Information Processing Society of Japan

社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2003－AL－92 (1)
2003／11／7

An Optimal File Transfer on an Undirected Path Network with 2-level Arc Cost

金 子 美 博 (Yoshihiro Kaneko)

抄録：ファイル複製ネットワークNは，幾つかの点から他の点へそれぞれ必要部数のファイルのコピーを転送するような情報伝達のモデルであり，ファイルの複製コストと転送コストが設定されている．最適な file transfer とは，各点で作るファイルのコピーの部数と各枝を転送させるファイルのコピーの部数を決定して，最小コストのファイル転送を実現させるものである．一般的なNに対して最適な file transfer を求める問題はNP 困難であるが，この問題が多項式時間で解けるNのクラスも知られている．これまで，転送コストが線形である場合を考察してきた．しかし，実際のネットワークシステムでは，情報のサイズに応じて，線形ではなく，階段状に転送コストが増加することもしばしばある．階段状の場合は，線形に比べ，その非線形性から，最適性を議論したり，多項式時間で最適な file transfer を求めるのは難しいことが予想される．本報告では，そのような問題への第一歩として，Nが無向パスグラフで，各点の需要値が1であるように限定した上で，点数nに対する$O(n^2)$で最適な file transfer を構成するアルゴリズムを提案する．

Abstract: A problem of obtaining an optimal file transfer on a file transmission net N is to consider how to distribute, with the minimum total cost, copies of a certain file of information from source vertex to others on N by the respective vertices' copy demand numbers. The problem is NP-hard for a general file transmission net. Some class of N on which polynomial time algorithm to solve the problem has been known. So far, we assumed that N has a linear function as an arc cost. In this report, we suppose that N has an undirected path graph structure with its arc costs being 2-level step functions. As a result, we show that the problem can be solved in $O(n^2)$, where n is the number of vertices.

1．はじめに

特定の情報に対して需要のあるネットワークシステムにおいて，ある目的関数を最適化して，情報を配信するような問題は，ファイル割当問題，広い意味での，ネットワークロケーション問題として知られている．[1,2 他] インターネットに代表されるようにコンピュータネットワークが大規模かつ身近になるにつれ，このようなネットワークロケーション問題は，基本的な興味ある問題である．

本報告では，転送コストが2段階の **file transfer** 問題をパスグラフ構造に限定して考察する．既に有向パスグラフについては考察済みである．[3] 無向パスグラフの場合は，有向パスグラフの場合での解法に対して，新たに定義する“後倒し”という操作を加えれば，最適な **file transfer** が求められることがわかったため，これを報告する．尚，補題や命題の証明は紙面の都合上，文献[4]に譲り，ここではやむなく省略する．

2．準備

まず，本研究が扱う **file transfer** 問題に必要な用語を定義する．整数の集合をZ^+とし，$Z^+_0=Z^+\cup\{0\}$とする．他に断りがなければ，枝およびパスは，全て有向であるものとし，辺は，全て無向であるものとする．本報告で扱う(有向)パスは全て，同じ点を2度以上通らないものとする．また，パスPの全ての枝集合をA(P)で表す．

考察対象とするネットワークモデルは，$N=(V,E,c_V,c_E,d)$で表され，ファイル複製ネットワークNと呼ばれる．Nは，点集合がVであり，辺集合がEであり，Vの各点 v がコスト $c_V(v)$および需要値$d(v)$を持ち，各辺 e がコスト $c_E(e)$を持つ無向ネットワークである．今回の報告では，Nの構造をパスグラフに限り，各点の需要値を1と限定する．そのため，$n=|V|$とし，$V=\{v_i \mid i=1,2,\ldots,n\}$および$E=\{(v_i,v_{i+1}), \mid i=1,2,\ldots,n-1\}$である．$E$の各辺$(v_i,v_{i+1})$ $(1\leqq i<n)$を，反対方向の2本の枝(v_i,v_{i+1})および(v_{i+1},v_i)に置き換えた枝集合をE_Aで表す．簡単のため，枝(v_i,v_{i+1})および枝(v_{i+1},v_i) $(1\leqq i<n)$をそれぞれe_iおよびe'_iで表す．e'_iは，逆枝と呼び，e_iと区別する場合がある．従って，$E_A=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1},e'_1,e'_2,\ldots,e'_{n-1}\}$となる．また，$V$の各点vに対して，vに入る$E_A$上の枝集合を，$A_-(v)$で表し，vから出る$E_A$上の枝集合を，$A_+(v)$で表す．点 v_jに対して，$An(v_j)=\{v_i\in V \mid 1\leqq i<j\}$および$De(v_j)=\{v_i\in V \mid j<i\leqq n\}$とする．$An(s)=\phi$である点sをソースと呼び，$De(t)=\phi$である点tを端点と呼ぶ．$N$では，$v_1$がソースであり，$v_n$が端点である．簡単のため，点$v_i$に対して，点$v'$および点$v''$は，それぞれ点$v_{i-1}$および点$v_{i+1}$を指すものとする．よって，$A_-(v)=\{(v',v),(v'',v)\}$および$A_+(v)=\{(v,v'),(v,v'')\}$であるが，$v_1'$や$v_n''$は定義されない．また，$E_A$上の関数fに対して，あるパス P の全ての枝 e が$f(e)>0$

