

1ポートまたは2ポート測定による4ポートSパラメータ推定に使用する 負荷の条件

大野 慎治[†] 関根 敏和^{††} 高橋 康宏^{††}

[†] 岐阜大学大学院工学研究科 〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1

^{††} 岐阜大学工学部 〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1

E-mail: ^{††}sekine@gifu-u.ac.jp

あらまし 4ポート回路の2個のポートに既知の負荷を接続し、残りの2ポート間のSパラメータを測定することで、4ポート回路全体のSパラメータを推定する一方法に使用する既知の負荷の条件を述べている。同様に、4ポート回路の3個のポートに既知の負荷を接続し、残りの1ポートのSパラメータを測定することで、4ポート回路全体のSパラメータを推定する場合の既知の負荷の条件も述べている。本推定方法の特長は、線形連立方程式と2次代数方程式を解くだけで求まるように推定式を工夫しているところにある。本方法は、ICパッケージなど、測定器が接続困難なポートを持つ場合や、回路のグラウンドが共通でない回路のSパラメータを求めるのに応用できる。

キーワード 測定法, グラウンド非共通回路, Sパラメータ, 4ポート回路, 校正法

Conditions of loads for 4-port S-parameter estimation by two or one-port measurements.

Shinji OHNO[†], Toshikazu SEKINE^{††}, and Yasuhiro TAKAHASHI^{††}

[†] Graduate School of Eng., Gifu University Yanagido 1-1, Gifu-shi, 501-1193 Japan

^{††} Dept. of Electrical and Electronic Eng., Gifu University Yanagido 1-1, Gifu-shi, 501-1193 Japan

E-mail: ^{††}sekine@gifu-u.ac.jp

Abstract A method of estimating the S-parameters of the 4-port circuit is presented. And conditions of loads for 4-port S-parameter estimation by two or one-port measurements are described. In our method, two or three-port of 4-port circuit are terminated with known loads. And the S-parameters between remaining two or one-port are measured. Advantages of our method is that the S-parameters are to be estimated only by solving the system linear equations and the second order algebraic equations. Our method can be applied to determine the S-parameters of the circuit with a difficult port to connect the probe of the instrument as the IC package and to determine the S-parameters of the circuit ground is not common.

Key words measurement method, circuit without common ground, s-parameters, four-port circuit calibration method

1. ま え が き

測定器のプロープを直接接続できないポートを持つ回路の回路網行列を求める方法がいくつか検討されている [1] [2] [3] [4] [5]. 測定プロープを直接接続できない理由は大きく2つある。1つは、測定器が接続困難なポートを持つ回路の場合、もう1つは、ポートのグラウンドが共通でない回路の場合である。前者の例として、パッケージ内のICチップなどで、測定のためにパッケージから取り出すとその特性が変わってしまうので、実装状態のまま測定したい場合を挙げることができる。また、複

数ポート間のグラウンドが共通電位でない回路の場合に、共通なグラウンドを持つ測定器のプロープを接続すると回路の動作が変わってしまう場合で、高密度に集積されたICチップや、基板上のグラウンドの電位分布が一定でない場合を例としてあげることができる。

本文では、4ポート回路内の2つのポート間のSパラメータを測定して4ポート回路全体のSパラメータを推定する一方法に使用する既知の負荷の条件を述べる。また、4ポート回路内の1つのポートのみのSパラメータを測定して4ポート回路全体のSパラメータを推定する方法も述べる。ここで、2ポート

間の S パラメータあるいは、1 ポートの S パラメータを測定するとき、残りのポートは既知の負荷で終端する。本方法の特長は、非線形方程式を解かずに線形連立方程式と 2 次代数方程式を解くだけで S パラメータを推定できるところにある。また、文献 [5] と異なり、残りのポートを終端する既知の 2 つの負荷は同じである必要がない。本方法でも、他の方法 [5] と同様に推定するパラメータのいくつかは、符号が確定しない。このことを数値例とともに示す。

2. 2 ポート測定による 4 ポート S パラメータ推定

2.1 推定式の導出

図 1 に示す相反 4 ポート回路で、測定プローブが直接接続可能なポートの組に添字 a 、測定プローブが直接接続できないポートの組に添字 u を使用することによって、その S 行列 \mathbf{S} は

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{aa} & \mathbf{S}_{au} \\ \mathbf{S}_{au}^T & \mathbf{S}_{uu} \end{bmatrix} \quad (1)$$

のように表される。ここで、入射波ベクトル $[\mathbf{a}_a \ \mathbf{a}_u]^T$ および反射波ベクトル $[\mathbf{b}_a \ \mathbf{b}_u]^T$ の間に

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{aa} & \mathbf{S}_{au} \\ \mathbf{S}_{au}^T & \mathbf{S}_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \mathbf{a}_u \end{bmatrix} \quad (2)$$

