一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
IT2013-56,ISEC2013-85,WBS2013-45(2014-3)

ランク変調と順列集合の支配集合による分割の分類

高橋　佑輔†　　鎌部　　浩†

† 岐阜大学大学院　工学研究科　応用情報学専攻

あらまし　フラッシュメモリにデータを記録するための方式として，データを電荷レベルの大小関係に基づく置換を用いて表現する方式が提案された．Minimal push up と呼ばれる操作を基本操作として順列を変化させることでデータを書き換えることによって，書き換えによる電荷の増加を抑えることができ，結果的にフラッシュメモリの寿命を長くすることができる．この方法で電荷の増加を制限する符号を構成するためには，あるグラフの頂点集合を支配集合に分割することが重要になる．本稿では，符号長が 4 の場合に支配集合の要素数の下界を達成する支配集合を構成するための必要条件を示し，そのような支配集合を全て構成する．また，下界を達成する支配集合の組み合わせによって構成できる全ての符号を得た．さらに 1 つの支配集合から異なる支配集合を構成できる定理を用いてこれらの符号を分類する．

キーワード　ランク変調，圧縮符号化，フラッシュメモリ

Yusuke TAKAHASHI† and Hiroshi KAMABE†

† Information Science Division, Graduate School of Engineering, Gifu University

Abstract　A coing scheme using a rank modulation was proposed for storing data in flash memories.There are two fundamental operation for changing the state of cells , called a push to the top and a minimal push up.A construction of a code with the minimal push up operation strongly depends on a partition of the set of all permulations in dominat sets of a trasision graph induced by the minimal push up operation.In this paper , a necessary and sufficient condition is proposed for a dominant set to meet a lower bound on the number of elements in the dominant set with equality when the length of the erase block is 4.All possible partitions by dominant sets are identified using the condition.Then the partitions are classified into some equivalent classes.

Key words　Rank Modulation, Compressed Encoding ,Flash Memory

1. まえがき

フラッシュメモリは書き換え可能な不揮発性のメモリであり，現在広く普及している．フラッシュメモリを用いたドライブ装置 (Solid State Drive, SSD) はハードディスク装置 (Hard Disk Drive, HDD) に比べ衝撃への耐性が高く，消費電力と発熱がともに少ないといった利点を持っている．フラッシュメモリはセルと呼ばれる素子から構成され，データの書き込みはセルに電荷を注入することで行う．セルに貯めることが可能な電荷量には限界があり，一杯になった後も書き換えを続けるためには電荷を除去しなければならない．電荷の注入はセル単位で行えるが，電荷の除去は複数のセルから構成されるブロック単位でしか行えない．このブロック単位での電荷の除去をブロック消去と呼ぶ．ブロック消去はセルを劣化させるため，品質が保証されるブロック消去回数には制限がある．そこで，なるべくブロック消去を行わないような符号化方法が研究されている．

セルには SLC(Single Level Cell) と MLC(Multi Level Cell) の 2 種類がある．SLC は電圧を 0 と 1 に対応させることで 1 ビットを記録するのに対し，MLC は閾値を設定して中間の値を用いることによりひとつのセルに複数ビットを記録する．MLC が閾値によって分けられた q 個の離散レベルのうち 1 つを記録する場合，それをサイズ q のアルファベットのシンボルとみなすことができる．大容量化のために MLC は有用であるが，目標の値に向かって電荷を注入するときに電荷を過剰に注入してしまうオーバーシュートという問題を持っている．オーバーシュートによって目標の閾値を越えてしまうと必要の無いブロック消去を招いてしまうのである．この問題を解決するために，A. Jiang らはランク変調 (Rank Modulation) を使用する方法を提案した [1]．

ランク変調では，データをセルの電荷レベルの大小関係に対応したセルの番号の置換に対応させる．ブロックの単位を n 個のセルとする．n 個のセルにそれぞれ 1 から n まで番号を割り振る．例えば $n=5$ ならば順列 $[4,1,5,2,3]$ といった様に表され，セル 4 の電荷量が最も多くセル 3 の電荷量が最も少ない．

この方式では電荷レベルの差がわかればよいので，データに対応させるための閾値を必要としない．また，電荷の大小関係にデータが符号化されており電荷の絶対値には無関係であるため，オーバーシュートの問題が生じにくいという利点がある．ランク変調における誤り訂正符号や，ブロックをより小さな単位に分割するこ方式が研究されている [2], [4], [5], [6].

