

523 磁歪アクチュエータの構造最適化に関する基礎的検討

A study on structural optimization for magnetostrictive actuators

加藤 峰教 岐阜大学大学院 工学研究科 数理デザイン工学専攻

Takanori Kato, Gifu Univ., Graduate School of Eng., Dept. of Mathematical and Design Engineering

山田 崇恭 京都大学大学院 工学研究科 機械工学群 航空宇宙工学専攻

Takayuki Yamada, Kyoto Univ., Graduate School of Eng., Mechanical Engineering Division, Dept. of Aeronautics and Astronautics

永井 学志 岐阜大学 工学部 数理デザイン工学科

西脇 眞二 京都大学大学院 工学研究科 機械工学群

航空宇宙工学専攻

Gakuji Nagai, Gifu Univ., Faculty of Eng., Dept. of Mathematical and Design Engineering Shinji Nishiwaki, Kyoto Univ., Graduate School of Eng., Mechanical Engineering Division, Dept. of Aeronautics and Astronautics

Key Words: Magnetostriction, Phase Field Method, Finite Element Method, Structural Analysis

本研究では、磁歪アクチュエータにおいて力を伝達する役割を果たしているプッシュロッド部について、その最適形状を求め、それを目的とする。最適化手法として有限要素法とトポロジカルフェーズフィールド法を用いて相互平均コンプライアンスを最小化させる構造最適化問題に帰着させ、これを弾性プッシュロッド部に対する構造最適化に応用する。

1. はじめに

磁歪アクチュエータは、燃料噴射バルブや位置決め装置等の様々な用途への応用が期待されている。しかし、プッシュロッド部の形状は、必ずしも最適な形状に設計されているとはいえない。本稿では、磁歪アクチュエータの弾性プッシュロッド部に対する構造最適化を有限要素法（FEM）とトポロジカルフェーズフィールド法（TPFM）により行う数値計算手法を構成する。

2. ベクトルポテンシャル型 FEM による磁歪の定式化

2-1 磁歪現象の支配方程式 領域 V とその境界 ∂V において機械に関する支配方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + b &= 0, \quad \sigma = c^B : \varepsilon - h \cdot B, \quad \varepsilon = \nabla^s u \quad \text{in } V \\ u &= \bar{u} \quad \text{on } S_u, \quad \sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } S_\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 σ は応力、 b は体積力、 c^B は剛性率、 ε はひずみ、 h は磁歪定数、 B は磁束密度、 u は変位、 n は ∂V の外向き単位法線、 t は表面力であり、 (\cdot) は既知の値であることを示す。また、 $S_u \cup S_\sigma = \partial V$ 、 $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$ である。

また、磁気に関する支配方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J, \quad H = -h^T : \varepsilon + v \cdot B, \quad B = \nabla \times A \quad \text{in } V \\ B \cdot n &= 0 \quad \text{on } S_B, \quad H \times n = 0 \quad \text{on } S_H \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 H は磁場、 J は電流密度、 v は磁気抵抗率、 A はベクトルポテンシャルであり、 $S_B \cup S_H = \partial V$ 、 $S_B \cap S_H = \emptyset$ である。

なお、 $h = 0$ とすれば、機械に関する式と磁気に関する式は連成することなく、それぞれ独立なものとなる。

2-2 弱定式化と離散化 ガラーキン法の手続きに従い、変位 u とベクトルポテンシャル A への近似 \hat{u} 、 \hat{A} を考える。そのうえで、式(1)の上段第1式と下段第2式それぞれの残差に重み $\delta \hat{u}$ を、式(2)の上段第1式と下段第2式それぞれの残差に重み $\delta \hat{A}$ を乗じて領域積分する。

$$\begin{aligned} \int_V \delta \hat{u} \cdot (\nabla \cdot \hat{\sigma} + b) dV + \int_{S_\sigma} \delta \hat{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot n - \bar{t}) dS &= 0 \\ \int_V \delta \hat{A} \cdot (\nabla \times \hat{H} - J) dV + \int_{S_H} \delta \hat{A} \cdot (\hat{H} \times n) dS &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、近似 \hat{u} 、 \hat{A} に起因する近似も (\cdot) で表す。式(3)に対してグリーンの定理を適用してから整理すると、最終的に行列形式による次の離散化方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uA} \\ K_{uA}^T & K_{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_A \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 u と A はそれぞれ \hat{u} 、 \hat{A} の離散値からなる列ベクトルである。また、

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \int_V B_u^T [c^B] B_u dV, \quad K_{uA} = - \int_V B_u^T [h] B_A dV \\ K_{AA} &= \int_V B_A^T [v] B_A dV \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_u = \int_{S_t} N_u^T [\bar{t}] dS, \quad f_A = \int_V N_A^T [J] dV$$

