

FEM- β による擬脆性材料の破壊進展解析Simulation of Crack Development in Quasi-Brittle Materials by Using FEM- β

池田 翔大 岐阜大学大学院 工学研究科 数理デザイン工学専攻

Shota Ikeda, Gifu University Graduate School of Engineering, Department of Mathematical and Design Engineering

永井 学志 岐阜大学 工学部 数理デザイン工学科

Gakuji Nagai, Gifu University Faculty of Engineering, Department of Mathematical and Design Engineering

Key Words: failure analysis, Hellinger-Reissner principle, Voronoi-Delaunay diagram

コンクリートやセラミックスは複合材料もしくは不均質材料であり、その内部には多くの介在物や欠陥が存在するために、き裂進展に代表される破壊現象は複雑化し、結果として擬脆性的な力学応答を示す。本研究では擬脆性材料の破壊進展解析への適用を主目的として提案されている FEM- β の適用性を、2次元のコンクリート材料を例として検討した。その結果、き裂はメッシュ分割に依存するものの、定性的には同等のき裂が表現できることを確認した。

1. はじめに

固体の破壊解析では変位の不連続性をモデル化するため、変位に連続性を要求する従来の有限要素法 (FEM) では、その不連続性のモデル化には工夫が必要となる。さらに破壊進展もモデル化しようとする、状況はより複雑化する。このような状況を踏まえて、擬脆性材料の破壊進展を有限要素法の範疇で簡便にモデル化することを目的とした、FEM- β ^[1]が提案されている。

本稿では、FEM- β の定式化の概要を述べた後、この手法の擬脆性材料に対する破壊進展解析への適用性を、数値実験により検討する。

2. 定式化の概要

2-1 Hellinger-Reissner 原理 FEM- β は Hellinger-Reissner 原理

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl} \sigma_{kl} + \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} d\Omega - \int_{s^t} t_i u_i ds \quad (1)$$

に基づく。ここで σ_{ij} 、 u_i 、 C_{ijkl} 、 t_i はそれぞれ応力、変位、弾性コンプライアンス、表面力である。

2-2 変位場、応力場の離散化 変位場 \mathbf{u} と応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ の離散化は、Voronoi ブロックとそれに共役な Delaunay 三角形を用いて行う。

変位場の離散化には、各 Voronoi ブロックで一定となる階段関数を用いる。 β 番目の Voronoi ブロックを Ω_{β} 、 Ω_{β} 上の階段関数を $\varphi_{\beta}(x)$ とすると離散化された変位場は次式となる。

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\beta=1}^M \begin{bmatrix} \varphi_{\beta}(x) & 0 \\ 0 & \varphi_{\beta}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\beta x} \\ u_{\beta y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\varphi_{\beta}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_{\beta} \\ 0 & x \notin \Omega_{\beta} \end{cases} \quad (3)$$

ここで M は Voronoi ブロックの数、 u_{β} は β 番目の Voronoi ブロックの母点の変位を表す。

次に応力場の離散化には、各 Delaunay 三角形で一定となる階段関数を用いる。 α 番目の Delaunay 三角形を S_{α} 、 S_{α} 上の階段関数を $\chi_{\alpha}(x)$ とすると離散化された応力場は次式となる。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{\alpha=1}^N \begin{bmatrix} \chi_{\alpha}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\alpha}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha xx} \\ \sigma_{\alpha yy} \\ \tau_{\alpha xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\chi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_{\alpha} \\ 0 & x \notin S_{\alpha} \end{cases} \quad (5)$$

ここで N は Delaunay 三角形の数、 σ_{α} は α 番目の Delaunay 三角形の応力を表す。式(2),(4)を模式的に描くと図 1 のようになる。

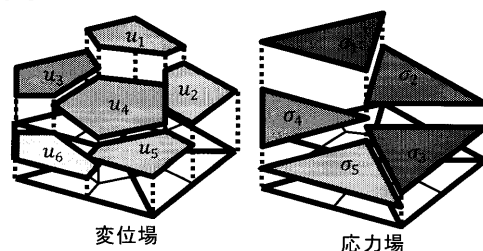


図 1 変位場と応力場の離散化

2-3 要素剛性行列 図 2 のような、節点 i の座標を (x_i, y_i) とする 1 つの Delaunay 三角形 e を考えて、式(2),(4)を式(1)に代入し、その変分をゼロとすることにより要素剛性行列を導出できる。その成分は Voronoi 辺の長さ l_{ei} 、外向き単位法線ベクトル \mathbf{n}_{ei} を用いて表現できる。なお線形解析においては、通常の三角形 1 次要素と一致することが確認されている^[1]。

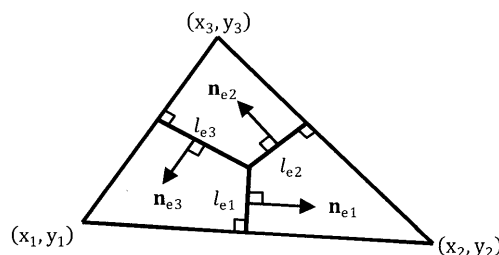


図 2 Delaunay 三角形

2-4 破壊進展のモデリング 破壊の表現は、破壊基準を満たした Voronoi ブロック間の剛性をゼロにすることで行う。

本研究では、破壊基準として Voronoi ブロックの境界上に働く表面力 t_v のノルム $\|t_v\|$ に着目し、閾値 t_{vmax} を超えたときに破壊したとみなす。