この方式では現在の順列を別の順列に変更することがデータの書き換えを意味する．コストを電荷の増加量と考えた場合，より少ないコストで順列を変更することはブロック消去の発生間隔を延ばすことにつながる．[1] では push to the top 操作を順列を変更するための基本操作として用いた場合に，電荷の増加量を抑制する符号が提案されている．この符号は任意のセルの数 n に対して構成可能である．minimal push up を用いた場合は， push to the top を用いた場合よりも符号化率の高い符号を構成できることが期待できる．minimal push up を使用する場合に $n=3,4,5,6$ で最大の符号化率を達成する符号が示されている [3], [7]. これらの符号を構成するためには順列集合をいくつかの支配集合に分割する必要がある．より多くの支配集合に分割することで，より高い符号化率が達成できる．

第 2 節では電荷の増加量を制限する符号を説明する．第 3 節では，minimal push up を順列を変更するための基本操作として用いた場合に構成されるグラフに対して，$n=4$ の場合に支配集合の要素数に関する下界を達成する支配集合を構成するための必要条件を示す．さらに，$n=4$ の場合に構成可能な全ての下界を達成する支配集合を求め，構成可能な全ての最大の符号化率を持つ符号を構成する．第 4 節ではそれらの符号を同じ様な性質を持ったグループに分類する．

2. 電荷の増加量を制限する符号

2.1 minimal push up

長さ n の全ての順列を S_n とする．状態を順列として定義し，現在の順列を $\mathbf{u}=[u(1),...,u(n)]\in S_n$，遷移先の順列を $\mathbf{v}=[v(1),...,v(n)]\in S_n$ とする．minimal push up はどのセルもできるだけ少ない電荷レベルの増加となるように $\mathbf{v}$ に基いて電荷を注入する操作である．$i=n-1,n-2,...,1$ に対して順番に次の操作を行う：{ セル v_i のレベルをセル v_{i+1} のレベルよりも大きくする }．例えば，$\mathbf{u}=[1,2,3,4],\mathbf{v}=[2,4,1,3]$ とすると，まず $v_3=1$ と $v_4=3$ の電荷レベルをを比較し，v_3 が大きくなるように電荷レベルを増加させる．次に $v_2=4$ と $v_3=1$ の電荷レベルをを比較し，v_2 が大きくなるように電荷レベルを増加させ，最後に $v_1=2$ と $v_2=4$ の電荷レベルをを比較して v_2 が大きくなるように電荷レベルを増加させる．

2.2 コ ス ト

minimal push up によって $\mathbf{u}$ を $\mathbf{v}$ に変更する為のコストを $C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})$ とする．このコストは書き換え前の最大の電荷レベルと，書き換え後の最大の電荷レベルを比較したときの増加量を指し，整数で表される．$C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})=1$ であることは最小の最大電荷レベルの増加で書き換えを行うことを意味しており，常にそのような書き換えが可能となる符号を構成することが目標とする．$C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})$ は次式で定義される [3].

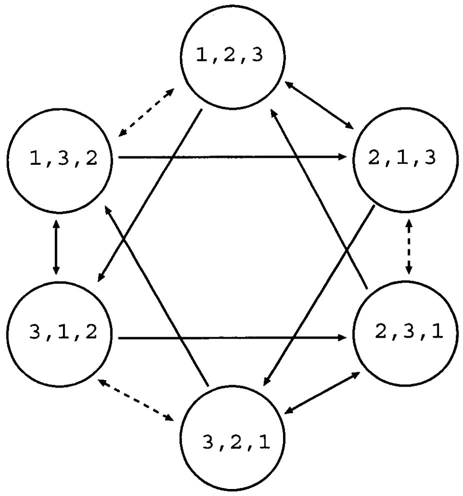

図 1　$n=3$ の遷移グラフ

$$C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})=\max_{i\in[n]}(v^{-1}(i)-u^{-1}(i)) \tag{1}$$