岐阜大学工学部応用情報学科，Faculty of Engineering Gifu University, E-mail:kaneko@info.gifu-u.ac.jp

NII-Electronic Library Service

ならば，Pはf連結である，という．点集合$V_k=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$($1\leqq k\leqq n$)および枝集合$E_k=\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1}\}$である，$N$の部分ネットワークを，$N_k$で表す．$k=n$ならば，$N$自体であり，$k=1$ならば，$E_1=\phi$であり，1個の点$v_1$からなるネットワークである．

Nの内部を通って伝えられる情報は，ファイルの形式で書かれ，どの点でもコピーができ，コピーの違いによる相違はないものとする．このようなファイルを記号Jで表す．JはNの外部からソースv_1に与えられ，ソースではJのコピーが必ず作られ，枝を通って各点に転送される．このような状況の下で，点vのコスト$c_V(v)$は，vでJのコピーを1部作るのに必要なコストである．ソースで作られたJのコピーは，下のように定義される **file transfer** に基づいて，各点vに伝えられ，vからNの外へコピーが1部づつ取り出される．

[定義 1]　Nにおいて，$\Psi: V\rightarrow \mathbf{Z}_0^+$である関数$\Psi$および，$f: E_A\rightarrow \mathbf{Z}_0^+$である関数$f$が

$$
\text{(C1)}\quad
\begin{aligned}
f(e'_1) + \Psi(v_1) &= f(e_1) + 1,\\
f(e_{i-1}) + f(e'_i) + \Psi(v_i) &= f(e'_{i-1}) + f(e_i) + 1 \quad (1<i<n),\\
f(e_{n-1}) + \Psi(v_n) &= f(e'_{n-1}).
\end{aligned}
$$

(C2)　$\Psi(v_1)>0$であり，かつ，$\Psi(v)>0$である点vに対して，v_1からvへf連結なパスが存在する．

を満たすならば，(Ψ, f)をNの **file transfer** と呼ぶ．また，各枝eの転送コストは，次のように定義される．

$$c_E(e)=0\quad (f(e)=0),\qquad c_E(e)=C_{\mathrm{I}}\quad (0<f(e)\leqq L),\qquad c_E(e)=C_{\mathrm{II}}\quad (f(e)>L).$$

ここで，C_{I}, C_{II}, $L\in Z^+$, $C_{\mathrm{I}}<C_{\mathrm{II}}$を満たす．$N$上の **file transfer** $D=(\Psi, f)$のコスト$C(D)$を，

$$C(D) = \Sigma_{v\in V}\, c_V(v)\cdot\Psi(v) + \Sigma_{e\in EA}\, c_E(e), \qquad (1)$$

とする．N上のある **file transfer** Dが，N上の他の任意の **file transfer** D'に対して，$C(D)\leqq C(D')$ならば，DはNにおける最適な **file transfer** であるという．□

以下では，他に断らない限り，**file transfer** はN上で定義されるものとする．**file transfer** (Ψ, f)では，$\Psi(v)$は点vで作るJのコピーの部数を表し，$f(e)$は枝eを転送されるJのコピーの部数を意味する．また，枝(v_i,v_j)のfの値$f((v_i,v_j))$を簡単のため，$f(v_i,v_j)$で表す．

本研究での **file transfer** 問題とは，与えられたファイル複製ネットワークNに対して，どうやって最適な **file transfer** が求められるか，という問題である．この **file transfer** 問題は，Nがたった2個の点からなる場合でも，並列枝を持つならば，NP−困難である．それゆえ，この問題を多項式時間で解くための最初のステップとして，Nの構造が無向パスグラフである，という制限を加える．まず，**file transfer** に関して次の補題が成り立つ．

[補題 1]　(Ψ, f)が **file transfer** ならば，$1\leqq i<n$なる各整数iに対して，$f(e_i)\geqq 1$が成り立つ．　□