の関係がある。ここで、測定プローブが直接接続できないポートの組に反射係数が $\mathbf{S}_L^{(k)}$ の負荷を接続すると

$$\mathbf{a}_u = \mathbf{S}_L^{(k)} \mathbf{b}_u \quad (3)$$

であるから、これを式 (2) に代入して

$$\mathbf{b}_a = (\mathbf{S}_{aa} + \mathbf{S}_{au} \mathbf{S}_L^{(k)} (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{uu} \mathbf{S}_L^{(k)})^{-1} \mathbf{S}_{au}^T) \mathbf{a}_a \quad (4)$$

が得られる。ここで $\mathbf{1}$ は単位行列を表す。よって、測定プローブが直接接続できないポートの組を縮約して得られる回路の S 行列を $\hat{\mathbf{S}}_L^{(k)}$ とすると

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(k)} = \mathbf{S}_{aa} + \mathbf{S}_{au} \mathbf{S}_L^{(k)} (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{uu} \mathbf{S}_L^{(k)})^{-1} \mathbf{S}_{au}^T \quad (5)$$

である。いま

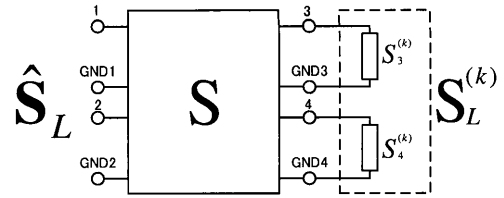
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

として、ポート 3 と 4 に既知の負荷 $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を接続すると

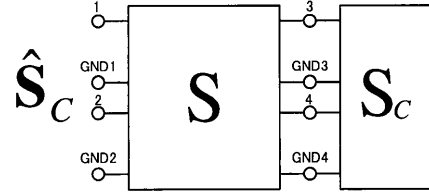
$$\mathbf{S}_L^{(k)} = \begin{bmatrix} S_3^{(k)} & 0 \\ 0 & S_4^{(k)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

であるから、

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11}^{(k)} & \hat{S}_{12}^{(k)} \\ \hat{S}_{12}^{(k)} & \hat{S}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (8)$$



(a) 既知の負荷で終端



(b) 未知の負荷で終端

図 1 相反 4 ポート回路

と置いて式 (5) を $\hat{\mathbf{S}}$ の各要素ごとに分解し、左辺に未知項、右辺に既知項が配置されるように整理すると

$$\begin{bmatrix} 1 & S_3^{(k)} \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_4^{(k)} \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_3^{(k)} & S_4^{(k)} & S_3^{(k)} S_4^{(k)} \hat{S}_{ij}^{(k)} & S_3^{(k)} S_4^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{m}_{ij} = \hat{S}_{ij}^{(k)} \quad ((i, j) = (1, 1), (1, 2), (2, 2)) \quad (9)$$

ただし

$$\mathbf{m}_{ij} = \begin{bmatrix} m_{ij}^{(1)} \\ m_{ij}^{(2)} \\ m_{ij}^{(3)} \\ m_{ij}^{(4)} \\ m_{ij}^{(5)} \\ m_{ij}^{(6)} \\ m_{ij}^{(7)} \\ m_{ij}^{(7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ij} \\ S_{33} \\ S_{44} \\ S_{i3}S_{j3} - S_{ij}S_{33} \\ S_{i4}S_{j4} - S_{ij}S_{44} \\ S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \\ \left(S_{ij}S_{33}S_{44} + S_{i3}S_{j4}S_{34} + S_{j3}S_{i4}S_{34} \right) \\ \left(-S_{i3}S_{j3}S_{44} - S_{i4}S_{j4}S_{33} - S_{ij}S_{34}^2 \right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

が得られる。この式 (9)(10) が 2 ポート測定により相反 4 ポート回路の S パラメータを推定するための基本式になる。

2.2 未知の負荷の S パラメータ \mathbf{S}_C の導出

式 (5) を得たのと同様にして、図 1(b) について

$$\hat{\mathbf{S}}_C^{(k)} = \mathbf{S}_{aa} + \mathbf{S}_{au} \mathbf{S}_C^{(k)} (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{uu} \mathbf{S}_C^{(k)})^{-1} \mathbf{S}_{au}^T \quad (11)$$

を得る。式 (5)(11) より、 \mathbf{S}_C を求める方程式として

$$\mathbf{1} = \mathbf{S}_C \left(\mathbf{S}_{uu} + \mathbf{S}_{au}^T (\hat{\mathbf{S}}^{(k)} - \mathbf{S}_{aa})^{-1} \mathbf{S}_{au} \right) \quad (12)$$

を得る。すなわち、既知の負荷 \mathbf{S}_L を接続して \mathbf{S} を推定すると、それを使って未知の負荷の S パラメータ \mathbf{S}_C が求まる。