ここで $[n]=\{1,2,...,n\}$ とする．例えば，$\mathbf{u}=[1,2,3,4],\mathbf{u}=[2,1,4,3]$ ならば $C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})=1$，$\mathbf{u}=[1,2,3,4],\mathbf{u}=[4,3,2,1]$ ならば $C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})=3$ となる．

2.3 遷移グラフ

遷移グラフ $G_n=(V_n,A_n)$ を次のように定義する．V_n は長さが n のすべての順列 S_n である．有向辺 $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ が存在する事と，$C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})=1$ であることは同値になるように集合 A_n を定義する．頂点 $\mathbf{u}\in V_n$ と $r\in\{0,1,...,n-1\}$ が与えられたとき，球 $B_{n,r}(\mathbf{u})$ を $B_{n,r}(\mathbf{u})=\{\mathbf{v}\in V_n|C(\mathbf{u}\to\mathbf{v})\leqq r\}$ と定義する．$B_{n,r}(\mathbf{u})$ の要素数は以下で与えられる [3].

$$|B_{n,r}(\mathbf{u})|=r!(r+1)^{n-r} \tag{2}$$

ここで，集合 A に対して $|A|$ をその要素数とする．図 1 は $n=3$ の遷移グラフである．どの辺もコスト 1 の状態遷移を表す．push to the top を用いた場合には実線の遷移しかできないが，minimal push up を状態遷移のための操作として用いるのであれば破線の遷移も可能となる (push to the top については [1] を参照).

2.4 支 配 集 合

G_n 中の頂点集合を D とする．D 中の頂点を除く全ての頂点が D の頂点への有向辺を持つ場合，D を支配集合と呼ぶ．$|D|$ を支配集合 D が含む順列の数であるとする．$|D|$ は次の不等式を満たす [3].

$$|D|\geq\frac{n!}{\frac{3}{4}\cdot 2^{n-1}} \tag{3}$$

2.5 符 号 構 成

$r=1$ の場合，すなわち常にコスト 1 で書き換え可能な符号を考える．記録する情報シンボルを $i\in\{1,...,l\}$ とする．遷移グラフ G_n の頂点集合が，互いに素な支配集合 $D_1,...,D_l$ に分割できたと仮定する．このとき，$D_1,...,D_i,...,D_l$ にそれぞれ異なるシンボル i を割り当て，D_i 中の順列全てを割り当て

D_1	[1, 2, 3, 4]	[2, 3, 4, 1]	[3, 4, 1, 2]	[4, 1, 2, 3]
D_2	[1, 2, 4, 3]	[2, 4, 3, 1]	[4, 3, 1, 2]	[3, 1, 2, 4]
D_3	[1, 3, 2, 4]	[3, 2, 4, 1]	[2, 4, 1, 3]	[4, 1, 3, 2]
D_4	[1, 3, 4, 2]	[3, 4, 2, 1]	[4, 2, 1, 3]	[2, 1, 3, 4]
D_5	[1, 4, 2, 3]	[4, 2, 3, 1]	[2, 3, 1, 4]	[3, 1, 4, 2]
D_6	[1, 4, 3, 2]	[4, 3, 2, 1]	[3, 2, 1, 4]	[2, 1, 4, 3]

表 1 (3) の下界を達成する支配集合による構成

られた情報シンボル i に写像する．高い符号化率を持つ符号を構成するためにはに，$n!$ 個の順列をできるだけ多くの支配集合に分割できればよい．更新関数は情報シンボル i が与えられた場合に，割り当てられた情報シンボル i と一致する順列の中で，現在の順列からのコストが最も小さい順列を返す．$n!$ 個の全ての順列に対してシンボルが割り当てられている符号を full-assignment 符号，全ての順列に対してシンボルが割り当てられていない符号を non-full-assignment 符号と呼ぶ．本稿では，full-assignment 符号のみを扱う．[3] では $n=3,4,5$ の場合に，[7] では $n=6$ の場合に，全ての支配集合が (3) の下界を達成する符号が示されている．表 1 は $n=4$ の場合の一例である．

3. $n=4$ の場合に下界を達成する支配集合を構成するための必要条件

$n=4$ の場合に下界を満たす支配集合を構成するための十分条件が示されている [7].