各 **file transfer** に対して，点に対する性質を次のように定義する．

[定義 2]　**file transfer** (Ψ, f)において，$\Psi(v)>0$であるならば，コピーが点vで作られている，もしくは，点vは複製点である，といい，そうでなければ，点vは非複製点である，という．(Ψ, f)における複製点集合とは，$\{v\in V\mid \Psi(v)>0\}$である．複製点集合Wが，$W=\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ ($s\in Z^+$)のような順序で書かれているとき，他に断りがなければ，各整数j ($1\leqq j<s$)に対して，$w_{j+1}\in De(w_j)$が成り立つものとする．点集合U上の点xが複製点であり，$An(x)\cap U(\subseteq V)$上の各点uが$\Psi(u)=0$を満たすとき，xはUにおける最初の複製点である，もしくは，Uにおいてxで最初にコピーが作られる，という．$U=V$ならば，そのようなxは単に，最初の複製点という．点集合U上の点yが複製点であり，$De(y)\cap U$上の各点uが$\Psi(u)=0$を満たすとき，yはUにおける最後の複製点である，もしくは，Uにおいてyで最後にコピーが作られる，という．$U=V$ならば，そのようなyは単に，最後の複製点という．点xおよび$De(x)$上の点yが共に複製点であり，x−yパス上に，xとy以外は複製点を含まないとき，yはxの次の複製点，もしくは，xはyの前の複製点，という．また，xとyとは隣接する(複製点である)，という．　□

ここで，上の定義に対する図例を示す．尚，これらの図も含め，以降の図では，**file transfer** (Ψ, f)といえば，点の近くの値は，その点のΨの値を指し，枝の近くの値は，その枝のfの値を示すが，$f(e)=0$なる枝eは省略

NII-Electronic Library Service

される. 図1－1と1－2からなるNを考える. 図1－1では点の近くの値はその点のコストを指す. 図1－3のような file transfer (Ψ_1, f_1)では, 複製点集合Wは, $W=\{v_1, v_4, v_6\}$の順に, 複製点が3個存在する. コストは, $3\times1+1\times4+1\times1$(コピーコスト)$+3\times1+1\times8$(転送コスト)$=19$, となる. 尚, この$N$に対する最適な file transfer (Ψ_2, f_2)は, 図1－4のように, 複製点を2個持ち, コストは17である.

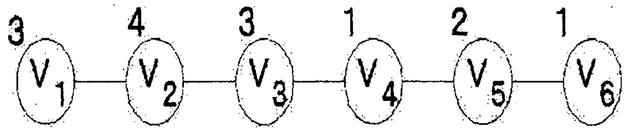

図1－1. ファイル複製ネットワークN

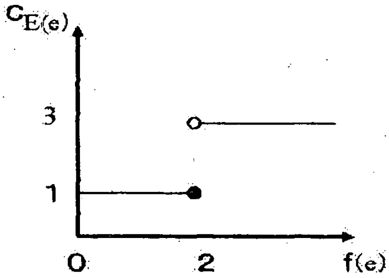

図1－2. N上の転送コスト

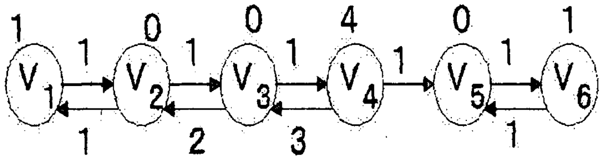

図1－3. file transfer (Ψ_1, f_1)

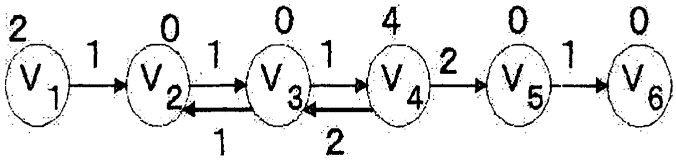

図1－4. 最適な file transfer (Ψ_2, f_2)

3. 基本操作と最適性

3－1. 基本操作

以下では, Nのネット$N(\alpha, \beta)$は, Nと同じ構造で, 各点vが重み$\alpha(v)$を持ち, 各枝eが重み$\beta(e)$を持つネットワークを表すものとする. file transfer 自体もNのネットであることに注意. まず, 最適性を示すのに必要な幾つかの操作を定義する.

[定義3] $y\in De(x)$である2点x, yに対して, x－yパスをPとする. file transfer $D=(\Psi, f)$に対して, V上の関数Ψ"およびE_A上の関数 f" を

$$\Psi''(x)=\Psi(x)+z,\ \Psi''(y)=\Psi(y)-z,\ \Psi''(v)=\Psi(v)\ \ (\text{otherwise}),$$
$$f''(e)=f(e)+z\ \ (e\in A(P)),\qquad f''(e)=f(e)\qquad (\text{otherwise}),$$

のように定義する. ただし, $z\in Z^+$である. Dからネット$N(\Psi'', f'')$を得る操作を, Dに対するyからxへz部の(順方向の)コピー交換という. 特に, $z=1$のとき, yからxへのコピー交換という. □

関連して次の補題が成り立つ.