2.3 推定式の解

式 (9) は、 (i, j) の組 $(1, 1), (1, 2), (2, 2)$ の 3 組について、それぞれ、7 個の未知数 $m_{ij}^{(1)} \sim m_{ij}^{(7)}$ からなるので、このままでは解が一意に定まらない。そこで、組ごとに $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を替えて $\hat{\mathbf{S}}^{(k)}$ を 7 回測定することで方程式を 7 個作り ($k = 1 \dots 7$),

それらを連立して解くことにする。すなわち、3 個の 7 元連立方程式を解くことになる。このとき、式 (10) の第 1 行目から、 S_{11}, S_{12}, S_{22} が、また、各組の第 2 行目、第 3 行目と第 6 行目から S_{33}, S_{44} と S_{34}^2 が重複して求まる。したがって、例えば、 (i, j) が (1,1) の連立方程式からだけ S_{33}, S_{44} と S_{34}^2 を求め、他の (1,2), (2,2) からは求めないように方程式を縮小することも可能である。このようにしても未知数の合計は 15 個であり、本来求める相反 4 ポート回路の独立な S パラメータ数 10 個より多い。このことは、線形方程式で求めるようにするために 5 個の中間変数を導入したと解釈できる。

2.4 非対角項符号の不確定性

式 (10) の第 4 行目から第 7 行目を (i, j) の各組ごとに展開して

$$m_{11}^{(4)} = S_{13}^2 - S_{11}S_{33} \quad (13)$$

$$m_{12}^{(4)} = S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33} \quad (14)$$

$$m_{22}^{(4)} = S_{23}^2 - S_{22}S_{33} \quad (15)$$

$$m_{11}^{(5)} = S_{14}^2 - S_{11}S_{44} \quad (16)$$

$$m_{12}^{(5)} = S_{14}S_{24} - S_{12}S_{44} \quad (17)$$

$$m_{22}^{(5)} = S_{24}^2 - S_{22}S_{44} \quad (18)$$

$$m_{11}^{(6)} = S_{34}^2 - S_{33}S_{44} \quad (19)$$

$$m_{12}^{(6)} = S_{34}S_{24} - S_{33}S_{44} \quad (20)$$

$$m_{22}^{(6)} = S_{24}^2 - S_{23}S_{44} \quad (21)$$

$$m_{11}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{11}S_{33}S_{44} + S_{13}S_{14}S_{34} + S_{13}S_{14}S_{34} \\ -S_{13}S_{13}S_{44} - S_{14}S_{14}S_{33} - S_{11}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$m_{12}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{12}S_{33}S_{44} + S_{13}S_{24}S_{34} + S_{23}S_{14}S_{34} \\ -S_{13}S_{23}S_{44} - S_{14}S_{24}S_{33} - S_{12}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$m_{22}^{(7)} = \begin{pmatrix} S_{22}S_{33}S_{44} + S_{23}S_{24}S_{34} + S_{23}S_{24}S_{34} \\ -S_{23}S_{23}S_{44} - S_{24}S_{24}S_{33} - S_{22}S_{34}^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

であるから、式 (13)(15)(16)(18) より $S_{13}^2, S_{14}^2, S_{23}^2, S_{24}^2$ が求まる。また、 S_{34}^2 が式 (19)(20)(21) から重複して求まる。これらの符号は不確定であるが、残りの式 (14)(17)(22)(23)(24) を満足しなければならない。調べてみると、結局符号の自由度は 2 で、 $\pm S_{12}$ と $\pm S_{13}$ の組み合わせ 4 通りを指定でき、これに応じて残りのパラメータの符号が決まることがわかる。

2.5 符号確定における対称性の利用

図 1 の 4 ポート回路が左右対称回路の場合、 $S_{12} = S_{34}, S_{14} = S_{23}$ なので、これらの条件を追加すると 4 ポート S パラメータの符号の組合せは 2 通りになる。また、上下に対称の場合も、 $S_{13} = S_{24}, S_{14} = S_{23}$ なので、これらの条件を追加して 4 ポート S パラメータの符号の組合せは 2 通りになる。

2.6 既知負荷の種類数

$\hat{S}^{(k)}$ を得るために必要な負荷 $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の種類は少ない方がよいと考えられるので、 (i, j) の各組ごとに 7 通りの $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせを作るための最小種類数を検討する。

まず、負荷が 2 種類 Z_1, Z_2 で、それぞれ 2 個ずつあるとすると、組み合わせは 4 通り (2^2) なので 7 通りにはならない。次

に、負荷が 3 種類 Z_1, Z_2, Z_3 で、それぞれ 2 個ずつあると、組み合わせは 9 通り (3^2) になり、7 通りを越える。したがって、同一の値を許すとき、負荷は最低 3 種類必要なことがわかる。これを表 2.6 に示す。

