

2ポート測定による4ポートSパラメータ推定の一方法

大野 慎治[†] 関根 敏和^{††} 高橋 康宏^{††}

[†] 岐阜大学大学院工学研究科 〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1

^{††} 岐阜大学工学部 〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1

E-mail: ^{††}sekine@gifu-u.ac.jp

あらまし 4ポート回路の2個のポートに既知の負荷を接続し、残りの2ポート間のSパラメータを測定することで、4ポート回路全体のSパラメータを推定する方法を述べている。本方法の特長は、線形連立方程式と2次代数方程式を解くだけで求まるように推定式を工夫しているところにある。本方法は、ICパッケージなど、測定器が接続困難なポートを持つ場合や、回路のグラウンドが共通でない回路のSパラメータを求めるのに応用できる。

キーワード 測定法, GND 非共通回路, Sパラメータ, 4ポート回路

A method of 4-port S-parameter estimation by the two-port measurements.

Shinji OHNO[†], Toshikazu SEKINE^{††}, and Yasuhiro TAKAHASHI^{††}

[†] Graduate School of Eng., Gifu University Yanagido 1-1, Gifu-shi, 501-1193 Japan

^{††} Dept. of Electrical and Electronic Eng., Gifu University Yanagido 1-1, Gifu-shi, 501-1193 Japan

E-mail: ^{††}sekine@gifu-u.ac.jp

Abstract A method of estimating the S-parameters of the 4-port circuit is presented. In our method, two ports of 4-port circuit are terminated with known loads. And the S-parameters between remaining two ports are measured. Advantages of our method is that the S-parameters are to be estimated only by solving the system linear equations and the second order algebraic equations. Our method can be applied to determine the S-parameters of the circuit with a difficult port to connect the probe of the instrument as the IC package and to determine the S-parameters of the circuit ground is not common.

Key words circuit without common ground, measurement method, s-parameters, four-port circuit

1. ま え が き

測定器のプロブを直接接続できないポートを持つ回路の回路網行列を求める方法がいくつか検討されている[1][2][3][4][5]. プロブを直接接続できない理由は大きく2つある. 1つは, ICチップなどのように, 測定器が接続困難なポートを持つ回路の場合, もう1つは, ポートのグラウンドが共通でない回路の場合で, 共通なグラウンドを持つ測定器のプロブを接続すると回路の動作が変わってしまう場合である.

本文では, 4ポート回路内の2つのポート間のSパラメータを測定して, 4ポート回路全体のSパラメータを推定する方法を述べる. ここで, 2ポート間のSパラメータを測定するとき, 残りの2ポートは既知の負荷で終端する. 本方法の特長は, 非線形方程式を解かずに線形連立方程式と2次代数方程式を解くだけでSパラメータを推定できるところにある. また, 文

献[5]と異なり, 残りの2ポートを終端する既知の2つの負荷は同じである必要がない. 本方法でも, 他の方法[5]と同様に推定するパラメータのいくつかは, 符号が確定しない. このことを数値例とともに示す.

2. Sパラメータ推定式

2.1 導 出

図1に示す相反4ポート回路において, ポート1と2が測定器を直接接続可能とし, 残りのポート3と4が直接接続できないポートとする. この回路のS行列 \mathbf{S} は, 入射波ベクトル \mathbf{a} と反射波ベクトル \mathbf{b} を用いて

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (1)$$

ただし

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]^T \quad (3)$$

と表される。ここで、ポート 3 と 4 に既知の負荷 $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を接続すると

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3^{(k)} & 0 \\ 0 & S_4^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

であるから、このときのポート 1 と 2 間の S 行列を $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$ とすると

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}}^{(k)} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \hat{S}_{11}^{(k)} & \hat{S}_{12}^{(k)} \\ \hat{S}_{12}^{(k)} & \hat{S}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} S_3^{(k)} & 0 \\ 0 & S_4^{(k)} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \cdot \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_3^{(k)} & 0 \\ 0 & S_4^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix}^T \quad (6) \end{aligned}$$

