A-6-13

圧縮符号化を利用した ランク変調方式の最悪ケース最適化符号の構成

Construction of Worst Case Optimal Code for Rank Modulation Scheme using Compressed Encoding

戸部 雅人 [1] 鎌部 浩 [2]
Masato Tobe Hiroshi Kamabe

岐阜大学大学院 工学研究科 応用情報学専攻 [1 2]
Graduate School of Information Science,Gifu University

1 はじめに

ランク変調方式は，フラッシュメモリの長寿命化，オーバーシュートの除去を目的として，A. Jiang らによって提案された [1]. Gad らは，電荷量を増加させる方法として，push up 操作を提案した [2]. 本稿では，push up 操作を採用したランク変調方式を，圧縮符号化ランク変調方式と呼ぶ．ブロックサイズが 6 の場合に最大の符号化率を達成する最悪ケース最適化符号が実現できたことを示す．

2 準備

ランク変調方式では，各セルの電荷量の相対関係を順列 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ で表現する．順列の要素は，蓄積されている電荷量が多い順に並んでいる．つまり，セル a_1 が最も電荷量が多く，セル a_n が最も電荷量が少ない．セル a_i は，ランク i を持つ，と言う．

ランク変調符号は，ブロック内の各セルに蓄積されている電荷量の相対関係を符号化し，書き換えのプロセスを設計することで，定義される．n 個の要素の順列の集合を S_n，ブロックによって表現される情報シンボルを $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ とする．データの書き換えは，順列 $s \in S_n$ からシンボル i へ写像する復号関数 $\phi(s) = i$ と，順列 s と更新シンボル i' を引数として，$\phi(s') = i'$ を満たすような $s' \in S_n$ を返す更新関数 $\mu(s, i') = s'$ を定義することで，実現される．．また，符号化率は，$\frac{1}{n}\log_2 l$ で定義される．

状態 (順列) が遷移した時，各セルが持つランクも変化する．遷移前後のセルが持つランクの差を計算する．最大の差が，圧縮符号化ランク変調方式の書き換えコストとなる [2, Theorem1]. すべての書き換えコストが 1 となる符号を最悪ケース最適化符号と呼ぶ．

以下の性質を満たす有向グラフを遷移グラフ $G_n = (V, E)$ とする．V は S_n に含まれるすべての順列で構成される集合である．また，E は有向枝の集合である．$u \in S_n$ から $v \in S_n$ へのコストが 1 の時に限り，頂点 u から頂点 v へ有向枝が存在する．

グラフ $G = (V, E)$ の頂点集合 $D \subseteq V$ は以下の性質を満たす時，支配集合と呼ぶ：$V \setminus D$ のすべての頂点から，D のいずれかの頂点に対して，有向枝がある．

遷移グラフ G_n の頂点を素な支配集合 $D_1, D_2, \ldots, D_l$ へ分割する．そして，すべての $s \in D_i$ に対して，$\phi(s) = i$ となるようにシンボルを割り振る．このように割り振ると，すべての書き換えのコストは 1 となるため，最悪ケース最適化符号が構成できる．支配集合 D の大きさは，$|D| \geq \frac{n!}{\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}}$ を満す [2, Theorem2]. この下界に一致する大きさの支配集合で状態集合を分割できた場合に，最大の符号化率を達成できる．$n \leq 5$ のときには，最大の符号化率を達成する符号の構成法が知られている [2, Construction1,2].

3 研究成果

$n = 6$ の場合に，支配集合が下界を達成するための十分条件と，支配集合に関する性質に関する定理を示す．

Theorem 1

以下の性質を満たすような要素数 6 の順列を 30 個集めた集合 Z は，下界を達成する支配集合になる．

(1) 集合内の各順列の 3 番目の要素を集めると，1 から 6 を 5 個ずつ含むマルチ集合になる．また，4，5，6 番目を集めても同じ集合になる．

(2) 5 番目の要素が $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の順列を 5 つ取る．そして，それら 5 つの順列の 4，6 番目を集めて，集合 S とする．この時，S は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a\}$ の各要素をちょうど 2 個含む大きさ 10 のマルチ集合になる．また，6 番目の要素に関して，同じ処理を施すと同様の集合になる．

(3) 5 番目の要素が $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の順列を 5 つ取る．そして，それら 5 つの順列の 3 番目を集めて，集合 S とする．この時，S は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{a\}$ となる．また，6 番目の要素に関して，同じ処理を施すと同様の集合になる．

Theorem 2

支配集合 D_1 内の順列の 1 番目と 2 番目を入れ替えた順列をすべて含む集合 D_2 は，D_1 と素な支配集合である．

上記の 2 つの定理を利用し，G_6 の 720 個のすべての頂点を大きさ 30 の素な支配集合へ等分割することができた．よって，最大の符号化率 $\frac{1}{6}\log_2 24$ を達成する最悪ケース最適化符号が実現できた．

参考文献

[1] A. Jiang, R. Mateescu, M. Schwartz and J. Bruck, "*Rank Modulation for Flash Memories*", IEEE Transactions on Information Theory, vol. 55, no. 6, pp. 2659-2673, June 2009.

[2] E. En Gad, A. Jiang and J. Bruck, "*Compressed Encoding for Rank Modulation* ", in Proc. IEEE ISIT, pp. 849-853, Russia, August 2011.