[補題2][1] 2個以上の複製点を持つ file transfer $D=(\Psi, f)$において, 複製点xの次のそれをyとする. このとき, yからxへのコピー交換によって得られるネット$N(\Psi'', f'')$は file transfer である. $N(\Psi'', f'')$をD''で表すと, $f(x, x'')\geqq L$, かつ, $f(y', y)\leqq L$ならば, $C(D'')-C(D)=c_V(x)+C_{II}-C_I-c_V(y)$であり, そうでなければ, $C(D'')-C(D)=c_V(x)-c_V(y)$である. □

NII-Electronic Library Service

Information Processing Society of Japan

[定義 4]　$y \in De(x)$である2点 x, y に対して，x－y パスを P とする．file transfer $D=(\Psi, f)$に対して，V上の関数Ψ'およびE_A上の関数 f' を

$$\Psi'(x)=\Psi(x)-1,\quad \Psi'(y)=\Psi(y)+1,\quad \Psi'(v)=\Psi(v)\ \ \text{(otherwise)},$$
$$f'(e)=f(e)-1\quad (e\in A(P)),\qquad f'(e)=f(e)\qquad \text{(otherwise)},$$

のように定義する．Dからネット$N(\Psi', f')$を得る操作を，Dに対する x から y へ逆方向のコピー交換という．□

関連して次の補題が成り立つ．

[補題3][1]　2個以上の複製点を持つ file transfer $D=(\Psi, f)$において，複製点xの次のそれを y とし，$f(y', y) \geqq 2$であるとする．このとき，Dに対する x から y への逆方向のコピー交換によって得られるネット$N(\Psi', f')$は file transfer である．$N(\Psi', f')$をD'で表すと，$f(x, x'') > L$，かつ，$f(y', y) \leqq L+1$ ならば，$C(D')-C(D)=c_V(y)-c_V(x)-C_{II}+C_I$であり，そうでなければ，$C(D')-C(D)=c_V(x)-c_V(y)$である．□

3－2.　有向パスグラフとの類似性

有向パスグラフでの考察結果[3]の幾つかが，無向パスグラフにも適用できる．

[命題1] [3]　2個以上の複製点を持つある最適な file transfer $D_1=(\Psi_1, f_1)$において，x の次の複製点を y とし，y－x パス P 上の全ての枝 e' が，$f_1(e')=0$であるとする．このとき，$f_2(x, x'')=L$，もしくは，$f_2(y', y)=1$であり，P 上の全ての枝 e が，$f_2(e)=0$である最適な file transfer (Ψ_2, f_2)が存在する．□

Nの部分ネットワーク上の各最適な file transfer は，この命題での性質を満たしつつ，順次求められる．[3] 次のような特別なコピー交換を，前倒し操作として定義する．

[定義 5]　file transfer $D=(\Psi, f)$において，複製点集合 W が $|W| \geqq 2$ であるとする．Dに対して，最後の複製点 w から，その前の複製点にΨ(w)部のコピー交換を行うことを，Dに対する前倒し操作と呼ぶ．可能な限り，前倒し操作を繰り返して，$|W|$ 個の file transfer を求める操作を，Dに対する完全前倒し操作と呼ぶ．その過程で得られる file transfer の最後の複製点がxならば，そのような file transfer は，$D[x]$ で書かれる．D から$D[x]$を得る操作を，Dに対するxまでの前倒し操作と呼ぶ．□

file transfer $D=(\Psi, f)$において，隣接する全ての複製点 x および y が，$f(x, x'')=L$，もしくは，$f(y', y)=1$ であるならば，このような完全前倒し操作の過程で得られる各 file transfer $D'=(\Psi', f')$では，$\Psi'(y)=0$ でなければ，$f'(x, x'')=L$，もしくは，$f'(y', y)=1$ が満たされることに注意．

[定義 6]　Nの部分ネットワークN_k $(1 \leqq k < n)$において，$v_j \in V_k$ とする．N_kのネット$N_k(\Psi, f)$に対して，V_{k+1}上の関数Ψ'およびE_{k+1}上の関数 f' を

$$\Psi'(v_j)=\Psi(v_j)+1,\quad \Psi'(v_{k+1})=0,\quad \Psi'(v)=\Psi(v)\quad \text{(otherwise)},$$
$$f'(e_i)=f(e_i)+1\qquad (j \leqq i \leqq k),\quad f'(e)=f(e)\quad \text{(otherwise)}.$$