を得る。ここで $\mathbf{1}$ は単位行列を表す。この式 (6) を $\hat{\mathbf{S}}$ の各要素ごとに分解し、左辺に未知項、右辺に既知項が配置されるように整理すると

$$\begin{bmatrix} 1 & S_3^{(k)} \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_4 \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_3^{(k)} & S_4^{(k)} & S_3^{(k)} S_4^{(k)} \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_3^{(k)} S_4^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m}_{ij} = \hat{S}_{ij}^{(k)} \quad (i=1,2, j=1,2) \quad (7)$$

ただし

$$\mathbf{m}_{ij} = \begin{bmatrix} m_{ij}^{(1)} \\ m_{ij}^{(2)} \\ m_{ij}^{(3)} \\ m_{ij}^{(4)} \\ m_{ij}^{(5)} \\ m_{ij}^{(6)} \\ m_{ij}^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ij} \\ S_{33} \\ S_{44} \\ S_{i3}S_{j3} - S_{ij}S_{33} \\ S_{i4}S_{j4} - S_{ij}S_{44} \\ S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \\ \begin{pmatrix} S_{ij}S_{33}S_{44} + S_{i3}S_{j4}S_{34} + S_{j3}S_{i4}S_{34} \\ -S_{i3}S_{j3}S_{44} - S_{i4}S_{j4}S_{33} - S_{ij}S_{34}^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (8)$$

が得られる。この式 (7)(8) が 2 ポート測定により相反 4 ポート回路の S パラメータを推定するための基本式になる。

2.2 推定式の解

式 (7) は、 (i, j) の組 (1,1), (1,2), (2,2) の 3 組について、それぞれ、7 個の未知数 $m_{ij}^{(1)} \sim m_{ij}^{(7)}$ からなるので、このままでは解が一意に定まらない。そこで、組ごとに $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を替え

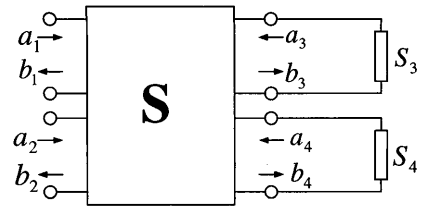


図 1 相反 4 ポート回路

て $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$ を 7 回測定することで方程式を 7 個作り ($k=1 \cdots 7$)、それらを連立して解くことにする。すなわち、3 個の 7 元連立方程式を解くことになる。このとき、式 (8) の第 1 行目から、 S_{11}, S_{12}, S_{22} が、また、各組の第 2 行目、第 3 行目と第 6 行目から S_{33}, S_{44} と S_{34}^2 が重複して求まる。したがって、例えば、 (i, j) が (1,1) の連立方程式からだけ S_{33}, S_{44} と S_{34}^2 を求め、他の (1,2), (2,2) からは求めないように方程式を縮小することも可能である。このようにすると未知数の合計は 10 個になり、本来求める相反 4 ポート回路の独立な S パラメータ数 10 個と一致する。

2.3 非対角項符号の不確定性

式 (8) の第 4 行目から第 7 行目を (i, j) の各組ごとに展開して

$$m_{11}^{(4)} = S_{13}^2 - S_{11}S_{33} \quad (9)$$

$$m_{12}^{(4)} = S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33} \quad (10)$$

$$m_{22}^{(4)} = S_{23}^2 - S_{22}S_{33} \quad (11)$$

$$m_{11}^{(5)} = S_{14}^2 - S_{11}S_{44} \quad (12)$$

$$m_{12}^{(5)} = S_{14}S_{24} - S_{12}S_{44} \quad (13)$$

$$m_{22}^{(5)} = S_{24}^2 - S_{22}S_{44} \quad (14)$$

$$m_{11}^{(6)} = S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \quad (15)$$

$$m_{12}^{(6)} = S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \quad (16)$$

$$m_{22}^{(6)} = S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \quad (17)$$

$$m_{11}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{11}S_{33}S_{44} + S_{13}S_{14}S_{34} + S_{13}S_{14}S_{34} \\ -S_{13}S_{13}S_{44} - S_{14}S_{14}S_{33} - S_{11}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$m_{12}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{12}S_{33}S_{44} + S_{13}S_{24}S_{34} + S_{23}S_{14}S_{34} \\ -S_{13}S_{23}S_{44} - S_{14}S_{24}S_{33} - S_{12}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$m_{22}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{22}S_{33}S_{44} + S_{23}S_{24}S_{34} + S_{23}S_{24}S_{34} \\ -S_{23}S_{23}S_{44} - S_{24}S_{24}S_{33} - S_{22}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

