

519 空中に浮遊する両端自由はりの 2 点境界制御

Boundary Control of a Flying Flexible Beam with Both Ends Free

○正 清水 年美 (新潟大) 正 佐々木 実 (岐阜大)
 正 小林 義光 (岐阜高専)

Toshimi SHIMIZU, Niigata University, Ni-no-cho Ikarashi, Nishi-ku, Niigata

Minoru SASAKI, Gifu University

Yoshimitsu KOBAYASHI, Gifu National College of Technology

This paper solves the stabilization problem for a flexible beam with both ends free using a boundary control technique. The boundary controller is designed according to the standard method for designing passivity-based controllers. For set point problems, the potential energy shaping that assigns the desired configuration to an equilibrium point of the closed-loop system is sufficient. The potential energy shaping is therefore completed by adding the artificial potential energy that specifies the displacement of the both ends of the flexible beam. Numerical simulations confirm the stability of the equilibrium configuration of the closed-loop system formed by the flexible beam together with the proposed controllers.

Key word: Boundary control, Flexible beam, Passivity, Energy shaping

1 はじめに

搬送システムなどで柔軟ビームを非接触支持するためには、柔軟ビームの剛体変位を一定値に維持する制御に加え、柔軟ビームに生じる弾性振動を抑制する制御が必要である。非接触支持される柔軟ビームは空中に浮遊する両端自由はりとして扱うことができ、オイラー・ベルヌーイの仮定の下では、その数学モデルは簡単な偏微分方程式で記述される。このような制御問題に対しては、柔軟ビームの無限次元モデルにモード展開や有限要素法などの空間方向の離散化手法を施して得られた有限次元モデルにもとづいて制御系設計を行うのが有効な手段である。

著者らは、非接触支持された両端自由はり上の、両端から等距離にある 2 点に重力補償項を追加したはりの変位に関する PD フィードバック則により生成された制御力を印加することで、両端自由はりを安定に非接触支持できることを受動性理論にもとづいて示した。この制御則は低次元化モデルを使うことなく得ることができるので、理論上スピルオーバーが発生することはないが、制御力の作用点と振動の節が一致するモードの振動を抑制できない。この問題を解決するための手段として、本研究では制御力を両端に印加する境界制御を考える。本研究の目標は境界制御を適用した両端自由はりの指数安定性を議論することであるが、これに先立ち、まず数値シミュレーションによりその有効性を検証する。

2 境界入力作用する両端自由はりの数学モデル

柔軟ビームはオイラー・ベルヌーイの仮定を満たす、線密度 ρ 、ヤング率 E 、断面 2 次モーメント I の両端自由はりで、その両端には制御入力 f_1, f_2 が印加されている。 $\xi(x, t)$ を位置 x 、時刻 t における柔軟ビームの変位とすれば、柔軟ビームの運動方程式と境界条件は次のように与えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi(x, t)}{\partial x^4} + \rho g = 0 \quad (A1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \xi(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 \xi(0, t)}{\partial x^3} = f_1 \quad (A2)$$

$$EI \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 \xi(l, t)}{\partial x^3} = -f_2 \quad (A3)$$

ただし、 g は重力加速度定数である。

3 境界制御器の設計

3.1 制御問題の記述

本研究では柔軟ビームの両端の変位を与えられた目標変位 $\xi^o(0), \xi^o(l)$ に整定させ、なおかつ柔軟ビームに生じる弾性振動を抑制することである。ただし、 $\xi^o(x)$ は次の方程式を満足する。

$$EI \frac{d^4 \xi^o(x)}{dx^4} + \rho g = 0, \quad (A4)$$

$$EI \frac{d^2 \xi^o(0)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 \xi^o(0)}{dx^3} = \frac{1}{2} \rho g l \quad (A5)$$

$$EI \frac{d^2 \xi^o(l)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 \xi^o(l)}{dx^3} = -\frac{1}{2} \rho g l \quad (A6)$$

3.2 エネルギの整形法による境界制御器の導出

本研究では閉ループ系のエネルギー特性が次式となるように境界制御入力 $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]^T$ を決定する。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\xi}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2 (\xi - \xi^o)}{\partial x^2} \right\}^2 dx + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T \mathbf{K}_p \tilde{\xi} \quad (A7)$$