3. 数値実験

擬脆性材料を用いて破壊進展解析を行う。すべてのモデルは2次元平面ひずみ問題として考える。

3-1 モデル 1 切欠き入りモルタル 切欠き入りモルタルの左右を固定し、右端に一樣な強制変位 $1.0 \times 10^{-5} \text{m}$ を400回に分けて与える問題(図3)を考える。Young 率 $E = 30 \text{GPa}$, Poisson 比 $\nu = 0.2$, 破壊基準 $t_{vmax} = 3 \text{MPa}$ とする。このモデルではメッシュ依存性を検討するため、二種類のメッシュ分割(図4)で計算を行う。要素数は共に1149要素である。

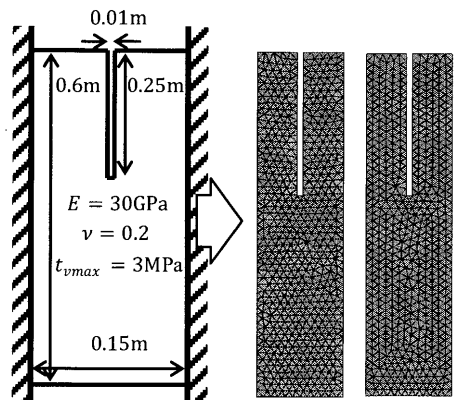
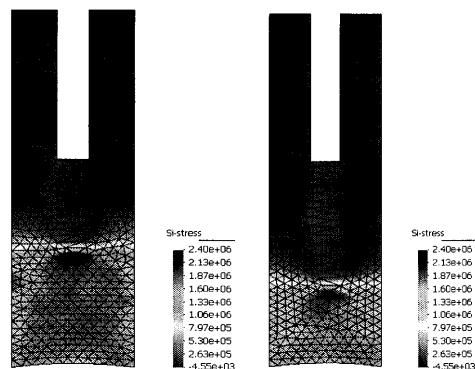


図3 解析モデル

分割A 分割B
図4 メッシュ分割



分割A 分割B
図5 計算結果 (変形5000倍, 強制変位7.8μm)

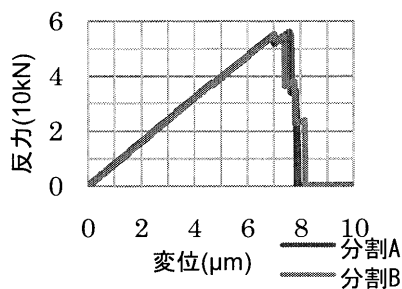


図6 強制変位-反力の関係

図5に変形図に最大主応力分布を重ねたものを、図6に強制変位と反力の関係を表したグラフを示す。二種類のメッシュ分割の計算結果から、き裂の進展がメッシュ分割に依存していることがわかる。しかし定性的には同等のき裂が表現できている。

3-2 モデル 2 複合材料モデル モルタルと骨材からなる複合材料の左右を固定し、右端に一樣な強制変位 $2.0 \times$

10^{-5}m を200回に分けて与える問題(図7)を考える。モルタルは $E = 23.5 \text{GPa}$, $\nu = 0.19$, $t_{vmax} = 3 \text{MPa}$, 骨材は $E = 52.9 \text{GPa}$, $\nu = 0.15$, $t_{vmax} = \infty$, 要素数は2156要素である(図8)。

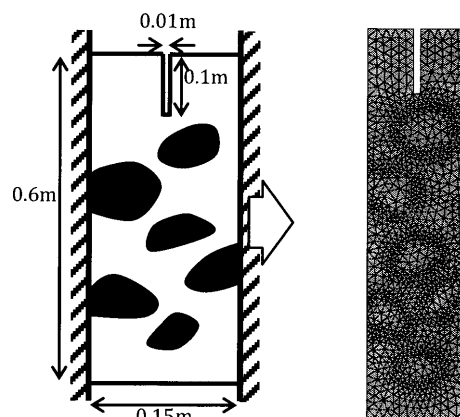
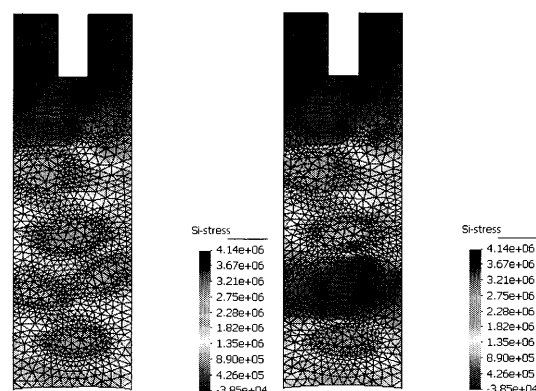


図7 解析モデル

図8 メッシュ分割



(a) 強制変位7.7μm (b) 強制変位7.8μm

図9 計算結果 (変形5000倍)

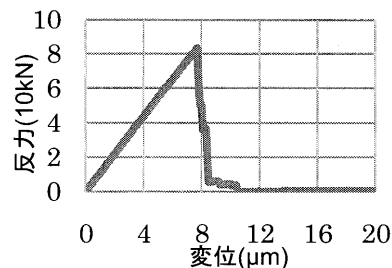


図10 強制変位-反力の関係

図9に変形図に最大応力分布を重ねたものを、図10に強制変位と反力の関係を表したグラフを示す。骨材は破壊しないと仮定しているため、き裂は原則的に骨材に沿って進展するものの、一部にブリッジングに起因する抵抗が確認できる。

4. おわりに

本研究ではFEM-βを用いていくつかのモデルの破壊進展解析を行った結果、メッシュ分割に依存するが定性的には同等のき裂が表現できることが確認できた。

参考文献

- 1) 小国健二, 堀宗朗, 阪口秀: 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集, No.766, pp203-217, 2004
- 2) 池田翔大, 永井学志: 擬脆性材料の破壊進展解析に対するFEM-βの性能, 計算工学講演会論文集, Vol.13, No.1, pp41-44, 2008