定理 1. G_4 における *(3)* の下界と等しい集合を X とする．このとき X が次の性質を満たすならば，X は支配集合である．X 中の各順列の 3 番目の要素を集めると $\{1,2,3,4\}$ となる．同様に 4 番目を集めても $\{1,2,3,4\}$ となる．すなわち，$\{x_3 : [x_1,x_2,x_3,x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ かつ，$\{x_4 : [x_1,x_2,x_3,x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ となる．

この条件は，必要条件にもなっている．

定理 2. G_4 における集合 X を *(3)* の下界を達成する支配集合とする．このとき X は次の性質を満たす．X 中の各順列の 3 番目の要素を集めると $\{1,2,3,4\}$ となる．同様に 4 番目を集めても $\{1,2,3,4\}$ となる．すなわち，$\{x_3 : [x_1,x_2,x_3,x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ かつ，$\{x_4 : [x_1,x_2,x_3,x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ となる．

証明. $n=4$ の支配集合を構成する要素数の下界は (3) より 4 である．$X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_j = [x_{j1},x_{j2},x_{j3},x_{j4}]$，$Y_3 = \{y_3 : [y_1,y_2,y_3,y_4] \in X\}$，$Y_4 = \{y_4 : [y_1,y_2,y_3,y_4] \in X\}$，$\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$ とする．また，2 つの順列を $\mathbf{u} = [u(1),...,u(n)] \notin X, \mathbf{v} = [v(1),...,v(n)] \in X$ とし，$\phi_j(\mathbf{w}) = \phi_j([w(1),...,w(n)]) = w(j)$ とする．

まず，$Y_3 = \{a,b,c,d\}$ となることを示す．$Y_3 \neq \{a,b,c,d\}$ となるパターンは $|Y_3| = 1$，$|Y_3| = 2$，$|Y_3| = 3$ の 3 通りである．これらの場合に X が支配集合とならないことを示す．

1) $|Y_3| = 1$ の場合

$Y_3 = \{a\}$ とする．この場合，$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$ である．コストの計算式 (1) から，$C(\mathbf{u} \to \mathbf{v}) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$[a,b,c,d]$ から X 中の順列へ遷移するためにコストは少なくとも 2 必要となる．よって X は支配集合には成り得ない．

2) $|Y_3| = 2$ の場合

$B_3 = \{a,b\}$ とする．この場合は次の 3 通りが考えられる．

$$|\{i : \phi_3(x_i)\}| = 1 \tag{4}$$

$$|\{i : \phi_3(x_i)\}| = 2 \tag{5}$$

$$|\{i : \phi_3(x_i)\}| = 3 \tag{6}$$

(4) と (6) は a と b を入れ替えれば同じになるため，(4) と (5) の場合を考える．

(4) の場合

$x_1 = [x_{11},x_{12},a,x_{14}]$，$x_2 = [x_{21},x_{22},a,x_{24}]$，$x_3 = [x_{31},x_{32},a,x_{34}]$，$x_4 = [x_{41},x_{42},b,x_{44}]$ としても一般性を失わない．$\mathbf{u} = [a,x_{44},u(3),u(4)] \notin X$ という順列を考える．このとき，X には $x_{j1} = a$ となる順列が存在しない．また，x_{42} は x_{44} と成り得ないため，$\mathbf{u}$ は X に含まれない．$i = 1,2,3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となる．$i=4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_4) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(x_{44}) - v^{-1}(x_{44}) = 2$ となる．$\mathbf{u}$ から X 中の順列へ遷移するためにコストは少なくとも 2 必要となるため，$|Y_3| = 2$ かつ (4) の場合に X は支配集合には成り得ない．