ここで、 \mathbf{K}_p は正定行列、 $\tilde{\xi} = [\xi_0 - \xi_0^o \ \xi_l - \xi_l^o]^T$ は位置誤差ベクトルで、 ξ_0^o, ξ_l^o は柔軟ビーム両端の目標変位である。このとき、境界制御則を次のように選べば閉ループ系のエネルギー特性は式 (A7) となる。

$$\mathbf{f} = -\mathbf{K}_v \dot{\tilde{\xi}} - \mathbf{K}_p \tilde{\xi} + \mathbf{g} \quad (A8)$$

式 (A7) をリアプノフ関数としてリアプノフの安定定理を適用すれば、目標値 ξ_0^o, ξ_l^o は閉ループシステムの安定平衡点であることを示すことができる。また、目標値 ξ_0^o, ξ_l^o は閉ループシステムの漸近安定平衡点、さらには指数安定平衡点となることが予想されるが、これらについては今後の課題とする。

1 はじめに

搬送システムなどで柔軟ビームを非接触支持するためには、柔軟ビームの剛体変位を一定値に維持する制御に加え、柔軟ビームに生じる弾性振動を抑制する制御が必要である。非接触支持される柔軟ビームは空中に浮遊する両端自由はりとして扱うことができ、オイラー・ベルヌーイの仮定の下では、その数学モデルは簡単な偏微分方程式で記述される。

このような制御問題に対しては、柔軟ビームの無限次元モデルにモード展開や有限要素法などの空間方向の離散化手法を施して得られた有限次元モデルにもとづいて制御系設計を行うのが有効な手段である。Sasaki ら⁽¹⁾は、柔軟ビームの中央に電磁力を印加して安定浮上を実現することを目的とした磁気浮上系の制御問題において、柔軟ビームの変位を有限個のモード形状関数の線形結合として近似した有限次元モデルにもとづいて制御系設計を行った。また、両端自由はりの制御ではないが、Scholte ら⁽²⁾は、両端単純支持はりに生じる弾性振動に起因する騒音を低減することを目的とした制振制御則を、差分法を使って離散化した数学モデルにもとづいて導出した。これらの低次元化モデルにもとづく制御系設計法は工学的に有効な手段ではあるが、低次元化のさいに切り捨てられたモードに起因するスピルオーバー現象が制御性能を劣化させることがある。

著者らは、非接触支持された両端自由はり上の、両端から等距離にある2点に重力補償項を追加したはりの変位に関するPDフィードバック則により生成された制御力を印加することで、両端自由はりを安定に非接触支持できることを受動性理論にもとづいて示した⁽³⁾。この制御則は低次元化モデルを使うことなく得ることができるので、理論上スピルオーバーが発生することはないが、制御力の作用点と振動の節が一致するモードの振動を抑制できない。この問題を解決するための手段として、本研究では制御力を両端に印加する境界制御を考える。本研究の目標は境界制御を適用した両端自由はりの指数安定性を議論することであるが、これに先立ち、まず数値シミュレーションによりその有効性を検証する。

2 モデリング

Fig.1に示す柔軟ビームはオイラー・ベルヌーイの仮定を満たす、線密度 ρ 、ヤング率 E 、断面2次モーメント I の両端自由はりで、その両端には制御入力 f_1, f_2 が印加されている。 $\xi(x, t)$ を位置 x 、時刻 t における柔軟ビームの変位とすれば、柔軟ビームの運動方程式と境界条件は次のように与えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi(x, t)}{\partial x^4} + \rho g = 0 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \xi(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 \xi(0, t)}{\partial x^3} = f_1 \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 \xi(l, t)}{\partial x^3} = -f_2 \quad (3)$$

ただし、 g は重力加速度定数である。柔軟ビームの変位 $\xi(x, t)$ は運動方程式の零固有値に対応する2つの剛体モードと非零固有値に対応する弾性振動モードの線形結合として次のように表される⁽⁴⁾。

$$\xi(x, t) = y(t) + \left(x - \frac{l}{2}\right) \theta(t) + w(x, t) \quad (4)$$