であるから、式 (9)(11)(12)(14) より $S_{13}^2, S_{14}^2, S_{23}^2, S_{24}^2$ が求まる。また、 S_{34}^2 が式 (15)(16)(17) から重複して求まる。これらの符号は不確定であるが、残りの式 (10)(13)(18)(19)(20) を満足しなければならない。調べてみると、結局符号の自由度は 2 で、 $\pm S_{12}$ と $\pm S_{13}$ の組み合わせ 4 通りを指定でき、これに応じて残りのパラメータの符号が決まることがわかる。

2.4 符号確定における対称性の利用

図 1 が左右対称回路の場合、 $S_{12} = S_{34}, S_{14} = S_{23}$ なので、これらの条件を追加すると 4 ポート S パラメータのすべての符号が確定する。また、上下に対称の場合も、 $S_{13} = S_{24}, S_{14} = S_{23}$ なので、これらの条件を追加して 4 ポート S パラメータのすべ

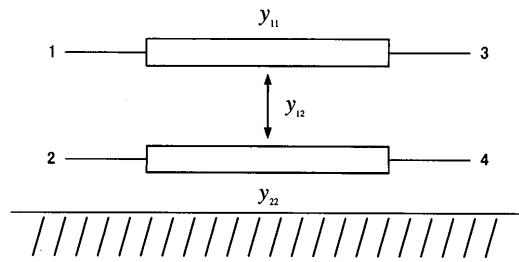


図2 結合2本線路

ての符号が確定する。

3. 負荷の検討

3.1 既知負荷の種類数

$\hat{S}^{(k)}$ を得るために必要な負荷 $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の種類は少ない方がよいと考えられるので, (i, j) の各組ごとに7通りの $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせを作るための最小種類数を検討する。

まず, 負荷が2種類 Z_1, Z_2 で, それぞれ2個ずつあるとすると, 組み合わせは4通り (2^2) なので7通りにはならない。次に, 負荷が3種類 Z_1, Z_2, Z_3 で, それぞれ2個ずつあると, 組み合わせは9通り (3^2) になり, 7通りを超える。したがって, 同一の値を許すとき, 負荷は最低3種類必要なことがわかる。

3.2 数値例

推定する4ポート回路の具体例として図2の結合2本線路を考える。図2の結合2本線路のYパラメータは

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} y_0 & -Ty_0 \\ -Ty_0 & y_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ただし

$$t = j \tan \tau\omega, \quad T = \sqrt{1 - t^2} \quad (22)$$

で, Sパラメータは

$$\mathbf{S} = (\mathbf{1} - \mathbf{y})^{-1} (\mathbf{1} + \mathbf{y}) \quad (23)$$

ただし

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{R}_0^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

で求まる。今, 特性アドミタンス行列 \mathbf{y}_0 と電気長 $\tau\omega$ および基準抵抗行列 \mathbf{R}_0 を

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} \\ -y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\tau\omega = \frac{\pi}{3} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

と与えると

$$S_{11} = \frac{3032466}{248957659} + j \frac{1283350\sqrt{3}}{248957659} \quad (28)$$

$$S_{12} = \frac{30056250}{248957659} + j \frac{9207780\sqrt{3}}{248957659} \quad (29)$$

$$S_{13} = \frac{244250575}{497915318} - j \frac{247262225\sqrt{3}}{497915318} \quad (30)$$

$$S_{14} = \frac{5304375}{248957659} - j \frac{1947065\sqrt{3}}{248957659} \quad (31)$$

$$S_{22} = -\frac{72108159}{248957659} - j \frac{21736100\sqrt{3}}{248957659} \quad (32)$$

$$S_{23} = S_{14} \quad (33)$$

$$S_{24} = \frac{108864350}{248957659} - j \frac{118763450\sqrt{3}}{248957659} \quad (34)$$

$$S_{33} = S_{11} \quad (35)$$

$$S_{34} = S_{12} \quad (36)$$

$$S_{44} = S_{22} \quad (37)$$

が得られる。

前節の検討から, 7通りの S_3, S_4 の組み合わせを作るには3種類の負荷を用意し, そのうち1種類を2個, その他の負荷を1個ずつ用いればよい。ここでは, 短絡を表す $S = -1$ の負荷を2個, 基準抵抗を表す $S = 0$ と開放を表す $S = 1$ の負荷をそれぞれ1個とし, 合計4個用いることにする。この負荷の組み合わせを表1に#1として示す。このとき, 式(6)から7通りの \hat{S} を求めると以下ようになる。