であり、 $[\cdot]$ は (\cdot) の行列あるいは列ベクトル表現、 N_u と N_A はともに大域的な形状関数行列、 B_u と B_A はそれぞれひずみ-変位変換行列、磁束密度-ベクトルポテンシャル変換行列である。

2-3 磁束の無漏れ境界条件の書き換え 式(2)の下段第1式で表される境界 S_B における磁束の無漏れ条件は、そのままではディレクレ条件として課しづらい。そこで、これと等価な別の式に書き換える。

領域 V を二分する任意の面 S_A を考える。ただし、 S_A の境界線 l_A はすべて境界 S_m 上となるようにする。このとき、 S_A に貫く磁化の総量 \bar{m} は面の位置によらず一定となる。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \int_{S_A} B \cdot n_A dS = \int_{S_A} (\nabla \times A) \cdot n_A dS \\ &= \oint_{l_A} A \cdot t_A dl = (\text{Const.}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、式変形にストークスの定理を用いており、 n_A は S_A による切断面のうち注目する物体側のものの外向き単位法線、 t_A は境界線 l_A の単位接線（ S_A を正面から見たときに l_A が反時計回りとなる向きを正）である。

特に2次元問題の場合、ベクトルポテンシャル A は流れ関数となるので、式(6)は単純化できる。すなわち、 A_z をスカラー関数、 e_z を z 軸の単位基底とすると、 $A = A_z e_z$ と置けるので、例えば図1のように z 方向に単位厚さの領域を考えると、式(6)を満たす十分条件の1つとして

$$\begin{cases} m = A_z = (\text{Const.}) & \text{on side A} \\ A_z = 0 & \text{on side B} \end{cases} \quad (7)$$

を考えることができる。実装上、この条件は従属自由度とすればよい。

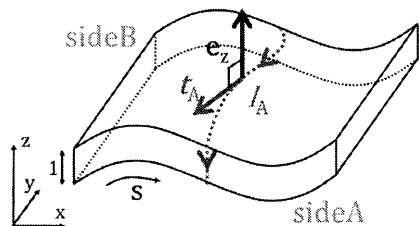
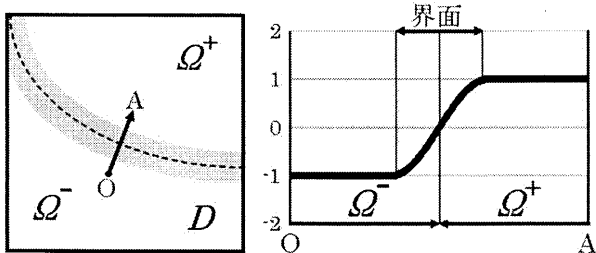


図 1 2次元問題における磁束の無漏れ境界条件

3. 構造最適化手法

3-1 トポロジカルフェーズフィールド法 TPFM では、位置 x と時間 t に関して連続な識別関数 $\varphi(x, t)$ を導入することにより、固定設計領域 D 内の任意点を弾性体領域 Ω^+ もしくは空洞領域 Ω^- に判別可能となる。 φ の値域は $-1 \leq \varphi \leq 1$ であり、 $\varphi < 0$ を Ω^- 、 $0 < \varphi$ を Ω^+ 、 $\varphi = 0$ を Ω^- と Ω^+ の境界 $\partial\Omega$ とみなす。



(a) 固定設計領域 D (b) 識別関数 φ の例 (OA 間)

図 2 識別関数 φ による弾性体領域の識別

本研究では、次の時間発展方程式を数値時間積分法により解き、識別関数 φ の停留をもって最適解とする。

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -K(\varphi)(f_N - \tau \nabla^2 \varphi) \text{ in } D \\ \varphi &= 1 \text{ on } \partial D_D, \quad \tau(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial D \setminus \partial D_D \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\dot{\varphi}$ は φ の時間微分を表し、 $K(\varphi) > 0$ は易動度、 f_N は正規化された相互エネルギー密度関数(後述)、 τ は界面厚さ係数、 ∂D_D は既定の弾性体境界である。