ここで、 $y(t)$ は変形前の中立軸の、 y 軸に沿った並進変位、 $\theta(t)$ は変形前の中立軸の、 x - y 平面内での剛体回転角度、 $w(x, t)$ は変形前の中立軸から測った柔軟ビームの弾性変位である。

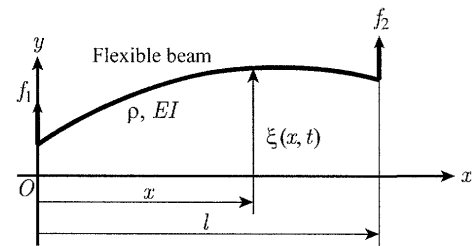


Fig.1 A flexible beam with boundary inputs

3 コントローラ設計

3.1 制御問題の記述

本研究では柔軟ビームの両端の変位を与えられた目標変位 $\xi^\circ(0)$ 、 $\xi^\circ(l)$ に整定させ、なおかつ柔軟ビームに生じる弾性振動を抑制することである。ただし、目標状態における剛体回転角度は零に設定し、柔軟ビームの弾性変位は重力によって自然にたわんだ状態に設定する。すなわち、目標状態における柔軟ビームの剛体並進変位を $y^\circ = \text{const}$ 、弾性変位を $w^\circ(x)$ とすれば、柔軟ビームの目標変位は次のように書ける。

$$\xi^\circ(x) = y^\circ + w^\circ(x) \quad (5)$$

ここで、 $\xi^\circ(x)$ は次の方程式を満足する。

$$EI \frac{d^4 \xi^\circ(x)}{dx^4} + \rho g = 0, \quad (6)$$

$$EI \frac{d^2 \xi^\circ(0)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 \xi^\circ(0)}{dx^3} = \frac{1}{2} \rho g l \quad (7)$$

$$EI \frac{d^2 \xi^\circ(l)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 \xi^\circ(l)}{dx^3} = -\frac{1}{2} \rho g l \quad (8)$$

3.2 エネルギー修正法によるコントローラの導出

柔軟ビームに対して、次の命題が成り立つ。

命題 1 柔軟ビームは入力を $\mathbf{f} - \mathbf{g}$ 、出力を $\dot{\xi}$ 、ストレージ関数を

$$H = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\xi}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2 (\xi - \xi^\circ)}{\partial x^2} \right\}^2 dx \quad (9)$$

とする受動系である。ただし、 \mathbf{f} と \mathbf{g} はそれぞれ次のように定義される。■

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho g l & \frac{1}{2} \rho g l \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

証明 1 ストレージ関数(9)を時間微分すると次式を得る。

$$\dot{H} = \int_0^l \rho \dot{\xi} \ddot{\xi} dx + \int_0^l EI \frac{\partial^2 (\xi - \xi^\circ)}{\partial x^2} \dot{\xi}'' dx \quad (11)$$

第2項目は x について2回部分積分を行うと次のように変

形できる。

$$\begin{aligned} & \int_0^l EI \frac{\partial^2 (\xi - \xi^o)}{\partial x^2} \dot{\xi}'' dx \\ &= EI \frac{\partial^2 (\xi_l - \xi_l^o)}{\partial x^2} \dot{\xi}_l' - EI \frac{\partial^2 (\xi_0 - \xi_0^o)}{\partial x^2} \dot{\xi}_0' \\ & \quad - EI \frac{\partial^3 (\xi_l - \xi_l^o)}{\partial x^3} \dot{\xi}_l + EI \frac{\partial^3 (\xi_0 - \xi_0^o)}{\partial x^3} \dot{\xi}_0 \\ & \quad + \int_0^l EI \frac{\partial^4 (\xi - \xi^o)}{\partial x^4} \dot{\xi} dx \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\xi_0 = \xi(0, t)$, $\xi_l = \xi(l, t)$, $\xi_0^o = \xi^o(0)$, $\xi_l^o = \xi^o(l)$ とおいた。式 (12) に境界条件 (2), (3), および (7), (8) を適用したものを、式 (11) に代入すれば \dot{H} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{H} = & \int_0^l \left\{ \rho \ddot{\xi} + EI \frac{\partial^4 (\xi - \xi^o)}{\partial x^4} \right\} \dot{\xi} dx \\ & + \left(f_1 - \frac{1}{2} \rho g l \right) \dot{\xi}_0 + \left(f_2 - \frac{1}{2} \rho g l \right) \dot{\xi}_l \end{aligned} \quad (13)$$