表 1 Z_1 を 2 個、 Z_2, Z_3 を 1 個ずつ用いた場合の $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせ例

k	$S_3^{(k)}$	$S_4^{(k)}$
1	Z_1	Z_1
2	Z_1	Z_2
3	Z_1	Z_3
4	Z_2	Z_1
5	Z_2	Z_3
6	Z_3	Z_1
7	Z_3	Z_2

2.7 既知負荷の条件

式 (9) で $m_{ij}^{(1)} \sim m_{ij}^{(7)}$ を求めるために、7 通りの負荷 $S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせを用意し、逐次つなぎかえながら \hat{S}_{ij} を測定することによって方程式を 7 個出し、その連立方程式を解くことによって $m_{ij}^{(1)} \sim m_{ij}^{(7)}$ を求める。見通しを良くするために、方程式を具体的に書くと

$$\mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{m}_{ij} = \mathbf{d}_{ij} \quad (25)$$

ただし

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & S_3^{(1)} \hat{S}_{ij}^{(1)} & S_4^{(1)} \hat{S}_{ij}^{(1)} & S_3^{(1)} & S_4^{(1)} & S_3^{(1)} S_4^{(1)} \hat{S}_{ij}^{(1)} & S_3^{(1)} S_4^{(1)} \\ 1 & S_3^{(2)} \hat{S}_{ij}^{(2)} & S_4^{(2)} \hat{S}_{ij}^{(2)} & S_3^{(2)} & S_4^{(2)} & S_3^{(2)} S_4^{(2)} \hat{S}_{ij}^{(2)} & S_3^{(2)} S_4^{(2)} \\ 1 & S_3^{(3)} \hat{S}_{ij}^{(3)} & S_4^{(3)} \hat{S}_{ij}^{(3)} & S_3^{(3)} & S_4^{(3)} & S_3^{(3)} S_4^{(3)} \hat{S}_{ij}^{(3)} & S_3^{(3)} S_4^{(3)} \\ 1 & S_3^{(4)} \hat{S}_{ij}^{(4)} & S_4^{(4)} \hat{S}_{ij}^{(4)} & S_3^{(4)} & S_4^{(4)} & S_3^{(4)} S_4^{(4)} \hat{S}_{ij}^{(4)} & S_3^{(4)} S_4^{(4)} \\ 1 & S_3^{(5)} \hat{S}_{ij}^{(5)} & S_4^{(5)} \hat{S}_{ij}^{(5)} & S_3^{(5)} & S_4^{(5)} & S_3^{(5)} S_4^{(5)} \hat{S}_{ij}^{(5)} & S_3^{(5)} S_4^{(5)} \\ 1 & S_3^{(6)} \hat{S}_{ij}^{(6)} & S_4^{(6)} \hat{S}_{ij}^{(6)} & S_3^{(6)} & S_4^{(6)} & S_3^{(6)} S_4^{(6)} \hat{S}_{ij}^{(6)} & S_3^{(6)} S_4^{(6)} \\ 1 & S_3^{(7)} \hat{S}_{ij}^{(7)} & S_4^{(7)} \hat{S}_{ij}^{(7)} & S_3^{(7)} & S_4^{(7)} & S_3^{(7)} S_4^{(7)} \hat{S}_{ij}^{(7)} & S_3^{(7)} S_4^{(7)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{d}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{ij}^{(1)} & \hat{S}_{ij}^{(2)} & \hat{S}_{ij}^{(3)} & \hat{S}_{ij}^{(4)} & \hat{S}_{ij}^{(5)} & \hat{S}_{ij}^{(6)} & \hat{S}_{ij}^{(7)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

である。ここで \mathbf{m}_{ij} が求まるための十分条件は、係数行列 \mathbf{G}_{ij} の行列式が 0 にならないように既知の負荷 S_L^k を選ぶことであるが、4 ポートの S パラメータも関係するので、あまり見通しがよくない。そこで、この行列式が 0 でない条件、すなわち、 \mathbf{G}_{ij} が一次独立である条件を既知の負荷の必要条件として挙げると

行独立より

(i) $\{S_3^{(k)}, S_4^{(k)}\}$ の組は、すべての k で他の組と同一であってはならない。

列独立より

(ii) $S_3^{(k)}$ と $S_4^{(k)}$ および $S_3^{(k)} \cdot S_4^{(k)}$ は、それぞれ、すべての k で同一であってはならない。

(iii) $\{S_3^{(k)}, S_4^{(k)}\}$ の組は、すべての k で $S_3^{(k)} = S_4^{(k)}$ であって

はならない。

が得られる。

3. 1 ポート測定による 4 ポート S パラメータ推定

3.1 推定式の導出

図 1 に示す相反 4 ポート回路においてポート 2, ポート 3, ポート 4 が測定器を直接接続できないポートとし, ポート 1 のみ測定器が直接接続可能とする。ポート 2, 3 および 4 に既知の負荷 $S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を接続すると

$$\mathbf{S}_L^{(k)} = \begin{bmatrix} S_2^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & S_3^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & S_4^{(k)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