3-2 相互エネルギー密度 体積制約条件付きの相互平均コンプライアンスを最小化させる構造最適化問題において、相互エネルギー密度関数 f と制約条件 G は、 λ を未定乗数としてそれぞれ次式で定義される。

$$f \equiv \varepsilon(\mathbf{u}_1) : \mathbf{E} : \varepsilon(\mathbf{u}_2) + \lambda \quad (9)$$

$$G(\Omega^+) \equiv \int_{\Omega^+} dV - V_{\max} \leq 0 \quad (10)$$

ここで、 \mathbf{E} は弾性率、 V_{\max} は体積の制約値であり、 \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 はそれぞれ図 3(a)、 3(b) に示すようなモデルを解いたときの領域 D の変位場である。すなわち、 \mathbf{u}_1 は設計領域における剛性確保のためのバネ要素(バネ定数 k)を設置したうえで磁場 \mathbf{B} を発生させた時の変位場であり、 \mathbf{u}_2 はバネ要素に替えて表面力 $\bar{\mathbf{t}}$ を作用させた時の変位場である。

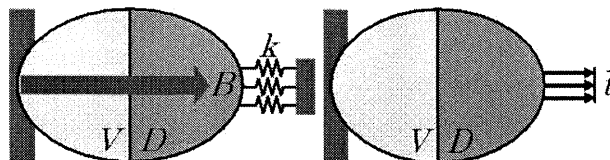
式(8)の f_N は、式(9)の f をその最大値で除して正規化したものである。

$$f_N = f / \max_D f \quad (11)$$

また λ は、制約条件が活性の場合、

$$\lambda = \int_D K(\varphi) \varepsilon(\mathbf{u}_1) : \mathbf{E} : \varepsilon(\mathbf{u}_2) dV / \int_D K(\varphi) dV \quad (12)$$

で求めることができ、活性でない場合、 $\lambda = 0$ となる。



(a) 変位場 \mathbf{u}_1 用モデル

(b) 変位場 \mathbf{u}_2 用モデル

図 3 変位場の解析モデル

3-3 弱定式化と離散化 先ほどと同様、ガラーキン法の手続きに従い、式(8)の上段式と下段第 2 式に重み $\delta\varphi$ を乗じて領域積分する。

$$\begin{aligned} \int_D \delta\varphi \left(\frac{1}{K} \dot{\varphi} + f_N - \tau \nabla^2 \varphi \right) dV \\ + \int_{\partial D \setminus \partial D_D} \delta\varphi \tau(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

最終的に行列形式による次の半離散化方程式を得る。

$$\mathbf{C}_\varphi \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}_\varphi \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}_\varphi \quad (14)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varphi}$ は φ の離散値からなる列ベクトルであり、

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\varphi &= \int_D \mathbf{N}_\varphi^T \frac{1}{K} \mathbf{N}_\varphi dV, \quad \mathbf{K}_\varphi = \int_D \mathbf{B}_\varphi^T \tau \mathbf{B}_\varphi dV \\ \mathbf{f}_\varphi &= - \int_D \mathbf{N}_\varphi^T f_N dV \end{aligned} \quad (15)$$

\mathbf{N}_φ は大域的な形状関数行列、 \mathbf{B}_φ はその偏導関数行列である。

本研究では式(14)を後退オイラー法により離散化して計算を行う。時刻 $t + \Delta t$ で式(10)を満たさない場合、 $G(\varphi(t + \Delta t) + \Delta\varphi) \leq 0$ を満たす微小な補正值 $\Delta\varphi$ の最小値を二分法により求め、新たに $\varphi(t + \Delta t) + \Delta\varphi$ を識別関数の値とする。

3-4 最適化アルゴリズム 以上をまとめた最適化のフローチャートを図 4 に示す。

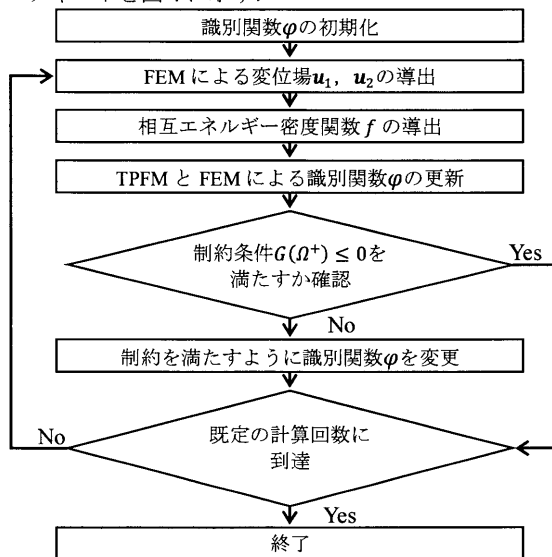


図 4 最適化フローチャート

4. おわりに 本研究では、TPFM を用いた磁至アクチュエータの構造最適化手法を構成した。なお計算結果については当日発表する。

参考文献

- 1) S.S.Jang: Magnetostrictive Terfenol-D material liner simulation using finite element method, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 24 (2006), 187-193