上式に運動方程式 (1) と平衡状態での柔軟ビームのたわみ方程式 (6) を代入すれば \dot{H} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{H} = & \left(f_1 - \frac{1}{2} \rho g l \right) \dot{\xi}_0 + \left(f_2 - \frac{1}{2} \rho g l \right) \dot{\xi}_l \\ = & \begin{bmatrix} \dot{\xi}_0 & \dot{\xi}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 - \frac{1}{2} \rho g l \\ f_2 - \frac{1}{2} \rho g l \end{bmatrix} = \dot{\xi}^T (f - g) \end{aligned} \quad (14)$$

したがって、柔軟ビームは入力を $f - g$ 、出力を $\dot{\xi}$ 、ストレージ関数を式 (9) とする受動系である。■

システムの受動性は、システムの出力 $\dot{\xi}$ をシステムへの入力 $f - g$ を用いて比較的容易に制御できることを示している。レギュレーション問題では、システムが目標値が閉ループ系の平衡状態となるようにシステムのポテンシャルエネルギーを整形し、得られたエネルギー特性を満たすようなコントローラを設計すれば目的を達成できることが知られている⁽⁵⁾。本研究ではストレージ関数 (9) に柔軟ビーム両端の位置誤差の 2 次形式を追加した、次のエネルギー関数を考える。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\xi}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2 (\xi - \xi^o)}{\partial x^2} \right\}^2 dx + \frac{1}{2} \dot{\xi}^T K_p \tilde{\xi} \quad (15)$$

ここで、 K_p は正定行列、 $\tilde{\xi}$ は位置誤差ベクトルで次式で定義される。

$$\tilde{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 - \xi_0^o & \xi_l - \xi_l^o \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

エネルギー関数 (15) を時間微分すると次式を得る。

$$\dot{V} = \dot{\xi}^T (f - g) + \dot{\xi}^T K_p \tilde{\xi} = \dot{\xi}^T (f - g + K_p \tilde{\xi}) \quad (17)$$

式 (17) はコントローラを次のように選択すれば良いことを示唆している。

$$f = -K_v \dot{\xi} - K_p \tilde{\xi} + g \quad (18)$$

式 (18) を式 (17) に代入すれば $\dot{V} = -\dot{\xi}^T K_v \dot{\xi} \leq 0$ を得る。これは目標値 ξ_0^o , ξ_l^o が閉ループシステムの安定平衡点であることを示している。本研究の目的はコントローラ (18) を適用したと

き、目標値 ξ_0^o , ξ_l^o が閉ループシステムの指数安定な平衡点となることを示すことであるが、これについては今後の課題とする。

4 数値シミュレーション

4.1 数値シミュレーションモデルの導出

時間発展する運動方程式を解くために、差分法を用いて空間方向に離散化を行い、得られた各格子点の運動方程式をルンゲ・クッタ法により積分する。2 次精度の差分公式を用いて運動方程式 (1) を離散化すれば、第 i 格子点の運動方程式は次のように表される。

$$\rho \ddot{\xi}_i = -\frac{EI}{h^4} (\xi_{i+2} - 4\xi_{i+1} + 6\xi_i - 4\xi_{i-1} + \xi_{i-2}) - \rho g \quad (19)$$