であるから

$$\hat{\mathbf{S}}^{(k)} = \hat{\mathbf{S}}^{(k)} \quad (29)$$

と置いて式 (5) を $\hat{\mathbf{S}}$ の各要素ごとに分解し, 左辺に未知項, 右辺に既知項が配置されるように整理すると

$$\begin{bmatrix} 1 & S_2^{(k)} & S_3^{(k)} & S_4^{(k)} & S_2^{(k)} S_3^{(k)} & S_3^{(k)} S_4^{(k)} & S_4^{(k)} S_2^{(k)} \\ S_2^{(k)} S_3^{(k)} S_4^{(k)} & S_2^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_3^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_4^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_2^{(k)} S_3^{(k)} \hat{S}^{(k)} \\ S_3^{(k)} S_4^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_4^{(k)} S_2^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_2^{(k)} S_3^{(k)} \hat{S}^{(k)} & S_4^{(k)} \hat{S}^{(k)} \end{bmatrix} \mathbf{m} = \hat{\mathbf{S}}^{(k)} \quad (30)$$

ただし

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m^{(1)} \\ m^{(2)} \\ m^{(3)} \\ m^{(4)} \\ m^{(5)} \\ m^{(6)} \\ m^{(7)} \\ m^{(8)} \\ m^{(9)} \\ m^{(10)} \\ m^{(11)} \\ m^{(12)} \\ m^{(13)} \\ m^{(14)} \\ m^{(15)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12}^2 - S_{11} S_{22} \\ S_{13}^2 - S_{11} S_{33} \\ S_{14}^2 - S_{11} S_{44} \\ \left(S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{12}^2 S_{33} \right) \\ \left(-S_{13}^2 S_{22} + 2 S_{12} S_{13} S_{23} \right) \\ \left(S_{11} S_{33} S_{44} - S_{11} S_{34}^2 - S_{13}^2 S_{44} \right) \\ \left(-S_{14}^2 S_{33} + 2 S_{13} S_{14} S_{34} \right) \\ \left(S_{11} S_{22} S_{44} - S_{11} S_{24}^2 - S_{12}^2 S_{44} \right) \\ \left(-S_{14}^2 S_{22} + 2 S_{12} S_{14} S_{24} \right) \\ \left(S_{11} S_{22} S_{34} + S_{11} S_{23}^2 S_{44} \right) \\ \left(+S_{11} S_{24} S_{33} - S_{11} S_{22} S_{33} S_{44} \right) \\ \left(-2 S_{11} S_{23} S_{24} S_{34} + S_{12}^2 S_{33} S_{44} \right) \\ \left(-S_{12}^2 S_{34}^2 - 2 S_{12} S_{13} S_{23} S_{44} \right) \\ \left(+2 S_{12} S_{13} S_{24} S_{34} + 2 S_{12} S_{14} S_{23} S_{34} \right) \\ \left(-2 S_{12} S_{14} S_{24} S_{33} + S_{13}^2 S_{22} S_{44} \right) \\ \left(-S_{13}^2 S_{22} S_{44} - S_{13}^2 S_{24}^2 \right) \\ \left(-2 S_{13} S_{14} S_{22} S_{34} + 2 S_{13} S_{14} S_{23} S_{24} \right) \\ \left(+S_{14}^2 S_{22} S_{33} - S_{14}^2 S_{23}^2 \right) \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{44} \\ S_{23}^2 - S_{22} S_{33} \\ S_{34}^2 - S_{33} S_{44} \\ S_{24}^2 - S_{22} S_{44} \\ \left(S_{22} S_{33} S_{44} - S_{22} S_{34}^2 - S_{23}^2 S_{44} \right) \\ \left(-S_{24}^2 S_{33} + 2 S_{23} S_{24} S_{34} \right) \end{bmatrix} \quad (31)$$

が得られる。この式 (30)(31) が 1 ポート測定により 4 ポート回路の S パラメータを推定するための基本式である。

3.2 推定式の解法および既知負荷の種類数

式 (30) は, 1 つの線形な方程式と 15 個の未知数からなるので, このままでは解が一意に定まらない。そこで, ポート 2, 3 および 4 に接続する負荷インピーダンス $S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ を替えながら逐次測定し, $\hat{S}^{(k)}$ を 15 回測定することで方程式を 15 個出し, その連立方程式を解くことで \mathbf{m} を求める。また, 15 通りの既知の負荷 $S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせを作るためには, たとえば Z_1, Z_2 がそれぞれ 3 個ずつあると, 「場合」は 2^3 で 8 なので 15 にはならないが, Z_1, Z_2, Z_3 がそれぞれ 3 個ずつあると, 「場合」は 3^3 で 27 になり, 15 を越えるので, 負荷は 3 種類必要ということになる。ここで表 2 に, Z_1, Z_2 という負荷を 2 個ずつ, Z_3 という負荷を 1 個用いた場合の, 15 通りの $S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせの例を示す。