のように定義する．$N_k(\Psi, f)$からこのようなネット$N_{k+1}(\Psi', f')$を得る操作を，$N_k(\Psi, f)$に対するv_j-v_{k+1}パスインクリメントという．□

N_k上の file transfer に対して，v_j-v_{k+1}パスインクリメントで得られるネットは，N_{k+1}上の file transfer であ

[定義7]　N_k上の file transfer $D=(\Psi, f)$において，最後の複製点をwとする．以下のように，必要に応じて，w の更新後に行う$w-v_{k+1}$パスインクリメントをDに対する更新操作という．

Case1.　$c_V(w) \geqq c_V(v_k)$ならば，$w \leftarrow v_k$とする．

NII-Electronic Library Service

Information Processing Society of Japan

Case2. $c_V(w)<c_V(v_k)$かつ $f(w,w'')=L$ならば, $w''-v_k$パス上の最もコストの小さい点をuとする. $c_V(u)<c_V(w)+C_{II}-C_I$ならば, $w\leftarrow u$とする. □

更新操作と, 完全前倒し操作を組み合わせれば, Nが有向パスグラフの場合に対する最適な file transfer が得られることが示されている.

[命題2][3] N_k $(1\leqq k<|V|)$ 上の最適な file transfer を$D=(\Psi,f)$とし, Dに対して, 更新操作で得られるN_{k+1}上の file transfer をD'とする. このとき, D'に対する完全な前倒し操作で得られる file transfer の中に, N_{k+1}上の最適な file transfer が存在する. □

3−3. 無向パスグラフでの特性

無向パスグラフ構造のNでの file transfer が, 有向パスグラフ構造の場合と決定的に違うのは, $f(e')>0$なる逆枝e'を持つ最適な file transfer (Ψ,f)の存在である. まず, 次の補題が成り立つ.

[補題4] N上の各辺(v_i,v_{i+1}) $(1\leqq i<n)$に対して,

$$f(e'_i)=0,\ もしくは,\ f(e_i)=1 \qquad (2)$$

である最適な file transfer (Ψ, f)が存在する. □

この補題より, 以降では他に断りがなければ, 全ての最適な file transfer (Ψ, f)に対して, 各辺(v_i,v_{i+1}) $(1\leqq i<n)$では, $f(e_i)\geqq 2$ならば, $f(e'_i)=0$を満たし, $f(e'_i)>0$ならば, $f(e'_i)\geqq f(e_i)=1$を満たすものとする. 例えば, 図1−3および図1−4の file transfer は共にこの性質を満たしている. 従って, この補題は, file transfer が最適であるための十分条件ではない. また, 次のような補題も成り立つ.

[補題5] 最適な file transfer $D_1=(\Psi_1, f_1)$において, 逆枝e'_iが$f_1(e'_i)>0$であるならば, D_1では$De(v_i)$上に複製点が存在する. □

[補題6] 最適な file transfer $D=(\Psi, f)$が複数個の複製点を持つものとする. 隣接する2個の複製点をv_jおよびv_k $(j<k)$とすると, $j<i<k$なる整数iに対して, 以下の等式が成り立つ.

$$f(e'_{i-1})>0\ ならば,\ f(e_i)=f(e_{i-1})=1,\ かつ,\ f(e'_i)=f(e'_{i-1})+1. \qquad (3)$$

$$f(e'_i)=0\ ならば,\ f(e'_{i-1})=0,\ かつ,\ f(e_i)=f(e_{i-1})-1. \qquad (4)\quad □$$

上の補題において, v_j-v_kパス上の点v_iが$f(e'_i)=f(v_{i+1},v_i)>0$を満たすならば, 式(3)より, f連結なv_k-v_iパスが存在することがわかる. この性質より, v_j-v_kパス上の点集合を次のように2分する定義を行う.

[定義8] 最適な file transfer $D=(\Psi, f)$が複数個の複製点を持つものとする. 隣接する2個の複製点をxおよびy $(y\in De(x))$とすると, $x-y$パスP上の点集合を, 次のように分割する.

$$V(y)=\{v\in V(P)\mid f連結な\ y-v\ パスが存在する\},\quad V(x)=V(P)\setminus V(y).\quad □$$

例えば, 図1−4の最適な file transfer は, 式(2)を満たし, 隣接する複製点v_1とv_4に対して, $V(v_1)=\{v_1\}$および$V(v_4)=\{v_2, v_3, v_4\}$である. $v\in V(x)$ならば, 点vのためのJのコピーは, 点xで行われ, vへ転送される, と解釈できる. また, 隣接する2個の複製点間の非複製点を特徴づける次のような補題が成り立つ.