ただし、 ξ_i は第 i 格子点の変位で、 h は空間刻み幅である。また、空間分割数を n とする。式 (19) において、 $i = 0, 1$ のときには実際には存在しない格子点の変位 ξ_{-1} , ξ_{-2} が、 $i = n-1, n$ のときには ξ_{n+1} , ξ_{n+2} が現れる。これらは境界条件を差分化した次の式より決定できる。

$$EI \xi_0'' = EI \frac{\xi_1 - 2\xi_0 + \xi_{-1}}{h^2} = 0 \quad (20)$$

$$EI \xi_0''' = EI \frac{\xi_2 - 2\xi_1 + 2\xi_{-1} - \xi_{-2}}{2h^3} = f_1 \quad (21)$$

$$EI \xi_l'' = EI \frac{\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}}{h^2} = 0 \quad (22)$$

$$EI \xi_l''' = EI \frac{\xi_{n+2} - 2\xi_{n+1} + 2\xi_{n-1} - \xi_{n-2}}{2h^3} = -f_2 \quad (23)$$

4.2 シミュレーション結果

柔軟ビームの物理パラメータを $l = 1.00$ [m], $EI = 1.33$ [Nm²], $\rho = 1.54 \times 10^{-1}$ [kg/m] とし、数値シミュレーションを行った。柔軟ビームの空間分割数は $n = 20$ (空間刻み幅 $h = 0.05$ [m]) とし、時間刻み幅を 2.0×10^{-6} [sec] とした。

柔軟ビームの初期状態は、柔軟ビームを $x = 0.2, 0.8$ [m] の位置でナイフエッジにより単純支持し、なおかつ両端に制御入力 $f_1 = f_2 = 0.1$ [N] を加えたときに、自重によるたわみが生じている状態とする。また、ナイフエッジの刃先を結ぶ直線を x 軸、すなわち $\xi(x, t) = 0$ とする。

境界コントローラ (18) を適用してシミュレーションを行った結果を Fig.2 に示す。目標値は $\xi_0^o = \xi_l^o = 10.0$ [mm] とし、ゲインを次のように設定した。

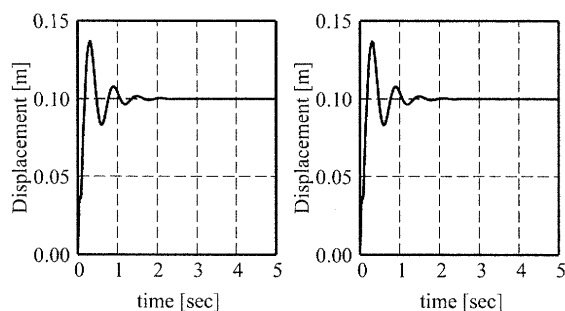
$$K_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Fig.2 において、柔軟ビームの両端は約 2 秒で目標値に収束していることが確認できる。制御開始時に生じた約 1.7 [Hz] の剛体モードの振動と 1 次モードの振動は制御開始後直ちに収束していることが確認できた。また、他の振動モードも励起されていないことが確認できる。

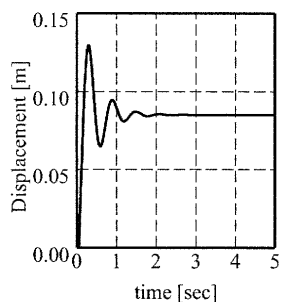
境界制御の有効性を示すために、制御力を柔軟ビームの 1 次モードの節の近く、 $x = a_1 = 0.225$ [m] と $x = a_2 = 0.775$ [m] に作用させたときの応答を調べる。制御則は式 (18) において、

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(a_1, t) \\ \dot{\xi}(a_2, t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} \xi(a_1, t) - \xi^o(a_1) \\ \xi(a_2, t) - \xi^o(a_2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

と置換したものをを用いた。ここで、 $\xi^o(a_1)$, $\xi^o(a_2)$ は $x = a_1, a_2$ での柔軟ビームの目標変位である。柔軟ビームの初期状態

