の標準偏差  $\sigma_N=8.0$ 、自己相関関数は指数型で、その自己相関距離  $a=0.5$  m であるとする。移動平均値の標準偏差  $\sigma_{N_{10}}$  は、次のように求められる。

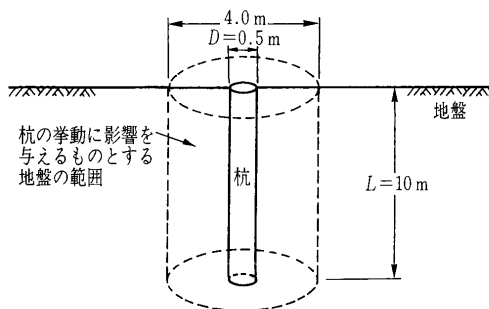
$$L=10.0 \text{ m} > \delta_Z=2a=2 \times 0.5 \text{ m}=1.0 \text{ m} \text{ (表-7.1より)}$$

$$\sigma_{N_{10}} = \sigma_N \cdot \Gamma_N(L) = \sigma_N \cdot \sqrt{\frac{\delta_Z}{L}} = 8.0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5}{10.0}} = 2.53$$

これから分かるように、自己相関距離  $a$  が短く、移動平均を取る長さ  $L$  (杭長) が長くなるほど、移動平均



(a) 例題 7.1: 杭の長さについての  $N$  値の移動平均



(b) 例題 7.2: 杭周りの円柱部についての  $N$  値の移動平均

図-7.4 杭と地盤の概念図

の分散は小さくなる。すなわち、同じ均質地盤であれば長い杭の方が短い杭に比べて周面摩擦力のばらつきが低減されるため、安全性余裕が大きくなると言える。

**例題 7.2** 同じく均質な砂地盤に打ち込まれた長さ  $L=10.0$  m、直径  $D=0.5$  m の杭を考える。この杭の挙動に影響を与えるマスとしての地盤の大きさは、深さ  $10.0$  m (長さ)、直径  $4$  m (杭直径の  $8$  倍) の円柱状の地盤であるとする (図-7.4(b))。この円柱状の地盤についての平均  $N$  値を求めたい。ただし、この砂地盤における  $N$  値の標準偏差  $\sigma_N=8.0$ 、自己相関関数は指数型で、その深度方向の自己相関距離  $a_1=0.5$  m、水平方向のそれは  $a_2=50$  m であるとする。

平均値の標準偏差  $\sigma_{N_{10}}$  は、次のように求められる。

$$L_2=2.0 \text{ m} < \delta_Z=2a_2=2 \times 50.0 \text{ m}=100.0 \text{ m},$$

よって  $\Gamma_{N_{L_2}}(L_2)=1$

$L_1 > \delta_Z$  (例題 7.1 と同じ)

$$\begin{aligned} \sigma_{N_{10}} &= \sigma_N \cdot \Gamma_{N_{L_1}}(L_1) \cdot \Gamma_{N_{L_2}}(L_2) \\ &= 8.0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5}{10.0}} \cdot 1.0 = 2.53 \end{aligned}$$

この例では、深度方向の自己相関距離は短いのに対し、水平方向のそれは極めて長く、水平方向への平均操作は実際の移動平均場の分散の低減には、まったく影響を与えていないことが分かる。

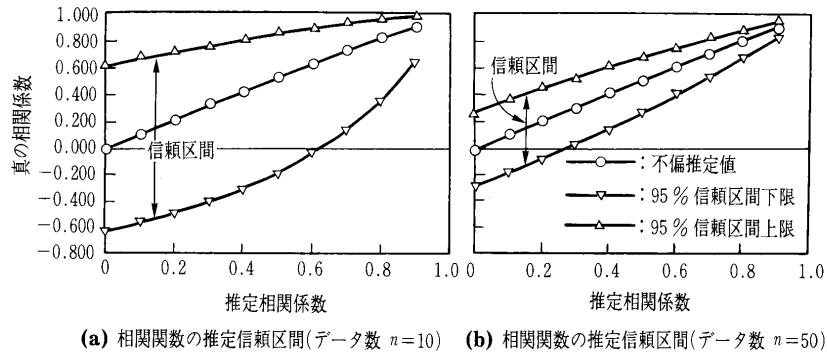
さらに Vanmarcke は、この理論により、隣接した移動平均場の相関の計算方法、閾値超過確率の計算方法など多くの提案を行っており、実務への応用のための道具は、多く揃っている。