[補題7] 最適な file transfer (Ψ, f)が複数個の複製点を持つものとする. 隣接する2個の複製点をv_jおよびv_k $(j<k)$とする. $f(e'_{k-1})>0$, かつ, $f(e'_j)=0$が成り立つならば, $f(e_{h-1})=f(e_h)=f(e'_h)=1$, $f(e'_{h-1})=0$を満たす非複製点v_hがv_j-v_kパス上に存在する. □

この補題を受けて, 上のような特殊な点およびその点に対する基本操作を特徴づける.

NII-Electronic Library Service

[定義9] 最適な file transfer $D=(\Psi, f)$が複数個の複製点を持ち，隣接する2個の複製点を v_j および v_k ($j<k$) とする．$j \leqq h < k$ なる整数hに対して，$f(e'_h)=1$ であるならば点 v_h を v_j, v_k 間の境界点という．また，$f(e'_{k-1})=0$ ならば，点 v_k を v_j, v_k 間の境界点という．境界点 v_h ($j<h \leqq k$) に対して，v_{h-1} から v_k へのコピー交換と v_j から v_{h-1} への逆方向のコピー交換の両方を行うことを，D に対する v_k から v_j への境界シフト，という．□

式(3)より，2個の複製点を結ぶパス上には，$f(e')=1$ を満たす逆枝 e' は，高々1個存在することに注意．例えば，図1−4の最適な file transfer では，複製点 v_1, v_4 に関して，補題7の条件が成り立つため，それらの複製点間の境界点は v_2 である．尚，境界点が v_j のとき，v_k から v_j への境界シフトは定義されない．

[補題8] 最適な file transfer $D=(\Psi, f)$が複数個の複製点を持ち，隣接する2個の複製点を v_j および v_k ($j<k$) とし，その2点間の境界点を v_h とする．$h>j$ のとき，v_k から v_j への境界シフトによって，v_{h-1} が新たに境界点である file transfer が得られる．これを D' とすると，

$f(v_j, v_{j+1})>L$, かつ, $f(v_k, v_{k-1})<L$ ならば, $C(D')-C(D)=-c_V(v_j)+c_V(v_k)-C_{II}+2C_I$ であり,

$f(v_j, v_{j+1}) \leqq L$, かつ, $f(v_k, v_{k-1}) \geqq L$ ならば, $C(D')-C(D)=-c_V(v_j)+c_V(v_k)+C_{II}$ であり,

そうでなければ, $C(D')-C(D)=-c_V(v_j)+c_V(v_k)+C_I$ である．□

この補題より，file transfer $D=(\Psi, f)$が最適であるための必要条件は，D に対する境界シフトによって，コストがより小さい別の file transfer は得られない，ということである．例えば，隣接する2個の複製点 x, y ($y \in De(x)$) に対して，$f(x, x'')>L$ かつ $f(y, y')<L$ ならば，$c_V(x)+C_{II} \leqq c_V(y)+2C_I$ が成り立つ．その上で，次のような命題が成り立つ．この命題は，有向パスグラフ構造の N に対する命題1の無向版ともいえるものである．

[命題3] 2個以上の複製点を持つ最適な file transfer $D_1=(\Psi_1, f_1)$において，$f_1(e')>0$ なる逆枝 e' が存在するとする．このとき，逆枝 e' を含むパスで，始点と終点が隣接する複製点であるものを y−x パス ($y \in De(x)$) とすると，$f'(x, x'')=L$，または，$f'(y, y')=L$ であるような最適な file transfer (Ψ', f')が存在する．□

以降で扱う最適な file transfer (Ψ, f)は，この命題の制約を満たすものとし，隣接する2個の複製点 x, y において，$f(x, x'')=L$ ならば，前方で制約されているといい，$f(y, y')=L$ ならば，後方で制約されている，という．また，複製点 x と y との間の枝の本数 k が L 未満の場合は，補題8の条件が緩くなった場合でも，境界シフトによりコストの削減が可能である．具体的には，$L \geqq \Psi(x) > k$ の場合，条件によっては，y から x への境界シフトだけでは，コストが削減できないが，引き続き，x から y へのコピー交換を行うことで，全体としてコストが削減できる場合がある．このような境界シフトとコピー交換の組み合わせを後ろ倒し操作と定義する．

[定義10] N 上の端点を y とし，file transfer $D=(\Psi, f)$の最後の複製点を x とする．D に対する以下の操作を可能な限り繰り返すことを，D に対する後ろ倒し操作と呼ぶ．ただし，$x=v_1$ の場合は，境界シフトやコピー交換によって，$\Psi(x)=1$ となった時点で，後ろ倒し操作は停止するものとする．