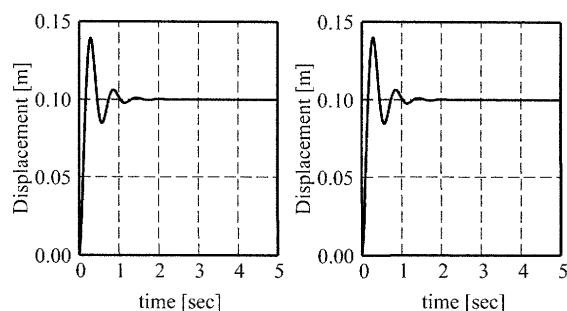


(a) Displacement at the left end (b) Displacement at the right end

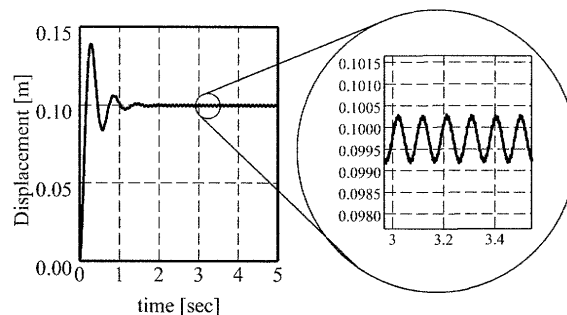


(c) Displacement at the center

Fig.2 Simulation result with the boundary control



(a) Displacement at $x=a_1$ (b) Displacement at $x=a_2$



(c) Displacement at the center

Fig.3 Simulation result with the non-boundary control

は、境界制御のときと同様に、柔軟ビームを $x = 0.2, 0.8$ [m] の位置でナイフエッジにより単純支持し、なおかつ $x = a_1$ と $x = a_2$ の点にそれぞれ制御入力 $f_1 = f_2 = 0.1$ [N] を加えたときに、自重によるたわみが生じている状態とする。また、ナイフエッジの刃先を結ぶ直線を x 軸、すなわち $\xi(x, t) = 0$ とする。

非境界コントローラを適用してシミュレーションを行った結果を Fig.3 に示す。目標値は $\xi^o(a_1) = \xi^o(a_2) = 10.0$ [mm] とし、ゲインは式 (24) と同じに設定した。

Fig.3 において、柔軟ビームの点 $x = a_1$ と $x = a_2$ における変位は約 2 秒で目標値に収束していることが確認できる。制御開始時に生じた約 1.7 [Hz] の剛体モードの振動は制御開始後直ちに収束していることが確認できた。しかし、剛体モードの振動が収束した後でも、柔軟ビームの中央では約 10 [m] の 1 次モードの振動が残っていることが確認できる。

一般に非境界コントローラでは、制御力の作用点がある振動モードの節に当たる場合、その振動モードの振動を抑制することはできないため、残留振動が現れる。Fig.3 で示した結果では、制御力を 1 次モードの節の付近に印加しているため、1 次モードの振動を抑制できない。一方、境界コントローラでは、制御力の作用点がすべての振動モードの節と一致しないため、理論上はすべての振動モードを抑制できると考えられる。

5 まとめ

本研究では空中に浮遊する柔軟ビームを目標位置に収束させ、なおかつ柔軟ビームに生じる弾性振動を抑制するための制御則として、2 点境界制御を提案した。重力補償項をもつ、変位の PD フィードバックとして構成された境界制御則は目標点を安定化することが示され、さらに数値シミュレーションによりその有効性が検証された。今後は得られたコントローラの漸近安定性、指数安定性について議論する。

参考文献

- (1) M. Sasaki, Y. Kobayashi, Y. Hori and F. Fujisawa, "Active Electromagnetic Levitation Control of a Flexible Beam by Using Disturbance Observer," Proc. of the International Conference on Mechatronics and Information Technology, (2001), 112-117
- (2) E. Scholte and R. D'Andrea, "Active Vibro-acoustic Control of a Flexible Beam Using Distributed Control," Proc. of the American Control Conference, (2003)
- (3) T. Shimizu, M. Sasaki and K. Wajima, "Passivity based Control of a Magnetic Levitation System with Two Electromagnets for a Flexible Beam," Proc. of the 8th. IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, (2004), 129-134
- (4) H. Sol, T. Lauwagie and P. Guillaume, "Identification of Distributed Material Properties using Measured Modal Data," Proc. of the International Seminar on Modal Analysis, (2002), 695-704
- (5) C. I. Byrners, A. Isidori, and J. C. Willems, "Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems," IEEE Tran. on Automatic Control, Vol. 36, No. 11, (1991), 1228-1240