$$\hat{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{13273}{26402} + j \frac{12975\sqrt{3}}{26402} & \frac{1875}{13201} - j \frac{385\sqrt{3}}{13201} \\ \frac{1875}{13201} - j \frac{385\sqrt{3}}{13201} & \frac{1949}{13201} + j \frac{7450\sqrt{3}}{13201} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\hat{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{13273}{816254} + j \frac{12975\sqrt{3}}{816254} & \frac{49845}{408127} + j \frac{20905\sqrt{3}}{408127} \\ \frac{49845}{408127} + j \frac{20905\sqrt{3}}{408127} & -\frac{118317}{408127} - j \frac{35498\sqrt{3}}{408127} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\hat{S}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{13273}{350582} + j \frac{12975\sqrt{3}}{350582} & \frac{24345}{175291} + j \frac{16605\sqrt{3}}{175291} \\ \frac{24345}{175291} + j \frac{16605\sqrt{3}}{175291} & -\frac{128513}{175291} - j \frac{65298\sqrt{3}}{175291} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\hat{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{13273}{13132} + j \frac{12975\sqrt{3}}{13132} & \frac{765}{6566} + j \frac{365\sqrt{3}}{6566} \\ \frac{765}{6566} + j \frac{365\sqrt{3}}{6566} & \frac{542}{6566} + j \frac{1825\sqrt{3}}{6566} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\hat{S}^{(5)} = \begin{bmatrix} \frac{1294491}{104938159} + j \frac{512725\sqrt{3}}{104938159} & \frac{12297000}{104938159} + j \frac{2801030\sqrt{3}}{104938159} \\ \frac{12297000}{104938159} + j \frac{2801030\sqrt{3}}{104938159} & -\frac{76646159}{104938159} - j \frac{39978600\sqrt{3}}{104938159} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\hat{S}^{(6)} = \begin{bmatrix} -\frac{1294491}{26138} - j \frac{512725\sqrt{3}}{26138} & \frac{1245}{13069} + j \frac{1845\sqrt{3}}{13069} \\ \frac{1245}{13069} + j \frac{1845\sqrt{3}}{13069} & \frac{2381}{13069} + j \frac{7150\sqrt{3}}{13069} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\hat{S}^{(7)} = \begin{bmatrix} -\frac{1294491}{485899022} - j \frac{512725\sqrt{3}}{485899022} & \frac{29091375}{242949511} + j \frac{5438495\sqrt{3}}{242949511} \\ \frac{29091375}{242949511} + j \frac{5438495\sqrt{3}}{242949511} & -\frac{70300161}{242949511} - j \frac{21293150\sqrt{3}}{242949511} \end{bmatrix} \quad (44)$$

次に, これらの \hat{S} の値を測定値として元のSパラメータを推定すると, 式(7)(8)から, $S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{33}$ と S_{44} が求まる。また,

$$S_{13}^2 = -\frac{61878740174010625}{123959831949520562} - j \frac{60393940632029375\sqrt{3}}{123959831949520562} \quad (45)$$

$$S_{14}^2 = \frac{16763207797950}{61979915974760281} - j \frac{20655925818750\sqrt{3}}{61979915974760281} \quad (46)$$

$$S_{23}^2 = \frac{16763207797950}{61979915974760281} - j \frac{20655925818750\sqrt{3}}{61979915974760281} \quad (47)$$