表 2 Z_1, Z_2 を 2 個ずつ, Z_3 を 1 個用いた場合の $S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, S_4^{(k)}$ の組み合わせ例

k	$S_2^{(k)}$	$S_3^{(k)}$	$S_4^{(k)}$
1	Z_1	Z_1	Z_2
2	Z_1	Z_1	Z_3
3	Z_1	Z_2	Z_1
4	Z_1	Z_2	Z_2
5	Z_1	Z_2	Z_3
6	Z_1	Z_3	Z_1
7	Z_1	Z_3	Z_2
8	Z_2	Z_1	Z_1
9	Z_2	Z_1	Z_2
10	Z_2	Z_1	Z_3
11	Z_2	Z_2	Z_1
12	Z_2	Z_2	Z_3
13	Z_2	Z_3	Z_1
14	Z_2	Z_3	Z_2
15	Z_3	Z_1	Z_1

3.3 S パラメータの導出手順

\mathbf{m} が求まったら, 式 (31) を用いて S パラメータを導出する。その手順を以下に示す。

- (1). 式 (31) の第 1, 9, 10, 11 行から $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}$ を求める。
- (2). 式 (31) の第 2, 3, 4, 12, 13, 14 行から $S_{12}^2, S_{13}^2, S_{14}^2, S_{23}^2, S_{34}^2, S_{24}^2$ を求める。
- (3). 2 乗が求まるパラメータの符号を式 (31) を全て満たすように決定する。

この場合も, いくつかの S パラメータの 2 乗が求まるので, 2 ポート測定と同様に 4 ポートの S パラメータは符号の不確定性がある。

4. 4 ポート回路の推定例

4.1 スルーを使用しない場合

4 ポート回路の推定例として図 2 の結合 2 本線路を考える。

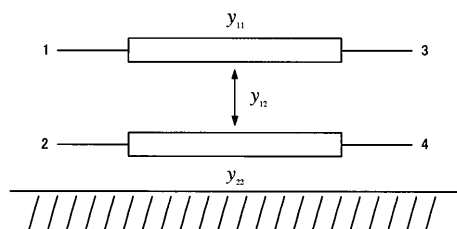


図 2 結合 2 本線路

ここで結合 2 本線路の Y パラメータは

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & -T\mathbf{y}_0 \\ -T\mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

ただし

$$t = j \tan \tau\omega, \quad T = \sqrt{1 - t^2} \quad (33)$$

で, S パラメータは

$$\mathbf{S} = (\mathbf{1} - \mathbf{y})^{-1} (\mathbf{1} + \mathbf{y}) \quad (34)$$

ただし

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y} \mathbf{R}_0^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

で求まる. 今, 特性アドミタンス行列 \mathbf{y}_0 と電気長 $\tau\omega$ および基準抵抗行列 \mathbf{R}_0 を

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} \\ -y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tau\omega = \frac{\pi}{3} \quad (37)$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

と与えると

$$S_{11} = 1.22 \times 10^{-2} + j8.93 \times 10^{-3} \quad (39)$$

$$S_{12} = 1.21 \times 10^{-1} + j6.41 \times 10^{-2} \quad (40)$$

$$S_{13} = 4.91 \times 10^{-1} - j8.60 \times 10^{-1} \quad (41)$$

$$S_{14} = 2.13 \times 10^{-2} - j1.35 \times 10^{-2} \quad (42)$$

$$S_{22} = -2.90 \times 10^{-1} - j1.51 \times 10^{-1} \quad (43)$$

$$S_{23} = S_{14} \quad (44)$$

$$S_{24} = 4.37 \times 10^{-1} - j8.26 \times 10^{-1} \quad (45)$$

$$S_{33} = S_{11} \quad (46)$$

$$S_{34} = S_{12} \quad (47)$$

$$S_{44} = S_{22} \quad (48)$$

が得られる. 前節の検討から, 7 通りの S_3, S_4 の組み合わせを作るには 3 種類の負荷を用意し, そのうち 1 種類を 2 個, その他の負荷を 1 個ずつ用いればよい. ここでは, 短絡を表す $S = -1$ の負荷を 2 個, 基準抵抗を表す $S = 0$ と開放を表す $S = 1$ の負荷をそれぞれ 1 個とし, 合計 4 個用いることにす

る. このとき, 式 (5) から 7 通りの $\hat{\mathbf{S}}_L$ を求めると以下のようになる.