CaseA. x−y パス上の枝の本数kが L 以上であるならば，以下の操作を行う．

CaseA−1. $f(x, x'')>L$, かつ，$f(y, y')<L$ の場合．$c_V(y) \geqq c_V(x)+C_{II}-2C_I$ ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y から x への境界シフトを $\mathrm{Min}\{L-f(y, y'), f(x, x'')-L\}$ 回繰り返した後，引き続き，後ろ倒し操作を行う．

CaseA−2. $f(x, x'') \leqq L$, かつ，$f(y, y') \geqq L$ の場合．$c_V(y) \geqq c_V(x)-C_{II}$ ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y から x への境界シフトを $f(x, x'')-1$ 回繰り返す．$\Psi(x)>f(x, x'')-1$ ならば，x から y への $\Psi(x)-f(x, x'')+1$ 部のコピー交換を行う．x の前の複製点を x とし，引き続き，後ろ倒し操作を行う．

CaseA−3. $f(x, x'') \leqq L$, かつ，$f(y, y')<L$，または，$f(x, x'')>L$, かつ，$f(y, y') \geqq L$ の場合．$c_V(y) \geqq c_V(x)-C_I$ ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y から x への境界シフトを，前者の場合，$L-f(y, y')$ 回，後者の場合，$f(x, x'')-L$ 回，繰り返した後，引き続き，後ろ倒し操作を行う．

NII-Electronic Library Service

Information Processing Society of Japan

CaseB. x−y パス上の枝の本数kが L 未満であるならば，以下の操作を行う．

CaseB−1. $k \geqq \Psi(x)$の場合. $c_V(y) \geqq c_V(x) - C_{\mathrm{I}}$ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，yからxへの境界シフトを$\Psi(x)$回繰り返す．x の前の複製点を x とし，引き続き，後ろ倒し操作を行う．

CaseB−2. $L \geqq \Psi(x) > k$の場合. $Lc_V(y) \geqq Lc_V(x) - kC_{\mathrm{I}}$ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y から x への境界シフトを k 回繰り返し，かつ，x から y への$\Psi(x) - k$部のコピー交換を行う．xの前の複製点をxとし，引き続き，後ろ倒し操作を行う．

CaseB−3. $\Psi(x) > L$の場合. $Lc_V(y) \geqq Lc_V(x) - kC_{\mathrm{I}}$ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y からxへの境界シフトをk回繰り返し，かつ，xからyへの$L-k$部のコピー交換を行う．その上で，$c_V(y) \geqq c_V(x) - C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{I}}$ならば，後ろ倒し操作を停止する．そうでなければ，y からxへの境界シフトを$\Psi(x) - L$部のコピー交換を行う．xの前の複製点をxとし，引き続き，後ろ倒し操作を行う． □

これを基に，無向パスグラフ構造のNに対する最適な **file transfer** の構成に関して，次のような結論的な命題が導かれる．

[命題 4] N_k $(1 \leqq k < |V|)$ 上の最適な **file transfer** を$D=(\Psi, f)$とし，Dに対して，更新操作で得られるN_{k+1}上の **file transfer** をD'とする．このとき,D'に対する完全な前倒し操作ならびに，後ろ倒し操作で得られる **file transfer** の中に，N_{k+1}上の最適な **file transfer** が存在する． □

4. アルゴリズム

前節までの考察をまとめると，無向パスグラフ構造のファイル複製ネットワークに対する最適な **file transfer** を求めるアルゴリズムは簡単に書くと次のようになる．

[Algorithm]

(入力) 無向パスグラフ構造のファイル複製ネットワークN_n (nは点の個数)

(出力) N_n上の最適な **file transfer** $(\phi_n{}^3, f_n{}^3)$

Step1. $\phi_1{}^3(v_1) \leftarrow 1$ とする．

Step2. $i=1, 2, \cdots, n-1$ である整数 i に対して，以下のような操作を繰り返す．

2−1. **file transfer** $D_i{}^3$に対して，更新操作を行って，N_{i+1} 上の **file transfer** $D_{i+1}{}^1$を求める．

2−2. $D_{i+1}{}^1$に対して，完全前倒し操作を行って，コスト最小の **file transfer** $D_{i+1}{}^2$を求める．

2−3. $D_{i+1}{}^2$に対して，後ろ倒し操作を行って，コスト最小の(最適な) **file transfer** $D_{i+1}{}^3$を求める．

(**Algorithm** 終了)