(5) の場合

$x_1 = [x_{11},x_{12},a,x_{14}]$，$x_2 = [x_{21},x_{22},a,x_{24}]$，$x_3 = [x_{31},x_{32},b,x_{34}]$，$x_4 = [x_{41},x_{42},b,x_{44}]$ とする．(x_{14},x_{24}) が取りうるパターンは $(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(b,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,c)$ の 9 パターンである．これらそれぞれに対して (x_{34},x_{44}) の取りうるパターンが $(a,a),(c,c),(d,d),(a,c),(a,d),(c,a),(c,d),(d,a),(d,c)$ の 9 パターン存在する．

$(x_{14},x_{24}) = (b,b)$ の場合，

$\mathbf{u} = [b,a,u(3),u(4)] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 3$，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{14},x_{24}) = (c,c)$ の場合，

$(x_{34},x_{44}) = (a,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34},x_{44}) = (c,c)$ ならば，$\mathbf{u} = [c,b,d,a] \notin X$ とすると，$i = 1,2,3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 3$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34},x_{44}) = (d,d),(a,d),(d,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,d,b,c] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) -$

$u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ または，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (a,c),(c,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,c,d,b] \notin X$ とすると，，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ または，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (c,d),(d,c)$ ならば，$\mathbf{u} = [c,d,a,b] \notin X$ とすると，，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 3$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 3$ または，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．
$(x_{14}, x_{24}) = (d,d)$ の場合も (c,c) の場合と同様にして X は支配集合とならない．
$(x_{14}, x_{24}) = (b,c),(c,b)$ の場合，$\mathbf{u} = [b,c,a,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．
$(x_{14}, x_{24}) = (b,d),(d,b)$ の場合，$\mathbf{u} = [b,d,a,c] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．
$(x_{14}, x_{24}) = (c,d)$ の場合，

$(x_{34}, x_{44}) = (a,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,b,u(3),u(4)] \notin X$ とすると，$i = 1,2,3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (c,c),(a,c),(c,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,c,d,b] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (d,d)$ ならば，$\mathbf{u} = [d,c,a,b] \notin X$ とすると，，$i = 1,2,3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (a,d),(d,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,d,c,b] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$i = 3,4$ のとき $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{44}) = (c,d),(d,c)$ ならば，$\mathbf{u} = [c,d,a,b] \notin X$ とすると，$i = 1,2,3,4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 3$ または $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(d) - v^{-1}(d) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．
$(x_{14}, x_{24}) = (d,c)$ の場合も (c,d) の場合と同様にして X は支配集合とならない．

よって，$|Y_3| = 2$ かつ (5) の場合に X は支配集合には成り得ない．

したがって，$|Y_3| = 2$ の場合に X は支配集合には成り得ない．
3）$|Y_3| = 3$ の場合

$Y_3 = \{a,b,c\}$ とする．$x_1 = [x_{11}, x_{12}, a, x_{14}]$，$x_2 = [x_{21}, x_{22}, a, x_{24}]$，$x_3 = [x_{31}, x_{32}, b, x_{34}]$，$x_4 = [x_{41}, x_{42}, c, x_{44}]$ としても一般性を失わない．(x_{14}, x_{24}) が取りうるパターンは $(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(b,d),(c,b),(c,d),(d,b),(d,c)$ の 9 パターンである．これらそれぞれに対して (x_{34}, x_{44}) の取りうるパターンが $(a,a),(a,b),(a,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,d)$ の 9 パターン存在する．これらのパターンに対して他の場合と同様にコストの計算を行うと，$|Y_3| = 3$ の場合に X は支配集合には成り得ないことがわかる．

以上より，$|Y_3| = 1, |Y_3| = 2, |Y_3| = 3$ の場合で X は支配集合とならないため，X が支配集合となるのは $|Y_3| = 4$，すなわち $Y_3 = \{a,b,c,d\}$ の場合のみである．