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(1)} = \begin{bmatrix} 5.03 \times 10^{-1} + j8.51 \times 10^{-1} & 1.42 \times 10^{-1} - j5.05 \times 10^{-2} \\ 1.42 \times 10^{-1} - j5.05 \times 10^{-2} & 1.48 \times 10^{-1} + j9.77 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 5.13 \times 10^{-1} + j8.38 \times 10^{-1} & 1.22 \times 10^{-1} + j8.87 \times 10^{-2} \\ 1.22 \times 10^{-1} + j8.87 \times 10^{-2} & -2.90 \times 10^{-1} - j1.51 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(3)} = \begin{bmatrix} 5.15 \times 10^{-1} + j8.30 \times 10^{-1} & 1.39 \times 10^{-1} + j1.64 \times 10^{-1} \\ 1.39 \times 10^{-1} + j1.64 \times 10^{-1} & -7.33 \times 10^{-1} - j6.45 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.17 \times 10^{-2} + j9.63 \times 10^{-3} & 1.17 \times 10^{-1} + j9.63 \times 10^{-2} \\ 1.17 \times 10^{-1} + j9.63 \times 10^{-2} & 1.65 \times 10^{-1} + j9.63 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.23 \times 10^{-2} + j8.46 \times 10^{-3} & 1.17 \times 10^{-1} + j4.62 \times 10^{-2} \\ 1.17 \times 10^{-1} + j4.62 \times 10^{-2} & -7.30 \times 10^{-1} - j6.60 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(6)} = \begin{bmatrix} -5.07 \times 10^{-1} - j8.21 \times 10^{-1} & 9.53 \times 10^{-2} + j2.45 \times 10^{-1} \\ 9.53 \times 10^{-2} + j2.45 \times 10^{-1} & 1.82 \times 10^{-1} + j9.48 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^{(7)} = \begin{bmatrix} -4.85 \times 10^{-1} - j8.50 \times 10^{-1} & 1.20 \times 10^{-1} + j3.88 \times 10^{-2} \\ 1.20 \times 10^{-1} + j3.88 \times 10^{-2} & -2.89 \times 10^{-1} - j1.52 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

次に, これらの $\hat{\mathbf{S}}_L$ の値を測定値として元の S パラメータを推定すると, 式 (9)(10) から, $S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{33}$ と S_{44} が求まる. また,

$$S_{13}^2 = -4.99 \times 10^{-1} - j8.44 \times 10^{-1} \quad (56)$$

$$S_{14}^2 = 2.70 \times 10^{-4} - j5.77 \times 10^{-4} \quad (57)$$

$$S_{23}^2 = 2.70 \times 10^{-4} - j5.77 \times 10^{-4} \quad (58)$$

$$S_{24}^2 = -4.99 \times 10^{-1} - j8.44 \times 10^{-1} \quad (59)$$

$$S_{34}^2 = 1.05 \times 10^{-2} + j1.55 \times 10^{-2} \quad (60)$$

も求まる. よって

$$S_{13} = \pm (4.91 \times 10^{-1} - j8.60 \times 10^{-1}) \quad (61)$$

$$S_{14} = \pm (2.13 \times 10^{-2} - j1.35 \times 10^{-2}) \quad (62)$$

である. ここで S_{13}, S_{14} の符号を決めると, それに応じて S_{23}, S_{24}, S_{34} が定まる. すなわち, 4 通りの \mathbf{S} が求まる. この例では, S_{13}, S_{14} の複号でどちらも正をとると, S_{23}, S_{24}, S_{34} が当初の式 (44)(45)(47) と同じ値になるが, 他の符号の組み合わせでは異なった値になった.

4.2 スルーを追加する場合

既知の負荷としてスルーを追加することにより推定 S パラメータが一意に定まるかどうか検討する. 式 (4) で

$$\mathbf{S}_L^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

として要素ごとに分解し、左辺に未知項、右辺に既知項が配置されるように式変形すると

$$\begin{aligned} & 2(\hat{S}_{11}^{(k)} - S_{11})S_{34} + 2S_{13}S_{14} - 2S_{13}S_{14}S_{34} \\ &= \hat{S}_{11}^{(k)} + S_{34}^2\hat{S}_{11}^{(k)} - S_{33}S_{44}\hat{S}_{11}^{(k)} - S_{11} - S_{11}S_{34}^2 \\ &\quad - S_{13}^2S_{44} - S_{14}^2S_{33} + S_{11}S_{33}S_{44} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} & 2(\hat{S}_{12}^{(k)} - S_{12})S_{34} + S_{13}S_{24} + S_{14}S_{23} + S_{13}S_{23}S_{44} \\ &\quad - S_{13}S_{24}S_{34} - S_{14}S_{23}S_{34} + S_{14}S_{24}S_{33} \\ &= \hat{S}_{12}^{(k)} + S_{34}^2\hat{S}_{12}^{(k)} - S_{33}S_{44}\hat{S}_{12}^{(k)} - S_{12} - S_{12}S_{34}^2 \\ &\quad + S_{12}S_{33}S_{44} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & 2(\hat{S}_{22}^{(k)} - S_{22})S_{34} + 2S_{23}S_{24} - 2S_{23}S_{24}S_{34} \\ &= \hat{S}_{22}^{(k)} + S_{34}^2\hat{S}_{22}^{(k)} - S_{33}S_{44}\hat{S}_{22}^{(k)} - S_{22} - S_{22}S_{34}^2 \\ &\quad - S_{23}^2S_{44} - S_{24}^2S_{33} + S_{22}S_{33}S_{44} \end{aligned} \quad (66)$$