表 1 $S = -1$ を 2 個, $S = 0, S = 1$ を 1 個ずつ用いた場合

測定	k	1	2	3	4	5	6	7
#1	$S_3^{(k)}$	-1	-1	-1	0	0	1	1
	$S_4^{(k)}$	-1	0	1	-1	1	-1	0
#2	$S_3^{(k)}$	-1	-1	0	0	0	1	1
	$S_4^{(k)}$	0	1	-1	0	1	-1	0
#3	$S_3^{(k)}$	-1	-1	0	0	1	1	1
	$S_4^{(k)}$	0	1	-1	1	-1	0	1
#4	$S_3^{(k)}$	-1	0	1	0	-1	0	1
	$S_4^{(k)}$	-1	1	0	0	0	-1	1
#5	$S_3^{(k)}$	-1	-2/3	-1/3	0	1/3	2/3	1
	$S_4^{(k)}$	-1	-2/3	-1/3	0	1/3	2/3	1

$$S_{24}^2 = -\frac{30462824466785000}{61979915974760281} - j \frac{25858211576015000\sqrt{3}}{61979915974760281} \quad (48)$$

$$S_{34}^2 = \frac{649028526477300}{61979915974760281} + j \frac{553502675250000\sqrt{3}}{61979915974760281} \quad (49)$$

も求まる。よって

$$S_{13} = \pm \left(\frac{244250575}{497915318} - j \frac{247262225\sqrt{3}}{497915318} \right) \quad (50)$$

$$S_{14} = \pm \left(\frac{5304375}{248957659} - j \frac{1947065\sqrt{3}}{248957659} \right) \quad (51)$$

である。ここで S_{13}, S_{14} の複号でどちらも正をとると, S_{23}, S_{24}, S_{34} が当初の式 (33)(34)(36) と同じ値になるが, 他の符号の組み合わせでは異なった値になる。

3.3 負荷の組み合わせ

7 通りの $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせは, 式 (7) の係数行列の行列式が 0 にならないようにする必要がある。また, 係数行列の条件数が小さくなるようにするのが数値計算上望ましい。そこで, いくつかの組み合わせで検討してみる。表 1 の #2~#5 に負荷の組み合わせを, その場合の式 (7) の係数行列の条件数を, #1 の場合と合わせて表 2 に示す。表 1, 2 から, すべての k について $S_3^{(k)} = S_4^{(k)}$ とすると係数行列の行列式が 0 になって推定できないことがわかる。また, その他の組み合わせでは, 条件数に大きな違いがないことがわかる。

4. む す び

4 ポート回路内の 2 つのポート間の S パラメータを測定して, 4 ポート回路全体の S パラメータを推定する方法を述べた。ここで, 測定する 2 ポート以外の残りの 2 ポートは既知の負荷で終端する。本方法の特長は, 非線形方程式を解かずに線形連立方程式と 2 次代数方程式を解くだけで S パラメータを推定できるところにある。また, 残りの 2 ポートを終端する既知の 2 つの負荷は任意である。そこで負荷が推定値に及ぼす影響を調べ, 推定する S パラメータによっては, 同時に接続する負荷の値がすべて同じときに, 推定できないことを示した。本方法では, 一部符号の定まらない S パラメータがある。この解消が今後の課題である。

文 献

- [1] 船戸是宏, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "グラウン

表 2 負荷の組み合わせと係数行列の条件数の関係

(i, j)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)
#1	1.1243×10^3	1.6510×10^3	8.6699×10^2
#2	2.0504×10^4	1.3102×10^3	2.1741×10^4
#3	5.2333×10^2	1.2432×10^3	7.1938×10^2
#4	2.0641×10^4	3.8867×10^3	2.1886×10^4
#5	∞	∞	∞

ド非共通回路における S パラメータの 2 ポート測定法,"信学技法, EMCJ2007-43, pp.1-6, Sept. 2007.

- [2] 新谷 亨, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "LSI パッケージの多ポートモデル化を目的とした参照グラウンドが不要な 1 エンドインピーダンス測定法の検討,"信学技法, EMCJ2007-44, pp.7-12, Sept. 2007.
- [3] 松田 昂, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "4 ポート回路 S パラメータの片側 2 ポート測定法,"信学技法, EMCJ2008-31, pp.31-36, July. 2008.
- [4] 前田 登, 福井 伸治, 市川 浩司, 櫻井 礼彦, 関根 敏和, 高橋 康宏, "n-1 ポート測定による相反 n ポート回路の S パラメータ推定," 信学論, vol.J96-C, no.12, pp.1-8, Dec. 2013.
- [5] 前田 登, 福井 伸治, 直井 孝, 市川 浩司, 関根 敏和, 高橋 康宏, "r ポート測定による 2r ポート S パラメータの推定,"信学技法, EMCJ2013-107, pp.55-60, Dec. 2013.