次に，$Y_4 = \{a,b,c,d\}$ となることを示す．$Y_4 \neq \{a,b,c,d\}$ となるパターンは $|Y_4| = 1$，$|Y_4| = 2$，$|Y_4| = 3$ の 3 通りである．これらの場合に X が支配集合とならないことを示す．
1）$|Y_4| = 1$ の場合

$Y_4 = \{a\}$ とする．この場合，$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$ とする．このときコストは，$C(\mathbf{u} \to \mathbf{v}) = \max_{i \in [n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となり，$[a,b,c,d]$ から X 中の順列へ遷移するためにコストは少なくとも 2 必要となる．よって X は支配集合には成り得ない．
2）$|Y_4| = 2$ の場合

$B_4 = \{a,b\}$ とする．この場合は次の 3 通りが考えられる．

$$|\{i : \phi_4(x_i)\}| = 1 \tag{7}$$

$$|\{i : \phi_4(x_i)\}| = 2 \tag{8}$$

$$|\{i : \phi_4(x_i)\}| = 3 \tag{9}$$

(7) と (9) は a と b を入れ替えれば同じになるため，(7) と (8) の場合を考える．
(7) の場合

$x_1 = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, a]$，$x_2 = [x_{21}, x_{22}, x_{23}, a]$，$x_3 = [x_{31}, x_{32}, x_{33}, a]$，$x_4 = [x_{41}, x_{42}, x_{43}, b]$ としても一般性を失

わない．$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$ という順列を考える．$i = 1,2,3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となる．$i = 4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$ となる．$\mathbf{u}$ から X 中の順列へ遷移するためにコストは少なくとも 2 必要となるため，$|Y_4| = 2$ かつ (7) の場合に X は支配集合には成り得ない．

よって，$|Y_4| = 2$ かつ (7) の場合に X は支配集合には成り得ない．

(8) の場合

$x_1 = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, a]$，$x_2 = [x_{21}, x_{22}, x_{23}, a]$，$x_3 = [x_{31}, x_{32}, x_{33}, b]$，$x_4 = [x_{41}, x_{42}, x_{43}, b]$としても一般性を失わない．$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$という順列を考える．$i = 1,2,3$のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となる．$i = 4$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$ となる．$\mathbf{u}$ から X 中の順列へ遷移するためにコストは少なくとも 2 必要となるため，$|Y_4| = 2$ かつ (9) の場合に X は支配集合には成り得ない．

よって，$|Y_4| = 2$ かつ (8) の場合に X は支配集合には成り得ない．

したがって，$|Y_4| = 2$ の場合に X は支配集合には成り得ない．

3) $|Y_4| = 3$ の場合

$Y_4 = \{a,b,c\}$ とする．$x_1 = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, a]$，$x_2 = [x_{21}, x_{22}, x_{23}, a]$，$x_3 = [x_{31}, x_{32}, x_{33}, b]$，$x_4 = [x_{41}, x_{42}, x_{43}, c]$ としても一般性を失わない．(x_{13}, x_{23}) が取りうるパターンは，$Y_3 = \{a,b,c,d\}$ であることを考慮すると，$(b,c), (b,d), (c,b), (c,d), (d,b), (d,c)$ の 6 パターンである．これらそれぞれに対して (x_{33}, x_{43}) の取りうるパターンが $(a,b), (a,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b)$ の 7 パターン存在する．さらに，$\{x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}\} = \{a,b,c,d\}$ とならない場合は除外する．

$(x_{13}, x_{23}) = (b,c)$ の場合，

$(x_{33}, x_{43}) = (a,d)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,c,b,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となり，$i = 3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$，$i = 4$ のとき $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{34}, x_{43}) = (d,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [a,b,c,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 3$ となり，$i = 3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$，$i = 4$のとき $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{13}, x_{23}) = (c,b)$ の場合も $(x_{13}, x_{23}) = (b,c)$ と同様にして X は支配集合とならない．

$(x_{13}, x_{23}) = (b,d)$ の場合，

$(x_{33}, x_{43}) = (c,a)$ ならば，$\mathbf{u} = [c,a,b,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$i = 3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 2$，$i = 4$のとき $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(c) - v^{-1}(c) = 3$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{13}, x_{23}) = (d,b)$ の場合も $(x_{13}, x_{23}) = (b,d)$ と同様にして X は支配集合とならない．