1回の更新操作，前倒し操作，並びに，後ろ倒し操作を実行するのに対して，$O(n)$の手間がかかるため，この **Algorithm** 全体では，$O(n^2)$となる．

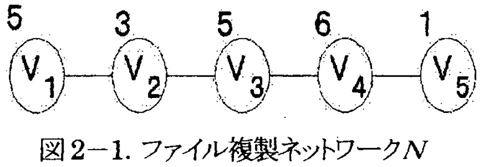

図 2−1. ファイル複製ネットワークN

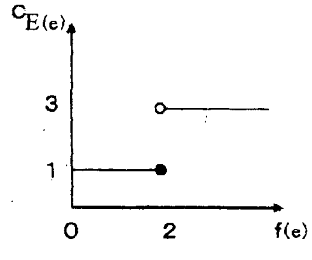

図 2−2. N上の転送コスト

NII-Electronic Library Service

ここで，上のアルゴリズムの例を示す．図2−1と2−2からなるNを考える．図2−1では点の近くの値はその点のコストを指す．この例では，2個の点を持つNの部分ネットワークN_2での最適な**file transfer** D_2を求める際に，v_2からv_1への境界シフトを行っている．その後，v_2からのパスインクリメントを行って，4個の点を持つNの部分ネットワークN_4での最適な**file transfer** $D_4=(\Psi_4, f_4)$が得られ，図2−3のようになる．D_4に対して，更新操作を行うと，図2−4のようなN_5上の**file transfer** $D_5^1=(\Psi_5^1, f_5^1)$が得られる．$c_V(v_1)>c_V(v_2)$より(完全)前倒し操作によるコストの減少が起こらず，D_5^1がそのままD_5^2となる．続いて，後ろ倒し操作を検討すると，まず，CaseA−1が該当し，$c_V(v_5)-c_V(v_2)-C_{II}+2C_I=1-3-3+2\cdot 1<0$より，$v_5$から$v_2$への境界シフトが1回起こり，$f_5'(v_2, v_3)=2=L$である**file transfer** $D_5'=(\Psi_5', f_5')$が得られる．次に，CaseA−3が該当し，$c_V(v_5)-c_V(v_2)+C_I=1-3+1<0$より，$v_5$から$v_2$への境界シフトがもう1回起こるが，この結果$f_5''(v_3, v_2)=2=L$である図2−5のような**file transfer** $D_5''=(\Psi_5'', f_5'')$が得られる．そして，今度はCaseA−2が該当するが，$c_V(v_5)-c_V(v_2)+C_{II}=1-3+3>0$であるため，ここで後倒し操作は終了し，$D_5''$が$N_5$上で最適であることがわかる．

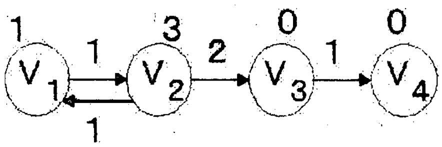

図2−3. N_4上の最適な**file transfer** $D_4=(\Psi_4, f_4)$

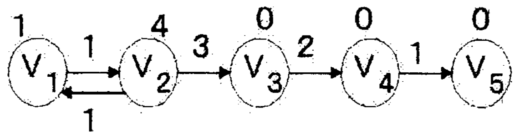

図2−4. N_5上の**file transfer** $D_5^1=(\Psi_5^1, f_5^1)$

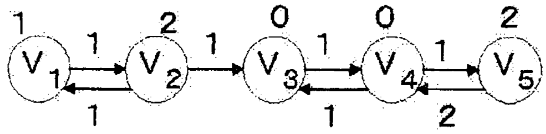

図2−5. N_5上の**file transfer** $D_5''=(\Psi_5'', f_5'')$

5. おわりに

本報告では，有向パスグラフ構造で，各点の需要値が1であるようなファイル複製ネットワークに対して，最適な**file transfer**を求める$O(|V|^2)$のアルゴリズムを提案した．今後の課題として，2以上の需要値の点が存在する場合や，パスグラフよりも複雑な構造のNに対して，多項式時間で最適な**file transfer**が求められるクラスはどの程度なのか見極めたい．

文献

[1] D.Du & P.Pardalos: Network Optimization, World Scientific(1992).

[2] R.Casey,"Allocation of Copies of File in an Information Network," AFIPS Conf.Proc,1972 Spring Joint Comput.Conf 40, 617-625 (1972).

[3] Y.Kaneko,"An optimal file transfer on a directed path network with step arc costs, " Congressus Numerantium 146, pp.173-186(2000).

[4] http://www.knc.info.gifu-u.ac.jp/~kaneko/AL92.htm

NII-Electronic Library Service