**7.2.3 自己相関関数の推定**

移動平均場の問題で、自己相関関数  $\rho_Z(\Delta x)$  あるいはそれに分散を乗じた共分散関数  $C_Z(\Delta x) = \sigma_Z^2 \rho_Z(\Delta x)$  は、きわめて重要な役割を果たしていることが分かる。

実際の問題では、自己相関関数は計測されたデータ  $z(x)$  から推定される。すなわち一般には次式により推定する:

注 3) 多次元確率場で、分散関数をこのように書けるのは、自己相関関数が各変数の関数の積として表現できる、いわゆる分離可能な相関構造 (separable correlation structure) のときに限られる。地盤工学への応用では、相関構造がこの構造を満たすと仮定できる場合が多い。



(a) 相関関数の推定信頼区間(データ数 n=10) (b) 相関関数の推定信頼区間(データ数 n=50)

図-7.5 推定自己相関係数の信頼性区間

$$\hat{\rho}_Z(\Delta x) = \frac{\frac{1}{n_{\Delta x}} \sum_{i=1}^{n_{\Delta x}} (z(x_i + \Delta x) - \bar{z})(z(x_i) - \bar{z})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (z(x_i) - \bar{z})^2} \dots\dots(7.7)$$

ここで、 $\hat{\phantom{z}}$  (ハット) は推定値を表している。また  $n$  はデータ数、 $n_{\Delta x}$  は  $\Delta x$  間隔離れた 2 点で計測されたデータの組み合わせ数である。また、

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} z(x_i)$$

である。

このような相関係数の推定の信頼性を評価する方法は Fisher (フィッシャー) により提案されており、推定相関係数の 95% 信頼性区間をデータ数 10 の場合と 50 の場合について、図-7.5 に示した (信頼区間の計算法の詳細は付録 7.B 参照<sup>注4)</sup>)。特にデータが 10 個の場合、推定相関係数が 0.6 より小さい範囲で、信頼区間はかなり広く、精度の高い推定は困難であることを示している。地盤のデータは数が少ない場合が多く、自己相関関数の推定が困難であることがうかがわれる。そのため、地盤調査の密度を増すことにより推定精度を向上させることが、地盤物性値の不確実性を減少させる助けとなる。

地盤統計学で有名な空間分布推定法の一つである Kriging (クリギング) では、自己相関関数と等価な、次の関数  $\gamma_Z(\Delta x)$  をバリオグラムと呼び、これを用いて自己相関構造を同定することを奨励している<sup>6),7)</sup> :

$$\hat{\gamma}_Z(\Delta x) = \frac{1}{2n_{\Delta x}} \sum_{i=1}^{n_{\Delta x}} (z(x_i + \Delta x) - z(x_i))^2 \dots\dots\dots(7.8)$$

$Z(x)$  が定常場であれば、バリオグラム  $\gamma_Z(\Delta x)$  と共分散関数  $C_Z(\Delta x)$ 、自己相関関数  $\rho_Z(\Delta x)$  の間には、次の関係が成り立つ :

$$\begin{aligned} \gamma_Z(\Delta x) &= \frac{1}{2} E[(Z(x + \Delta x) - Z(x))^2] \\ &= C_Z(0) - C_Z(\Delta x) \\ &= \sigma_z^2(1.0 - \rho_Z(\Delta x)) \dots\dots\dots(7.9) \end{aligned}$$