$(x_{13}, x_{23}) = (c,d)$ の場合，

$(x_{33}, x_{43}) = (a,b)$ ならば，$\mathbf{u} = [b,a,c,d] \notin X$ とすると，$i = 1,2$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(a) - v^{-1}(a) = 2$ となり，$i = 3$ のとき，$C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 2$，$i = 4$のとき $C(\mathbf{u} \to x_i) = \max_{i\in[n]}(v^{-1}(i) - u^{-1}(i)) \geqq u^{-1}(b) - v^{-1}(b) = 3$ となる．よって，この場合に X は支配集合には成り得ない．

$(x_{13}, x_{23}) = (d,c)$ の場合も $(x_{13}, x_{23}) = (c,d)$ と同様にして X は支配集合とならない．

よって，$|Y_4| = 3$ の場合に X は支配集合には成り得ない．

以上より $|Y_4| = 1, |Y_4| = 2, |Y_4| = 3$ の場合で X は支配集合とならないため，X が支配集合となるのは $|Y_4| = 4$，すなわち $Y_4 = \{a,b,c,d\}$ の場合のみである．

□

これにより，以下がわかる．

定理 3. G_4 において，要素数が 4 の集合を X とする．X が次の性質を満たすことと X が下界を達成する支配集合であることは同値である．X 中の各順列の 3 番目の要素を集めると $\{1,2,3,4\}$ となる．同様に 4 番目を集めても $\{1,2,3,4\}$ となる．すなわち，$\{x_3 : [x_1, x_2, x_3, x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ かつ，$\{x_4 : [x_1, x_2, x_3, x_4] \in X\} = \{1,2,3,4\}$ となる．

必要十分条件を用いて下界を達成する支配集合を全て構成することができた．下界を達成する支配集合は 144 個存在し，これらの組み合わせにより 24576 通りの符号を構成した．

4. 符号の分類

1 つの支配集合から異なる支配集合を構成できる方法を考案した．

S_n を長さ n の全ての順列とする．任意の順列 $a \in S_n$ に対して，$b \in S_n$ を a の 1 番目と 2 番目の要素を入れ替えた順列とする．a, b へコスト 1 で遷移できる順列の集合を S_a と S_b とすると，$S_a \backslash \{b\} = S_b \backslash \{a\}$ が成り立つことが [7] で示されている．その順列自身を含めた場合，$S_a = S_b$ となる．よって次の定理が成り立つ．

定理 4. 支配集合を D とし，順列 $x = [x_1, x_2, x_3, ..., x_n] \in D$ とする．$x' = [x_2, x_1, x_3, ..., x_n]$ を $D \backslash \{x\}$ に加えた集合 D' は支配集合である．

表 2 は定理 4 の例である．支配集合となっている 4 つの順列の集合 $\{[1,2,3,4], [2,3,4,1], [3,4,1,2], [4,1,2,3]\}$ の中から 2 つの順列 $[1,2,3,4], [3,4,1,2]$ を選ぶ．それぞれ 1 番目と 2 番目を交換して順列 $[2,1,3,4], [4,3,1,2]$ を得る．元の 2 つ順列と，

[1, 2, 3, 4]　[2, 3, 4, 1]　[3, 4, 1, 2]　[4, 1, 2, 3]

$\Downarrow$

[**2**, **1**, 3, 4]　[2, 3, 4, 1]　[**4**, **3**, 1, 2]　[4, 1, 2, 3]

表 2　定理 4 の例

[1, 2, 3, 4]　[2, 3, 4, 1]　[3, 4, 1, 2]　[4, 1, 2, 3]

$\Downarrow$

(セルのインデックスを $1 \to 3$，$2 \to 2$，$3 \to 4$，$4 \to 1$ に変更する)

$\Downarrow$

[3, 2, 4, 1]　[2, 4, 1, 3]　[4, 1, 3, 2]　[1, 3, 2, 4]