となる。これらの式をこれまでに導出した符号未知パラメータの符号決定条件式に加え、これまでに推定した4通りの $S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}$ の値をそれぞれ代入し、式(64)(65)(66)が成り立つかどうか調べると、式(64)(65)(66)を全て満たす $S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}$ の符号の組み合わせは2通りに縮小することがわかった。

5. 未知の負荷のSパラメータ S_c を求める数値例

今までに求まった結合2本線路のSパラメータを用いての未知の負荷のSパラメータを導出し、一意に定まるかどうか検討する。未知の負荷として図3のような回路を接続すると考える。ただし

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_a + y_b & -y_b \\ -y_b & y_c + y_b \end{bmatrix} \quad (67)$$

また

$$y_a = \frac{1}{2}, \quad y_b = 1, \quad y_c = \frac{1}{3} \quad (68)$$

である。式(67)を式(34)(35)(38)を用いてS行列へ変換すると

$$S_{c11} = -3.45 \times 10^{-2} \quad (69)$$

$$S_{c12} = 4.14 \times 10^{-1} \quad (70)$$

$$S_{c21} = S_{c12} \quad (71)$$

$$S_{c22} = -S_{c11} \quad (72)$$

となる。これを式(11)に用いて \hat{S}_C を求める。これを測定値として、4通りの推定Sパラメータについて、 $S_{c11}, S_{c12}, S_{c21}, S_{c22}$ を求めると、すべての場合の符号未知パラメータの符号の組み合わせにおいて、 $S_{c11}, S_{c12}, S_{c21}, S_{c22}$ は、元の値に一致した。

6. む す び

多ポート回路のいくつかのポートを既知の負荷で終端し、残りのポート間のSパラメータを測定して多ポート全体のSパラ

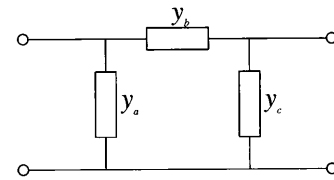


図3 想定したICの回路

メータを求める方法のうち、1ポートまたは2ポートのSパラメータを測定して4ポートSパラメータを推定する方法を検討した。また、このとき測定ポート以外を終端する既知の負荷の条件を示した。特に、2ポート測定4ポートSパラメータ推定について数値例を示した。その結果Sパラメータは4通り導出されることがわかった。また既知の負荷としてスルーを追加する場合、2通りまで絞ることができることがわかった。さらに、推定した回路のSパラメータを用いて未知の負荷のSパラメータを求める方法を検討した。その結果4通りの推定Sパラメータすべてにおいて未知の負荷のSパラメータが正しく求まることわかった。今後の課題としては、4ポートのSパラメータの符号が定まらなくても、未知の負荷のSパラメータが定まることを解析的に示すこと、および、既知の負荷のS行列が対角行列でない場合、すなわち、既知の負荷間に結合がある場合への方法の拡張が挙げられる。

文 献

- [1] 船戸是宏, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "グラウンド非共通回路におけるSパラメータの2ポート測定法," 信学技法, EMCJ2007-43, pp.1-6, Sept. 2007.
- [2] 新谷 亨, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "LSIパッケージの多ポートモデル化を目的とした参照グラウンドが不要な1エンドインピーダンス測定法の検討," 信学技法, EMCJ2007-44, pp.7-12, Sept. 2007.
- [3] 松田 昂, 和田修己, Umberto Paoletti, 久門尚史, "4ポート回路Sパラメータの片側2ポート測定法," 信学技法, EMCJ2008-31, pp.31-36, July. 2008.
- [4] 前田 登, 福井 伸治, 市川 浩司, 櫻井 礼彦, 関根 敏和, 高橋 康宏, "n-1ポート測定による相反nポート回路のSパラメータ推定," 信学論, vol.J96-C, no.12, pp.1-8, Dec. 2013.
- [5] 前田 登, 福井伸治, 直井 孝, 市川浩司, 関根敏和, 高橋康宏, "rポート測定による2rポートSパラメータの推定," 信学技法, EMCJ2013-107, pp.55-60, Dec. 2013.