ここで、 $E[ \ ]$  は期待値を表している。したがって共分散関数とバリオグラムの間には、図-7.6 に示すような関係がある。

バリオグラム図の形から、確率場のある領域内でのみ平均値が一定値をとる場合等を、ある程度判断できると

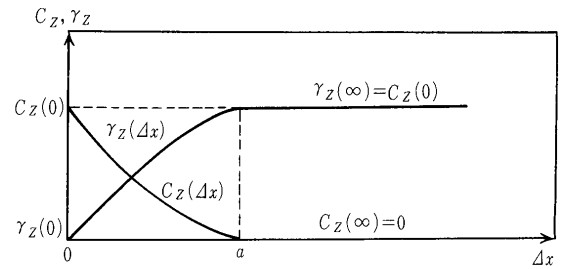


図-7.6 バリオグラムと共分散関数

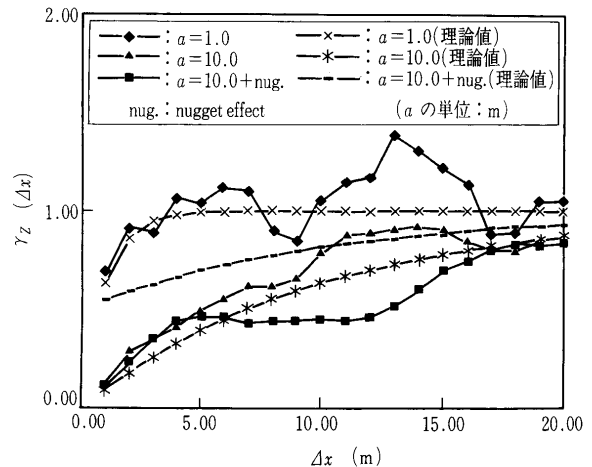


図-7.7 バリオグラムの推定例

いう利点があるため、kriging においてバリオグラムを自己相関構造を同定するための道具として用いる。そのため、 $1/2[z(x_i + \Delta x) - z(x_i)]^2$  をプロットし、この図より目視でバリオグラムの当てはめを行うことを奨励している。自己相関構造の推定の困難さを考えると、このような経験的な方法は、その物理量の特性や過去の経験を踏まえ行うことができるので、一つの実用的な方法と思われる。図-7.7 に、図-7.2 に示したシミュレーションデータの内 50 組を用い、式(7.8)を用いて推定したバリオグラムを示した。併せて想定しているバリオグラムの理論値も示した。

付録 7.A : 移動平均確率場の分散関数の誘導<sup>3)</sup>

移動平均確率場の分散  $\sigma_{z_L}^2$  は次式により計算できる。また分散関数  $\Gamma_z^2(L)$  の定義も併せて示した。

$$\begin{aligned} \sigma_{z_L}^2 &= E[(Z_L(x) - \mu_Z)^2] \\ &= E \left[ \frac{1}{L^2} \int_L \int_L (z(u) - \mu_Z)(z(v) - \mu_Z) du dv \right] \end{aligned}$$

注 4) この信頼区間は、 $N=n_{\Delta x}$  の場合のものであるので注意

$$= \sigma_z^2 \Gamma_z^2(L)$$

したがって分散関数は、次のように自己相関関数  $\rho_z$  を積分することより得られる。

$$\begin{aligned} \Gamma_z^2(L) &= \frac{1}{L^2} \int_L \int_L \rho_z(u-v) du dv \\ &= \frac{2}{L^2} \int_0^L (L-u) \rho_z(u) du \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \rho_z(u) du - \frac{2}{L^2} \int_0^L u \rho_z(u) du \end{aligned}$$

自己相関関数が指数型  $\rho_z(\Delta x) = \exp[-|\Delta x|/a]$  のとき、分散関数は次式のようになる。

$$\Gamma_z^2(L) = 2 \left( \frac{a}{L} \right)^2 \left( \frac{L}{a} - 1 + \exp \left[ -\frac{L}{a} \right] \right)$$

また、これがガウス型  $\rho_z(L) = \exp[-(L/b)^2]$  のときは、

$$\begin{aligned} \Gamma_z^2(L) &= \left( \frac{b}{L} \right)^2 \left( \sqrt{\pi} \frac{L}{b} \Phi \left( \frac{L}{b} \right) - 1 \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[ -\left( \frac{L}{b} \right)^2 \right] \right) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\Phi$  は誤差関数である。