表 3　定理 5 の例

1 番目と 2 番目を交換して構成した順列を入れ替えて，新しい集合 $\{[2,1,3,4],[2,3,4,1],[4,3,1,2],[4,1,2,3]\}$ を得る．この集合もまた支配集合となっている．

この定理からどの支配集合の a と b のペアを交換しても，下界を達成する支配集合による符号となることがわかる．この様なペアの交換によって構成される符号は遷移グラフが似ているため，同じ様な性質を持つと考えられる．$n=4$ の場合に構成した 24576 個の符号を，このようなペアの交換によって構成可能なグループに分類する．任意の順列を x とする．x の 1 番目と 2 番目を入れ替えた順列を y とし，x が情報シンボル i に，y が情報シンボル j にそれぞれ写像されるとする．このとき，任意の数の x と y の組に対して写像先の i と j を交換する．この様にして構成できる符号を同じグループとする．結果として，それぞれ $4096, 4096, 4096, 4096, 2048, 2048, 2048, 512, 512, 512, 512$ の符号を持つ 11 種類に分類できた．

コストの計算式 (1) より，コストはインデックスの移動量によって定まり，インデックス自体に関わらないため次のことが言える．

定理 5. セルのインデックスを任意に再定義する．元の支配集合からラベルの張替えによって得られた集合は支配集合である．

表 3 は定理 5 の例である．定理 5 をすべての支配集合に適用して異なる符号を構成できる．これにより，11 種類に分類した符号をさらにまとめることができた．11 種類に分類した符号の中でインデックスの付け替えによって変換できる符号が同じグループであるとすると，それぞれ $12288, 6144, 4096, 1536, 512$ の符号を持つ 5 つのグループに分類できた．

支配集合を $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とし，順列を $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}]$ とする．定理 3 より，$i = 1,2,3,4$ で $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i4}, x_{i3}]$ としても下界を達成する支配集合による構成となる．この場合の分類も行ったが，それぞれ $12288, 6144, 4096, 1536, 512$ の符号を持つ 5 つのグループからの変化はなかった．

5. まとめ

本稿では，$n=4$ の場合に下界を達成する支配集合を構成するための必要条件を証明した．また，$n=4$ の場合に下界を達成する支配集合を全て構成し，minimal push up を用いた場合に電荷の増加量を制限する符号の中で $n=4$ で最大の符号化率を持つ符号を全て構成した．さらに，異なる支配集合を構成することができる定理を示し，これによって構成した符号を分類した．分類された符号は遷移グラフが近く，似た性質を持っていると考えられるため，異なるコストを定義した場合などで解析を行うときに利用できる．

謝辞　この研究は科研費 (基盤研究 (C) 課題番号 23560439) の助成を受けている．

文　献

[1] A. Jiang, R. Mateescu, M. Schwartz and J. Bruck, "Rank Modulation for Flash Memories", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 6, pp. 2659-2673, June 2009.

[2] A. Jiang, M. Schwartz and J. Bruck, "Error-Correcting Codes for Rank Modulation", *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pp. 1736–1740, Toronto, Canada, July 2008.

[3] E. En Gad, A. Jiang and J. Bruck, "Compressed Encoding for Rank Modulation",*Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pp. 849–853, St. Petersburg, Russia, August 2011.

[4] Eyal En Gad, Michael Langberg, Moshe Schwartz, Jehoshua Bruck, "Generalized Gray Codes for Local Rank Modulation", *IEEE Transactions on Information Theory 59(10)*, 6664-6673 (2013)

[5] H. Zhou, A. Jiang and J. Bruck, "Systematic Error-correcting Codes for Rank Modulation", *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Cambridge, MA, July 2012.

[6] Z. Wang, A. Jiang and J. Bruck, "On the Capacity of Bounded Rank Modulation for Flash Memories", *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pp. 1234–1238, Seoul, Korea, June-July 2009.

[7] 戸部 雅人，"不揮発性メモリのためのランク変調方式に関する研究"，岐阜大学大学院工学研究科応用情報学専攻修士論文