

圧電材料に対する材料非線形 FEM の新展開

1. はじめに

チタン酸ジルコン酸鉛 (PZT) セラミックスに代表される圧電材料は、アクチュエータやセンサなどの電気-機械変換子として多く用いられている。また最近では、図1に示すような電気的な材料非線形性—強誘電性—を活かして、不揮発メモリとしての用途 (FeRAM) も積極的に研究されている。

いっぽう、既存の商用 FEM コードのうち、圧電材料の材料非線形解析に対応しているものは筆者の知る限り存在していない。これは、近年のレビュー論文⁽¹⁾をみると、いろいろな材料非線形解析法が提案されているものの、定石とされるに至った解法がいまだにないという現状から裏付けできる。また、工学的側面からは非線形解析に対する需要が低かったことも考えられる。なぜならば、電気-機械変換子の用途においては、その多くがセラミックスという性質上、線形範囲に限定したものが主であるためである。しかし、圧電材料のき裂や隅角周りにおける応力や電界の特異性を考えると、非線形性は無視できない。また、それらの破壊挙動を予測できることは重要である。

そこで本稿では、圧電材料に対するいろいろな材料非線形解析のうち、近年提案され今後の展開が期待できそうなもの⁽²⁾について紹介する。

2. 従来型圧電 FEM の問題点

従来、圧電問題を解くには、変位場と電位ポテンシャルを独立変数として、弾性問題と静電問題を構成則レベルで連成させる。これが従来型の圧電 FEM であり、線形問題であれば何ら問題なく求解できる。しかし、これをそのまま非線形解析に拡張しようとすると、次の理由により壁にぶつかる。すなわち、この材料非線形性は本質的に不連続性 (図1中の E_c 付近) が強い。そのため、構成則のモデリングによっては数値的な不安定性を生じる。また、そもそも物理的な不安定性のあることも指摘されている。

この問題は、熱力学的視点から整理できる。すなわち、熱力学では、物理量を相加性のある示量量 (歪み、電気

変位等) と、それと共役な力に関する量である示強量 (応力、電界等) に分類する。このとき、内部エネルギーは示量量で記述され、これに関して極小性を持つ。一方で、従来型の圧電 FEM に適合する形の構成則は、内部エネルギーを部分的にルジャンドル変換した電氣的ギブスの自由エネルギーから導出される。したがって、圧電問題を通常の弾性問題と静電問題の微分方程式で記述した従来型の圧電 FEM は、変分法における鞍点求解問題に対応していることになる。

3. 極小点求解型の圧電 FEM

結晶物理学においては、圧電材料の材料非線形性は構造相転移の一種であり、結晶格子の対称性の破れに起因すると考えられている。これの代表的な記述法として、現象論に基づくものがある。この記述法では、ヘルムホルツの自由エネルギーの存在を仮定したうえで、それを示量量に関してマクロリン展開し、その極小性を議論する。

今、図1に示した履歴カーブを縦横逆にして、示量量である電気変位 D を横軸に、示強量である電界 E を縦軸にとってみる。すると、構造力学で言うところのアーチ等の飛び移り座屈と類似性のあることに気付く。すなわち、極小点求解型の変分問題を構成できさえすれば、圧電材料の非線形構成則として自由エネルギーの示量量によるマクロリン展開形が使えそうであることが分かる。

圧電問題を変分法における極小点求解問題とするためには、静電場の微分方程式を書換える必要がある。これは、ベクトル解析学における定理を用いて、電位ポテンシャルの代わりにベクトルポテンシャルを導入することで実現できる。いわゆる構造力学でいうところの変位法と応力法の双対関係に相当する。なお、このベクトルポテンシャル場の離散化には、計算電磁気学における議論から、節点要素ではなく辺要素を用いるべきである。

4. 計算例

現在、筆者らは、温度一定とした極小点求解型の圧電 FEM に、自由エネ

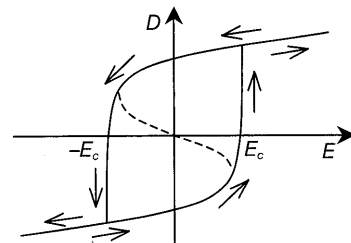


図1 材料非線形性 (電気変位 D -電界 E 履歴)

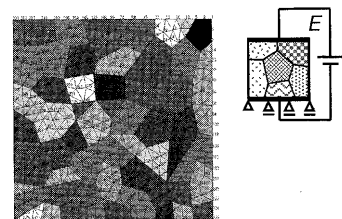


図2 解析モデルの要素分割 (左) と負荷条件 (右)

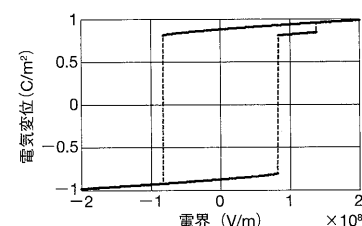


図3 巨視的な電気変位 D -電界 E 関係

ルギーの極小性判定のための系全体の固有値解析を組み合わせ、多結晶圧電セラミックスの材料非線形解析を行っている。その計算例を図2, 3に示す。巨視的電気負荷に対して D - E 履歴カーブが再現できていることが分かる。

5. おわりに

多結晶圧電セラミックスの材料非線形問題に対して、上で述べたモデリングを行うと、多くの局所解をもつこととなる。これに対しては、動的扱いにより経路を追跡していくことで対処できると考えている。

(原稿受付 2007年4月12日)

[永井学志 岐阜大学]

●文 献

- (1) Kamlah, M., Ferroelectric and ferroelastic piezo ceramics modeling of electromechanical hysteresis phenomena, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **13** (2001), 219-268.
- (2) Landis, C. M., A new finite-element formulation for electromechanical boundary value problems *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **55** (2002), 613-628.