

A-1-2

伝送線路解析におけるクランク-ニコルソン法の数値分散特性

Numerical Dispersion of Transmission Line Analysis Using Crank-Nicolson scheme

堀部 雄司¹
Yuji Horibe高橋 康宏¹
Yasuhiro Takahashi関根 敏和¹
Toshikazu Sekine小林 邦勝²
Kunikatsu Kobayashi岐阜大学工学部¹
Dept. of Electrical and Electronic Eng., Gifu University山形大学工学部²
Dept. of Information Science, Yamagata University

1 まえがき

信号品質を劣化させない回路設計が重要になってきており、配線を伝搬する信号の動作を効率よく求める方法が望まれている。配線を伝送線路で表すとき、その時間特性を求める方法にFDTD法[1]があるが、時間と空間刻みの関係（クーラン数）に制約があった。本文では、クーラン数に制約がないクランク-ニコルソン法を応用するFDTD法(CN-FDTD法)[2]の数値分散特性を報告する。

2 CN-FDTD 法

FDTD法は、線路方程式をYee格子で離散化し、よい近似で解いている。CN-FDTD法は、更に空間方向の偏微分を2つの時刻の平均で近似することでクーラン数に制約がないようにするもので、無損失の場合の更新式は

$$I_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + a_1 (V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1}) = I_{i+\frac{1}{2}}^n - a_1 (V_{i+1}^n - V_i^n)$$

$$V_i^{n+1} + a_2 (I_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - I_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) = V_i^n - a_2 (I_{i+\frac{1}{2}}^n - I_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

$$a_1 = \Delta t / (2\Delta x L_{i+\frac{1}{2}}), \quad a_2 = \Delta t / (2\Delta x C_i) \quad (1)$$

となる。ただし、 V_i^n, I_i^n は線路上 $x = x_i$ 、時刻 $t = t_n$ での電圧電流で、 L_i, C_i は、 $x = x_i$ での単位長当りのインダクタンス、キャパシタンスである。また $\Delta x, \Delta t$ は、それぞれ、空間と時間の刻みで、クーラン数 ν_i との間に

$$\nu_i = \Delta t / (\Delta x \sqrt{L_{i+\frac{1}{2}} C_i}) \quad (2)$$

の関係がある。

3 数値分散特性

線路方程式の1つの解析解 $V(x, t) = e^{j\beta(x - v_p t)}$ を用いると Δt 間の複素増幅率 g_e は

$$g_e = \frac{V(x, t + \Delta t)}{V(x, t)} = e^{-j\beta v_p \Delta t} = e^{-j\nu_i \beta \Delta x} \quad (3)$$

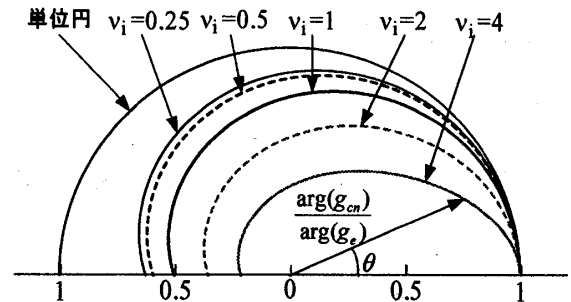
と書ける。ここで β, v_p は、それぞれ、位相定数と伝搬速度である。よって、 Δt 間の位相変化は

$$\arg(g_e) = -\nu_i \theta, \quad \theta = \beta \Delta x \quad (4)$$

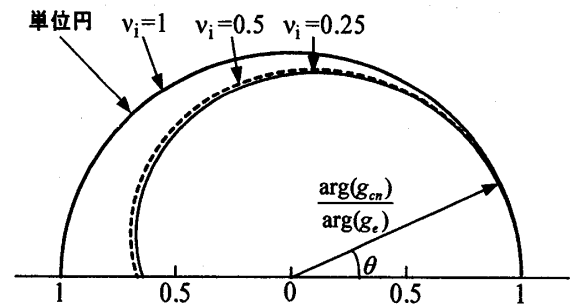
となる。一方、式(1)より、CN-FDTD法の Δt 間の位相変化を求めると

$$\arg(g_{cn}) = -2 \tan^{-1} (\nu_i \sin \frac{\theta}{2}) \quad (5)$$

となって、同様に ν_i に制約のないADI-FDTD法[3]と同じになる。図1は数値分散特性で、(a)より、CN-FDTD法は、 ν_i, θ が小さい程位相誤差が小さくなることがわか



(a)CN-FDTD 法



(b)FDTD 法

図1 Δt 間の位相誤差

る。(b)は比較のために示すFDTD法で、 ν_i が1に近い程誤差が小さい。

4 むすび

CN-FDTD法の数値分散特性はADI-FDTD法と同じで、クーラン数が小さい程位相誤差が小さくなり、クーラン数が1に近づく程位相誤差が小さくなるFDTD法とは異なることを示した。厳密には入出力端の境界処理を考慮する必要がある。

参考文献

- [1] 関根, 小林, 横川, “損失のある不均一線路のFDTD法を用いた時間領域解析,” 信学論(A), vol.J84-A, no. 8, pp.1018-1026, Aug. 2001.
- [2] 堀部, 高橋, 関根, 小林, “クランク-ニコルソン法による損失不均一線路解析の数値安定性,” 信学技報, MW2005-38, Jun. 2005.
- [3] G. Sun and C. W. Trueman, “Some Fundamental Characteristics of the One-Dimensional Alternate-Direction-Implicit Finite-Difference Time-Domain Method,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 52, pp. 46-52, Jan. 2004