いずれの分散関数においても、 $L \rightarrow \infty$  のとき、 $L\Gamma_z^2(L)$  は、ある有限値に収束する。すなわち、指数型では  $2a$ 、ガウス型では  $\sqrt{\pi}b$  に収束する。これは、いずれの分散関数においても、 $L \rightarrow \infty$  のときの第1項の減衰が、第2項や第3項と比較して、かなり遅いことを意味している。換言すると、第1項のみを取り出して分散関数を近似しても、分散関数はかなり精度よく近似できることを意味している。Vanmarcke は、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L\Gamma_z^2(L) = \delta_z$$

と置き、この  $\delta_z$  を変動のスケール (Scale of fluctuation) と名付け、これを用いて、式(7.7)として、分散関数を近似することを提案したのである。また、 $\delta_z$  は、どのような関数型の自己相関関数でも統一的に表現できるという利点があり、変動の様子を記述するパラメータとしても用いることができる。

#### 付録 7. B : 相関係数の推定の信頼性<sup>5)</sup>

今、確率変数  $X$  と  $Y$  の計測値のペア、 $(X_i, Y_i)$ ,  $(i=1, \dots, n)$  がある。これらのペアは、それぞれ独立に測定されたものとする。 $X$  と  $Y$  の相関係数の不偏推定量<sup>注5)</sup>  $\hat{\rho}_{xy}$  は、次のように表される：

$$\hat{\rho}_{xy} = R \left( 1 + \frac{1-R^2}{2(n-4)} \right)$$

ここに、 $R$  は次のように与えられる：

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

また  $\hat{\rho}_{xy}$  の  $\alpha$  信頼性区間は、次のように求められる：

$$\frac{e^{2u_{\alpha-}} - 1}{e^{2u_{\alpha-}} + 1} \leq \hat{\rho}_{xy} \leq \frac{e^{2u_{\alpha+}} - 1}{e^{2u_{\alpha+}} + 1}$$

ここに、 $u_{\alpha-}$  と  $u_{\alpha+}$  は、

$$u_{\alpha-} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} - \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{n-3}}$$

$$u_{\alpha+} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} + \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{n-3}}$$

なお、95% 信頼性区間には  $K_{\alpha} = 1.96$ 、90% には  $K_{\alpha} = 1.65$ 、68% には  $K_{\alpha} = 1.00$  を用いる。

#### 参 考 文 献

- 1) Ang, A. H-S and Tang, W. H. (伊藤 學・亀田弘行訳)：土木・建築のための確率・統計の基礎，丸善，1977.
- 2) 本城勇介・正垣孝晴・鈴木 誠・松井謙二・平山英喜・柚木裕二・奥村文直・渡辺啓行：第3編 第3章 地盤構造物の設計法，地盤工学ハンドブック (1999年版)，地盤工学会，1999.
- 3) Vanmarcke, E. H.: Probabilistic modelling of soil profiles, Jour. of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 103, No. GT11, pp. 1227~1246, 1977.
- 4) Vanmarcke, E. H.: Ramdom Fields: analysis and synthesis, The MIT Press, 1983.
- 5) Barker, R. M., Duncan, J. M., Rojiani, K. B., Ooi, P. S. K., Tan, C. K. and Kim, S. G.: Load factor design criteria for highway structure foundations, final report, NCHRP 24-4, 1991.
- 6) Journel, A. G. and Huijbregts, C. J.: Mining Geostatistics, Academic Press, 1978.
- 7) Wachermagel, H.: Multivariate Geostatistics: Second completely revised edition, Springer, 1998.
- 8) 竹内 啓：数理統計学，東洋経済新聞社，pp. 171~175, 1966.

本講座では、上記各文献から図表を引用する際、英語表現の和訳、SI単位への換算、記号その他の説明の追加や修正を行っております。

注5) 推定量の期待値が推定量のパラメータと一致するような推定量である。詳細については文献1)を参照されたい。